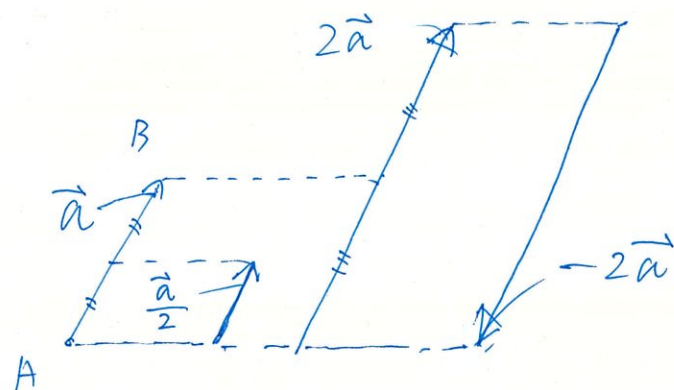


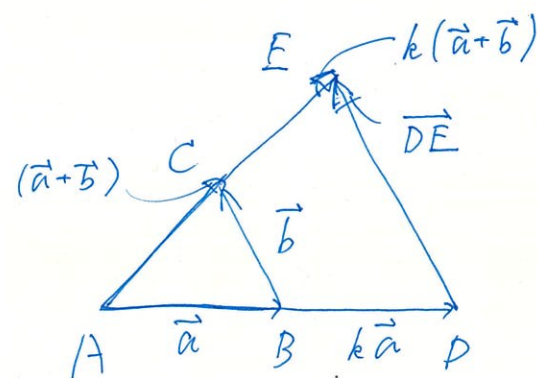
ベクトルの実数倍 | テキスト p. 4

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ に対して、実数 k 倍すると $k\vec{a}$.



$k < 0 \rightarrow$ 向きが逆転

$k = 0 \rightarrow k\vec{a} = \vec{0}$ (零ベクトル)



$\angle CAB = \angle EAB$

$1:k = AB:AD = AC:AE$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ を k 倍 $\rightarrow k\vec{a} = \overrightarrow{AD}$

$(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AC}$ を k 倍 $\rightarrow k(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AE}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ より $|\vec{b}|:|\overrightarrow{DE}| = 1:k \rightarrow \overrightarrow{DE} = k\vec{b}$
したがって

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ 、これは

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ を意味する。

<4/8, 火, 2025> ~~2年~~ 3年M2組代数キカの用

テキスト p. 90~

クラメールの公式 $\rightarrow$ 連立方程式を解くための一つ。

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2次の解 $\vec{x} = (x, y, z)$ は以下で与えられる。

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|}, \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|}, \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|}$$

ただし $|A| = \det A$ 。また

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

* 使用条件: $|A| = \det A \neq 0$ であること。

* 文字を含む場合に特に有効。 $\rightarrow$ 問 3.8

<4/14, 2025> 解析(3-I)用

問 3.6 (p.84)

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \frac{6x^2}{x^3-5} dx & \quad \begin{cases} a(x) = x^3-5 \\ a'(x) = 3x^2 \end{cases} \\ &= 2 \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= 2 \log |x^3-5| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx & \\ &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\ &= \log |\sin x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+2} dx & \quad \begin{cases} a(x) = e^{2x}+2 \\ a'(x) = 2e^{2x} \end{cases} \\ &= 2 \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= 2 \log |e^{2x}+2| + C \end{aligned}$$

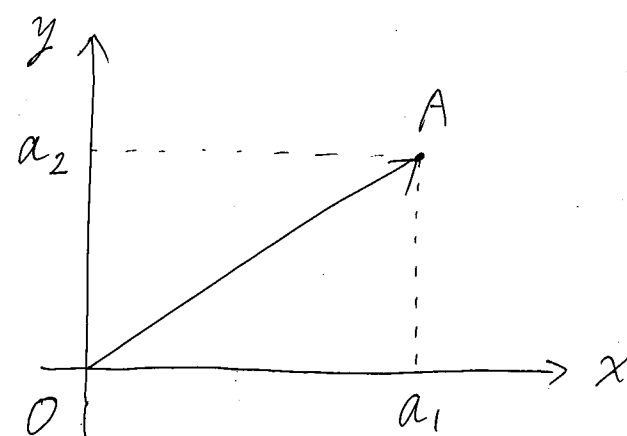
$$\begin{aligned} (4) \quad \int \tan x dx & \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{(-)(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx & \quad \begin{cases} a(x) = 2+\cos x \\ a'(x) = -\sin x \end{cases} \\ &= \int \frac{(-)a'(x)}{a(x)} dx \\ &= -\log |2+\cos x| + C \end{aligned}$$

* $\log 0 \rightarrow -\infty$
 という問題は、
 今は気にするな!

<4/14, 2025> 代数キカ(2-4)用

ベクトルの成分表示



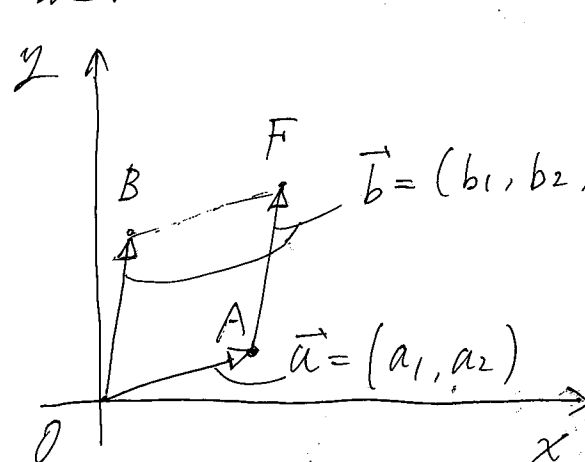
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2),$$

$a_1 \dots x$ 成分
 $a_2 \dots y$ 成分

単位ベクトルを使った書き方

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

成分表示を使ったベクトルの和と差



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \\ &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \vec{a} - \vec{b} \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \end{aligned}$$

<4/14, 2025> 代数キカ(2-4) 用

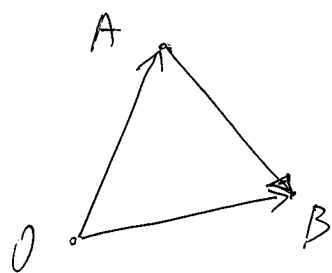
$$\checkmark \vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1 \ \& \ a_2 = b_2$$

$$\checkmark |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\checkmark \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$$

$$\checkmark k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

二つの点を結ぶベクトルの成分計算



$$\vec{OA} = (a_1, a_2), \quad \vec{OB} = (b_1, b_2)$$

このとき、

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

添字 "x" & "y" でもOK.

