

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/22（火）授業開始時

その際に自己採点も行う。

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問02-01 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\vec{a} - 3\vec{a}$
 (2) $(\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{a} + 2\vec{b})$
 (3) $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b})$
 (4) $-3(2\vec{a} - 3\vec{b}) + 4(-3\vec{a} + 2\vec{b})$
 (5) $\frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c})$

〔解答〕 (1) $-2\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $-\vec{a} + 8\vec{b}$ (4) $-18\vec{a} + 17\vec{b}$
 (5) $-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

(解説)

- (1) 与式 $= (1-3)\vec{a} = -2\vec{a}$
 (2) 与式 $= \vec{a} - \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b} = (1-1)\vec{a} + (-1+2)\vec{b} = \vec{b}$
 (3) 与式 $= 2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} = (2-3)\vec{a} + (2+6)\vec{b} = -\vec{a} + 8\vec{b}$
 (4) 与式 $= -6\vec{a} + 9\vec{b} - 12\vec{a} + 8\vec{b} = (-6-12)\vec{a} + (9+8)\vec{b} = -18\vec{a} + 17\vec{b}$
 (5) 与式 $= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\vec{c}$
 $= -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

問02-02 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

- (1) $2(\vec{a} - \vec{x}) = 3\vec{a} - 4\vec{b}$
 (2) $3(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{x}) = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{x}$

〔解答〕 (1) $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ (2) $\vec{x} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

(解説)

- (1) $2\vec{a} - 2\vec{x} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$
 よって $2\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{b}$
 ゆえに $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$
 (2) $6\vec{a} + 9\vec{b} - 3\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{x}$
 よって $6\vec{x} = 5\vec{a} + 8\vec{b}$
 ゆえに $\vec{x} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

問02-03 次の等式を同時に満たすベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{b} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} \end{cases}$

〔解答〕 (1) $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{y} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ (2) $\vec{x} = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$, $\vec{y} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

(解説)

- (1) $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ …… ①
 $\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}$ …… ② とする。
 ①+② から $3\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ よって $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
 このとき、① から $\vec{y} = \vec{a} - 2\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$
 (2) $2\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$ …… ①
 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ …… ② とする。
 ①+②×3 から $5\vec{x} = (\vec{a} + \vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b})$ すなわち $5\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$
 よって $\vec{x} = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$
 このとき、② から $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \left(\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\right) = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

問02-04 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-3, 2)$ のとき、次のベクトルを成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

ヒント→例1. 3 (教科書p.8)

- (1) $3\vec{a}$ (2) $-2\vec{a}$
 (3) $\vec{a} + \vec{b}$ (4) $\vec{b} - \vec{a}$
 (5) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ (6) $-3\vec{a} + 4\vec{b}$

(解説) 順に

- (1) $(3, -6)$, $3\sqrt{5}$ (2) $(-2, 4)$, $2\sqrt{5}$ (3) $(-2, 0)$, 2
 (4) $(-4, 4)$, $4\sqrt{2}$ (5) $(11, -10)$, $\sqrt{221}$ (6) $(-15, 14)$, $\sqrt{421}$

(解説)

- (1) $3\vec{a} = 3(1, -2) = (3, -6)$
 $|3\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$
 (2) $-2\vec{a} = -2(1, -2) = (-2, 4)$
 $|-2\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$
 (3) $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (-3, 2) = (-2, 0)$
 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$
 (4) $\vec{b} - \vec{a} = (-3, 2) - (1, -2) = (-3-1, 2-(-2)) = (-4, 4)$
 $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
 (5) $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, -2) - 3(-3, 2) = (2, -4) - (-9, 6) = (2-(-9), -4-6)$
 $= (11, -10)$
 $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{11^2 + (-10)^2} = \sqrt{221}$
 (6) $-3\vec{a} + 4\vec{b} = -3(1, -2) + 4(-3, 2) = (-3, 6) + (-12, 8) = (-3-12, 6+8)$
 $= (-15, 14)$
 $|-3\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{(-15)^2 + 14^2} = \sqrt{421}$

問02-05 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2)$ のとき、 $\vec{c} = (-6, 5)$ を $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ。

ヒント→例題1. 3 (教科書p.9)

〔解答〕 $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$

(解説)

- $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおくと $(-6, 5) = s(2, -1) + t(3, -2) = (2s+3t, -s-2t)$
 よって $2s+3t = -6$, $-s-2t = 5$
 これを解いて $s = 3$, $t = -4$ したがって $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$

問02-06 四つの点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(12, 5)$, $C(4, 4)$ について, 次のベクトルを成分で表せ。また, その大きさ (絶対値) を求めよ。ヒント→教科書p.9の下半分。

- (1) $\overrightarrow{OB}$ (2) $\overrightarrow{AB}$ (3) $\overrightarrow{BC}$
 (4) $\overrightarrow{AO}$

【解答】 順に

- (1) $(12, 5)$, 13 (2) $(10, 5)$, $5\sqrt{5}$ (3) $(-8, -1)$, $\sqrt{65}$
 (4) $(-2, 0)$, 2

【解説】

- (1) $\overrightarrow{OB} = (12, 5)$
 $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
 (2) $\overrightarrow{AB} = (12-2, 5-0) = (10, 5)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$
 (3) $\overrightarrow{BC} = (4-12, 4-5) = (-8, -1)$
 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$
 (4) $\overrightarrow{AO} = (0-2, 0-0) = (-2, 0)$
 $|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

問02-07 $\vec{a} = (5, -12)$ のとき, 次のベクトルを成分で表せ。ヒント→例題1. 4 (教科書p.10)

- (1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$
 (2) $\vec{a}$ と反対の向きで, 大きさが 3 のベクトル $\vec{b}$

【解答】 (1) $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ (2) $\left(-\frac{15}{13}, \frac{36}{13}\right)$

【解説】

- (1) $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$
 よって $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{13}(5, -12) = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$
 (2) $\vec{b} = -3\vec{e} = -3\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right) = \left(-\frac{15}{13}, \frac{36}{13}\right)$

出題者＝大石知広

締め切り＝2025/04/29（火）の授業開始時。世間様は祝日ですが、ウチは普通に授業をやります。

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問03-01 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、大きさとそれらのなす角 θ が、それぞれ次のように与えられたとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

- (1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\theta=45^\circ$
 (2) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\theta=120^\circ$

【解答】 (1) $\sqrt{2}$ (2) -4

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 1 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

問03-02 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ とし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の各場合について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

- (1) $\theta=30^\circ$ (2) $\theta=90^\circ$ (3) $\theta=135^\circ$

【解答】 (1) $6\sqrt{3}$ (2) 0 (3) $-6\sqrt{2}$

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$(3) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 135^\circ = 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6\sqrt{2}$$

問03-03 次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。ヒント＝教科書p.13のどこか。

- (1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=1$
 (2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=-6\sqrt{3}$

【解答】 (1) $\theta=60^\circ$ (2) $\theta=150^\circ$

解説

$$(1) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 60^\circ$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-6\sqrt{3}}{3 \times 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 150^\circ$$

問03-04 成分表示を利用した内積の計算。次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と、そのなす角 θ を求めよ。
ヒント＝教科書p.12のどこか&p.13のどこか。

- (1) $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(3, -6)$

$$(2) \vec{a}=(2, -3), \vec{b}=(-4, 6)$$

$$(3) \vec{a}=(1, 1), \vec{b}=(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$$

$$(4) \vec{a}=(-3, 1), \vec{b}=(3+\sqrt{3}, 3\sqrt{3}-1)$$

【解答】 順に

$$(1) 0, \theta=90^\circ \quad (2) -26, \theta=180^\circ \quad (3) 2, \theta=60^\circ \quad (4) -10, \theta=120^\circ$$

