

[2025/04/16] 代数幾何 (3-M2)・前期 02 「 n 次元平方行列の行列式」要点および演習問題

教科書 p.94 から p.111 の中で、特に重要なポイントをまとめておく。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- $A = E$ ($n \times n$ 単位行列) ならば $\det A = \det E = 1$ 。
- $n \times n$ 行列の行列式には $n!$ 個の項が含まれるので、力まかせの計算は困難。代わりに以下の定理を覚えておくこと。
- (教科書 p.100) 定理。対角行列や三角行列の行列式は対角成分の積である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1)$$

つまり、行列式の中身を三角化できればだいたい勝ち！

- (p.102) 定理。ある行の成分がすべてゼロであれば、行列式もゼロ。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

これは列でも同様。

$$\begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ & 0 & \\ \vdots & & \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

- (p.102) 定理。ふたつの行または列が等しければ行列式はゼロ。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ & a_{2k} & & a_{2k} & \\ \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

- (p.103) 定理。ひとつの行または列を α 倍すると行列式も α 倍される。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \alpha a_{1k} & \cdots \\ & \alpha a_{2k} & \\ \vdots & & \\ \cdots & \alpha a_{nk} & \cdots \end{vmatrix} = \alpha |A|. \quad (5)$$

- (p.103) 定理。ある行がふたつの行ベクトルの和に分解されるとき、行列式もふたつに分けることができる。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \cdots & b_{kn} + c_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{b}^k & & \vec{c}^k \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (6)$$

これは列でも同様。

- (p.104) ふたつの行を入れ替えると行列式の符号が変わる。

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \Rightarrow -|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (7)$$

これは列でも同様。

- (p.104) 定理。ある行を実数倍して他の行に足し引きしても値は変わらない。

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + Xa_{i1} & \cdots & a_{jn} + Xa_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (8)$$

これは列でも同様。

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & a_{2i} & & a_{2j} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + Xa_{1i} & \cdots \\ & a_{2i} & & a_{2j} + Xa_{2i} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + Xa_{ni} & \cdots \end{vmatrix}. \quad (9)$$

このテクニックは本当によく使う！特に行列式の中身を三角化するとき、ほとんどの場合でお世話になる。

- (p.105) 転置行列の行列式は変わらない。すなわち $|^t A| = |A|$ である。
- (p.109) A と B がともに $n \times n$ の行列であるならば、

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad (10)$$

である。

- (p.109) 定理。逆行列の行列式。 A が逆行列 A^{-1} を持つとすると、

$$|A| \neq 0 \quad (11)$$

かつ

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (12)$$

が成り立つ。

演習問題 [2025/04/16] 代数幾何 (3-M2)

- 締め切り = 2025/04/23 (水) 授業開始時。冒頭での解説を聞きながら自己採点をした後に提出してもらいます。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 02-01

次の行列式を計算せよ。ヒント = なんとかして中身を三角化した後、定理 (1) 式でトドメを刺せ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} \quad (13)$$

問 02-02

次の行列式を計算せよ。ヒント = 前問と同様。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad (14)$$

問 02-03

定理 (8) 式を、それより前までに紹介した定理 (1)~(7) 式のうち、必要なものを使って証明せよ。

問 02-04

$n \times n$ の行列 A, P, P^{-1}, X が次式を満たしている。

$$X = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

つまり X は対角化されている。また $P^{-1}P = PP^{-1} = E$ ($n \times n$ 単位行列) である。このとき A^k の行列式を求めよ。ヒント = X^k の行列式は？

$n \times n$ 行列の行列式の定義：

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \operatorname{sgn}(p_1, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (17)$$

[2025/04/23] 代数幾何 (3-M2)・前期 03「余因子展開」

特に重要なポイントをまとめておく (教科書 p.112~116)。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- 行列式の定義 → 問 03-02 を参照。
- 定理。行列式 $|A| \neq 0$ ならば逆行列 A^{-1} が存在する。逆もまた真である。
- 十字切除行列。行列 A の第 i 行 j 列を切除して決まる $(n-1) \times (n-1)$ の行列を、十字切除行列 $D_{ij}(A)$ とする。図 1 を参照。
- 余因子。行列 A の第 ij 番目の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は次式で定義される。

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ij}(A)|. \quad (1)$$

つまり十字切除行列の行列式から決まる。

- 定理。第 i 行に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{in}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで例えば $\tilde{a}_{i2}$ は行列 A の第 i 行と第 2 列を十字切除して決まる余因子である。

- 定理。第 j 列に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{除外}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

図 1 十字切除行列 $D_{ij}(A)$ の模式図

ここで例えば $\tilde{a}_{2j}$ は行列 A の第 2 行と第 j 列を十字切除して決まる余因子である。

- 余因子行列。 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を次式で定義する。

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

転置をとっていることに注意せよ。

演習問題 [2025/04/23] 代数幾何 (3-M2)

- 締め切り = 2025/04/30 (水) 授業開始時。冒頭での解説を聞きながら自己採点をした後に提出してもらいます。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 03-01

次の順列 P_n の転倒数 T と符号 $\text{sgn}(P_n)$ を計算せよ。

- (1) $P_{n=4} = \{4, 1, 3, 2\}$
- (2) $P_{n=5} = \{3, 1, 5, 4, 2\}$
- (3) $P_{n=6} = \{1, 3, 4, 6, 2, 5\}$

問 03-02

$n \times n$ 行列の行列式の定義は以下のように与えられる。まず $n \times n$ 行列 A は

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{P_n} \text{sgn}(P_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \quad \text{with} \quad P_n = \{p_1, p_2, p_3 \cdots p_{n-1}, p_n\} \quad (8)$$

ここで $\sum_{P_n}$ は「考え得るすべての順列 P_n について足し上げる」ことを意味している。したがって計 $n!$ 通りの項が含まれる。各 p_i は $\{1, 2, 3 \cdots (n-2), (n-1), n\}$ のうちのどれかであり、重複することはない。すなわち $i \neq j$ なら $p_i \neq p_j$ である。

以下では、行列の次元が 3×3 の場合に、その行列式がサラスの公式に一致することを、以下の手順で確かめよ。

- (1) $n = 3$ の場合に可能なすべての順列 $P_{n=3}$ を列挙せよ。
- (2) 上記で列挙した P_3 について、それらの転倒数 T と符号 $\text{sgn}(P_3)$ を求めよ。
- (3) 定義式 (8) に $n = 3$ を代入したものを書き下して、サラスの公式に一致していることを示せ。

問 03-03

次の行列式を計算せよ。ヒント＝先週習った基本操作によって、ゼロを多く含む行または列を作ってから、余因子展開を利用する。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