単位ベクトルの求め方

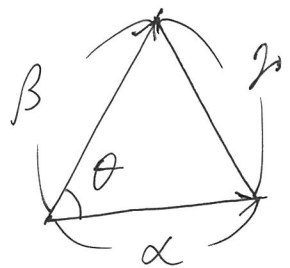
→ $\vec{a}$ を自身の大きさ $|\vec{a}|$ で割る.

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \vec{a}$$

$$= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$$

〈4/21, 月, 2025〉 2-4, 代数・幾何③ 用ノ一ト

余弦定理



$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta$$

$$\alpha = |\vec{a}|$$

$$\beta = |\vec{b}|$$

$$\gamma = |\vec{AB}|$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \text{ \& } \vec{b} = (b_x, b_y) \text{ について、}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$$

$$\text{222} \left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \end{array} \right\} \quad \text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$*: 0 \leq \theta \leq \pi \text{ として}$$

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$$

(7421 p. 13)

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(3) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(4) \vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{b} \pm \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

垂直条件: (7421 p. 17, 先出)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \cos\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$*: |\vec{a}| \neq 0 \text{ \& } |\vec{b}| \neq 0 \text{ として}$$

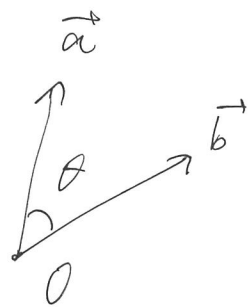
<4/28, 月, 2025> 代数キカ. 2年. ④用ノート

単元 = 平面ベクトルの内積 (2) ← もろやった。

+
図形への応用 (1) ← 7月21日 p.15~19

✓ 復習: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{aligned}\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos \theta \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2\end{aligned}$$



✓ ベクトルの平行条件 (p.15)

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき,

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = \frac{f}{f} \vec{a}$ となる実数 f が存在する。

(例) = 問 1.19 (p.16)

$$\vec{a} = (k, 4)$$

$$\vec{b} = (6, 4k+4)$$

} $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるための k は?
※ 2つの解がある。

$$\vec{a} = x \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} k = 6x \\ 4 = x(4k+4) \end{cases} \xrightarrow{\text{代入}}$$

$$4 = x(24x+4)$$

$$24x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

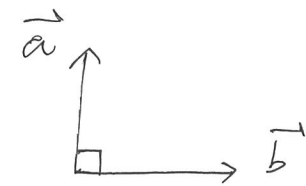
$$(3x-1)(2x+1) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow k = 6x = 2, -3$$

✓ ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき,



$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

(例) = 問 1.22 (p.17)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, (\vec{a} + k\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b}) \text{ となる } k \text{ は?}$$

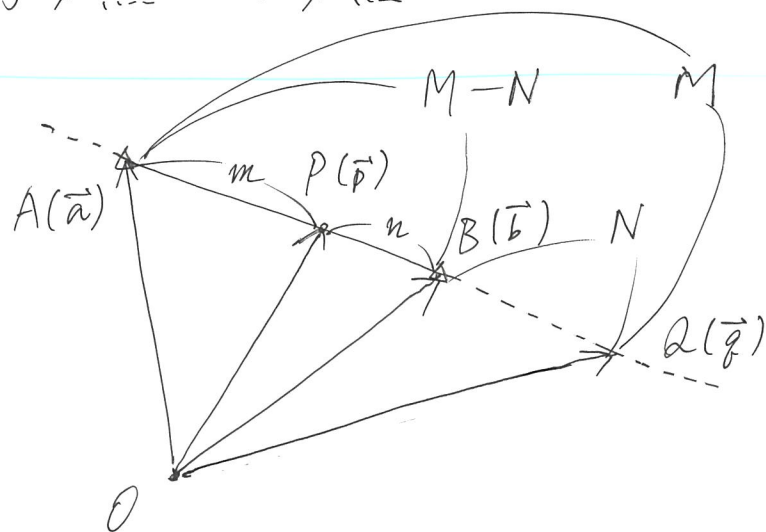
$$\rightarrow \vec{a} + k\vec{b} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 1+\sqrt{3}k \end{pmatrix}, \vec{a} - k\vec{b} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-\sqrt{3}k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) &= (1-k)(1+k) + (1+\sqrt{3}k)(1-\sqrt{3}k) \\ &= \{1-k^2\} + \{1-3k^2\} = -4k^2 + 2 = 0\end{aligned}$$

$$2k^2 - 1 = 0$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

✓ 内分点と外分点の位置ベクトル (p.18)



$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

内分点: 線分 AB を $m:n$ に分割 = 内分する
点 P を内分点と呼び、そのベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad \text{である。}$$

特に $m:n = 1:1$ の場合 $\vec{r}$ は中点 R ($\vec{r}$)

となり、

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \text{である。}$$

外分点: 線分 AB を $M:N$ に延長 = 外分する
点 Q を外分点と呼び、そのベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q} = \frac{N\vec{a} - M\vec{b}}{M-N} \quad \text{である。}$$

証明: ① $\overrightarrow{AQ} = \frac{M}{M-N} \overrightarrow{AB} = \frac{M}{M-N} (\vec{b} - \vec{a})$

② $\vec{q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{M}{M-N} (\vec{b} - \vec{a})$

$$= \frac{M\vec{a} + M\vec{b}}{M-N} + \frac{-M\vec{a} + N\vec{a}}{M-N}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{-M\vec{a} + M\vec{b}}{M-N}$$

$$= \frac{-N\vec{a} + M\vec{b}}{M-N}$$

成分表示: $\vec{p} = \left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n} \right)$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$
 $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$\vec{q} = \left(\frac{-Na_1 + Mb_1}{M-N}, \frac{-Na_2 + Mb_2}{M-N} \right)$

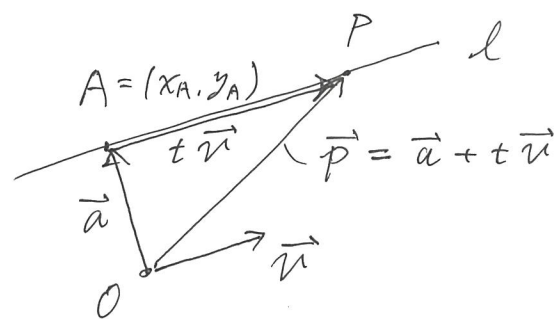
今週は演習&課題は無いが、代わりにのN課題は必ずや32と!