解説

$$(1) \text{ 内積は } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 1 \times (-6) = 0$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ$$

$$(2) \text{ 内積は } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-4) + (-3) \times 6 = -26$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-26}{\sqrt{13} \times 2\sqrt{13}} = -1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 180^\circ$$

$$(3) \text{ 内積は } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (1-\sqrt{3}) + 1 \times (1+\sqrt{3}) = 2$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 60^\circ$$

$$(4) \text{ 内積は } \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \times (3+\sqrt{3}) + 1 \times (3\sqrt{3}-1) = -10$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{12+6\sqrt{3}+28-6\sqrt{3}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{10}} = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 120^\circ$$

問03-05 次の等式を証明せよ。

- (1) $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}+2\vec{b}) = |\vec{p}|^2 - (\vec{a}-2\vec{b}) \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 (2) $(3\vec{a}+4\vec{b}) \cdot (3\vec{a}-4\vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 - 16|\vec{b}|^2$

【解答】 (1) 略 (2) 略

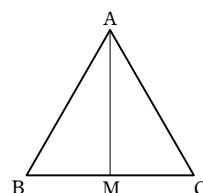
解説

$$(1) \text{ (左辺)} = \vec{p} \cdot (\vec{p}+2\vec{b}) - \vec{a} \cdot (\vec{p}+2\vec{b}) = \vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot 2\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot 2\vec{b} \\ = \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{b} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{p}|^2 - (\vec{a}-2\vec{b}) \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{(右辺)}$$

$$(2) \text{ (左辺)} = 3\vec{a} \cdot (3\vec{a}-4\vec{b}) + 4\vec{b} \cdot (3\vec{a}-4\vec{b}) \\ = 9\vec{a} \cdot \vec{a} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 16\vec{b} \cdot \vec{b} \\ = 9|\vec{a}|^2 - 16|\vec{b}|^2 = \text{(右辺)}$$

問03-06 1辺の長さが2である正三角形ABCの辺BCの中点をMとする。次の内積を求めよ。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ (2) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$
 (3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB}$



ヒント①＝素直に各辺の長さと内積角 θ の値を求めて、内積の定義式通りに計算する。

ヒント②＝別の解き方として、点Mを原点に置いたxy平面を考え、点A、点B、点Cそれぞれの(x, y)の値を求めてみよ。そうすれば、前回習った内容から、各点を結ぶベクトルの成分が求まるので、成分表示による計算が行える。

もちろん他の方法で解いても良い。

【解答】 (1) 3 (2) 0 (3) 2 (4) -1

解説

$$|\overrightarrow{AM}| = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AM}$ のなす角は 30°

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AM}| \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{AM}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 90°

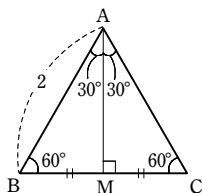
$$\text{よって } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

(3) $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 60°

$$\text{よって } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

(4) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{MB}$ のなす角は $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\text{よって } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{MB}| \cos 120^\circ = 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$



おまけ課題03-X ※解答は必須ではない。

これまで（第01～03週）に「平面ベクトルの演算」「ベクトルの成分表示」「ベクトルの内積」について学習した。ここまでに習った内容を活かして、自分なりに問題を作問してみよ。ただし以下の条件を満たすこと。

- (1) 解答時間は最大20分を目安とする。
- (2) 答えが数学的に矛盾無く決まること。
- (3) 学習した内容の一部と、よく関連した問題であること。

なお、良問は中間または期末テストに採用される可能性がある。つまり、自分の作った問題が採用されれば、少なくとも自分は確実に（以下略）。

解説

演習問題 [2025/04/29] 解析学 (3-I)

- 締め切り = 2025/05/13 (火) 授業開始時。GW 課題もあるため、今回は書き写しのみとします。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 04-01

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int [\alpha \sin mx + \beta \cos nx] dx &= \alpha \frac{(-) \cos mx}{m} + \beta \frac{\sin nx}{n} + C \\ \int e^{-k(x+\alpha)} dx &= \frac{e^{-k(x+\alpha)}}{(-k)} + C \\ \int \log(x + \alpha) dx &= (x + \alpha) \log(x + \alpha) - x + C\end{aligned}\quad (1)$$

問 04-02

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int g'(x)f(x)dx &= g(x)f(x) - \int g(x)f'(x)dx \\ \int f(x)dx &= \int (x + \alpha)'f(x)dx = (x + \alpha)f(x) - \int (x + \alpha)f'(x)dx\end{aligned}\quad (2)$$

問 04-03

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= (-) \int_b^a f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx\end{aligned}\quad (3)$$

問 04-04

以下の公式を 5 回書き写せ。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s)ds = f(x) \quad (4)$$

演習問題 [2025/04/29] 代数・幾何 (2-4)

- 締め切り = 2025/05/13 (火) 授業開始時。GW 課題もあるため、今回は書き写しのみとします。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 04-01

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}k\vec{a} &= (ka_1, ka_2) \\ \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2) \\ \left| \vec{a} + \vec{b} \right| &= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}\end{aligned}\tag{5}$$

問 04-02

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{6}$$

問 04-03

以下の公式セットを 5 回書き写せ。なお記号 $\times$ は「ベクトルの外積」を表すものであるが、現時点ではその意味は気にしないで良い。

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \times \vec{a} &= (-)\vec{a} \times \vec{b}\end{aligned}\tag{7}$$

出題者=大石知広

締め切り=2025/05/20 (火) の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

(解説)

(青字解説)

問05-01 (ベクトルの平行条件の応用) 3つの点 $A=(2, x)$, $B=(-2x, 5)$, $C=(6, 0)$ が一直線上にあるように, x の値を定めよ。

(解説)

$A(2, x)$, $B(-2x, 5)$, $C(6, 0)$ とする。

3点 A, B, C が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k が存在する。

ここで $\overrightarrow{AB}=(-2x-2, 5-x)$

$\overrightarrow{AC}=(4, -x)$

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ から $(-2x-2, 5-x)=k(4, -x)$

よって $-2x-2=4k$ …… ①

$5-x=-kx$ …… ②

① から $k=-\frac{x+1}{2}$

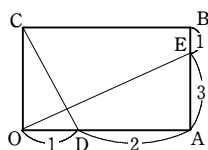
これを②に代入して整理すると $x^2+3x-10=0$

これを解いて $x=-5, 2$

問05-02 (ベクトルの垂直条件の応用)

$OA=3$, $OC=2$ である長方形 $OABC$ がある。辺 OA を $1:2$ に内分する点を D , 辺 AB を $3:1$ に内分する点を E とするとき, $CD \perp OE$ であることを証明せよ。

ヒント: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ と置いて、内分点のベクトルを求めてみよ。



(解説)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ から $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

これと $|\vec{a}|=3$, $|\vec{c}|=2$ から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{3}{4}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 3^2 - \frac{3}{4} \times 0 - \frac{3}{4} \times 2^2 = 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OE} \neq \vec{0}$ であるから $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{OE}$

したがって $CD \perp OE$

問05-03 次の点 A を通り, $\vec{d}$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を, 媒介変数 t を用いて求めよ。また, t を消去した式で表せ。

(1) $A(0, 1)$, $\vec{d}=(1, -2)$

(2) $A(2, -1)$, $\vec{d}=(-1, 2)$

(解説)

O を原点, 直線上の任意の点を $P(x, y)$ とし, t を実数とする。

(1) ベクトル方程式は $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

よって $(x, y)=(0, 1)+t(1, -2)=(t, 1-2t)$

すなわち $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \end{cases}$ t を消去すると $y=1-2x$