問 03-04

以下の $n \times n$ 行列式についての等式を証明せよ。第 $n1$ 成分もゼロではないことに注意。

$$|A| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = xa^{n-1} + (-)^{n+1}yb^{n-1}. \quad (10)$$

おまけ 03-XX

おまけなので解答する必要はない。次のキーワード (イ) ～ (ニ) について調べてみよ。(イ) スレイター行列式 (Slater Determinant)。(ロ) 有限要素法の連立方程式。(ハ) 線形回帰分析。(ニ) 行列式点過程 (Determinantal Point Process)。

問 03-06 (ボツ)

(余白)

次の行列式を計算せよ。尚、先週の問題の解答は証明無しで利用してよい。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & b & b \\ a & b & 0 & a & a \\ 2a & a+b & 1 & a+b & 2a \\ a & a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad (11)$$

$n \times n$ 行列の行列式の定義：

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \operatorname{sgn}(p_1, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (13)$$

以下いろいろなメモ。

階乗：

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (14)$$

順列 (permutation)

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (15)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (16)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (17)$$

組み合わせ (combination)

$${}_nC_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad (18)$$

[2025/04/16] 代数幾何 (3-M2) ・前期 02 「 n 次元平方行列の行列式」 要点および演習問題

教科書 p.94 から p.111 の中で、特に重要なポイントをまとめておく。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- $A = E$ ($n \times n$ 単位行列) ならば $\det A = \det E = 1$ 。
- $n \times n$ 行列の行列式には $n!$ 個の項が含まれるので、力まかせの計算は困難。代わりに以下の定理を覚えておくこと。
- (教科書 p.100) 定理。対角行列や三角行列の行列式は対角成分の積である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1)$$

つまり、行列式の中身を三角化できればだいたい勝ち！

- (p.102) 定理。ある行の成分がすべてゼロであれば、行列式もゼロ。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

これは列でも同様。

$$\begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

- (p.102) 定理。ふたつの行または列が等しければ行列式はゼロ。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ & a_{2k} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

- (p.103) 定理。ひとつの行または列を α 倍すると行列式も α 倍される。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \alpha a_{1k} & \cdots \\ & \alpha a_{2k} \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & \alpha a_{nk} & \cdots \end{vmatrix} = \alpha |A|. \quad (5)$$

- (p.103) 定理。ある行がふたつの行ベクトルの和に分解されるとき、行列式もふたつに分けることができる。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \cdots & b_{kn} + c_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{b}^k + \vec{c}^k \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (6)$$

これは列でも同様。

- (p.104) ふたつの行を入れ替えると行列式の符号が変わる。

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \Rightarrow -|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (7)$$

これは列でも同様。

- (p.104) 定理。ある行を実数倍して他の行に足し引きしても値は変わらない。

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + Xa_{i1} & \cdots & a_{jn} + Xa_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (8)$$

これは列でも同様。

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & a_{2i} & & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + Xa_{1i} & \cdots \\ & a_{2i} & & a_{2j} + Xa_{2i} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + Xa_{ni} & \cdots \end{vmatrix}. \quad (9)$$

このテクニックは本当によく使う！特に行列式の中身を三角化するとき、ほとんどの場合でお世話になる。

- (p.105) 転置行列の行列式は変わらない。すなわち $|^t A| = |A|$ である。
- (p.109) A と B がともに $n \times n$ の行列であるならば、

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad (10)$$

である。

- (p.109) 定理。逆行列の行列式。 A が逆行列 A^{-1} を持つとすると、

$$|A| \neq 0 \quad (11)$$

かつ

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (12)$$

が成り立つ。

演習問題 [2025/04/16] 代数幾何 (3-M2)

- 締め切り = 2025/04/23 (水) 授業開始時。冒頭での解説を聞きながら自己採点をした後に提出してもらいます。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 02-01

次の行列式を計算せよ。ヒント = なんとかして中身を三角化した後、定理 (1) 式でトドメを刺せ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad (13)$$

問 02-02

次の行列式を計算せよ。ヒント = 前問と同様。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad (14)$$

問 02-03

定理 (8) 式を、それより前までに紹介した定理 (1)~(7) 式のうち、必要なものを使って証明せよ。

問 02-04

$n \times n$ の行列 A, P, P^{-1}, X が次式を満たしている。

$$X = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

つまり X は対角化されている。また $P^{-1}P = PP^{-1} = E$ ($n \times n$ 単位行列) である。このとき A^k の行列式を求めよ。ヒント = X^k の行列式は？

解答・演習問題 [2025/04/16] 代数幾何 (3-M2)

問 02-01 解答

以下では第 m 列を R_m 、第 n 行を G_n と表記する。たとえば “ $R_3 \oplus R_1(-2)$ ” は「第 3 列に、第 1 列を (-2) 倍して足す」を意味する。なお、個人的な表記法であり、試験等で無断で使うことは推奨しない。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\vdots \leftarrow R_2 \oplus R_1(-2)$$

$$\vdots \leftarrow R_3 \oplus R_1(-3)$$

$$\vdots \leftarrow R_4 \oplus R_1(-4)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -9 & -18 & -27 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$\vdots \leftarrow R_3 \oplus R_2(-2)$$

$$\vdots \leftarrow R_4 \oplus R_2(-3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

尚、この問題には誤植があったので、評価点には補正が入る。

別解：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$\vdots \leftarrow G_3 \oplus G_1(-1)$$

$$\vdots \leftarrow G_2 \oplus G_1(-8)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \leftarrow G_3 \oplus G_2 \left(\frac{1}{9} \right) \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

問 02-02 解答

前問の解答と同様の表記を用いて

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$\vdots \leftarrow R_1 \oplus R_2(-1)$$

$$\vdots \leftarrow R_2 \oplus R_3(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & b & b \\ a-b & b-a & a & a \\ 0 & a-b & b & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$\vdots \leftarrow G_2 \oplus G_1(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & b & b \\ 0 & b-a & a-b & a-b \\ 0 & a-b & b & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$\vdots \leftarrow G_3 \oplus G_2$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & b & b \\ 0 & b-a & a-b & a-b \\ 0 & 0 & a & 2a-b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$\vdots \leftarrow G_4 \oplus G_3 \left(-\frac{b}{a} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & b & b \\ 0 & b-a & a-b & a-b \\ 0 & 0 & a & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{b(2a-b)}{a} \end{vmatrix}, \quad (26)$$

三角化されたので、この行列式は以下で与えられる。

$$|A| = (a-b)(b-a)(a^2 - 2ab + b^2) = (-)(a-b)^4. \quad (27)$$

問 02-03 解答

(余白)

定理 (8) 式の右辺について、まず定理 (6) 式と (5) 式より、以下のように分解できる。

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + Xa_{i1} & \cdots & a_{jn} + Xa_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}. \quad (28)$$