平面上的直線とベクトル①

XY 平面上的ある直線 l が、
以下の条件を満たす。

・点 $A = (x_A, y_A)$ を通る。

・ $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ に平行。 ※ $\vec{v}$ の代わりに $\vec{d}$ とかもよく使う。



$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (x_A, y_A)$ および、 l 上のある点 $P(x, y)$ への
ベクトルを $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ とすると、次式が成り立つ。

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}, \text{ あるいは,}$$

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \cdots \textcircled{1} \\ y = y_A + t\beta \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{ である。}$$

ここで、 t は媒介変数、 $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ は方向ベクトル。

上式から $\beta \textcircled{1} - \alpha \textcircled{2}$ をとると、 t を消去できる。

$$\beta x - \alpha y = \beta x_A - \alpha y_A$$

$$-\alpha(y - y_A) + \beta(x - x_A) = 0$$

$$y - y_A = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_A) \leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_A) + y_A$$

これが直線 l を表す。すなわち、

傾き = $\frac{\beta}{\alpha}$ で、点 $A = (x_A, y_A)$ を通る直線である。

$$\uparrow \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

平面上の直線とベクトル②

XY 平面上のある直線 l が以下の条件を満たす。

・点 $A = (x_A, y_A)$ を通る。

・点 $B = (x_B, y_B)$ を通る。

これは前のケース①にて、 $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ を方向
ベクトルにとったものと同じ。したがって、

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A),$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \cdots \textcircled{3} \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \cdots \textcircled{4} \end{cases} \text{ (媒介変数表示)}$$

上式から $(y_B - y_A) \textcircled{3} - (x_B - x_A) \textcircled{4}$ をとると、 t を消去できる。

$$\cancel{y - y_A} = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_A) + y_A, \begin{cases} \alpha = x_B - x_A \\ \beta = y_B - y_A \end{cases}$$

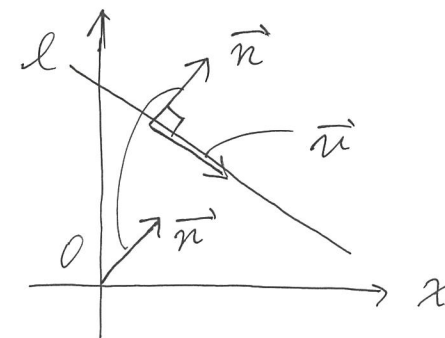
法線ベクトル (p. 21)

直線 $l: ax + by + c = 0$ に対して垂直なベクトルを

法線ベクトル $\vec{n}$ とする。

これは次式で与えられる。

$$\vec{n} = (a, b)$$



証明: $ax + by + c = 0$

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow \text{方向ベクトル } \vec{u} = (\alpha, \beta) = (-b, a),$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0.$$

尚、ある法線ベクトル $\vec{n}$ を定数倍して $\pm k\vec{n}$ としても、
やはり法線ベクトルとなる。 $(\pm k\vec{n}) \cdot \vec{n} = (\pm k)\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$ 。

平面上の直線とベクトル ③

xy平面上的のある直線 l が以下の条件を満たす。

1. 点 $A = (x_A, y_A)$ を通る。

1. $\vec{n} = (a, b)$ を法線ベクトルとして持つ。

この場合 l は次式で表される。

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

$$\rightarrow y = -\frac{a}{b}(x - x_A) + y_A$$

証明: $\vec{n} = (a, b) \rightarrow$ 方向ベクトル $(\alpha, \beta) = (-b, a)$

したがって媒介変数 t で表せば、

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha = x_A - tb \\ y = y_A + t\beta = y_A + ta \end{cases}$$

t を消去すると、

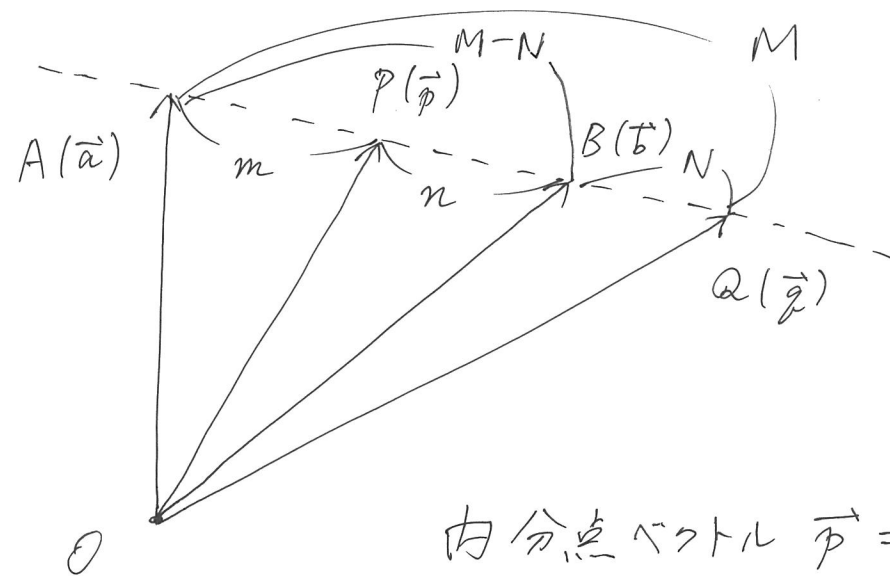
$$ax - by = ax_A - by_A$$

$$y = -\frac{a}{b}(x - x_A) + y_A$$

$$ax + by + c = 0, \quad c = -ax_A - by_A$$

$$y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b} = -\frac{a}{b}(x - x_A) + y_A$$

(復習) 内分点と外分点の位置ベクトル (p. 18)