(2) ベクトル方程式は $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

よって $(x, y)=(2, -1)+t(-1, 2)=(2-t, -1+2t)$

すなわち $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \end{cases}$ t を消去すると $y=-2x+3$

問05-04 次の2点を通る直線の媒介変数表示を, 媒介変数 t を用いて求めよ。また, t を消去した式で表せ。

(1) $A(1, 3)$, $B(2, 2)$

(2) $A(2, 4)$, $B(1, -1)$

(解説)

O を原点, 直線 AB 上の任意の点を $P(x, y)$ とし, t を実数とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=(2-1, 2-3)=(1, -1)$

直線 AB のベクトル方程式は $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

よって $(x, y)=(1, 3)+t(1, -1)=(1+t, 3-t)$

すなわち $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \end{cases}$ t を消去すると $y=-x+4$

(2) $\overrightarrow{AB}=(1-2, -1-4)=(-1, -5)$

直線 AB のベクトル方程式は $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

よって $(x, y)=(2, 4)+t(-1, -5)=(2-t, 4-5t)$

すなわち $\begin{cases} x=2-t \\ y=4-5t \end{cases}$ t を消去すると $y=5x-6$

問05-05 次の直線の法線ベクトルを1つ示せ。

(1) $2x+5y-6=0$

(2) $y=3x+4$

(解説)

(1) $(2, 5)$

(2) 方程式を変形すると $3x-y+4=0$

よって, この直線の法線ベクトルの1つは $(3, -1)$

問05-06 以下の点 A を通り, $\vec{n}$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(1) $A(3, 2)$, $\vec{n}=(4, 5)$

(2) $A(3, -2)$, $\vec{n}=(-4, 1)$

(3) $A(2, -1)$, $\vec{n}=(-1, 0)$

(解説)

直線上の任意の点を $P(x, y)$ とする。

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ または $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}=0$ …… ①

(1) $\vec{n}=(4, 5)$, $\overrightarrow{AP}=(x-3, y-2)$ であるから, ①より $4 \times (x-3) + 5 \times (y-2) = 0$

すなわち $4x+5y-22=0$

(2) $\vec{n}=(-4, 1)$, $\overrightarrow{AP}=(x-3, y+2)$ であるから, ①より

$$-4 \times (x-3) + 1 \times (y+2) = 0$$

すなわち $4x-y-14=0$

(3) $\vec{n}=(-1, 0)$, $\overrightarrow{AP}=(x-2, y+1)$ であるから, ①より

$$-1 \times (x-2) + 0 \times (y+1) = 0$$

すなわち $x=2$

出題者=大石知広

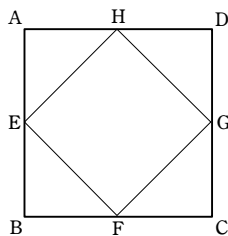
締め切り=2025/05/27 (火) の授業開始時。解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。ページ数の制限はない。

中間試験の範囲の内容は先週までにすべて履修しているので、今回は復習問題になります。

(解説)

(青字解説)

問06-01 右の図のように、正方形 ABCD の各辺の中点を E, F, G, H とする。点 A, B, …… , H を始点ないし終点とする有向線分が表すベクトルのうち、次のベクトルと等しいベクトルをすべてあげよ。ただし、与えられたベクトルは除くものとする。



- (1) $\overrightarrow{AE}$ (2) $\overrightarrow{EH}$ (3) $\overrightarrow{CF}$

(解説)

- (1) $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{GC}$
 (2) $\overrightarrow{FG}$
 (3) $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{HA}$

問06-02 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と、そのなす角 θ を求めよ。

- (1) $\vec{a}=(\sqrt{3}, 3)$, $\vec{b}=(3, \sqrt{3})$
 (2) $\vec{a}=(3, 6)$, $\vec{b}=(2, -6)$
 (3) $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(3, -6)$
 (4) $\vec{a}=(1, 1)$, $\vec{b}=(-1, 2+\sqrt{3})$

(解説)

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times 3 + 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 30^\circ$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + 6 \times (-6) = -30$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{-30}{3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 135^\circ$$

$$(3) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 1 \times (-6) = 0 \quad \text{よって} \quad \theta = 90^\circ$$

$$(4) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 1 \times (2 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{(6+2) + 2\sqrt{6 \cdot 2}}$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 60^\circ$$

問06-03 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直となるように、 k の値を定めよ。

- (1) $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(k, 2)$
 (2) $\vec{a}=(k, k+2)$, $\vec{b}=(2, -1)$
 (3) $\vec{a}=(3, k)$, $\vec{b}=(2, -k)$

(解説)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ から} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(1) (-1) \times k + 2 \times 2 = 0 \quad \text{よって} \quad k = 4$$

$$(2) k \times 2 + (k+2) \times (-1) = 0 \quad \text{よって} \quad k = 2$$

$$(3) 3 \times 2 + k \times (-k) = 0 \quad \text{よって} \quad 6 - k^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \pm\sqrt{6}$$

問06-04 次の点 A を通り、 $\vec{d}$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、 t を消去した式で表せ。

- (1) A (3, 5), $\vec{d}=(1, 2)$
 (2) A (4, -2), $\vec{d}=(2, -1)$
 (3) A (0, 2), $\vec{d}=(3, 1)$

(解説)

$$(1) (x, y) = (3, 5) + t(1, 2) \text{ から} \quad \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して } x - 3 = \frac{y - 5}{2} \text{ から} \quad 2(x - 3) = y - 5$$

$$\text{よって} \quad 2x - y - 1 = 0$$

$$(2) (x, y) = (4, -2) + t(2, -1) \text{ から} \quad \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して } \frac{x - 4}{2} = -y - 2 \text{ から} \quad x - 4 = 2(-y - 2)$$

$$\text{よって} \quad x + 2y = 0$$

$$(3) (x, y) = (0, 2) + t(3, 1) \text{ から} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して } \frac{x}{3} = y - 2 \text{ から} \quad x = 3(y - 2)$$

$$\text{よって} \quad x - 3y + 6 = 0$$

問06-05 次の直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、 t を消去した式で表せ。

- (1) 点 A (4, -2) を通り、ベクトル $\vec{d}=(2, -1)$ に平行な直線
 (2) 2点 A (1, 3), B (2, 4) を通る直線
 (3) 2点 A (-1, 0), B (0, -2) を通る直線

(解説)

$$(1) (x, y) = (4, -2) + t(2, -1) \text{ から} \quad \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して} \quad x + 2y = 0$$

$$(2) \quad (x, y) = (1-t)(1, 3) + t(2, 4) \text{ から } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して } x - y + 2 = 0$$

$$(3) \quad (x, y) = (1-t)(-1, 0) + t(0, -2) \text{ から } \begin{cases} x = -1+t \\ y = -2t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去して } 2x + y + 2 = 0$$

問06-06 点 A (3, 2) を通り、ベクトル $\vec{n} = (4, 5)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

解説

直線上の点を P とすると、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ または $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

P (x, y) とすると、 $\overrightarrow{AP} = (x-3, y-2)$ であるから $4(x-3) + 5(y-2) = 0$

すなわち $4x + 5y - 22 = 0$

問06-07 点 A (1, 2) を通り、ベクトル $\vec{n} = (3, -5)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

解説

直線上の点を P とすると、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ または $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

P (x, y) とすると、 $\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2)$ であるから $3(x-1) - 5(y-2) = 0$

