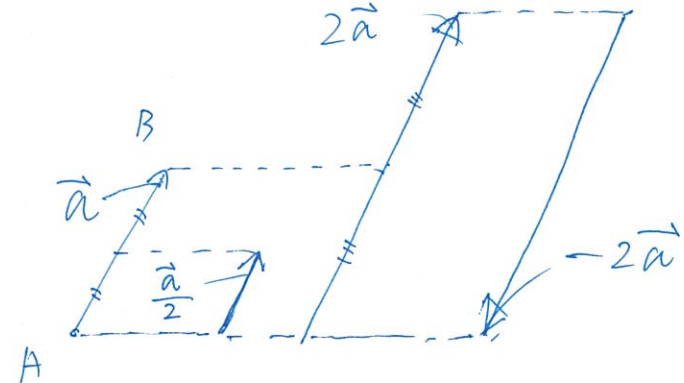


ベクトルの実数倍

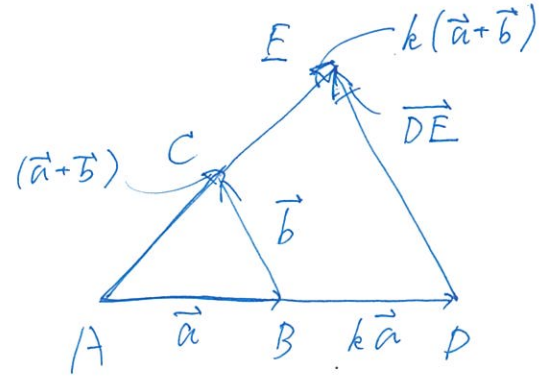
テキスト p. 4

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ に対して、実数 k 倍すると $k\vec{a}$.



$k < 0 \rightarrow$ 向きが逆転

$k = 0 \rightarrow k\vec{a} = \vec{0}$ (零ベクトル)



- $\angle CAB = \angle EAB$
 - $1:k = AB:AD = AC:AE$
- $\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ へ k 倍 $\rightarrow k\vec{a} = \overrightarrow{AD}$
 - $(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AC}$ へ k 倍 $\rightarrow k(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AE}$
 - $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ より $|\vec{b}| : |\overrightarrow{DE}| = 1:k \rightarrow \overrightarrow{DE} = k\vec{b}$
- したがって

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \text{ , これは}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ を意味する.}$$

$\langle 4/8, \text{火}, 2025 \rangle$ ~~2年~~ 3年 M2 組 代数キカの用

テキスト p. 90~

クラメールの公式 $\rightarrow$ 連立方程式を解くための一つ。

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} \text{ , ただし } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ , } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2次の解 $\vec{x} = (x, y, z)$ は以下で与えられる。

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} \text{ , } y = \frac{\Delta_y}{|A|} \text{ , } z = \frac{\Delta_z}{|A|}$$

ただし $|A| = \det A$. また

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ , } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ , } \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

* 使用条件: $|A| = \det A \neq 0$ であること。

* 文字を含む場合に特に有効。 $\rightarrow$ 関 3. 8

<4/14, 2025> 代数キカ用

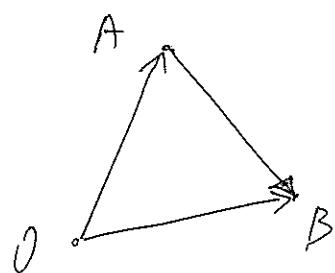
$$\checkmark \vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1 \ \& \ a_2 = b_2$$

$$\checkmark |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\checkmark \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$$

$$\checkmark k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

二つの点を結ぶベクトルの成分計算



$$\vec{OA} = (a_1, a_2), \quad \vec{OB} = (b_1, b_2)$$

このとき、

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

添字 "x" & "y" でもOK.

単位ベクトルの求め方

→ $\vec{a}$ を自身の大きさ $|\vec{a}|$ で割る.

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \vec{a} \\ &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) \end{aligned}$$

<4/15, 2025> 3-M2 代数キカ用

行列式 ---- 正方 ($n \times n$) 行列にのみ定義される.

$$\det A = |A| = \sum_{P_n} \text{sgn}(P_n) \prod_{i=1}^n a_{i, p(i)}$$

$$\det A = |A| = \sum_{P_n} \text{sgn}(P_n) \prod_{i=1}^n a_{i, p(i)} = \sum_{P_n} \text{sgn}(P_n) a_{1, p(1)} a_{2, p(2)} \cdots a_{n, p(n)}$$

where

$$\checkmark P_n = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\} \leftarrow P_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\checkmark P_n \text{ のとり方 } = n! \text{ 通り. } \rightarrow \text{ なので } \det A \text{ にも } n! \text{ 個の項が含まれている.}$$

$$\checkmark \text{sgn}(P_n) = (-1)^{T(P_n)}, \quad T(P_n) = \text{転倒数}$$

転倒数 $T(P_n)$ $\Rightarrow P_n = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ を左から見ていったとき、左の数 > 右の数、となっている (p_i, p_j) のペアの数。

例: $n=4$ で $P_n = \{3, 1, 4, 2\}$ だったら、
 $(3 > 1), (3 > 2), (4 > 2)$ で $T(P_n) = 3$.

例: $n=5$ で $P_n = \{1, 3, 5, 4, 2\}$ だったら、
 $(3 > 2), (5 > 4), (5 > 2), (4 > 2)$ で $T(P_n) = 4$. $\text{sgn}(P_n) = (-1)^4 = (+)$.