ここで第二項は同じ行をふたつ含むので、定理 (4) 式よりゼロである。また第一項は A の行列式そのものなので、

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + Xa_{i1} & \cdots & a_{jn} + Xa_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + 0 = \det A. \quad (29)$$

証明終了。

問 02-04 解答

まず $|AB| = |A| \cdot |B|$ より、対角行列 X の k 乗の行列式は次式で与えられる。

$$|X^k| = |X|^k = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^k. \quad (30)$$

ここで $PP^{-1} = P^{-1}P = E$ より、

$$|X^k| = \left| (P^{-1}AP)^k \right| = |P^{-1}A^kP| = |P^{-1}| \cdot |A^k| \cdot |P| = |A^k| \frac{|P|}{|P|} = |A^k|. \quad (31)$$

したがって $|A^k| = |X^k| = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^k$ である。

$n \times n$ 行列の行列式の定義：

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (32)$$

このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \operatorname{sgn}(p_1, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (33)$$

以下いろいろなメモ。

階乗：

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (34)$$

順列 (permutation)

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (35)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (36)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (37)$$

組み合わせ (combination)

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad (38)$$

[2025/04/23] 代数幾何 (3-M2)・前期 03「余因子展開」

特に重要なポイントをまとめておく (教科書 p.112~116)。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- 行列式の定義 → 問 03-02 を参照。
- 定理。行列式 $|A| \neq 0$ ならば逆行列 A^{-1} が存在する。逆もまた真である。
- 十字切除行列。行列 A の第 i 行 j 列を切除して決まる $(n-1) \times (n-1)$ の行列を、十字切除行列 $D_{ij}(A)$ とする。図 1 を参照。
- 余因子。行列 A の第 ij 番目の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は次式で定義される。

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ij}(A)|. \quad (1)$$

つまり十字切除行列の行列式から決まる。

- 定理。第 i 行に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{in}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで例えば $\tilde{a}_{i2}$ は行列 A の第 i 行と第 2 列を十字切除して決まる余因子である。

- 定理。第 j 列に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{除外}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

図 1 十字切除行列 $D_{ij}(A)$ の模式図

ここで例えば $\tilde{a}_{2j}$ は行列 A の第 2 行と第 j 列を十字切除して決まる余因子である。

- 余因子行列。 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を次式で定義する。

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

転置をとっていることに注意せよ。

演習問題 [2025/04/23] 代数幾何 (3-M2)

- 締め切り = 2025/04/30 (水) 授業開始時。冒頭での解説を聞きながら自己採点をした後に提出してもらいます。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 03-01

次の順列 P_n の転倒数 T と符号 $\text{sgn}(P_n)$ を計算せよ。

- (1) $P_{n=4} = \{4, 1, 3, 2\}$
- (2) $P_{n=5} = \{3, 1, 5, 4, 2\}$
- (3) $P_{n=6} = \{1, 3, 4, 6, 2, 5\}$

問 03-02

$n \times n$ 行列の行列式の定義は以下のように与えられる。まず $n \times n$ 行列 A は

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{P_n} \text{sgn}(P_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \quad \text{with} \quad P_n = \{p_1, p_2, p_3 \cdots p_{n-1}, p_n\} \quad (8)$$

ここで $\sum_{P_n}$ は「考え得るすべての順列 P_n について足し上げる」ことを意味している。したがって計 $n!$ 通りの項が含まれる。各 p_i は $\{1, 2, 3 \cdots (n-2), (n-1), n\}$ のうちのどれかであり、重複することはない。すなわち $i \neq j$ なら $p_i \neq p_j$ である。

以下では、行列の次元が 3×3 の場合に、その行列式がサラスの公式に一致することを、以下の手順で確かめよ。

- (1) $n = 3$ の場合に可能なすべての順列 $P_{n=3}$ を列挙せよ。
- (2) 上記で列挙した P_3 について、それらの転倒数 T と符号 $\text{sgn}(P_3)$ を求めよ。
- (3) 定義式 (8) に $n = 3$ を代入したものを書き下して、サラスの公式に一致していることを示せ。

問 03-03

次の行列式を計算せよ。ヒント＝先週習った基本操作によって、ゼロを多く含む行または列を作ってから、余因子展開を利用する。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

問 03-04

以下の $n \times n$ 行列式についての等式を証明せよ。第 $n1$ 成分もゼロではないことに注意。

$$|A| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = xa^{n-1} + (-)^{n+1}yb^{n-1}. \quad (10)$$

おまけ 03-XX

おまけなので解答する必要はない。次のキーワード (イ) ～ (ニ) について調べてみよ。(イ) スレイター行列式 (Slater Determinant)。(ロ) 有限要素法の連立方程式。(ハ) 線形回帰分析。(ニ) 行列式点過程 (Determinantal Point Process)。

解答編・演習問題 [2025/04/23] 代数幾何 (3-M2)

問 03-01

次の順列 P_n の転倒数 T と符号 $\text{sgn}(P_n)$ を計算せよ。

(1) $P_{n=4} = \{4, 1, 3, 2\} \rightarrow (4 > 1), (4 > 3), (4 > 2), (3 > 2)$ の4回転倒しているので、 $T = 4$ そして $\text{sgn}(P_4) = (-)^T = (+)$ 。

(2) $P_{n=5} = \{3, 1, 5, 4, 2\} \rightarrow (3 > 1), (3 > 2), (5 > 4), (5 > 2), (4 > 2)$ の5回転倒しているので、 $T = 5$ そして $\text{sgn}(P_5) = (-)^T = (-)$ 。

(3) $P_{n=6} = \{1, 3, 4, 6, 2, 5\} \rightarrow (3 > 2), (4 > 2), (6 > 2), (6 > 5)$ の4回転倒しているので、 $T = 4$ そして $\text{sgn}(P_6) = (-)^T = (+)$ 。

問 03-02

(1) 以下の6通り。カッコ中のカンマは省略した。

$$P_{n=3} = \{123\}, \{231\}, \{312\}, \{132\}, \{321\}, \{213\}. \quad (11)$$

(2) それぞれ

$$\begin{aligned} T &= 0, 2, 2, 1, 3, 1, \\ \text{sgn}(P_3) &= (+), (+), (+), (-), (-), (-). \end{aligned} \quad (12)$$

(3) 定義式に $n = 3$ を代入すると

$$|A| = \sum_{P_3} \text{sgn}(P_3) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}, \quad \text{with} \quad P_3 = \{p_1, p_2, p_3\}. \quad (13)$$

これを書き下すと、サラスの公式に一致している。

$$\begin{aligned} |A| &= (+) \left[a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \right] \\ &\quad + (-) \left[a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