すなわち $3x - 5y + 7 = 0$

出題者＝大石知広

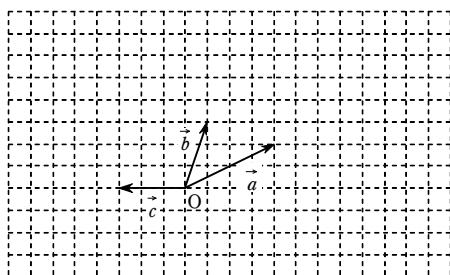
- 締め切り＝無し。提出の必要も無し。
- 中間試験直前の演習になります。提出は不要ですが、各自で取り組んで、試験対策を十分に行ってください。過去に配布した演習課題も活用してください。
- 自己採点用の解答は後日電子メールにて配布します。

(解説)

(青字解説)

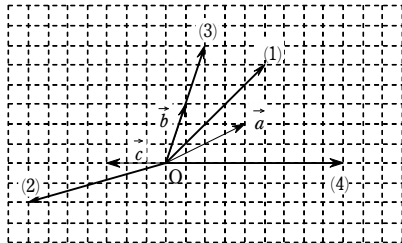
問07-01 下の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について、次のベクトルを矢印 (有向線分) で描き表せ。始点は自由に選んでよい。

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{c} - \vec{a}$ (3) $2\vec{b}$ (4) $-3\vec{c}$
 (5) $\frac{2}{3}\vec{c}$ (6) $-\frac{1}{2}\vec{a}$ (7) $2\vec{b} + \vec{c}$ (8) $2\vec{b} - 3\vec{c}$

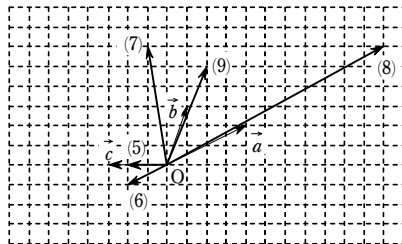


(解説)

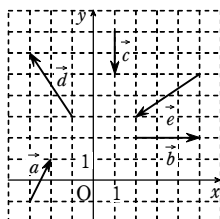
(1) ~ (4)



(5) ~ (9)



問07-02 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めよ。ただし方眼紙の目盛りひとつの大きさを1とする。



(解説)

$$\vec{a} = (1, 2), |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{b} = (3, 0), |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

$$\vec{c} = (0, -2), |\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\vec{d} = (-2, 3), |\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{e} = (-3, -2), |\vec{e}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

問07-03 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値とその最小値を求めよ。ヒント: 先に内積の値を計算しておくとうい。

(解説)

$$|\vec{a}-\vec{b}|=3 \text{ から } |\vec{a}-\vec{b}|^2=9$$

$$\text{よって } |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4 \text{ を代入して } 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 = 9$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = 8$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } |\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 3^2 + 2t \times 8 + t^2 \times 4^2 \\ &= 16t^2 + 16t + 9 = 16\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 5 \end{aligned}$$

よって, $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t = -\frac{1}{2}$ で最小値5をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}| \geq 0$ であるから, このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t = -\frac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

問07-04 次の2つのベクトルが垂直になるように, x の値を定めよ。

$$(1) \vec{a} = (4, -1), \vec{b} = (x, 2)$$

$$(2) \vec{a} = (x, x-3), \vec{b} = (x-7, 2)$$

(解説)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のときである。

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times x + (-1) \times 2 = 4x - 2$$

$$\text{よって, } 4x - 2 = 0 \text{ より } x = \frac{1}{2}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = x \times (x-7) + (x-3) \times 2 = x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$$

$$\text{よって, } (x+1)(x-6) = 0 \text{ より } x = -1, 6$$

問07-05 次の点 A を通り, $\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示を, 媒介変数を t として求めよ。また, t を消去した式で表せ。

$$(1) A(0, 1), \vec{d} = (1, -2)$$

$$(2) A(2, -1), \vec{d} = (-3, 2)$$

(解説)

$$(1) \text{ 求める直線の媒介変数表示は } (x, y) = (0, 1) + t(1, -2)$$

$$\text{すなわち } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去すると } y = 1 - 2x \text{ よって } 2x + y - 1 = 0$$

$$(2) \text{ 求める直線の媒介変数表示は } (x, y) = (2, -1) + t(-3, 2)$$

$$\text{すなわち } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

$$t \text{ を消去すると } y = -1 + 2 \times \frac{2-x}{3} \text{ よって } 2x + 3y - 1 = 0$$

問07-06 次の点 A を通り、 $\vec{n}$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(1) A (1, 2), $\vec{n} = (1, -2)$

(2) A (3, -1), $\vec{n} = \overrightarrow{OA}$, O は原点

解説

直線上の任意の点を P(x, y) とする。

(1) $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ …… ①

$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2)$ であるから、① より $1 \times (x-1) + (-2) \times (y-2) = 0$
よって $x - 2y + 3 = 0$

(2) $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ …… ①

$\overrightarrow{AP} = (x-3, y+1)$ であるから、① より $3 \times (x-3) + (-1) \times (y+1) = 0$
よって $3x - y - 10 = 0$

問07-07 2点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB について、次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) 3 : 5 に内分する点

(2) 中点

(3) 3 : 5 に外分する点

(4) 5 : 3 に外分する点

解説

(1) $\frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{3+5} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$

(2) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(3) $\frac{-5\vec{a} + 3\vec{b}}{3-5} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$

(4) $\frac{-3\vec{a} + 5\vec{b}}{5-3} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}$

問07-08 $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB を 1 : 3 に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ であることを証明せよ。

解説

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると $\overrightarrow{AD} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{1+3} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4}$
 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}$
 $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4} + \left(\frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}\right) + \left(\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{(3\vec{b} + \vec{c}) + (3\vec{c} - 4\vec{b}) + (\vec{b} - 4\vec{c})}{4} = \vec{0} \end{aligned}$$

別解 A, B, C, D, E, F の位置ベクトルを、それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ とすると

$$\vec{d} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{1+3} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4}$$

$$\vec{e} = \frac{3\vec{c} + \vec{a}}{1+3} = \frac{3\vec{c} + \vec{a}}{4}$$

$$\vec{f} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= (\vec{d} - \vec{a}) + (\vec{e} - \vec{b}) + (\vec{f} - \vec{c}) = \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4} + \frac{3\vec{c} + \vec{a}}{4} + \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \end{aligned}$$

問07-09 $\triangle ABC$ において、
辺 BC を 2 : 1 に外分する点を P,
辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q,
辺 CA の中点を R とする。

(1) 3点 P, Q, R は一直線上にある

ことを証明せよ。

ヒント: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ として、ベクトルの平行条件を利用する。

(2) QR : QP を求めよ。

解説

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2-1} = -\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

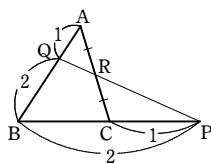
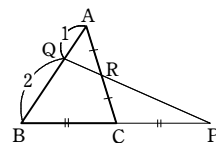
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = (-\vec{b} + 2\vec{c}) - \frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$= 4\left(-\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

ゆえに $\overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{QR}$ …… ①

したがって、3点 P, Q, R は一直線上にある。

(2) ① から $QR : QP = 1 : 4$



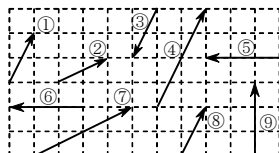
出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/06/24]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

(解説)

(青字解説文)

問10-01 右の図において、ベクトル①と一次従属の関係にあるベクトルをすべて挙げよ。



(解説)