$n=3$ の場合

~~①~~ ① $P_{n=3} = \{123\}, \{231\}, \{312\}, \{132\}, \{213\}, \{321\}$
の 6 通り。それぞれ

$\text{sgn}(P_3) = (+), (+), (+), (-), (-), (-)$ を持つ。

$$\textcircled{2} \det A_{3 \times 3} = |A_{3 \times 3}|$$

$$= \sum_{P_3} \text{sgn}(P_3) \prod_{i=1}^3 a_{i, p(i)} \\ = a_{1, p(1)} a_{2, p(2)} a_{3, p(3)}$$

← 根性!

$$= (+) \{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}\} \\ + (-) \{a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31}\}$$

サラスの公式と一致!

ぶっちゃけ、

✓ 手で計算できるのは 3×3 くらいまで。

$n!$ 個の項は多過ぎ!

✓ この後伝える ~~サラスの公式~~ の方が重要。
(定理) 定理 (77ニク) 集

✓ 定理: 対角行列の $\det \rightarrow \times$ 簡単!

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}} //$$

✓ 定理: 三角行列の $\det \rightarrow$ 実は対角のときと全く同じ!

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22} \dots a_{nn}} //$$

<4/21, 月, 2025> 3-M2, 代数&幾何用ノート

③ ③目の單元 = $n \times n$ 行列の 余因子展開 (テキスト p. 112~116 前章)
 ※ A^{-1} の公式, クラメル の 公式 は 次回 = ④ 週目 まで。

まずは $n \times n$ 行列の 定義 & 表記法 の 確認 から 始めよう
 絶対に 良いた。それ 自身 の ため にも。テキスト に 合わせて。

✓ 行列 $A = (a_{ij}) = (a_{ij}^i) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

✓ 列ベクトル $\vec{a}_j \equiv \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \rightarrow$ 行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n)$
 上付き

✓ 行ベクトル $\vec{a}^{(i)} \equiv (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) \rightarrow A = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vec{a}^2 \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix}$

✓ 行列式 $\det A = |A| \equiv \text{~~~~~}$
 (テキスト p. 97)

✓ 十字除外行列 $D_{ij}(A)$:

A の i 行 j 列 を 除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列 を $D_{ij}(A)$ とする。

✓ 余因子 $\tilde{a}_{ij}$: $(n-1)$

A の i 行 j 列 を 除いた ~~$n \times n$~~ $(n-1) \times (n-1)$ 行列 を D_{ij} とする。

$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 除外

$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$

この D_{ij} の 行列式 を $(-1)^{i+j}$ 倍したものを 余因子 とする。
 (テキスト p. 112)

$\tilde{a}_{ij} \equiv (-1)^{i+j} |D_{ij}|$

✓ 余因子行列 $\tilde{A}$:

$\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & & & \tilde{a}_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{a}_{nn} & \\ \tilde{a}_{n1} & & & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix}$

✓ 定理 = "det A のサイズ縮小の定理"

条件 { ① |A| の中身で、i 行の a_{ij} 以外が全て 0.
③ |A| " , j 列の a_{ij} " .

~~②~~ ① か ② のどちらかが成り立っているときに使える。

・ ① の場合、 $\det A = |A|$ は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{ni} & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} |D_{ij}|$$

$$= a_{ij} \cdot \widetilde{a_{ij}}$$

(i,j) 番目の余因子

・ ② の場合、 $\det A = |A|$ は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot \widetilde{a_{ij}}$$

つまり ① & ② どちらでも $|A| = a_{ij} \cdot \widetilde{a_{ij}}$ となる。

証明:

① の場合、

$$|A| = \begin{vmatrix} & & & a_{1j} & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{nj} & & \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} i \text{ 行を一つ上の行と} \\ \text{交換することを} \\ (i-1) \text{ 回くり返す。} \end{array}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

更に、j 列を左の列と交換することを (j-1) 回くり返す。

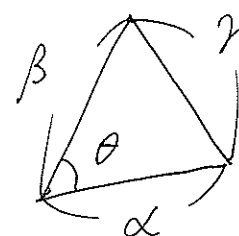
$$= \underbrace{(-1)^{i-1} (-1)^{j-1}}_{(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a_{ij} (-1)^{i+j} |D_{ij}|$$

$$= \widetilde{a_{ij}}$$

② の場合 → ① と同様に証明できる。

余弦定理

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \theta$$



$$\begin{cases} \alpha = |\vec{a}|, \\ \beta = |\vec{b}|, \\ r = |\vec{AB}|. \end{cases}$$

✓ 定理 = “余因子展開の定理”

① 第 i 行に関する展開:

$$|A| = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in} \tilde{a}_{in}$$

② 第 j 列に関する展開:

$$|A| = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$$

証明 → 前述の “ $\det A$ のサイズ” 縮小の定理” & 先週
やった “行(列)による分割の定理” を使う。

②の証明: 第 j 列について、

$$|A| = \left[\dots \begin{Bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{Bmatrix} \dots \right] = \left[\dots \left\{ a_{1j} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \right\} \dots \right]$$

$$= a_{1j} \left[\dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \right] + a_{2j} \left[\dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \right] + \dots + a_{nj} \left[\dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \dots \right]$$

$$= a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$$

定理: $A \tilde{A} = \tilde{A} A = |A| E$ $\xrightarrow{n \times n \text{ 単位行列}}$

定理: $|A| \neq 0$ のとき、上記の定理から、

$$E = \frac{A \tilde{A}}{|A|} \iff A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \quad \text{と求まる。}$$

(X2)

✓ A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ が存在
 $\Downarrow$
 $A\vec{x} = \vec{b}$ が可解

✓ ~~73x-16~~ 逆行列の公式: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$

✓ 73x-N の公式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 列

3年M2組のGWカワイのxと刀 $\rightarrow \langle 5/14, 2025 \rangle$

* $\langle 5/7, 2025 \rangle$ は月曜日
授業。

$\langle 4/30, 水, 2025 \rangle$ 3-M2 代数キカ④ 用ノート (p.116~118)

✓ A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ が存在 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ が可解。
(p.110)

✓ 逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

✓ 73x-ルの公式

$A\vec{x} = \vec{b}$ の解 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は? ただし $|A| \neq 0$ とする。

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\rightarrow x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 列ベクトルを $\vec{b}$ で
書き

<5/14, 水, 2025> 3-M2 代数キカ(5) 用ノート

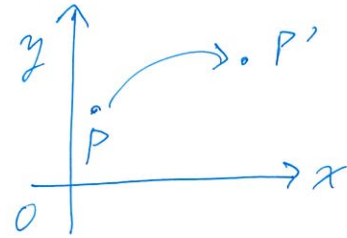
今日 = 線形変換 (テキスト p. 121 ~ 128)

変換とは?