問 03-03

以下では第 m 列を R_m 、第 n 行を G_n と表記する。たとえば “ $R_3 \oplus R_1(-2)$ ” は「第3列に、第1列を(-2)倍して足す」を意味する。なお、個人的な表記法であり、試験等で無断で使うことは推奨しない。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vdots \leftarrow R_2 \oplus R_1(-2)$$

$$\vdots \leftarrow R_3 \oplus R_1(-3)$$

$$\vdots \leftarrow R_4 \oplus R_1(-4)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\vdots \leftarrow G_1 \oplus G_2 \quad \& \quad G_3 \oplus G_2(3)$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1(-)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -19 \end{vmatrix} = (-) \{19 - 35\} = 16. \quad (15)$$

問 03-04

以下の $n \times n$ 行列式についての等式を証明せよ。第 $n1$ 成分もゼロではないことに注意。

$$|A| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = xa^{n-1} + (-)^{n+1}yb^{n-1}. \quad (16)$$

第1列で余因子展開する。第11成分と第 $n1$ 成分以外はゼロなので

$$|A| = (-)^{1+1}x \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-)^{n+1}y \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix},$$

どちらの行列式も三角化されているので、 $|A| = xa^{n-1} + (-)^{n+1}yb^{n-1}$ となる。

$n \times n$ 行列の行列式の定義：

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (17)$$

このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \operatorname{sgn}(p_1, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (18)$$

以下いろいろなメモ。

階乗：

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (19)$$

順列 (permutation)

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (20)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (21)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (22)$$

組み合わせ (combination)

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad (23)$$

[2025/05/14] 代数幾何 (3-M2) ・前期 05 「線形変換」 要点および演習問題

特に重要なポイントをまとめておく (教科書 p.121～127)。

2 次元平面ベクトルの線形変換

次式を見よ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで行列 A を表現行列、あるいは変換行列と呼ぶ。線形変換は単一の表現行列で書ける。ただし、表現行列は x や y に依存してはならない。

3 次元空間ベクトルの線形変換

次式を見よ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで行列 A を表現行列、あるいは変換行列と呼ぶ。表現行列は x や y や z に依存してはならない。尚、2次元平面と3次元空間との違いはベクトルと行列の次元数だけであり、線形変換であるための条件などは共通している。すなわち、単一の表現行列 A によって表せるものが線形変換である。

線形ではない変換

もしある変換が式 (1) や式 (2) のように書き表せないのならば、それは線形変換ではない。例えば次式を見よ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この変換には定数ベクトル $\vec{b}$ も必要であるから、線形変換ではない。また別の例として、行列形式で書き下したとき、 $\vec{b} = \vec{0}$ であっても $A = A(x, y)$ となっている場合は線形変換ではない。

回転変換

線形変換の中でも特に重要なものの一つに回転変換がある。2次元ベクトル (x, y) を原点を中心に角度 θ だけ回転させる変換は、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Linear} \quad (4)$$

演習課題 [2025/05/14]

問 05-01

2次元ベクトル (x, y) に対して、以下の変換をベクトル&行列形式で書け。さらに、線形変換であった場合には *Linear* と付記せよ。

- (1) y 軸に対する対称移動。
- (2) x 軸上の点 $(x, 0)$ に移す。
- (3) 定点 $(2, 2)$ に移す。
- (4) x 軸方向に $+2$ 、 y 軸方向に -3 だけ平行移動する。
- (5) 原点を中心に角度 $-\theta$ だけ回転させる。

問 05-02

3次元空間ベクトル (x, y, z) に対して、以下の変換をベクトル&行列形式で書け。さらに、線形変換であった場合には *Linear* と付記せよ。

- (1) 原点に対する対称移動。
- (2) 点 (x, y, z) を yz 平面上の点 $(0, y, z)$ に移す。
- (3) z 軸を回転軸とする角度 θ だけの回転。ヒント：2次元ベクトルの回転変換。
- (4) x と z の値を入れ換える。

問 05-03

2次元ベクトル $\vec{u} = (x, y)$ に対して、これを原点を中心に角度 θ だけ回転させたベクトルを $\vec{v} = (x', y')$ とする。 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v}$ を証明せよ。

問 05-01

2次元ベクトル (x, y) に対して、以下の変換をベクトル&行列形式で書け。さらに、線形変換であった場合には *Linear* と付記せよ。

(1) y 軸に対する対称移動。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Linear} \quad (5)$$

(2) x 軸上の点 $(x, 0)$ に移す。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Linear} \quad (6)$$

(3) 定点 $(2, 2)$ に移す。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

(4) x 軸方向に $+2$ 、 y 軸方向に -3 だけ平行移動する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(5) 原点を中心に角度 $-\theta$ だけ回転させる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \quad (9)$$

問 05-XX

3次元空間ベクトル (x, y, z) に対して、以下の変換をベクトル&行列形式で書け。さらに、線形変換であった場合には *Linear* と付記せよ。

(1) 原点に対する対称移動。

(2) 点 (x, y, z) を yz 平面上の点 $(0, y, z)$ に移す。

(3) z 軸を回転軸とする角度 θ だけの回転。ヒント：2次元ベクトルの回転変換。

(4) x と z の値を入れ換える。

問 05-XX

2次元ベクトル $\vec{u} = (x, y)$ に対して、これを原点を中心に角度 θ だけ回転させたベクトルを $\vec{v} = (x', y')$ とする。 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v}$ を証明せよ。

$n \times n$ 行列の行列式の定義：

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

このとき行列式 $|A| = \det A$ を次式で定義する。

$$|A| = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \text{sgn}(p_1, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (11)$$

以下いろいろなメモ。

階乗：

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (12)$$

順列 (permutation)

$${}_n\text{P}_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (13)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (14)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (15)$$

組み合わせ (combination)

$${}_nC_r = \frac{{}_n\text{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad (16)$$

演習課題 07 [2025/05/28] 代数・幾何 (3-M2)

- 締め切りは無し。提出の必要も無し。
- 試験直前なので、すべて復習問題とします。各自の自主学習に役立ててください。
- 試験に向けて (1) : 専門用語の意味や定義をよく確認しておいて下さい。例としては余因子、余因子行列、余因子展開、クラメールの公式など。
- 試験に向けて (2) : 行列式の計算→逃れられません、覚悟して下さい。多くの場合、基本操作によって行列式の中になるべく多くゼロを作り、適当な段階で余因子展開を利用して、行列式の次数を下げていけば、おそらく 2×2 の行列式まででは変形できます。または、途中で中身が三角化できれば、対角成分の総積で求められます。

問 07-01

順列 $(3, 5, 1, 6, 4, 2)$ の転倒数と符号を求めよ。

問 07-02

以下の方程式をクラメールの公式を用いて解け。

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 1 \\ x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad (1)$$