$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\text{内分点ベクトル } \vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

$$\text{外分点ベクトル } \vec{q} = \frac{-N\vec{a} + M\vec{b}}{M - N}$$

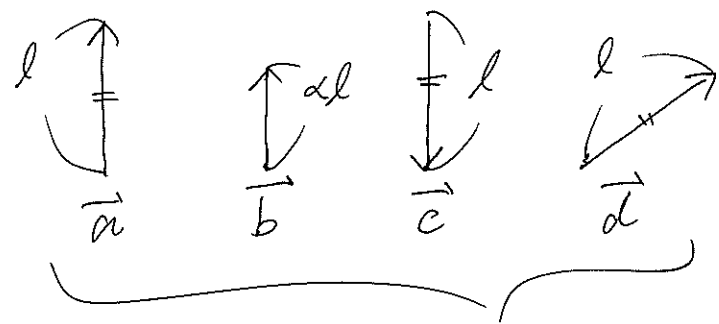
〈5/20, 火, 2025〉代数キカ(2-4) [6] 用ノート

中間テストの範囲 = p.1 ~ p.22 → 終わっている。

今週 & 来週は復習に使える。

✓ ベクトルとは？

大きさと向きをあわせ持つ量。

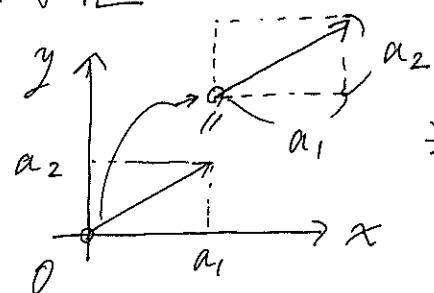


これらはすべて互いに異なるベクトル。

✓ ベクトルの成分表示と絶対値

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



※ ベクトルの
始点は自由に
変えられる。

✓ ベクトルの足し算と引き算

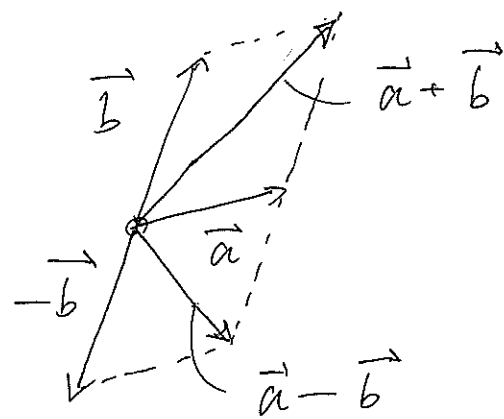
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$= (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2)$$

$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$



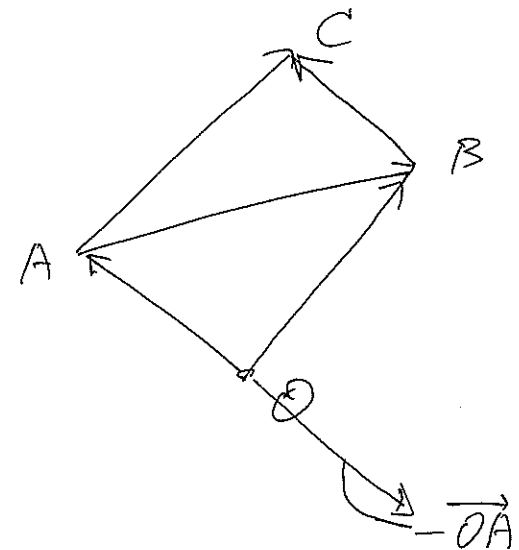
✓ ~~公式集~~ 公式集その①

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

~~公式集~~

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

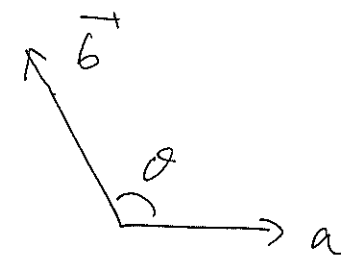
$$= \vec{AO} + \vec{OB}$$



✓ ベクトルの内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$



$$= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

✓ 公式集その②

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

✓ベクトルの平行条件

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \text{ となる } k \text{ が存在する。}$$

✓ベクトルの垂直条件

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{a_1 b_1 + a_2 b_2} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\cos \theta = 0)$$

✓内分点ベクトルと外分点ベクトル

→ 前々回のノートを参照。テキスト p. 18.

✓直線の方程式とベクトル

場合① 点 $A(x_A, y_A) = \vec{OA} = \vec{a}$ を通り、

方向ベクトル $\vec{v} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$ に平行な直線

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\beta}{\alpha}(x - x_A) + y_A \\ \vec{p} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} x_A + t\alpha \\ y_A + t\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} t \dots \text{媒介変数。}$$

場合② - 2つの点 $\left\{ \begin{aligned} A: (x_A, y_A) &= \vec{OA} = \vec{a} \\ B: (x_B, y_B) &= \vec{OB} = \vec{b} \end{aligned} \right\}$ を

通る直線

$$\vec{v} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ にとり}$$

場合①に等しい。以下省略。

場合③ - 点 $A: (x_A, y_A) = \vec{OA} = \vec{a}$ を通り、
法線ベクトル $\vec{n} = (a, b)$ に垂直な直線



$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A - tb \\ y_A + ta \end{pmatrix},$$

$$y = -\frac{a}{b}(x - x_A) + y_A.$$

〈6/10, 火, 2025〉 2-4 代数・カ 8 月 1-ト

円のベクトル方程式 (p. 22)

中心 = $A(\vec{a})$, 半径 r の円は次式で表される。

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

$\vec{p} = (x, y)$, $\vec{a} = (x_0, y_0)$ とすると,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

特に、中心が原点 $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ のときは、

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{for } \vec{p} = (x, y)$$

1 次独立と 1 次従属

同じ平面上の、2 つのベクトルのペアに関する性質

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, かつ、
 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ である。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, または $\vec{b} = \vec{0}$, または
 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ である。

2 次元

$$\vec{v} = (a, b)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 \end{aligned}$$

3 次元

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \end{aligned}$$

山崎君のレポート
?