→ ある点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して別の点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を定めたとき、

$$f: P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$$

などと書く。



変換のベクトル & 行列による表記

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を用いると、変換 f は一般的に

$$f(\vec{u}) = \vec{u}' = A\vec{u} + \vec{b}, \text{ すなわち}$$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \text{ と書ける。}$$

3次元空間なら、 $\vec{u} = (x, y, z)$ 等として、

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

線形変換

変換の中でも特に ① $\vec{b} = \vec{0}$ かつ ② 行列 A が x, y, z に依存しないものを線形変換と呼ぶ。

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

→ 応用上、とても重要!

線形性

変換 f が線形変換であるとき、次の性質 = 線形性 になり立つ。

$$\begin{cases} \text{① } f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) \\ \text{② } f(k\vec{u}) = kf(\vec{u}), \quad k \cdots \text{任意定数} \end{cases}$$

① の証明: f の表現行列を A とすると、

$$f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2\} = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2 = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2).$$

② の証明: 同じく A を用いて、

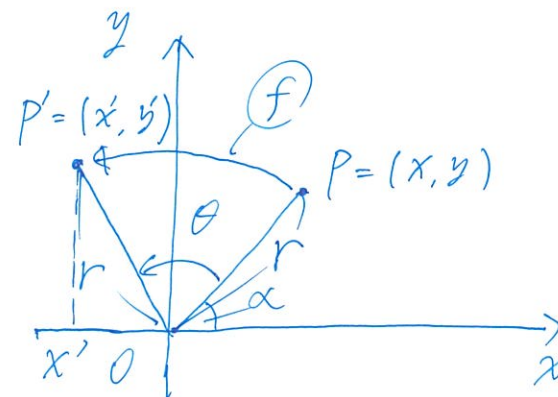
$$f(k\vec{u}) = A\{k\vec{u}\} = k\{A\vec{u}\} = kf(\vec{u}).$$

恒等変換 → “何もしない” とき、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

回転変換 → 原点を中心に角度 θ だけ回転させたとき、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$



$$\text{証明: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \cos \theta - \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \sin \theta \\ \underbrace{r \sin \alpha}_{y} \cos \theta + \underbrace{r \cos \alpha}_{x} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2 の行列 A を
→ 表現行列
と呼ぶ。

<5/20, 火, 2025> 代数・幾何 (3-M2) [6]

本日 → 合成変換、逆変換、直線や曲線の像
(p. ¹²⁸~~129~~ ~ 134)

合成変換

2つの変換 $\left\{ \begin{array}{l} f: P' = f(P) \\ g: P' = g(P) \end{array} \right\}$ を順に行うこと。
線形

$f \rightarrow g$ の順: ~~$g \circ f = g$~~ $P_1'' = g \circ f(P) = g(P')$
 $(P \xrightarrow{f} P' \xrightarrow{g} P'')$ $= g(f(P))$

$g \rightarrow f$ の順: $P_2'' = f \circ g(P) = f(P_2') = f(g(P))$
 $(P \xrightarrow{g} P_2' \xrightarrow{f} P_2'')$

注意!!

~~$g \circ f = g$~~

一般的には $g \circ f \neq f \circ g$ である!!

詳細は後述。

合成変換と行列の積

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、 $\left\{ \begin{array}{l} f: f(\vec{v}) = A\vec{v}, A \dots \text{行列} \\ g: g(\vec{v}) = B\vec{v}, B \dots \text{行列} \end{array} \right.$

と与えられるとする。このとき合成変換は

$$g \circ f(\vec{v}) = g(f(\vec{v})) = g(A\vec{v}) = B(A\vec{v}) \\ = (BA)\vec{v}$$

$$f \circ g(\vec{v}) = \dots = (AB)\vec{v}, \text{ 与えられる。}$$

注意!!
(もう一度)

一般的に $BA \neq AB$ (行列の積) なので、
 $g \circ f \neq f \circ g$ である。

逆変換

線形変換 f が逆変換 $f^{-1} \Leftrightarrow f$ の表現行列 A が正則
を持つ。

このとき f^{-1} の表現行列 $= A^{-1}$ である。

→ つまり A^{-1} を求めるテクニックが重要。

線形

変換による直線の像 (p. 132)

① $ax + by + c = 0 \rightarrow y = kx + l$ の形に直す。

② $x = t$ とおくと、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ kt + l \end{pmatrix}$ より、 $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$

といて、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\vec{d} + \vec{c} = t \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$ と書き直す。

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \{ t\vec{d} + \vec{c} \} = \begin{pmatrix} pt + q \\ rt + s \end{pmatrix},$$

この形まで解く。

$$\textcircled{4} \begin{cases} x' = pt + q \\ y' = rt + s \end{cases} \quad \text{から } t \text{ を消去して、}$$

$$a'x' + b'y' + c' = 0 \quad \text{or}$$

$$y' = k'x' + l' \quad \text{を得る。}$$

⑤ $(x', y') \rightarrow (x, y)$ に直す。

変換による曲線の像 (p. 133)