問 07-03

以下の場合について、7 次正方行列 A が正則であるなら T 、そうでないなら F と答えよ。

- (1) $|A| = 0$
- (2) $\text{rank} A = 7$
- (3) A の行ベクトルが 1 次独立である。
- (4) A の列ベクトルが 1 次従属である。
- (5) 同次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は自明な $\vec{x} = \vec{0}$ のみを解として持つ。
- (6) A^{-1} が存在する。

問 07-04

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ。

(2) 余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ。

問 07-05

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この A の行列式を求めよ。

問 07-06

直線 $2x + 3y + 4 = 0$ を、以下の表現行列 A を持つ線形変換で変換したときの像を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

問 07-07

円 $x^2 + y^2 = 4$ を原点のまわりに $\theta = \frac{\pi}{4}$ 回転させた図形の方程式 (像) が、元の方程式に一致することを証明せよ。尚、実は θ がどんな値であっても一致する。

演習課題 07 [2025/05/28] 代数・幾何 (3-M2)

- 締め切りは無し。提出の必要も無し。
- 試験直前なので、すべて復習問題とします。各自の自主学習に役立ててください。
- 試験に向けて (1) : 専門用語の意味や定義をよく確認しておいて下さい。例としては余因子、余因子行列、余因子展開、クラメールの公式など。
- 試験に向けて (2) : 行列式の計算→逃れられません、覚悟して下さい。多くの場合、基本操作によって行列式の中になるべく多くゼロを作り、適当な段階で余因子展開を利用して、行列式の次数を下げていけば、おそらく 2×2 の行列式まででは変形できます。または、途中で中身が三角化できれば、対角成分の総積で求められます。

問 07-01

順列 $(3, 5, 1, 6, 4, 2)$ の転倒数と符号を求めよ。

問 07-02

以下の方程式をクラメールの公式を用いて解け。

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 1 \\ x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad (1)$$

問 07-03

以下の場合について、7 次正方行列 A が正則であるなら T 、そうでないなら F と答えよ。

- (1) $|A| = 0$
- (2) $\text{rank} A = 7$
- (3) A の行ベクトルが 1 次独立である。
- (4) A の列ベクトルが 1 次従属である。
- (5) 同次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は自明な $\vec{x} = \vec{0}$ のみを解として持つ。
- (6) A^{-1} が存在する。

問 07-04

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ。

(2) 余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ。

問 07-05

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この A の行列式を求めよ。

問 07-06

直線 $2x + 3y + 4 = 0$ を、以下の表現行列 A を持つ線形変換で変換したときの像を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

問 07-07

円 $x^2 + y^2 = 4$ を原点のまわりに $\theta = \frac{\pi}{4}$ 回転させた図形の方程式 (像) が、元の方程式に一致することを証明せよ。尚、実は θ がどんな値であっても一致する。

解答編・演習課題 07 [2025/05/28] 代数・幾何 (3-M2)

問 07-01

順列 $(3, 5, 1, 6, 4, 2)$ の転倒数と符号を求めよ。転倒数は 8 で符号は $(-1)^8 = 1$ である。尚、試験では順列の符号は 1 または -1 と答えること。

問 07-03

以下の場合について、7 次正方行列 A が正則であるなら T 、そうでないなら F と答えよ。

(1) $|A| = 0 \rightarrow F$

(2) $\text{rank} A = 7 \rightarrow T$

(3) A の行ベクトルが 1 次独立である。 $\rightarrow T$

(4) A の列ベクトルが 1 次従属である。 $\rightarrow F$

(5) 同次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は自明な $\vec{x} = \vec{0}$ のみを解として持つ。 $\rightarrow T$

(6) A^{-1} が存在する。 $\rightarrow T$

問 07-02, 07-04, 07-05, 07-06, 07-07

→添付した手書きノートを参照。

P2] 07-04, (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 25 = -19$$

(2) $\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9$, $\tilde{a}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\tilde{a}_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$, $\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\tilde{a}_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 12$, $\tilde{a}_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$, $\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$

$$\tilde{A} = t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

P2] 07-02

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

2. $\begin{vmatrix} \vec{b} & 1 & 2 \\ \downarrow & 3 & 6 \\ \downarrow & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -4$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \vec{b} & 2 \\ 2 & \downarrow & 6 \\ 1 & \downarrow & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \vec{b} \\ 2 & 3 & \downarrow \\ 1 & 3 & \downarrow \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2, \quad y = \frac{-10}{-2} = 5, \quad z = \frac{6}{-2} = -3$$

P2] 07-06

$$2x + 3y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{2}{3}t - \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 2t + 4 \\ 3t - 5 \cdot \frac{-2t-4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ \frac{19}{3}t + \frac{20}{3} \end{pmatrix}, \text{ so,}$$

$$-\frac{x'}{4} + \frac{3}{19}y' = -t - 1 + \frac{3}{19}\left(\frac{19}{3}t + \frac{20}{3}\right)$$

$$= -1 + \frac{20}{19} = \frac{1}{19},$$

$$-\frac{19}{4}x' + 3y' = 1,$$

$$-19x' + 12y' = 4 \rightarrow -19x + 12y - 4 = 0, \text{ or}$$

$$y = \frac{19}{12}x + \frac{1}{3}$$

P2] 07-05

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-28 + 20) = 8$$

問 07-07

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ の (3) 軸変換なので } A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{-\pi}{4} & -\sin \frac{-\pi}{4} \\ \sin \frac{-\pi}{4} & \cos \frac{-\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix}$$

これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると、

$$\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 = 4$$

$$\frac{2x'^2 + 2y'^2 + 2x'y' - 2x'y'}{2} = 4$$

$$x'^2 + y'^2 = 4, \text{ } O \text{ を } O' \text{ に直して、}$$

$$x^2 + y^2 = 4, \text{ } \pi \text{ の式に一致。}$$

前期 10 [2025/06/18]

締め切り = [2025/06/25]。提出の際は、

- 回答は A4 レポート用紙にまとめ、
- 左上をホチキス留めし、
- 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。
- (この用紙を表紙として使うのもよい。)

問 10-01

以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルには定数倍の任意性が残る。固有値の重解が無い場合、ここでは任意定数は α とする。重複度が 2 以上の場合は複数のギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとする。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

問 10-02

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 92641 & 24256 & -33964 & 10201 \\ 0 & -38183 & -17771 & -66182 \\ 0 & 0 & 58620 & 28813 \\ 0 & 0 & 0 & -29913 \end{pmatrix} \quad (7)$$