<6/17, 2025> 2-4 代数カカ 10 用ノート

空間ベクトル (p. ²⁶ ~~26~~)

まずは覚えろ! → 2次元 3次元

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2) = (a_1, a_2, a_3)$

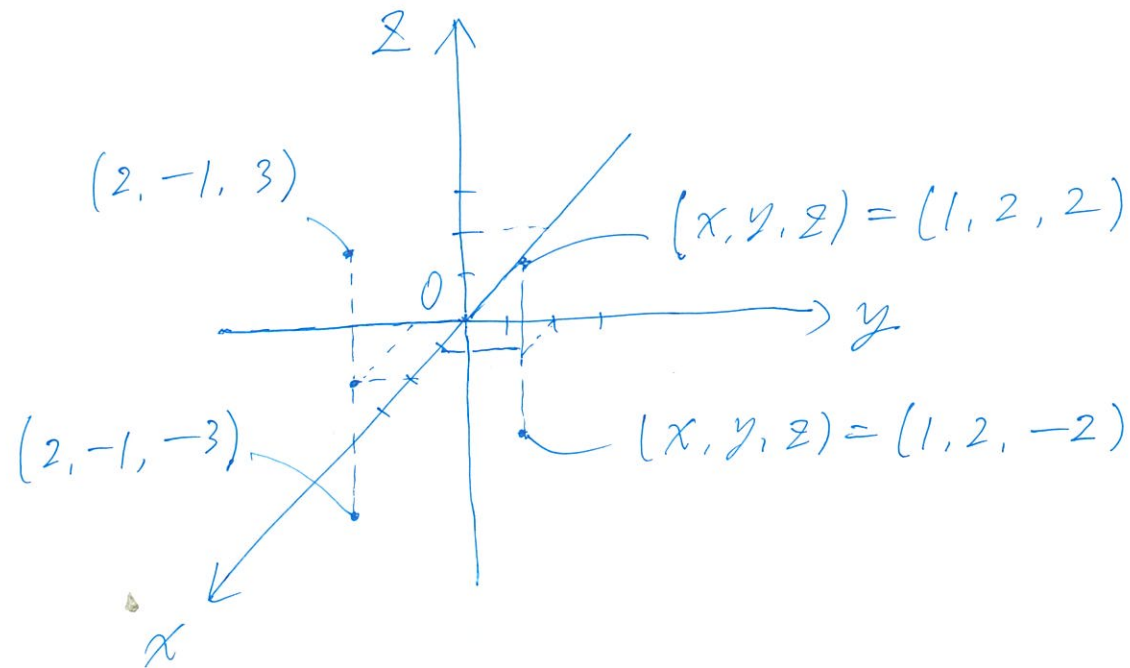
ベクトルの大きさ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

3次元空間座標

→ xy平面に加えて, 高さの自由度としてz軸を追加した空間。

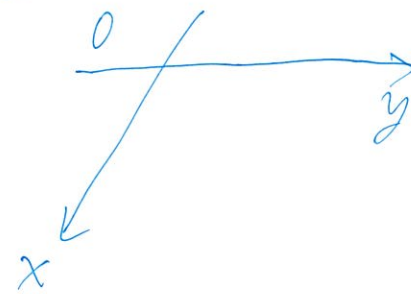
→ xyz空間内の1点Pは (x, y, z) で指定される。



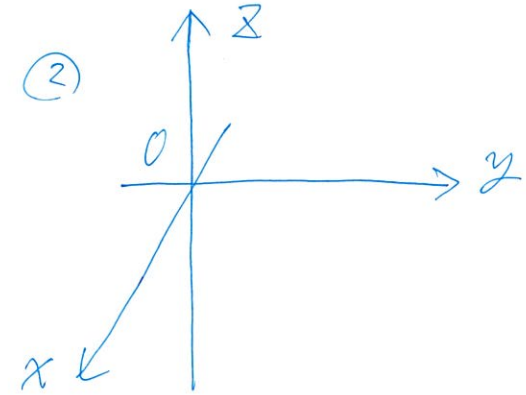
* (x, y, z) 以外にも, (a, b, c) , (a_1, a_2, a_3) , (a_x, a_y, a_z) など色々な表記がある。

余弦 3次元座標の描き方

①

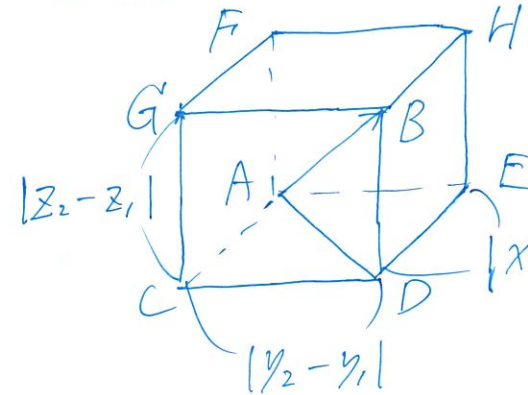


②



完成!

2点間の距離の公式



$\begin{cases} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$

$$\textcircled{1} AD = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$\textcircled{2} AB = \sqrt{AD^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

以上より、AB間のキリは、

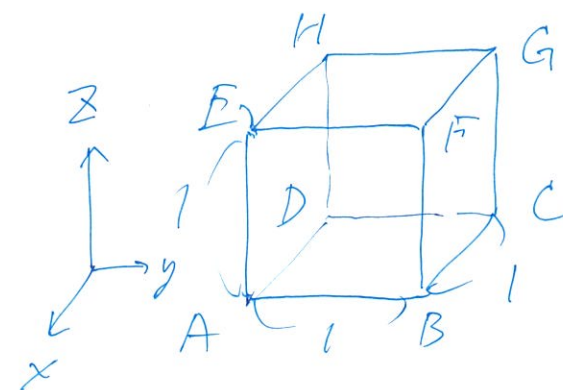
$$A = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2} \quad \text{である。}$$

空間ベクトル

→ 2次元ベクトルにz成分を増やしただけ!