$F(x, y) = 0$ ----- 曲線の方程式

① 線形変換の逆変換の表現行列 A^{-1} を求める。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} F(x, y) = 0 \text{ に } \begin{cases} x = ax' + by' \\ y = cx' + dy' \end{cases} \text{ を代入して、}$$

$$G(x', y') = 0 \quad \text{を得る。}$$

③ $(x', y') \rightarrow (x, y)$ に直す。

✓(復習) 行列の階数 = rank (p. 65, 昨年度)

→ 基本変形した後の階段の段数。rank $A = r$ など。
各自で読み直しておいて。 (p. 110)

✓(補足) 1次独立と1次従属: n 個のベクトル $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ について、

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \vec{0},$$

が自明解 $\vec{c} = \vec{0}$ しか持たないとき、

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ は互いに1次独立。そうでないなら1次従属。

✓(補足) $n \times n$ 行列 A の正則条件 (p. 110)

(1) A は正則。即ち A^{-1} が存在する。 ~~$|A| \neq 0$~~
→ これは以下の全2と互いに等価である。

(2) $|A| \neq 0$

(3) rank $A = n$

(4) A の行ベクトルが1次独立。

(5) A の列 " "。

(6) $A\vec{x} = \vec{b}$ はたか1つの解 $\vec{x}$ を持つ。

(7) $A\vec{x} = \vec{0}$ を満足するのは自明な解 $\vec{x} = \vec{0}$ のみ。

→ 例 = 問 06-05 ヒート、

あるベクトル群 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が1次従属である。



行列式 $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} = |A| = 0$ となってしまう。

rank, 1次独立と1次従属、正則の条件、

<5/28, 水, 2025> 3-M2, 代数・力⑦用ノート

予テスト前 → 定義をよく確認しておくこと!

例: 余因子, 余因子行列, 余因子展開,
クラメル公式, 正則条件, etc.

<6/5, 2025>

図⑥用カダイ⑥ → 返却, ② → All In!

<6/6, 2025>

② → 答問, 小倉 → A

小テストを実施 → ①数の計算 + 判別式

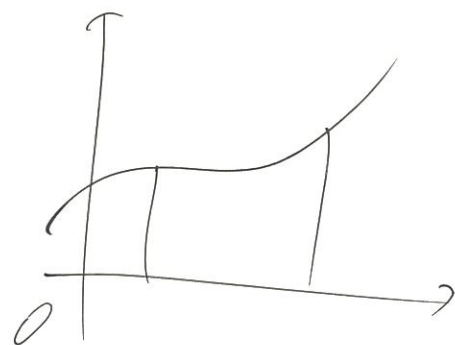
<6/6, 金, 2025>

1-2, 基礎数Ⅱ, ② → 問根山

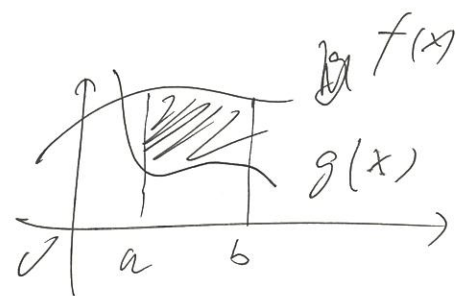
<6/10, 2025> 3-I 解析⑧用ノート

事後

面積と定積分 (p. 102 ~ 105)

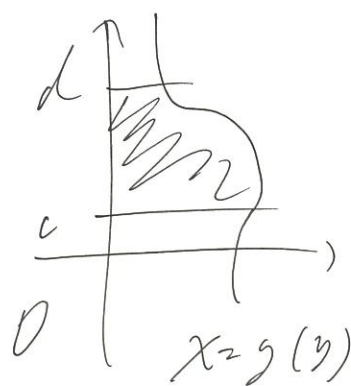


$$S = \int_a^b f(x) dx$$



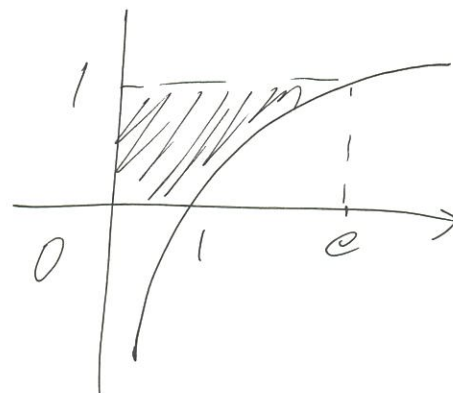
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_c^d g(y) dy$$

例: $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$



$$S = \int_0^1 e^y dy$$
$$= [e^y]_0^1 = e - 1$$

〈6/10, 火, 2025〉 3-M2 代数キカ 8月 ノート

今日のS 「固有値、固有ベクトル」 (p.150~)

✓ 固有ベクトル

ある線形変換によって、^{ベクトル}~~変~~_uが、

$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, つまり定数 λ 倍だけしか
変えなかった。

→ 2のとき、 λ を行列 A の固有値、
 $\vec{u}$ を " の固有ベクトル、<sub>と
呼ぶ。</sub>

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対しては、

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_1$, つまり
 $\lambda=2$ の
固有ベクトル。

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow A\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)\vec{u}_2$, つまり
 $\lambda=-1$ の
固有ベクトル

✓ 固有値 λ の求め方

行列 A の固有値 λ は次式で求まる。

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0 \quad \text{"固有方程式"}$$

$n \times n$ 行列なら、一般に λ の n 次多項式になる。
"固有方程式"

✓ 2×2 の固有方程式

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

→ λ の2次方程式なので、複素数の範囲まで
全めると、必ず解ける。

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \cancel{A} - \lambda E \end{vmatrix} = 0 = (\lambda - 4)(\lambda + 1),$$