③と④と⑧

③は①と (-1) 倍、④は①と2倍異なるが、互いに平行なので、一次従属である。⑧は①に等しく、やはり一次従属である。

問10-02 次の円の方程式を、ベクトル方程式を利用して求めよ。

- (1) 点 $O(0, 0)$ が中心で、半径 2 の円
- (2) 点 $C(3, 2)$ が中心で、点 $A(1, 1)$ を通る円
ヒント：円上の任意の点を $P(x, y)$ とすると、この円を表すベクトル方程式は $|\overrightarrow{CP}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2$ で与えられる。

(解説)

円上の任意の点を $P(x, y)$ とする。

- (1) ベクトル方程式は $|\overrightarrow{OP}| = 2$

$$\text{よって } |\overrightarrow{OP}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに } x^2 + y^2 = 4$$

- (2) ベクトル方程式は $|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CA}|$

$$\text{よって } |\overrightarrow{CP}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{CP} = (x-3, y-2), \overrightarrow{CA} = (-2, -1) \text{ であるから, ① より}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (-2)^2 + (-1)^2$$

$$\text{すなわち } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

問10-03 次の2点間の距離を求めよ。距離とは2点を結ぶ3次元ベクトルの大きさ(絶対値)に等しい。

- (1) $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 4)$
- (2) $A(5, -1, -3)$, $B(-2, 0, -1)$

(解説)

$$(1) OA = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$(2) AB = \sqrt{(-2-5)^2 + [0-(-1)]^2 + [-1-(-3)]^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

問10-04 点 $P(2, 7, -1)$ から、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面に下ろした垂線をそれぞれ PL , PM , PN とするとき、3点 L , M , N の座標を求めよ。

(解説)

$$L(2, 7, 0), M(0, 7, -1), N(2, 0, -1)$$

問10-05 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, -2)$ のとき、次のベクトルを成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

- (1) $2\vec{a}$
- (2) $3\vec{b}$
- (3) $-\vec{a}$
- (4) $-4\vec{b}$
- (5) $\vec{a} + \vec{b}$
- (6) $\vec{b} - \vec{a}$
- (7) $2\vec{a} + 3\vec{b}$
- (8) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$
- (9) $-2\vec{a} - (\vec{c} - 4\vec{b})$

(解説)

$$(1) 2\vec{a} = 2(1, -1, 2) = (2, -2, 4)$$

$$|2\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

$$(2) 3\vec{b} = 3(0, 2, 1) = (0, 6, 3)$$

$$|3\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$(3) -\vec{a} = -(1, -1, 2) = (-1, 1, -2)$$

$$|-\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$(4) -4\vec{b} = -4(0, 2, 1) = (0, -8, -4)$$

$$|-4\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$(5) \vec{a} + \vec{b} = (1, -1, 2) + (0, 2, 1) = (1, 1, 3)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$(6) \vec{b} - \vec{a} = (0, 2, 1) - (1, -1, 2) = (-1, 3, -1)$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$(7) 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1, -1, 2) + 3(0, 2, 1) = (2, -2, 4) + (0, 6, 3)$$

$$= (2, 4, 7)$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{69}$$

$$(8) 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 2(1, -1, 2) - 3(0, 2, 1) + (2, -1, -2)$$

$$= (2, -2, 4) - (0, 6, 3) + (2, -1, -2) = (4, -9, -1)$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-9)^2 + (-1)^2} = 7\sqrt{2}$$

$$(9) -2\vec{a} - (\vec{c} - 4\vec{b}) = -2\vec{a} - \vec{c} + 4\vec{b} = -2(1, -1, 2) - (2, -1, -2) + 4(0, 2, 1)$$

$$= (-2, 2, -4) - (2, -1, -2) + (0, 8, 4) = (-4, 11, 2)$$

$$|-2\vec{a} - (\vec{c} - 4\vec{b})| = \sqrt{(-4)^2 + 11^2 + 2^2} = \sqrt{141}$$

問10-06 $\vec{a} = (3, y, z)$, $\vec{b} = (x, 1, -1)$ のとき、 $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ が成り立つように、 x, y, z の値を定めよ。

(解説)

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(3, y, z) - (x, 1, -1) = (6-x, 2y-1, 2z+1)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \text{ とすると } (6-x, 2y-1, 2z+1) = (0, 0, 0)$$

$$\text{よって } 6-x=0, 2y-1=0, 2z+1=0$$

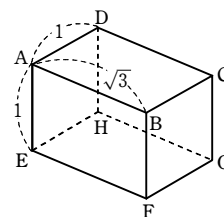
$$\text{ゆえに } x=6, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$$

問10-07 右の図のような $AD=AE=1$,

$AB=\sqrt{3}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ において、次の内積を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(3) \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} \quad (4) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GE}$$



(解説)

$$(1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ であるから, } \overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{DC} \text{ のなす角は } 0^\circ$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{DC}| \cos 0^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 1 = 3$$

$$(2) \text{三平方の定理から } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{また, } \angle CAB = 30^\circ \text{ であるから, } \overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{AC} \text{ のなす角は } 30^\circ$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(3) $\overrightarrow{AE}$ は平面 $ABCD$ に垂直であるから、 $\overrightarrow{DB}$ と垂直である。

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$(4) \quad |\overrightarrow{GE}| = |\overrightarrow{CA}| = 2$$

$$\text{また, } \overrightarrow{AD} \text{ と } \overrightarrow{GE} \text{ のなす角は } 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GE} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{GE}| \cos 120^\circ = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問10-08 次の $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と、そのなす角 θ を求めよ。

$$(1) \quad \vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (1, 2, -2)$$

$$(2) \quad \vec{a} = (3, 5, 2), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2)$$

$$(3) \quad \vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{b} = (1, \sqrt{6}, -1)$$

解説

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times (-2) = 3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times (-3) + 5 \times 1 + 2 \times 2 = 0$$

$$\text{よって } \cos \theta = 0 \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ$$

$$(3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + (-1) \times \sqrt{6} + 1 \times (-1) = -\sqrt{6}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 120^\circ$$

出題者＝大石知広

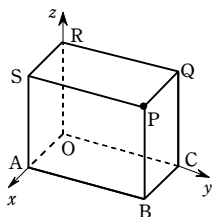
- 締め切り＝[2025/07/01]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

(解説)

(解説文)

問11-01 点 $P(2, 4, 3)$ である右の図のような直方体 $OABC-RSPQ$ を考える。

- (1) この直方体の各頂点の座標を求めよ。尚、点 O の座標は $O(0, 0, 0)$ である。
- (2) 次の2直線のなす角を求めよ。単位は弧度法で表すこと。
 - (ア) SR, PB
 - (イ) SR, BC
 - (ウ) PB, AC



(解説)

- (1) O の座標は $(0, 0, 0)$

A は x 軸上にあるから、 A の y 座標と z 座標は 0

x 座標は、点 P の x 座標と等しいから 2 よって A

- (2, 0, 0)

B は xy 平面上にあるから z 座標は 0

x 座標、 y 座標は点 P の x 座標、 y 座標と等しいから

$x=2, y=4$

よって $B(2, 4, 0)$

以下同様にして

C の座標は $(0, 4, 0)$,

R の座標は $(0, 0, 3)$,

S の座標は $(2, 0, 3)$,

Q の座標は $(0, 4, 3)$

- (2) (ア) $SR \parallel PQ, PQ \perp PB$

よって $SR \perp PB$

したがって、2直線のなす角は $\frac{\pi}{2}$

- (イ) $SR \parallel PQ, PQ \parallel BC$

よって $SR \parallel BC$

したがって、2直線のなす角は 0

- (ウ) PB は平面 $OABC$ と垂直である。

ゆえに、平面 $OABC$ 上の任意の直線と PB は垂直である。

よって $PB \perp AC$

したがって、2直線のなす角は $\frac{\pi}{2}$

問11-02 以下の各問いに答えよ。

- (1) 2点 $A(-1, 2, -3)$, $B(2, 3, 4)$ から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