この A の固有値を求めよ。固有ベクトルは求めなくてよい。

ヒント：固有値と固有ベクトルを求める手順

(1) 例として 3×3 の行列 A を考える。まず特性方程式

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (8)$$

これを解いて固有値を求める。

(2) i 番目の固有値 λ_i について、固有ベクトルを $\vec{u}_i = (x, y, z)$ と置いて、以下の連立方程式を解く。

$$(A - \lambda_i E) \vec{u}_i = 0 \quad (9)$$

解く際には掃き出し法などを使うと良い。

(3a) 重複度のない固有値については、固有ベクトルは任意定数を α として

$$\vec{u}_i = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (10)$$

と求まる。

(3b) 重複度がある固有値（ここでは 2 とする）については、固有ベクトルは任意定数を α, β として

$$\vec{u}_i = \alpha \vec{u}_{i,\alpha} + \beta \vec{u}_{i,\beta} = \alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} \quad (11)$$

と求まる。ここで右辺のふたつのベクトルは互いに平行であってはならない。

授業で扱う範囲では、重複度が N の固有値の固有ベクトルは、 N 個の互いに平行ではないベクトルの和となる。

解答編・演習課題 07 [2025/05/28] 代数・幾何
(3-M2)

ああああ。ああああああああああ。ああああああああ。
ああああ。ああああああああああ。ああああああああ。あ
ああああ。ああああああああああ。ああああああああ。あ
ああああ。ああああああああああ。ああああああああ。

問 07-03

以下の場合について、7 次正方行列 A が正則であるなら T 、そ
うでないなら F と答えよ。

- (1) $|A| = 0 \rightarrow F$
- (2) $\text{rank}A = 7 \rightarrow T$
- (3) A の行ベクトルが 1 次独立である。 $\rightarrow T$
- (4) A の列ベクトルが 1 次従属である。 $\rightarrow F$
- (5) 同次連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は自明な $\vec{x} = \vec{0}$ のみを解として
持つ。 $\rightarrow T$
- (6) A^{-1} が存在する。 $\rightarrow T$

問 07-02, 07-04, 07-05, 07-06, 07-07

→添付した手書きノートを参照。

前期 10 [2025/06/18]

締め切り = [2025/06/25]。提出の際は、

- 回答は A4 レポート用紙にまとめ、
- 左上をホチキス留めし、
- 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。
- (この用紙を表紙として使うのもよい。)

問 10-01

以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルには定数倍の任意性が残る。固有値の重解が無い場合、ここでは任意定数は α とする。重複度が 2 以上の場合は複数のギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとする。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

問 10-02

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 92641 & 24256 & -33964 & 10201 \\ 0 & -38183 & -17771 & -66182 \\ 0 & 0 & 58620 & 28813 \\ 0 & 0 & 0 & -29913 \end{pmatrix} \quad (7)$$

この A の固有値を求めよ。固有ベクトルは求めなくてよい。

ヒント：固有値と固有ベクトルを求める手順

(1) 例として 3×3 の行列 A を考える。まず特性方程式

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (8)$$

これを解いて固有値を求める。

(2) i 番目の固有値 λ_i について、固有ベクトルを $\vec{u}_i = (x, y, z)$ と置いて、以下の連立方程式を解く。

$$(A - \lambda_i E) \vec{u}_i = 0 \quad (9)$$

解く際には掃き出し法などを使うと良い。

(3a) 重複度のない固有値については、固有ベクトルは任意定数を α として

$$\vec{u}_i = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (10)$$

と求まる。

(3b) 重複度がある固有値（ここでは 2 とする）については、固有ベクトルは任意定数を α, β として

$$\vec{u}_i = \alpha \vec{u}_{i,\alpha} + \beta \vec{u}_{i,\beta} = \alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} \quad (11)$$

と求まる。ここで右辺のふたつのベクトルは互いに平行であってはならない。

授業で扱う範囲では、重複度が N の固有値の固有ベクトルは、 N 個の互いに平行ではないベクトルの和となる。

【解答編】前期 10 [2025/06/18]

問 10-01

以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルには定数倍の任意性が残る。固有値の重解が無い場合、ここでは任意定数は α とする。重複度が 2 以上の場合は複数のギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとする。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

解答：固有値は $\lambda = -1, 1$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

解答：固有値は $\lambda = -1, 1$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

解答：固有値は $\lambda = -2, 7$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 7 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (18)$$

解答：固有値は $\lambda = 2, 1, -1$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = 2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

解説→電子版のノート参照。

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

解答：固有値は $\lambda = -1, 2, 2$ ($\lambda = 2$ の重複度が 2) で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -1 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

解説→電子版のノート参照。

(6)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (22)$$

解答：固有値は $\lambda = -3, 9, 9$ ($\lambda = 9$ の重複度が 2) で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -3 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 9 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

解説→電子版のノート参照。

問 10-02

行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 92641 & 24256 & -33964 & 10201 \\ 0 & -38183 & -17771 & -66182 \\ 0 & 0 & 58620 & 28813 \\ 0 & 0 & 0 & -29913 \end{pmatrix} \quad (24)$$

この A の固有値を求めよ。固有ベクトルは求めなくてよい。

解答：固有値は $\lambda = 92641, -38183, 58620, -29913$ 。

解説：固有方程式は次式で与えられる。

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 92641 - \lambda & 24256 & -33964 & 10201 \\ 0 & -38183 - \lambda & -17771 & -66182 \\ 0 & 0 & 58620 - \lambda & 28813 \\ 0 & 0 & 0 & -29913 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (92641 - \lambda)(-38183 - \lambda)(58620 - \lambda)(-29913 - \lambda). \quad (25)$$

ここで、三角行列の行列式は対角成分の積のみが残ることを利用した。したがって固有値は $\lambda = 92641, -38183, 58620, -29913$ となる。

前期 11 [2025/06/25]

右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。回答は表面のみに記入すること。ただし、裏面を計算に使うことは可とする。

問 11-01

行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(3) 行列 A を対角化した行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ。ただし P や P^{-1} は求めなくてよい。

問 11-02

ある行列 A を対角化した行列が次式で与えられている。

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき A^n の行列式 $|A^n|$ を求めよ。ヒント： B^n の行列式を考えてみよ。

(2) 前問で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。任意定数はギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとせよ。

【解答編】前期 11 [2025/06/25]

問 10-01

以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルには定数倍の任意性が残る。固有値の重解が無い場合、ここでは任意定数は α とする。重複度が 2 以上の場合は複数のギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとする。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

解答：固有値は $\lambda = -2, 2$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

前期 11 [2025/06/25]

右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。回答は表面のみに記入すること。ただし、裏面を計算に使うことは可とする。

問 11-01

行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= \lambda^2 - 4 \rightarrow \lambda = -2, 2 \end{aligned}$$

(2) 前問で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。任意定数はギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとせよ。

$$\begin{aligned} \checkmark \lambda = 2 \text{ のとき、} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{cases} 4y = 2x \\ x = 2y \end{cases} \quad y = \alpha \text{ とすると} \\ x &= 2\alpha, \quad x = 2\alpha, \\ \text{固有ベクトル } \vec{x} &= \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \lambda = -2 \text{ のとき、} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{cases} 4y = -2x \\ x = -2y \end{cases} \quad y = \alpha \text{ とすると} \\ x &= -2\alpha, \quad x = -2\alpha \\ \text{固有ベクトル } \vec{x} &= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 行列 A を対角化した行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ。ただし P や P^{-1} は求めなくてよい。