$\lambda = 4, -1$

$\lambda=4$ に対しては、 $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおくと、 $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 自由度
が1つ
残る。

$$\rightarrow (4E - A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=-1$ に対しては、... $\rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ やはり定数倍
だけ自由度不減。

<6/18, 水, 2025> 3-M2 代数キカ 10 用ノート

固有値と固有ベクトル

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \text{ ただし } \vec{x} \neq \vec{0}$$

求め方の理由

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \rightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

もし $B \equiv (A - \lambda E)$ が逆行列 B^{-1} を持つと
すると、 ~~$B\vec{x} = \vec{0}$~~

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

$$B^{-1}B\vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{0} \text{ となってしまふ。}$$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ となるためには、 $B = (A - \lambda E)$ は B^{-1} を
持つていてはならない。

$$\iff \det B = \det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0 \text{ である。}$$

固有方程式

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0$$

A が $n \times n$ なら、 λ^n 次の多項式。

例① = 例題 5.2 (p.154)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

よって固有値 $\lambda = 1, 2, 3$

(i) $\lambda = 1$ のとき、 $(\lambda E - A)\vec{x} = \vec{0}$ より、 $\vec{x} = (x, y, z)$ とすると、

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+z=0, \\ y-z=0. \end{cases}$$

$z = \alpha$ と置くと、 $x = -\alpha$ & $y = \alpha$

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトル。

定数 α 倍だけ任意性が残る。

$$= \{ \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2} \} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ -1 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \{ \textcircled{1} \times (-1), \textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3} \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \{ \textcircled{1} + \textcircled{2}, \textcircled{3} + \textcircled{1} \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \{ \textcircled{3} + \textcircled{1}, \textcircled{3} \times \frac{1}{2} \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形による

掃き出し法 (p.69)

(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{やはり掃き出し法}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-z=0, \end{cases} \quad z = \beta \text{ とおくと } \vec{x} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $\lambda = 3$ のとき $\rightarrow$ 省略 (教科書 p.155 通り)。

固有方程式が重解を持つ場合

例 = 例題 5.3 (p.155)

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & -8 \\ 7 & 0 & -4 \\ 21 & -3 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda E| = m = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda = \underbrace{1}_{\text{重複度 2}}, \underbrace{2}_{\text{重複度 1}}$$

重複度 2 重複度 1

(i) $\lambda = 1$ のとき、

$$B = \lambda E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} -14 & 2 & 8 \\ -7 & 1 & 4 \\ -21 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

よって、

$$(\lambda E - A) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 2 & 8 \\ -7 & 1 & 4 \\ -21 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-7) & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ -7 & 1 & 4 \\ 3 \cdot (-7) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -7x + y + 4z = 0$$

$x = \alpha$, $z = \beta$ とおくと、 $y = 7x - 4z$ より、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 7\alpha - 4\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{2本が答え。}$$

* 別に $y = \gamma$, $z = \delta$ とおいても良い。その場合、

$$x = \frac{1}{7}y + \frac{4}{7}z \text{ より、}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{7} + \frac{4\delta}{7} \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表す。}$$

$$\text{222, } \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{よって、実際の自由度は変わらない。}$$

* 別に $x = \alpha$, $y = \beta$ とおいても良い。 ~~(4/7)z~~

⊥

↑

$$-7x + y + 4z = 0 \rightarrow z = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}y \text{ より、}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{7}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \quad \text{222,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{4}{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{よって、やはり実際の自由度は変わらない。}$$

(ii) $\lambda = 2$ のとき、 $(\lambda E - A) \vec{x} = \vec{0}$ より、

$$\begin{pmatrix} -13 & 2 & 8 \\ -7 & 2 & 4 \\ -21 & 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{掃き出し法?}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$$

よって、 $y = \beta$ とおくと、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -13 & 2 & 8 & | & 0 \\ -7 & 2 & 4 & | & 0 \\ -21 & 3 & 13 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ -7 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -12 & 4 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

図 → 鴨下 <6/18, 2025>

例 06-02

$$2x + 3y + 4 = 0$$

$$\rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$x = t \text{ とおくと,}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{2}{3}t - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

よって,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{2}{3}t - \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t - 2t - 4 \\ 4t + 2(-2t - 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

例 06-03

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \cos \frac{-\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \sin \frac{-\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}},$$

$$\text{また } x^2 - y^2 = 2 \text{ に代入すると,}$$

$$\frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{(-x' + y')^2}{2} = 2$$

$$\frac{4x'y'}{2} = 2$$

$$x'y' = 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ に直ると, } xy = 1$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{x}$$

P2] 07-04, (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 25 = -19$$

(2) $\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9$, $\tilde{a}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\tilde{a}_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$, $\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\tilde{a}_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 12$, $\tilde{a}_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$, $\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$

$$\tilde{A} = t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

P2] 07-02

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{vmatrix} \vec{b} & 1 & 2 \\ \downarrow & 3 & 6 \\ \downarrow & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -4$

$\begin{vmatrix} 1 & \vec{b} & 2 \\ 2 & \downarrow & 6 \\ 1 & \downarrow & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \vec{b} \\ 2 & 3 & \downarrow \\ 1 & 3 & \downarrow \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2, \quad y = \frac{-10}{-2} = 5, \quad z = \frac{6}{-2} = -3$$