ヒント： P は y 軸上にあるから、その座標を $P(0, y, 0)$ とおく。 $AP = BP$ から $AP^2 = BP^2$ が成り立つ。

- (2) 3点 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, -1)$, $C(-1, 1, 2)$ から等距離にある zx 平面上的点 P の座標を求めよ。

ヒント： P は zx 平面上にあるから、その座標を $P(x, 0, z)$ とおく。

$AP = BP$ から $AP^2 = BP^2$ および $AP = CP$ から $AP^2 = CP^2$ が成り立つ。

(解説)

- (1) P は y 軸上にあるから、その座標を $(0, y, 0)$ とおく。

$AP = BP$ から $AP^2 = BP^2$

ゆえに

$$\{0 - (-1)\}^2 + \{y - 2\}^2 + \{0 - (-3)\}^2 = \{0 - 2\}^2 + \{y - 3\}^2 + \{0 - 4\}^2$$

これを解いて $y = \frac{15}{2}$

よって、点 P の座標は $(0, \frac{15}{2}, 0)$

- (2) P は zx 平面上にあるから、その座標を $(x, 0, z)$ とおく。

$AP = BP$ から $AP^2 = BP^2$

ゆえに $(x-1)^2 + (-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (-2)^2 + (z+1)^2$

すなわち $x - 2z = 0$ …… ①

$AP = CP$ から $AP^2 = CP^2$

ゆえに $(x-1)^2 + (-2)^2 + (z-3)^2 = (x+1)^2 + (-1)^2 + (z-2)^2$

すなわち $2x + z = 4$ …… ②

①, ② を解いて $x = \frac{8}{5}, z = \frac{4}{5}$

よって、点 P の座標は $(\frac{8}{5}, 0, \frac{4}{5})$

問11-03 $\vec{a} = (0, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$ とする。 $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ (t は実数) について、 $|\vec{x}|$ の最小値を求めよ。またそのときの $\vec{x}$ を成分で表せ。

(解説)

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b} = (0, 1, 2) + t(2, 4, 6) = (2t, 1+4t, 2+6t)$$

よって $|\vec{x}|^2 = (2t)^2 + (1+4t)^2 + (2+6t)^2 = 56t^2 + 32t + 5$

$$= 56\left(t + \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}$$

ゆえに、 $|\vec{x}|^2$ は $t = -\frac{2}{7}$ のとき最小値 $\frac{3}{7}$ をとる。

$|\vec{x}| \geq 0$ であるから、このとき $|\vec{x}|$ も最小となる。

よって、 $|\vec{x}|$ は $t = -\frac{2}{7}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ をとる。

このとき $\vec{x} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$

問11-04 $\vec{a} = (1, -1, -3)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -1, 0)$ とする。 $|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|$ を最小にする実数 x, y の値を求めよ。ヒント：絶対値の二乗を計算して、それが最小になる場合を考えてみよ。

(解説)

$$\begin{aligned} \vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c} &= (1, -1, -3) + x(2, 2, 1) + y(-1, -1, 0) \\ &= (2x - y + 1, 2x - y - 1, x - 3) \end{aligned}$$

よって $|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|^2 = (2x - y + 1)^2 + (2x - y - 1)^2 + (x - 3)^2$

$$= 2(2x - y)^2 + (x - 3)^2 + 2$$

ゆえに、 $|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|^2$ は $2x - y = 0, x - 3 = 0$ のとき、すなわち $x = 3, y = 6$ のとき最小となる。

$|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}| \geq 0$ であるから、このとき $|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|$ も最小となる。

よって、求める x, y の値は $x=3, y=6$

問11-05 次の2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、内積とそのなす角 θ を求めよ。

- (1) $\vec{a}=(2, 2, 1), \vec{b}=(4, 4, 2)$
 (2) $\vec{a}=(3, 5, 2), \vec{b}=(-3, 1, 2)$
 (3) $\vec{a}=(2, 1, 3), \vec{b}=(-4, -2, -6)$
 (4) $\vec{a}=(1, -1, 1), \vec{b}=(1, \sqrt{6}, -1)$

解説

(1) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 2 \times 4 + 1 \times 2 = 18$

また $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{18}{3 \times 6} = 1$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 0^\circ$

(2) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times (-3) + 5 \times 1 + 2 \times 2 = 0$

よって $\vec{a} \perp \vec{b}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 90^\circ$

(3) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-4) + 1 \times (-2) + 3 \times (-6) = -28$

また $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{14}$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-28}{\sqrt{14} \times 2\sqrt{14}} = -1$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 180^\circ$

(4) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + (-1) \times \sqrt{6} + 1 \times (-1) = -\sqrt{6}$

また $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{2}$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 120^\circ$

問11-06 2つのベクトルを $\vec{a}=(1, -2, 2), \vec{b}=(2, 3, -10)$ とする。以下の各問いに答えよ。

- (1) あるベクトル $\vec{c}=(x, y, 1)$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であるとき、 x, y の値を求めよ。
 (2) $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直で、大きさが9であるようなベクトル $\vec{d}$ を成分表示で求めよ。ヒント： $\vec{d}$ は $\vec{c}$ に平行である。

解説

(1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ であるから $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

よって $x \times 1 + y \times (-2) + 1 \times 2 = 0$

ゆえに $x - 2y + 2 = 0 \quad \dots\dots ①$

$\vec{c} \perp \vec{b}$ であるから $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$

よって $x \times 2 + y \times 3 + 1 \times (-10) = 0$

ゆえに $2x + 3y - 10 = 0 \quad \dots\dots ②$

①, ② を解いて $x=2, y=2$

(2) (1) から $\vec{c}=(2, 2, 1)$

ここで $|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$\vec{d}$ は $\vec{c}$ に平行であり、 $|\vec{d}|=9$ であるから $\vec{d} = \pm 3\vec{c}$

よって $\vec{d} = (6, 6, 3), (-6, -6, -3)$

- 締め切り=[2025/07/08]、自己採点后に提出。
- 回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。
- 複数ページになる場合は、
 - (1) 左上をホチキスなどで留め、
 - (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしてもよい。

(解説)

(解説文)

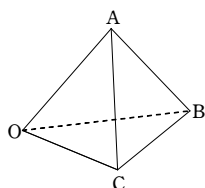
問12-01 一直線上にない空間の3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ に対して、次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) 線分 AB を $3:2$ に内分する点 $D(\vec{d})$,
- (2) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 $E(\vec{e})$
- (3) 線分 AC の中点 $M(\vec{m})$

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{d} &= \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \\ (2) \quad \vec{e} &= \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{3-2} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \\ (3) \quad \vec{m} &= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

問12-02 四面体 $OABC$ において、
 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。
 辺 AB を $4:3$ に内分する点を D ,
 辺 BC を $5:2$ に外分する点を E ,
 線分 CD の中点を F ,
 $\triangle ABC$ の重心を G ,



$\triangle OAB$ の重心を H とする。以下のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\vec{OD}$
- (2) $\vec{OE}$
- (3) $\vec{AF}$
- (4) $\vec{OG}$

(5) $\vec{GH}$

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{OD} &= \frac{3\vec{OA} + 4\vec{OB}}{4+3} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{b}}{7} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} \\ (2) \quad \vec{OE} &= \frac{-2\vec{OB} + 5\vec{OC}}{5-2} = \frac{-2\vec{b} + 5\vec{c}}{3} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c} \\ (3) \quad \vec{OF} &= \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\vec{c} + \left(\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}\right)\right\} = \frac{3}{14}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \text{よって} \quad \vec{AF} &= \vec{OF} - \vec{OA} = \left(\frac{3}{14}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \vec{a} \\ &= -\frac{11}{14}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ (4) \quad \vec{OG} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ (5) \quad \vec{OH} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ \text{よって} \quad \vec{GH} &= \vec{OH} - \vec{OG} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = -\frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