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \text{などと書く。}$$



$$\vec{AB} = \vec{CB} = (1, 0, 0) = \vec{HE} = \vec{GF}$$

$$\vec{DC} = \vec{HG} = (0, 1, 0) = \vec{AB} = \vec{EF}$$

$$\vec{DH} = \vec{CG} = (0, 0, 1) = \vec{AE} = \vec{BF}$$

空間ベクトルの性質 ※ 2次元のベクトルときとほぼ同じ。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ とする。}$$

$$\textcircled{1} |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{大きさ、絶対値}$$

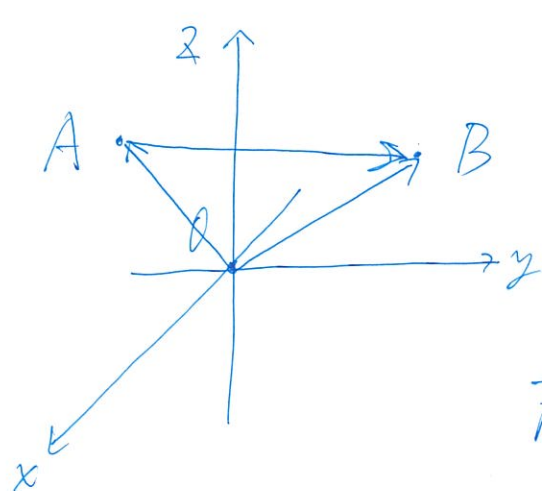
$$\textcircled{2} k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$\textcircled{3} \vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \text{ あるいは}$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

7712 書いてもいいよ。

空間上の2点とベクトルの公式



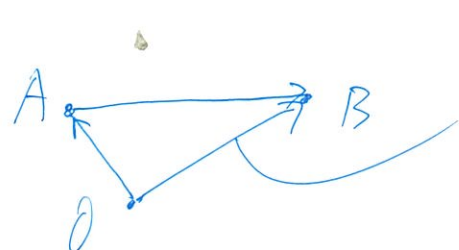
$$\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$$

このとき、

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

これは図のとき



$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad \text{これもある。}$$

$\underbrace{\text{まず } A \text{ に行く}}_{\vec{OA}} + \underbrace{\text{次に } B \text{ に行く}}_{\vec{AB}}$

やっぱり2次元ときと同じ！

空間ベクトルの内積 ※ やっぱ2次元ときとほぼ同じ。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ とする。}$$

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\textcircled{2}' \text{ と } \theta = 90^\circ \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \\ \text{また } \theta = 0^\circ \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ となる。}$$



<6/24, 木, 2025> 2-4 代数・キカ Ⅱ用ノート

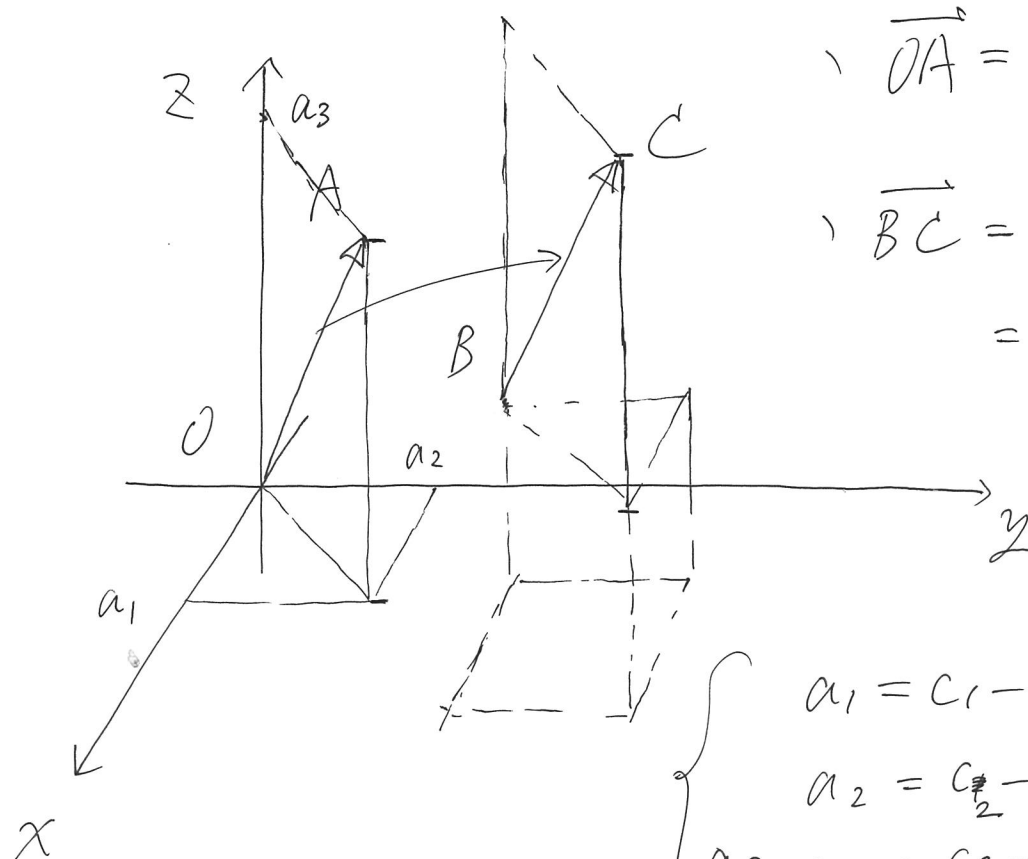
空間ベクトル (の続き)

3次元 (xyz) 空間内の有向
線分 = 空間ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \end{pmatrix} = \vec{AB}$$

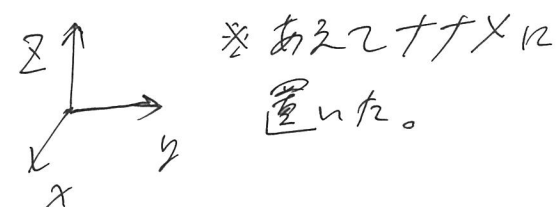
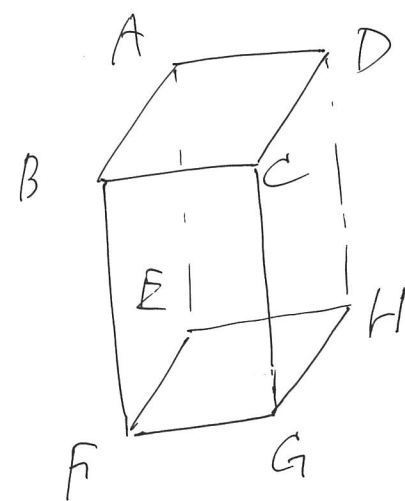
$$= \vec{OB} - \vec{OA}$$

始点・終点は移動する



$$\begin{cases} a_1 = c_1 - b_1 \\ a_2 = c_2 - b_2 \\ a_3 = c_3 - b_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{OA} = \vec{BC}$$