P2] 07-06

$$2x + 3y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{2}{3}t - \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 2t + 4 \\ 3t - 5 \cdot \frac{-2t-4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ \frac{19}{3}t + \frac{20}{3} \end{pmatrix}, \text{ so,}$$

$$-\frac{x'}{4} + \frac{3}{19}y' = -t - 1 + \frac{3}{19}\left(\frac{19}{3}t + \frac{20}{3}\right)$$

$$= -1 + \frac{20}{19} = \frac{1}{19},$$

$$-\frac{19}{4}x' + 3y' = 1,$$

$$-19x' + 12y' = 4 \rightarrow -19x + 12y - 4 = 0, \text{ or}$$

$$y = \frac{19}{12}x + \frac{1}{3}$$

P2] 07-05

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-28 + 20) = 8$$

問 07-07

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ の ③ 軸変換なので } A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{-\pi}{4} & -\sin \frac{-\pi}{4} \\ \sin \frac{-\pi}{4} & \cos \frac{-\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix}$$

これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると、

$$\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 = 4$$

$$\frac{2x'^2 + 2y'^2 + 2x'y' - 2x'y'}{2} = 4$$

$$x'^2 + y'^2 = 4, \text{ } O \text{ を } O' \text{ に直して、}$$

$$x^2 + y^2 = 4, \text{ } \pi \text{ の式に一致。}$$

2) 10-01

(4)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -7 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -(6+\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) - 21 - 15 \\ - \left\{ -3(6-\lambda) - 3(6+\lambda) - 35(2-\lambda) \right\} \\ = (\lambda-2)(\lambda-6)(-\lambda+6) - 36 + 36 + 35(2-\lambda) = 0, \\ (\lambda-2)(\lambda^2-36) + 35(\lambda-2) = 0 \\ (\lambda-2)\{\lambda^2-36+35\} = (\lambda-2)(\lambda^2-1) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0, \\ \lambda = 2, 1, -1 //$$

$\lambda = 2$ のとき、

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -8 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -8 & 0 \end{array} \right] \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \begin{cases} -x + z = 0 \rightarrow z = \alpha \geq 1? \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

$\lambda = 1$ のとき、

$$A - E = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -7 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \begin{cases} y - z = 0 \rightarrow z = \alpha \geq 1? \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

$\lambda = -1$ のとき、

$$A + E = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -5 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -5 & 0 \end{array} \right] \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \begin{cases} x - z = 0 \rightarrow z = \alpha \geq 1? \\ y = 0 \end{cases} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

10-01

$$\begin{aligned}
 (5) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 6 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 \\
 &= (\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-5)(-1) - 18(\lambda-2) = 0 \\
 (\lambda-2) \{ (\lambda+4)(\lambda-5) + 18 \} &= (\lambda-2) \{ \lambda^2 - \lambda - 2 \} = (\lambda-2)^2 (\lambda+1), \\
 \lambda &= -1, 2, 2 \quad //
 \end{aligned}$$

$\lambda = -1$ のとき、

$$A + E = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & | & 0 \\ 3 & 3 & 6 & | & 0 \\ -3 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ -3 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \downarrow \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} &\rightarrow z=\alpha \text{ とし、 } \vec{x} = \begin{pmatrix} +\alpha \\ +\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\lambda = 2$ のとき、*重複度=2

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & | & 0 \\ 3 & 0 & 6 & | & 0 \\ -3 & 0 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y=\beta \text{ * 何でも} \end{cases} \rightarrow z=\alpha \text{ とし、 } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad //$$

$$(6) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 5-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3 - 4^3 - 4^3 \\
 - \{ 4^2(5-\lambda) + 4^2(5-\lambda) + 4^2(5-\lambda) \}$$

$$= (5-\lambda)^3 - 2 \cdot 4^3 - 3(5-\lambda) \cdot 4^2$$

$$= X^3 - 2Y^3 - 3XY^2 \quad //$$

$$= (X-2Y)(Y^2 + 2YX + X^2)$$

$$= (X-2Y)(Y+X)^2 = (-\lambda-3)(9-\lambda)^2 \rightarrow \lambda = -3, 9, 9$$

$\lambda = -3$ のとき、

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 & | & 0 \\ -4 & 8 & -4 & | & 0 \\ -4 & -4 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \rightarrow x=\alpha \text{ とし、 }$$

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad //$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 9$ のとき、*重複度=2

$$A - 9E = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ =0 \end{cases}$$

したがって $x=\alpha, y=\beta$ とすると、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad //$$

本日 → 正方行列の対角化 (p. 157)

$n \times n$ 行列 A に 別の行列 P と P^{-1} をかけて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{の形にすることを} \\ \text{対角化という。} \end{array}$$

ここで実は、 $\lambda_i = 1 \sim n$ は A の固有値であり、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \quad \text{で、} p_i \text{ は } A \text{ の固有ベクトルである。}$$

導出: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 両辺に左から P をかけて、
 n 本の

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{ここで } P \text{ を列ベクトル } p_1 \sim p_n \text{ を用いて書くと、}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad \text{よって}$$

$AP_i = \lambda_i P_i$, つまり λ_i & p_i は A の固有値 & 固有ベクトルに他ならない。

~~対角化可能な条件も~~
 ~~$n \times n$ 行列 A が相異なる~~

例 = 例題 5.5 (p. 160) ← 例題 5.2 (p. 154) の続き

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_i = 1, 2, 3 \text{ 々}$$
$$p_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ によって、}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ where } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ と対角化される。}$$

* ちなみに、 $R = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置けば、

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

* 上記で P^{-1} や R^{-1} を具体的に求める必要は無い。

定理: 固有ベクトルの1次独立性 (p. 161)

A の異なる固有値 λ_1 と λ_2 に対応した固有ベクトル p_1 と p_2 は1次独立である。即ち、

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 = 0 \iff c_1 = c_2 = 0 \text{ のみ。}$$

証明 → テキスト参照

対角化の可能性 n 本が
 $n \times n$ 行列 A の固有ベクトル、すべて互いに1次独立であれば、 P^{-1} が存在して、対角化できる。(続く)