問12-03 次のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 中心が点 $(1, -3, 5)$, 半径が 2 の球面
- (2) 原点を中心とし、点 $A(3, -6, -2)$ を通る球面
- (3) 2点 $A(2, -1, 3)$, $B(4, 5, -7)$ を直径の両端とする球面

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \quad (x-1)^2 + \{y-(-3)\}^2 + (z-5)^2 &= 2^2 \\ \text{すなわち} \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 &= 4 \\ (2) \quad \text{原点を } O \text{ とすると、この球面の半径は } OA \\ \text{ここで} \quad OA^2 &= 3^2 + (-6)^2 + (-2)^2 = 49 \\ \text{よって、球面の方程式は} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 49 \\ (3) \quad \text{球面の中心を } C \text{ とする。} \\ \text{線分 } AB \text{ の中点が } C \text{ であるから、} C \text{ の座標は} \\ \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{3-7}{2}\right) \\ \text{すなわち} \quad (3, 2, -2) \\ \text{また、球面の半径は } CA \text{ であり} \\ CA^2 &= (2-3)^2 + (-1-2)^2 + (3+2)^2 = 35 \\ \text{よって、球面の方程式は} \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 &= 35 \end{aligned}$$

- 締め切り=[2025/07/15]、自己採点后に提出。
 - 回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。
 - 複数ページになる場合は、
 - (1) 左上をホチキスなどで留め、
 - (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。
- ※この用紙を表紙にしてもよい。

(解説)

(解説文)

問13-01 次の点 A を通り、ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。

(1) $A(1, 2, -3), \vec{d}=(2, 5, 1)$

(2) $A(3, 4, 5), \vec{d}=(0, 2, 3)$

(解説)

原点を O 、直線上の点を $P(x, y, z)$ とする。

直線のベクトル方程式は $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$ (t は媒介変数) …… ①

(1) ① から

$$(x, y, z)=(1, 2, -3)+t(2, 5, 1)=(1+2t, 2+5t, -3+t)$$

$$\text{よって } x=1+2t, y=2+5t, z=-3+t$$

【参考】 この3つの式から t を消去すると、次の直線の方程式が得られる。

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}=z+3$$

(2) ① から

$$(x, y, z)=(3, 4, 5)+t(0, 2, 3)=(3, 4+2t, 5+3t)$$

$$\text{よって } x=3, y=4+2t, z=5+3t$$

【参考】 この3つの式から t を消去すると、次の直線の方程式が得られる。

$$x=3, \frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{3}$$

問13-02 次の点 A を通り、 $\vec{d}$ が方向ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(1) $A(1, 1, -1), \vec{d}=(2, 3, 1)$

(2) $A(3, 2, 1), \vec{d}=(0, 2, 1)$

(解説)

(1) $(x, y, z)=(1, 1, -1)+t(2, 3, 1)=(1+2t, 1+3t, -1+t)$

$$\text{よって } x=1+2t, y=1+3t, z=-1+t$$

$$\text{また、} t \text{ を消去して } \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z+1$$

(2) $(x, y, z)=(3, 2, 1)+t(0, 2, 1)=(3, 2+2t, 1+t)$

$$\text{よって } x=3, y=2+2t, z=1+t$$

$$\text{また、} t \text{ を消去して } x=3, \frac{y-2}{2}=z-1$$

問13-03 次の2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $A(-2, 1, -1), B(1, 3, 2)$

(2) $A(0, 1, 2), B(1, 2, -1)$

(解説)

(1) $\overrightarrow{AB}=(3, 2, 3)$ であるから

$$(x, y, z)=(-2, 1, -1)+t(3, 2, 3)$$

$$=(-2+3t, 1+2t, -1+3t)$$

$$\text{よって } x=-2+3t, y=1+2t, z=-1+3t$$

$$\text{また、} t \text{ を消去して } \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(1, 1, -3)$ であるから

$$(x, y, z)=(0, 1, 2)+t(1, 1, -3)=(t, 1+t, 2-3t)$$

$$\text{よって } x=t, y=1+t, z=2-3t$$

$$\text{また、} t \text{ を消去して } x=y-1=\frac{z-2}{-3}$$

【参考】 異なる2点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式 $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ を用いてもよい。

(1) $(x, y, z)=(1-t)(-2, 1, -1)+t(1, 3, 2)=(-2+3t, 1+2t, -1+3t)$

$$\text{よって } x=-2+3t, y=1+2t, z=-1+3t$$

(2) $(x, y, z)=(1-t)(0, 1, 2)+t(1, 2, -1)=(t, 1+t, 2-3t)$

$$\text{よって } x=t, y=1+t, z=2-3t$$

問13-04 次の2直線 ℓ, m のなす角 α を求めよ。ただし α は鋭角とする。

$$\ell: \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{4},$$

$$m: x-1=\frac{y+2}{-10}=\frac{z-3}{-7}$$

(解説)

$\vec{d}_1=(3, 5, 4), \vec{d}_2=(1, -10, -7)$ とすると、 $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ はそれぞれ直線 ℓ, m に平行である。 $\vec{d}_1$ と $\vec{d}_2$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|} = \frac{3 \times 1 + 5 \times (-10) + 4 \times (-7)}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} \\ &= \frac{-75}{5\sqrt{2} \times 5\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 150^\circ$$

$$\alpha \text{ は鋭角であるから } \alpha = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

問13-05 (復習) xy 平面、 z 軸、原点に関して、次の点と対称な点の座標を求めよ。

(1) $(1, -1, 1)$

(2) $(-2, -3, 4)$

(解説)

(1) $P(1, -1, 1)$ とする。

$$xy \text{ 平面に関して } P \text{ と対称な点の座標は } (1, -1, -1)$$

$$z \text{ 軸に関して } P \text{ と対称な点の座標は } (-1, 1, 1)$$

$$\text{原点に関して } P \text{ と対称な点の座標は } (-1, 1, -1)$$

(2) $Q(-2, -3, 4)$ とする。

$$xy \text{ 平面に関して } Q \text{ と対称な点の座標は } (-2, -3, -4)$$

$$z \text{ 軸に関して } Q \text{ と対称な点の座標は } (2, 3, 4)$$

$$\text{原点に関して } Q \text{ と対称な点の座標は } (2, 3, -4)$$

問13-06 (復習) 点 $(1, 4, 5)$ を通り、3つの座標平面に接する球面の方程式を求めよ。答えは2通りある。

ヒント: 3つの座標平面に接し、点 $(1, 4, 5)$ を通るから、球面の中心の x 座標、 y 座標、 z 座標はすべて正である。球面の半径を r とおくと、中心の座標は (r, r, r) と表せる。

(解説)

3つの座標平面に接し、点 $(1, 4, 5)$ を通るから、球面の中心の x 座標、 y 座標、 z 座標はすべて正である。

球面の半径を r とおくと、中心の座標は (r, r, r) と表せる。

$$\text{この球面の方程式は } (x-r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

$$\text{点 } (1, 4, 5) \text{ を通るから } (1-r)^2 + (4-r)^2 + (5-r)^2 = r^2$$

$$\text{左辺を展開して整理すると } r^2 - 10r + 21 = 0$$

$$\text{ゆえに } (r-3)(r-7) = 0 \quad \text{したがって } r = 3, 7$$

よって、求める球面の方程式は

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9, (x-7)^2 + (y-7)^2 + (z-7)^2 = 49$$