立体との対応 例: 直方体 ABCD-EFGH ↓



※ あえて x, y, z
置いた。

$$\vec{AD} = \vec{BC} \quad \cancel{\vec{AD}} = -\vec{CB}, \text{ etc.}$$

$$\vec{AE} = \vec{BF} = -\vec{BF} = -\vec{HD}, \text{ etc.}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} = -\vec{CD} = -\vec{GH}, \text{ etc.}$$

$$\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DH} + \vec{HG}, \text{ etc.}$$

$\vec{AB}$ の成分表示と大きさ (p. 30, おさし)

xyz 空間内の 2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$ & $B(b_1, b_2, b_3)$
に対して、

$$\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{AB} = \cancel{(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

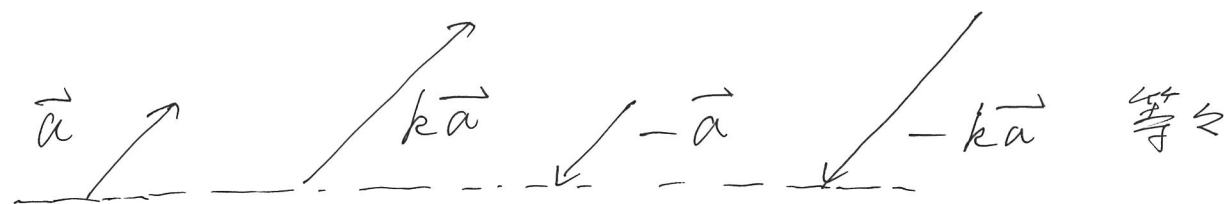
$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$|\vec{AB}|^2 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

ベクトルの平行条件 ← 平面ベクトルるときとほぼ同じ。

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき、

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在。



空間ベクトルの内積 (p. 32)

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$

ベクトルの垂直条件 (p. 32)

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ、 $(\cos \theta = 0)$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$$

例 = 問 1.41 (p. 33)

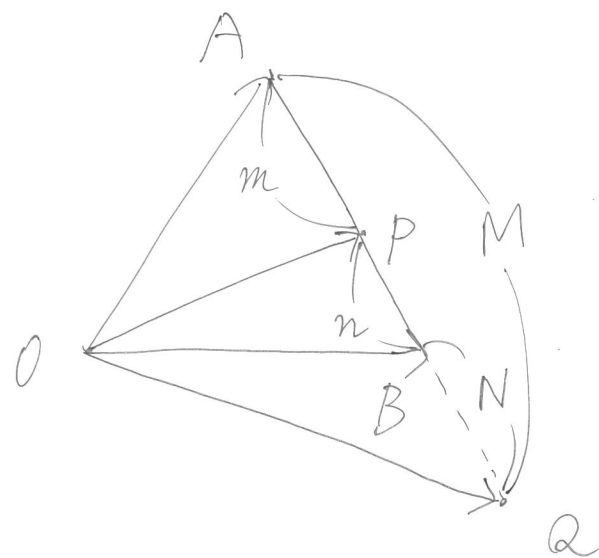
$\vec{a} = (4, -1, -3)$, $\vec{b} = (2, k, 5)$ が直交するような実数 k を求めよ。

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - k - 15 = -7 - k = 0$$

$$k = \underline{\underline{-7}}$$

6/30, 月, 2025 2-4 代数・キカ 12 用ノート

内分点・外分点の空間ベクトル (p. 34)



$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

とす。

* ぶっちゃけ p. 18 でやった
公式と同じ。

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とす。

$$\rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

$$= \left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

線分 AB を $M:N$ に外分する点を Q とす。

$$\rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{-N\vec{a} + M\vec{b}}{M-N}$$

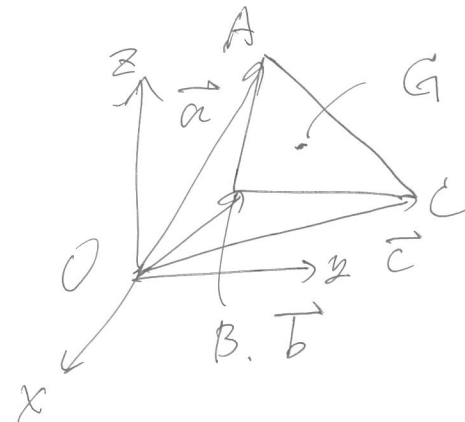
$$= \left(\frac{-Na_1 + Mb_1}{M-N}, \frac{-Na_2 + Mb_2}{M-N}, \frac{-Na_3 + Mb_3}{M-N} \right)$$

特に、AB の中点を R とすると、

$$\rightarrow \overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

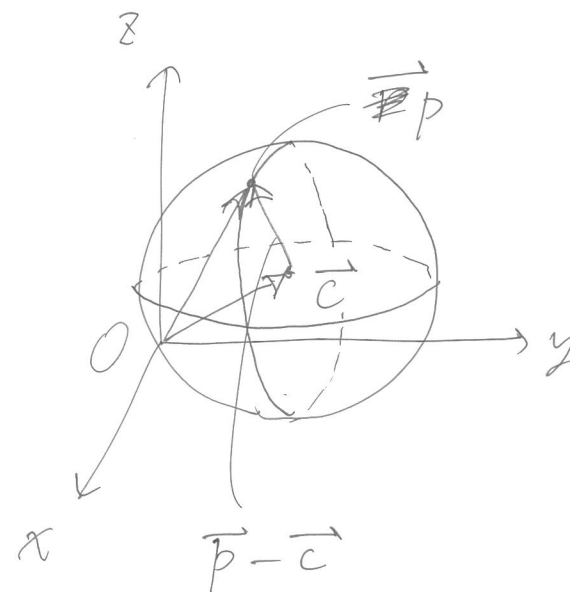
~~例 = 問題 1.43~~

三角形の重心の空間ベクトル



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

球面の方程式 (p. 36)



✓ x, y, z 空間内の球面について、
中心が $C(\vec{c})$, $\vec{c} = (a, b, c)$
半径が r とす。

✓ 球面上の任意の点を
 $P(\vec{p})$ とす。

$\Rightarrow$ 中心 $\vec{c}$ から球面上点 $\vec{p} = (x, y, z)$ までのベクトルは
 $\vec{p} - \vec{c}$ と与えられる。