(続き) 逆に、たとえば $P_j = k P_i$ などでは一次独立では
~~従属である~~

~~とすると、~~

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_i & k P_i & \dots & P_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \text{ ととるしかない。しかし、}$$

2の場合は $|P| = 0$ となり、 P^{-1} が存在できない (p.110)。

例 → 対角化できない例。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & \lambda-3 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-3)^2 \rightarrow \lambda = 0, 3$$

$\lambda = 0$ のとき、

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ 4y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow P_1 = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$\lambda = 3$ のとき、

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

3本目の P_3 (1次独立) は
 存在しない。

→ A は対角化できない。

例② → 重複度があるが対角化できる例。

先週の課題 問 10-01, (6)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -3, 9, 9,$$

$$P_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_{-9} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ という、1次独立}$$

なベクトルが3本ある。

よって、 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ は正則で P^{-1} が存在する。

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

多分、 $\left[* \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

0 が 6 個以上あると、対角化できない。

$n \times n$ なら、0 が $n^2 - n = n(n-1)$ 個以上あると、

内積と直交変換 (p. 163)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{aligned} \text{内積: } \vec{x} \cdot \vec{y} &\equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ &= \prod_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

$$\text{大きさ (ノルム): } |\vec{x}| \equiv \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

性質

$$\begin{cases} (1) \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \\ (2) \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \\ (3) (k\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (k\vec{y}) = k \vec{x} \cdot \vec{y} \\ (4) \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \end{cases}$$

シュワルツの不等式

$$-|\vec{x}||\vec{y}| \leq \vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

例: 3, つづの 2 or 3 次元ベクトルなSば、当然。

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

直交行列 (p. 164)

定義: 逆行列が転置行列になっている行列。

$$P^{-1} = {}^t P \rightarrow {}^t P P = E \quad \text{単位行列}$$

直交行列の特徴①: 列ベクトルが直交

$$P = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \text{ が直交行列 } (P^{-1} = {}^t P)$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

つまり各列ベクトルが互いに直交している。

直交行列の特徴②: ベクトルの内積の保存

$$(1) \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ 2れを直交行列 } P \text{ で線形変換する。}$$

↓

$$f(\vec{x}) = P\vec{x}, \quad f(\vec{y}) = P\vec{y}, \quad \text{2のとき、次式が成り立つ。}$$

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = (P\vec{x}) \cdot (P\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

(2) 上記で $\vec{y} = \vec{x}$ とすると、

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}, \quad \text{すなわち、}$$

$$|f(\vec{x})| = |P\vec{x}| = |\vec{x}| \quad \text{が成り立つ。}$$

問 5.7 (p. 165)

性質 5.7 の (2) $\rightarrow$ (1) を導け。

$$(2) \quad |f(\vec{x})| = |P\vec{x}| = |\vec{x}|$$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \text{ として代入すると、}$$

$$|f(\vec{y} + \vec{z})| = |P(\vec{y} + \vec{z})| = |\vec{y} + \vec{z}|, \text{ よって}$$

$$|P(\vec{y} + \vec{z})|^2 = |\vec{y} + \vec{z}|^2$$

$$\begin{aligned} (P\vec{y})^2 + 2(P\vec{y}) \cdot (P\vec{z}) + (P\vec{z})^2 \\ = (\vec{y})^2 + 2\vec{y} \cdot \vec{z} + (\vec{z})^2, \end{aligned}$$

$$\text{222 性質 (2) より、} \quad (P\vec{y})^2 = (\vec{y})^2 \text{ および} \\ (P\vec{z})^2 = (\vec{z})^2 \text{ なので、}$$

$$2(P\vec{y}) \cdot (P\vec{z}) = 2\vec{y} \cdot \vec{z}, \text{ 即ち}$$

$$f(\vec{y}) \cdot f(\vec{z}) = (P\vec{y}) \cdot (P\vec{z}) = \vec{y} \cdot \vec{z} \text{ となる。}$$

<7/8, 火, 2025> 3-M2 代数・力 [3] 用ノート

本日 → 実対称行列の対角化 (p. 166)

※以後、実対称行列の実は省略する。

✓ 定理 5.10 (p. 166)

(1) 対称行列の固有値は実数: $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

→ 証明は省略、テキスト p. 166~167 を読め。

✓ 直交行列による対称行列の対角化

||
定理 5.11 (p. 167)

$A \in n \times n$ 対称行列とする。その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。~~その~~このとき直交行列 P を使って、

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ と対角化できる。}$$

証明:

λ_k の固有ベクトルを $\vec{g}_k$ とする。 $\vec{p}_k = \frac{1}{|\vec{g}_k|} \vec{g}_k$ ととり

直すと、 $\vec{p}_k$ は大きさが 1 の固有ベクトル: $\vec{p}_k \cdot \vec{p}_k = 1$

さらに、異なる λ_i の固有ベクトルは直交するので、

$$\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

以上より、

$$\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\checkmark)$$

(→) 定理 5.8 (p. 164) より、

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \text{ は直交行列である。}$$
$$P^{-1} = {}^tP$$

定理 5.3 (p. 157) より、

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

例 = 例題 5.6, (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda E - A| = \det = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$
$$= 0 \rightarrow \lambda = -1, 2, 5$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\vec{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

さらに $\vec{p}_k = \frac{1}{|\vec{u}_k|} \vec{u}_k$ にとり直して、大きさを 1 にする。
正規化する。

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これは $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ を満たす。