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

※ ちなみに、固有値を2の順番に並べたのなら、

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

問 11-02

ある行列 A を対角化した行列が次式で与えられている。

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき A^n の行列式 $|A^n|$ を求めよ。ヒント： B^n の行列式を考えてみよ。

$$\begin{aligned} |B^n| &= | \underbrace{P^{-1}AP}_E \cdot \underbrace{P^{-1}AP}_E \cdot \underbrace{P^{-1}AP}_E \cdots | \\ &= |P^{-1}A^n P| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|P|} |A^n| |P| = |A^n|$$

一方で、 B は対角行列なので、

$$|B^n| = (abc)^n$$

$$\rightarrow |A^n| = (abc)^n$$

前期 12 [2025/07/02]

締め切り = [2025/07/09]。回答はこの用紙、または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は、●左上をホチキス留めし、●右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

問 12-01

以下では 3×3 行列 P と 3 次元ベクトル $\vec{v}$ および $f(\vec{v})$ を考える。

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P\vec{v} \quad (1)$$

つまり $f(\vec{v})$ は行列 P によって線形変換されたベクトルである。

以下では 3×3 行列 P はすべて直行行列となっている。与えられた行列 P について、変換の前後でベクトルの内積が保存することを確かめよ。すなわち $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v}$ を示せ。

(1)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

(2)

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

問 12-02

ふたつの 3×3 直行行列 P_1 と P_2 を以下のように与える。

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

このとき $P = P_1 P_2$ の逆行列 P^{-1} を求めよ。

問 10-01

以下の行列について、固有値と固有ベクトルを求めよ。尚、固有ベクトルには定数倍の任意性が残る。固有値の重解が無い場合、ここでは任意定数は α とする。重複度が 2 以上の場合は複数のギリシャ文字で $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などとする。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

解答：固有値は $\lambda = -2, 2$ で、固有ベクトルは以下。

$$\lambda = -2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

前期 13 [2025/07/09]

締め切り = [2025/07/16]。回答はこの用紙、または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は、●左上をホチキス留めし、●右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

問 13-01

3×3 対称行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

この固有値は $\lambda_1 = 8$ と $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (重複度 2) である。以下の問いに答えよ。

(1) $\lambda_1 = 8$ の固有ベクトル: $A\vec{p}_1 = 8\vec{p}_1$ かつ $|\vec{p}_1|^2 = 1$ を満たす正規化固有ベクトル $\vec{p}_1$ を求めよ。

(3) 前問で求めた $\vec{p}_2$ に対して $\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = 0$ かつ $A\vec{p}_3 = (-1)\vec{p}_3$ かつ $|\vec{p}_3|^2 = 1$ を満たす正規化固有ベクトル $\vec{p}_3$ を求めよ。

(4) 前問までで求めた $\vec{p}_k$ を用いて行列 P を $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ と定義する。このとき ${}^tP = P^{-1}$ となっていることを確認せよ。

(2) $\lambda_1 = -1$ の固有ベクトル: $A\vec{y}_{2,3} = (-1)\vec{y}_{2,3}$ を満たす 2 本の固有ベクトルをひとまず以下のように与える。

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

正規化固有ベクトル $\vec{p}_2 = \frac{1}{|\vec{y}_2|} \vec{y}_2$ を求めよ。

グラム-シュミットの直交化法

→ 2本のベクトル $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0\}$ から、

大きさが1の直交するベクトル $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ 、

$$|\vec{p}_1|^2 = |\vec{p}_2|^2 = 1 \text{ \& } \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$$

にとり直す方法。

$$\textcircled{1} \vec{p}_1 = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1, \text{ 2れて } |\vec{p}_1|^2 = 1.$$

$$\textcircled{2} \left(\vec{p}_2 = \frac{1}{|\vec{b}_2|} \vec{b}_2, \text{ 2れて } \right) \vec{b}_2 = \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{p}_1) \vec{p}_1$$

ととる。すると、

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 \cdot \vec{p}_1 &= \left\{ \vec{u}_2 \cdot \vec{p}_1 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{p}_1) |\vec{p}_1|^2 \right\} \\ &= \left\{ \vec{u}_2 \cdot \vec{p}_1 - \vec{u}_2 \cdot \vec{p}_1 \right\} = 0, \end{aligned}$$

となり、たしかに直交する。

$$\textcircled{3} |\vec{b}_2| \text{ を具体的に計算して、 } \vec{p}_2 \text{ が決まると、 } |\vec{p}_2|^2 = 1 \text{ も満たされる。}$$

✓ 固有値が重複度を持つ場合

→ グラム-シュミットの直交化法を用いる。

<7/9, 2025>

前期13 [2025/07/09]

締め切り = [2025/07/16]。回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は、●左上をホチキス留めし、●右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

問13-01

3×3対称行列Aが次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

この固有値は $\lambda_1 = 8$ と $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (重複度2) である。以下の問いに答えよ。

(1) $\lambda_1 = 8$ の固有ベクトル: $A\vec{p}_1 = 8\vec{p}_1$ かつ $|\vec{p}_1|^2 = 1$ を満たす正規化固有ベクトル $\vec{p}_1$ を求めよ。

$$\lambda_1 = 8 \rightarrow \vec{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ で正規化して、

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

(2) $\lambda_1 = -1$ の固有ベクトル: $A\vec{y}_{2,3} = (-1)\vec{y}_{2,3}$ を満たす2本の固有ベクトルをひとまず以下のように与える。

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

正規化固有ベクトル $\vec{p}_2 = \frac{1}{|\vec{y}_2|} \vec{y}_2$ を求めよ。

$$\sqrt{|\vec{y}_2|^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2},$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} //$$

(3) 前問で求めた $\vec{p}_2$ に対して $\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = 0$ かつ $A\vec{p}_3 = (-1)\vec{p}_3$ かつ $|\vec{p}_3|^2 = 1$ を満たす正規化固有ベクトル $\vec{p}_3$ を求めよ。

$$\vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2 = (1, -1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{b}_3 = \vec{y}_3 - (\vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2) \vec{p}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

2れて $\vec{b}_3 \cdot \vec{p}_2 = 0$ は成立。

$\vec{b}_3$ を正規化して、

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

(4) 前問までで求めた $\vec{p}_k$ を用いて行列Pを $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ と定義する。このとき ${}^tP = P^{-1}$ となっていることを確認せよ。