$\Rightarrow$ 半径が r なのて、
 $|\vec{p} - \vec{c}| = r$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{p} - \vec{c}|^2 &= r^2 = |(x, y, z) - (a, b, c)|^2 \\ &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \quad (\text{確認}) \end{aligned}$$

(続き) したがって、球面の方程式が得られた。

中心が $\vec{c} = (a, b, c)$, 半径が r の

例 = 問 1.45

(1) 中心 $\vec{c} = (a, b, c) = (3, -2, 1)$,

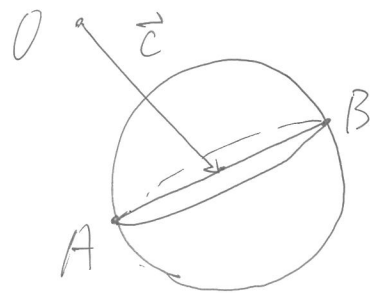
半径 $r = \sqrt{5}$,

$$\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$$

(2), これはムズい。

$A = (-2, -3, 5)$, $B = (4, 1, 7)$ が直径の両端



① まず中心 $\vec{c}$ は $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ と $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ の中点ベクトルである。

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{(-2+4, -3+1, 5+7)}{2} \\ &= (1, -1, 6) = (a, b, c)\end{aligned}$$

② 半径 = $\frac{1}{2}$ 直径, 直径 = $|\overrightarrow{AB}|$ である。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4+2, 1+3, 7-5) = (6, 4, 2)$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2 = 36 + 16 + 4 = 56,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{14} \rightarrow \text{半径 } r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \sqrt{14},$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 14$$

〈7/7月, 2025〉 2-4 代数・幾何 [13] 用ノート

空間^内の直線 (p. 37)

1. 点 $A(\vec{a} = (x_0, y_0, z_0))$ を通る。

1. 方向ベクトル $\vec{v} = (a, b, c) (\neq \vec{0})$ に平行である。

2. 点 $P(\vec{p} = (x, y, z))$ とすると、

$l: \vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$ と表せる。(ベクトル方程式)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad t \text{ ... 媒介変数}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{... 直線 } l \text{ の媒介変数表示}$$

直線の方程式 (p. 38)

上記から媒介変数 t を消去する。

$$(t =) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$\vec{a} = (\vec{a})$ を通り、 $\vec{v} = (a, b, c)$ に平行な直線

* ただし $\{a, b, c\}$ がすべて 0 ではない $\leftrightarrow abc \neq 0$ とする。

例 = 問 1. 47. (1).

A(3, 2, 1) を通り、方向ベクトル $\vec{v} = (4, 5, -1)$ の直線

$$\rightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{(-1)}$$

(2)

2. 点 A(1, 4, -1) & B(3, 6, 4) を通る直線

$$\rightarrow \vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2, 2, 5),$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{5}$$

(3)

A(1, 0, -1) を通り、 $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-2}$ に平行な直線

$$\rightarrow \vec{v} = (5, 2, -2)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

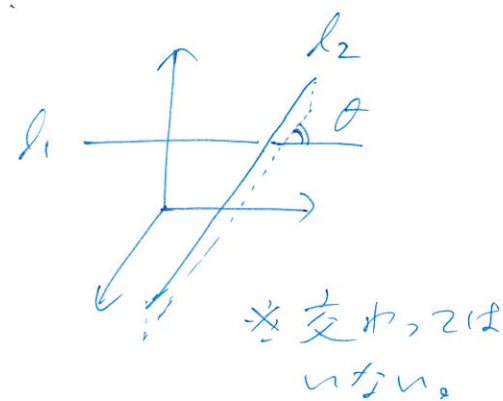
2つの直線のなす角

$$l_1: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\rightarrow \vec{v}_1 = (a, b, c)$$

$$l_2: \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$$

$$\rightarrow \vec{v}_2 = (a', b', c')$$



* 交わりは
ない。

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \theta$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} \quad * \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とする。}$$

例 = 例 1.48 (p.39), (1)

$$l_1: \frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+2}{2} \rightarrow \vec{v}_1 = (\sqrt{5}, 1, 2)$$

$$l_2: \frac{x+1}{\sqrt{5}} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1} \rightarrow \vec{v}_2 = (\sqrt{5}, -2, 1)$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{5 - 2 + 2}{\sqrt{5+1+4} \cdot \sqrt{5+4+1}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

(2) $\checkmark$ $x =$

$$l_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+4t \\ z = t \end{cases} \rightarrow t = \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{1}$$

$$\rightarrow \vec{v}_1 = (2, 4, 1)$$

$$l_2: \begin{cases} x = -5+3t \\ y = 1-t \\ z = -2t \end{cases} \rightarrow t = \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$$

$$\rightarrow \vec{v}_2 = (3, -1, -2)$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{6 - 4 - 2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

方向ベクトル $\vec{v} = (a, b, c)$ で $abc \neq 0$ の場合

→ 媒介変数表示で t を含まない成分が出てくると。

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow \begin{cases} x = x(t) \text{ or 定数} \\ y = y(t) \text{ or } " \\ z = z(t) \text{ or } " \end{cases} \quad (\text{A})$$

(1) t を含まない成分はそのままにして ~~残りの成分~~ おく。

例①: $\vec{v} = (a, b, 0) \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 \text{ (そのまま)} \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, z = z_0$$

例②: $\vec{v} = (a, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \text{ (そのまま)} \\ z = z_0 \end{cases}$

t が任意なので、何でも良い。

$$\rightarrow x = s \text{ (任意)}, y = y_0, z = z_0$$

例③ = 例 1.49, (1) (p.40)

$$A(1, 3, -4) \& B(-2, 3, 1) \rightarrow \vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-3, 0, 5)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{z+4}{5}, y = 3$$

例④ = 例 1.50, (1) (p.40)

$$A(-2, 3, -4) \& B(-2, 3, 1) \rightarrow \vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (0, 0, 5) = 5(0, 0, 1)$$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{v}}{5} = (0, 0, 1) \text{ とも方向ベクトルとして正しい。}$$

$$\rightarrow x = 0, y = 0, z = t \text{ (任意)}$$

〈7/14, 月, 2025〉 2-4 代数・キカ 14 用ノート

→ じつは 前回までで 期末試験までの範囲は終了している。