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ とすると、} P \text{ は直交行列で、}$$

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ と対角化される。}$$

$$\lambda = 5, 8, (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -3 \\ -3 & \lambda-2 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^3 - 27 - 27 - \{3^2(\lambda-2) \times 3\}$$

$$= (\lambda-2)^3 - 27(\lambda-2) - 2 \cdot 27$$

$$= ((\lambda-2)+3)((\lambda-2)+3)((\lambda-2)-6) = \underline{(\lambda+1)^2(\lambda-8)}$$

$$\checkmark \lambda_1 = 8 \text{ のとき、 } \vec{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\checkmark \lambda_{2,3} = -1 \text{ (x2) のとき、 } \lambda E - A = -3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$\vec{y}_{2,3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$x+y+z=0 \rightarrow \beta \vec{y}_2 + \gamma \vec{y}_3 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

グラム-シュミットの直交化法より、

$$\textcircled{1} \vec{p}_2 = \frac{1}{|\vec{y}_2|} \vec{y}_2 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}},$$

$$\textcircled{2} \vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2 = (1, -1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{b}_3 = \vec{y}_3 - (\vec{y}_3 \cdot \vec{p}_2) \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}_3 \cdot \vec{p}_2 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 0 & -3^3 & -2 \cdot 3^3 \\ & & & " & " \\ -3) & & -3 & 9 & +54 \\ \hline & 1 & -3 & -18 & 0 \\ -3) & & -3 & +18 & \\ \hline & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\textcircled{3} |\vec{b}_3|^2 = \frac{1+4+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad |\vec{b}_3| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\vec{p}_3 = \frac{1}{|\vec{b}_3|} \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

以上より、

$$P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ とすれば、}$$

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<7/16, 水, 2025> 3-M2 代数・幾何 [14] 用ノート

行列のn乗の計算 (p.171)

$$A = \begin{pmatrix} m \end{pmatrix}_{\substack{m \times m \\ n \times n}} \rightarrow B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

*固有値は $\lambda_1 \sim \lambda_m$

このとき、

$$B^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & & 0 \\ & (\lambda_2)^n & \\ 0 & & \ddots \\ & & & (\lambda_m)^n \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^n$$

$$= P^{-1}A^nP \text{ より、}$$

$$A^n = P B^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & & \\ & (\lambda_2)^n & \\ & & \ddots \\ & & & (\lambda_m)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

と計算できる。

例 = 問 5.9, (2)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & -5 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda + 3) + 10$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda - 7)(\lambda + 2),$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2$$

$$\rightarrow \vec{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

$$(\checkmark) P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = P^{-1}A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$A^N = P \begin{pmatrix} 7^N & 0 \\ 0 & (-2)^N \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^N & 0 \\ 0 & (-2)^N \end{pmatrix} \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \cdot 7^N & -1 \cdot 7^N \\ (-2)^N & 5 \cdot (-2)^N \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 \cdot 7^N - (-2)^N & 5 \cdot 7^N - 5 \cdot (-2)^N \\ -2 \cdot 7^N + 2 \cdot (-2)^N & -7^N + 10 \cdot (-2)^N \end{pmatrix}$$

2次曲線の標準形 (p.172)

$$ax^2 + 2 \frac{a}{b} xy + \frac{b^2}{c} y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d$$

$$\downarrow$$

$$\alpha(x')^2 + \beta(y')^2 = (x', y') \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{d}{\alpha\beta}$$

と変換できる。222、1次式である。

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

導出:

$$\text{元の式は } ax^2 + 2 \frac{a}{b} xy + \frac{b^2}{c} y^2 = d \text{ である。}$$

$$\text{左辺} = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (\text{続く})$$

(例) ${}^tA = A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ より、 2×2 の対称行列である。

→ 対応する直交行列 P が存在して、

$$\underset{{}^tP}{(P^{-1})}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ と対角化できる。}$$

→ $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ は固有方程式を解いて入手する。

→ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると、 ${}^tP = P^{-1}$ より、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y') {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= (x', y') \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \alpha (x')^2 + \beta (y')^2 = d \end{aligned}$$

を得る。

例 = 問 5.10, (1)

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{2} \rightarrow \text{左辺} = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - \frac{1}{2})$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (x', y') {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2} (x')^2 + \frac{1}{2} (y')^2 = \frac{3}{2} \quad (\text{A}) \end{aligned}$$

(X) 問 5.10, (1) 計算

$$\lambda = \frac{3}{2} \rightarrow [\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow [\lambda E - A] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad 3(x')^2 + (y')^2 = 3$$

$$x'^2 + \frac{y'^2}{3} = 1 \quad \text{with } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ より、}$$

楕円 $X^2 + \frac{Y^2}{3} = 1$ は $-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線である。

$$\textcircled{2} P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = +\frac{\pi}{4} \text{ とすれば、}$$

$$\text{左辺} = (x', y') {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$(x')^2 + 3(y')^2 = 3$$

$$\frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1, \text{ with } P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = +\frac{\pi}{4} \text{ より、}$$

楕円 $\frac{X^2}{3} + Y^2 = 1$ は $+\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線である。

直交
 2×2 の ~~対称~~ 行列 P は、

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ の形になる。} \rightarrow \text{p. 165, 問 5.6}$$

⊗ 3-M2, 代数力.

2) 5.9, (2) ⊗ (p. 172)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & -5 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda + 3) + 10 \\ = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda - 7)(\lambda + 2),$$

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\lambda = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 5y = 0 \\ x = -5y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \vec{u}_1, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \rightarrow \begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \beta \vec{u}_2, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}P = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -10+1 & -2+2 \\ 5-5 & 1-10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{OK}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^N = P B^N P^{-1} = P \begin{pmatrix} 7^N & 0 \\ 0 & (-2)^N \end{pmatrix} P^{-1}$$

<7/22, 火, 2025> 3-I 解析学 15 用ノート

→ 内容は無し、試験前のまとめ！

<7/23, 水, 2025> ³⁻M2 代数・力学 ~~14~~ 15 用ノート

→ 問題 14 の解説で終わり！

R7 年度・前期

授業終了！！