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^tP = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^tP \cdot P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+2+2 & \sqrt{6}-\sqrt{6} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{6} & \sqrt{9}+\sqrt{9} & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2} & \sqrt{3}-\sqrt{3} & 1+4+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow {}^tP = P^{-1} //$$

$$\lambda = 5, 8, (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -3 \\ -3 & \lambda-2 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^3 - 27 - 27 - \{3^2(\lambda-2) \times 3\}$$

$$= (\lambda-2)^3 - 27(\lambda-2) - 2 \cdot 27$$

$$= ((\lambda-2)+3)((\lambda-2)+3)((\lambda-2)-6) = \underline{(\lambda+1)^2(\lambda-8)}$$

$$\checkmark \lambda_1 = 8 \text{ のとき、 } \vec{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\checkmark \lambda_{2,3} = -1 \text{ (重根) のとき、 } \lambda E - A = -3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$\vec{y}_{2,3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$x + y + z = 0 \rightarrow \beta \vec{y}_2 + \gamma \vec{y}_3 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ととる。}$$

グラム-シュミットの直交化法より、

$$\textcircled{1} \underline{\vec{p}_2 = \frac{1}{|\vec{y}_2|} \vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\textcircled{2} \vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2 = (1, -1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{b}_3 = \vec{y}_3 - (\vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2) \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}_3 \cdot \vec{p}_2 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 0 & -3^3 & -2 \cdot 3^3 \\ & & & -27 & -54 \\ -3) & & -3 & 9 & +54 \\ \hline & 1 & -3 & -18 & 0 \\ -3) & & -3 & +18 & \\ \hline & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \textcircled{3} |\vec{b}_3|^2 = \frac{1+4+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad |\vec{b}_3| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\vec{p}_3 = \frac{1}{|\vec{b}_3|} \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

以上より、

$$P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ ととれば、}$$

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

前期 14 [2025/07/16]

締め切りは無し。期末試験のための自主学習用。

問 14-01

3次正方対称行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値をもとめよ。
- (2) A を対角化するための直行行列 P をもとめよ。
- (3) A^N をもとめよ。

問 14-02

曲線 $x^2 - xy + y^2 = 2$ を原点周りに回転して、以下の標準形に直したい。

$$A(x')^2 + B(y')^2 = 1 \quad (2)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。回転角 θ と係数 A, B を求めよ。答えは複数通り存在する可能性がある。

問 14-03

ある2次正方行列 A について、固有値が $\lambda_1 = 1$ および $\lambda_2 = 2$ であり、対応する固有ベクトルがそれぞれ

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

であると判明している。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{x} = A[\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$ をもとめよ。
- (2) ベクトル $\vec{y} = A^6[\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$ をもとめよ。
- (3) ベクトル

$$\vec{v} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

をもとめよ。

- (4) ベクトル

$$\vec{w} = A^6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

をもとめよ。

前期 14 [2025/07/16]

締め切りは無し。期末試験のための自主学習用。

問 14-01

3次正方対称行列 A が次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値をもとめよ。 1, 2, 4
(2) A を対角化するための直行列 P をもとめよ。
(3) A^N をもとめよ。

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

問 14-02

曲線 $x^2 - xy + y^2 = 2$ を原点周りに回転して、以下の標準形に直したい。

$$A(x')^2 + B(y')^2 = 1 \quad (2)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。回転角 θ と係数 A, B を求めよ。答えは複数通り存在する可能性がある。

$$\begin{cases} \textcircled{1} \theta = +\frac{\pi}{4}, A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4} \\ \textcircled{2} \theta = -\frac{\pi}{4}, A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

問 14-03

ある2次正方行列 A について、固有値が $\lambda_1 = 1$ および $\lambda_2 = 2$ であり、対応する固有ベクトルがそれぞれ

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

であると判明している。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{x} = A[\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$ をもとめよ。
(2) ベクトル $\vec{y} = A^6[\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$ をもとめよ。
(3) ベクトル

$$\vec{v} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

をもとめよ。

- (4) ベクトル

$$\vec{w} = A^6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

をもとめよ。

問 14-03 (1)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{y} &= A^6(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 1^6 \vec{v}_1 + 2^6 \vec{v}_2 \quad (2^6 = 64) \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 2^6 \cdot 1 \\ 1 + 2^6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{より、}$$

$$\vec{u} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 1 \\ 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \vec{w} = A^6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A^6(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$= 1^6 \cdot \vec{v}_1 - 2^6 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 - 2^6 \cdot 1 \\ 1 - 2^6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -61 \\ -63 \end{pmatrix}$$

例 14-01

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(1) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2 - (\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\{\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1\} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4),$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$$

$$(2) \checkmark \lambda_1 = 1 \rightarrow (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

$$x \text{ は任意。} \begin{cases} -2y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \text{ より } y = z = 0. \text{ よって、}$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ これは } |\vec{p}_1|^2 = 1 \text{ もすこに満たしている。}$$

$$\checkmark \lambda_2 = 2 \rightarrow (\lambda_2 E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \rightarrow y = z, \end{cases}$$

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad |\vec{p}_2|^2 = 1 \text{ を満たす。}$$

$$\checkmark \lambda_3 = 4 \rightarrow (\lambda_3 E - A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x = 0, \\ y + z = 0 \rightarrow y = -z \end{cases}$$

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad |\vec{p}_3|^2 = 1 \text{ を満たす。}$$

(つづく)

(例 14-01 つづき)

$$\text{したがって } P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$P^{-1}AP = {}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) $A^N = ?$

$$({}^t P A P)^N = {}^t P (A)^N P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 4^N \end{pmatrix} \text{ である、}$$

$$A^N = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 4^N \end{pmatrix} {}^t P$$

$${}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 4^N \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2^N & 2^N \\ 0 & -4^N & 4^N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^N + 4^N & 2^N - 4^N \\ 0 & 2^N - 4^N & 2^N + 4^N \end{pmatrix}$$

とたす。

14-02

$$2 = x^2 - xy + y^2 = (x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

✓ Aの固有値:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1/2 \\ 1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2} \text{ \& } \lambda_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \vec{v}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が正規化された固有ベクトル
としてとれる。 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ 。

$$\text{✓ 14-2①: } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

5式

$$\text{5式} = (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y')^t P A P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= (x', y') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (x')^2 + \frac{3}{2} (y')^2 = 2,$$

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{3(y')^2}{4} = 1$$

$$\text{したがって } A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, \theta = +\frac{\pi}{4} \text{ となる。}$$

$$\text{✓ 14-2②: } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = -\frac{\pi}{4}$$

(つづ)

14-02 つづき)

$$\text{5式} = (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y')^t P A P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= (x', y') \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{3}{2} (x')^2 + \frac{1}{2} (y')^2 = 2,$$

$$\frac{3}{4} (x')^2 + \frac{1}{4} (y')^2 = 1$$

$$\text{したがって } A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4}, \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ となる。}$$