- 締め切りは無し。試験前の自主学習用です。解答は後日電子メールにて配布します。
- 試験対策としては教科書の問や章末問題も有効です。

(解説)

(解説文)

問14-01 点 $P(4, 2, -1)$ に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) xy 平面に関して対称な点 A
- (2) yz 平面に関して対称な点 B
- (3) zx 平面に関して対称な点 C
- (4) x 軸に関して対称な点 D
- (5) y 軸に関して対称な点 E
- (6) z 軸に関して対称な点 F
- (7) 原点に関して対称な点 G

(解説)

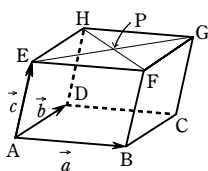
- (1) $(4, 2, 1)$
- (2) $(-4, 2, -1)$
- (3) $(4, -2, -1)$
- (4) $(4, -2, 1)$
- (5) $(-4, 2, 1)$
- (6) $(-4, -2, -1)$
- (7) $(-4, -2, 1)$

問14-02 平行六面体 $ABCD-EFGH$ において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。

- (1) 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (ア) $\overrightarrow{BH}$ (イ) $\overrightarrow{CE}$
(ウ) $\overrightarrow{FD}$ (エ) $\overrightarrow{GA}$

- (2) 線分 EG と線分 FH の交点を P とするとき、 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



(解説)

- (1) (ア) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
(イ) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
(ウ) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$
(エ) $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

- (2) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

$$=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})=\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$

$$\text{また } \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AP} \\ =(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$

問14-03 平行四辺形の3つの頂点が $A(3, 0, -4)$, $B(-2, 5, -1)$, $C(4, 3, 2)$ のとき、第4の頂点 D の座標を求めよ。答えは3通りある。

(解説)

条件を満たす平行四辺形は

- [1] 平行四辺形 $ABCD$
- [2] 平行四辺形 $ABDC$
- [3] 平行四辺形 $ADBC$

の3つの場合が考えられる。頂点 D の座標を (x, y, z) とする。

- [1] 四角形 $ABCD$ が平行四辺形であるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

$$\text{よって } (x-3, y-0, z+4)=(4+2, 3-5, 2+1)$$

$$\text{ゆえに } x-3=6, y=-2, z+4=3$$

$$\text{したがって } x=9, y=-2, z=-1$$

- [2] 四角形 $ABDC$ が平行四辺形であるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

$$\text{よって } (-2-3, 5-0, -1+4)=(x-4, y-3, z-2)$$

$$\text{ゆえに } -5=x-4, 5=y-3, 3=z-2$$

$$\text{したがって } x=-1, y=8, z=5$$

- [3] 四角形 $ADBC$ が平行四辺形であるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$$

$$\text{よって } (x-3, y-0, z+4)=(-2-4, 5-3, -1-2)$$

$$\text{ゆえに } x-3=-6, y=2, z+4=-3$$

$$\text{したがって } x=-3, y=2, z=-7$$

- [1] ~ [3] から、頂点 D の座標は

$$(9, -2, -1), (-1, 8, 5), (-3, 2, -7)$$

問14-04 次の3点を頂点とする $\triangle ABC$ について、 $\cos A$ の値と $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

- (1) $A(-2, 1, 3)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(-3, 3, 5)$
- (2) $A(2, -1, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$

(解説)

- (1) $\overrightarrow{AB}=(-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, 2, 2)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=(-1) \times (-1)+0 \times 2+1 \times 2=3$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$$

$$\text{よって } \cos A=\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{2} \times 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ であるから } A=45^\circ$$

$$\text{ゆえに } S=\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin 45^\circ \\ =\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$$

- (2) $\overrightarrow{AB}=(-3, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(0, 2, -1)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=(-3) \times 0+2 \times 2+0 \times (-1)=4$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+0^2}=\sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\text{よって } \cos A=\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{13} \sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ より, } \sin A > 0 \text{ であるから}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } S &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

問14-05 次のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 原点を中心とする半径2の球面
- (2) 点(3, -2, 1)を中心とする半径1の球面
- (3) 点A(1, 2, -1)を中心とし、点B(3, -1, 3)を通る球面
- (4) 2点A(1, -2, 3), B(-3, -6, -1)を直径の両端とする球面

解説

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$$

$$\text{すなわち } x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$(2) \quad (x-3)^2 + \{y-(-2)\}^2 + (z-1)^2 = 1^2$$

$$\text{すなわち } (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$$

- (3) 半径は線分ABの長さに等しい。

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = \sqrt{29}$$

よって、求める球面の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + \{z-(-1)\}^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$\text{すなわち } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29$$

別解 球面の半径を r とすると、球面の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = r^2$$

この球面が点B(3, -1, 3)を通るから

$$(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2 = r^2$$

$$\text{すなわち } r^2 = 29$$

よって、求める球面の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29$$

- (4) 球面の中心をCとすると、Cは線分ABの中点で、その座標は

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2-6}{2}, \frac{3-1}{2} \right)$$

$$\text{すなわち } (-1, -4, 1)$$

また、半径は線分CAの長さに等しい。

$$CA = \sqrt{\{1-(-1)\}^2 + \{-2-(-4)\}^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

よって、求める球面の方程式は

$$\{x-(-1)\}^2 + \{y-(-4)\}^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\text{すなわち } (x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 12$$

問14-06 次の直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、 t を消去した直線の方程式を求めよ。

- (1) 点A(4, 5, 3)を通り、 $\vec{d}=(3, 2, -4)$ に平行な直線

- (2) 2点A(1, 2, 3), B(2, -1, 5)を通る直線

解説

- (1) 点Aを通り、 $\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x, y, z) = (4, 5, 3) + t(3, 2, -4)$$

$$\text{すなわち } x = 4 + 3t, y = 5 + 2t, z = 3 - 4t$$

$$\text{また, } t \text{ を消去して } \frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

- (2) 2点A, Bを通る直線の媒介変数表示は

$$(x, y, z) = (1-t)(1, 2, 3) + t(2, -1, 5)$$

$$\text{すなわち } x = 1 + t, y = 2 - 3t, z = 3 + 2t$$

$$\text{また, } t \text{ を消去して } x-1 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$$

問14-07

- (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(2, 1, -3)$, $\vec{b}=(1, -2, 1)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。答えは2通りある。

- (2) 2つのベクトル $\vec{a}=(0, 2, 1)$, $\vec{b}=(2, -2, 1)$ の両方に垂直で、大きさが3であるベクトル $\vec{p}$ を求めよ。答えは2通りある。

解説

- (1) $\vec{e}=(x, y, z)$ とする。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\text{すなわち } 2x + y - 3z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\text{すなわち } x - 2y + z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } x, y \text{ を } z \text{ で表して } x = z, y = z$$

$$\text{これを } \textcircled{3} \text{ に代入して } 3z^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき } x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき } x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

- (2) $\vec{p}=(x, y, z)$ とする。

$$\vec{a} \perp \vec{p} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{すなわち } 2y + z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{すなわち } 2x - 2y + z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{p}|^2 = 3^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } x, y \text{ を } z \text{ で表して } x = -z, y = -\frac{z}{2}$$

$$\text{これを } \textcircled{3} \text{ に代入して } \frac{9}{4}z^2 = 9 \quad \text{ゆえに } z = \pm 2$$

$$z = 2 \text{ のとき } x = -2, y = -1$$

$$z = -2 \text{ のとき } x = 2, y = 1$$

$$\text{よって } \vec{p} = (-2, -1, 2), (2, 1, -2)$$