

1、 $A=2x^2+xy-3z$, $B=-3x^2+2xy+z$,
 $C=x^2-3xy+2z$ であるとき、次の式を計算
 しなさい。

(1) $A+B+C$ (2) $A-B+C$

(3) $2A-(B+2C)$

(4) $2(2A+B-C)-(A+4B-C)$

2、次の式を計算しなさい。

(1) $a^3 \times a^2$ (2) $3x^2 \times 4x^4$

(3) $(-5xy^2) \times 3x^2y^4$ (4) $(a^2)^4$

(5) $(-a^3)^2$ (6) $(-4a^2b^2)^3$

3、次の計算をしなさい。

(1) $2x^3(4x+3)$ (2) $-4a(3ab-2b^2)$

(3) $12a^2b\left(\frac{a^2}{3}-\frac{ab}{6}-\frac{b^2}{4}\right)$ (4) $(x-y)xy$

(5) $(2x^2-3y)(-4y^2)$ (6) $(2a-b+6c)\left(-\frac{1}{6}c\right)$

4、次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2)(x+4)$ (2) $(x-3y)(x-4y)$

(3) $(a+b)(a-3b)$ (4) $(a^2-3)(a^2+7)$

(5) $(ab+3)(ab-4)$ (6) $(4x+3)(3x+1)$

(7) $(3x-2y)(2x-3y)$ (8) $(x+4y)(2x-3y)$

5、次の式を展開しなさい。

(1) $(a+3)^3$

(2) $(x+2)(x+5)(x-4)(x-1)$

(2) $(x-5)^3$

(3) $(4x-y)^3$

(3) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

(4) $(5a+2b)^3$

(5) $(x+3)(x^2-3x+9)$

(4) $(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2$

(6) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(7) $(5x+4y)(25x^2-20xy+16y^2)$

(5) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

6、次の式を展開しなさい。（展開する順番を工夫しよう）

(1) $(x-1)(x-3)(x+1)(x+3)$

解説

- 1、
- (1) $A+B+C=(2x^2+xy-3z)+(-3x^2+2xy+z)+(x^2-3xy+2z)$

$$=(2-3+1)x^2+(1+2-3)xy+(-3+1+2)z=0$$
- (2) $A-B+C=(2x^2+xy-3z)-(-3x^2+2xy+z)+(x^2-3xy+2z)$

$$=2x^2+xy-3z+3x^2-2xy-z+x^2-3xy+2z$$

$$=(2+3+1)x^2+(1-2-3)xy+(-3-1+2)z$$

$$=6x^2-4xy-2z$$
- (3) $2A-(B+2C)=2A-B-2C$

$$=2(2x^2+xy-3z)-(-3x^2+2xy+z)-2(x^2-3xy+2z)$$

$$=4x^2+2xy-6z+3x^2-2xy-z-2x^2+6xy-4z$$

$$=(4+3-2)x^2+(2-2+6)xy+(-6-1-4)z$$

$$=5x^2+6xy-11z$$
- (4) $2(2A+B-C)-(A+4B-C)$

$$=4A+2B-2C-A-4B+C=3A-2B-C$$

$$=3(2x^2+xy-3z)-2(-3x^2+2xy+z)-(x^2-3xy+2z)$$

$$=6x^2+3xy-9z+6x^2-4xy-2z-x^2+3xy-2z$$

$$=(6+6-1)x^2+(3-4+3)xy+(-9-2-2)z$$

$$=11x^2+2xy-13z$$

解説

- 2、
- (1) 与式 $=a^{3+2}=a^5$ (2) 与式 $=(3 \times 4) \times x^{2+4}=12x^6$
- (3) 与式 $=(-5 \times 3) \times x^{1+2} \times y^{2+4}=-15x^3y^6$
- (4) 与式 $=a^{2 \times 4}=a^8$ (5) 与式 $=(-1)^2 \times (a^3)^2=a^{3 \times 2}=a^6$
- (6) 与式 $=(-4)^3 \times (a^2)^3 \times (b^2)^3=-64a^6b^6$

解説

- 3、
- (1) (与式) $=2x^3 \cdot 4x+2x^3 \cdot 3=8x^4+6x^3$
- (2) (与式) $=(-4a) \cdot 3ab+(-4a) \cdot (-2b^2)=-12a^2b+8ab^2$
- (3) (与式) $=12a^2b \cdot \frac{a^2}{3}+12a^2b \cdot \left(-\frac{ab}{6}\right)+12a^2b \cdot \left(-\frac{b^2}{4}\right)$

$$=4a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3$$
- (4) (与式) $=x \cdot xy+(-y) \cdot xy=x^2y-xy^2$
- (5) (与式) $=2x^2 \cdot (-4y^2)+(-3y) \cdot (-4y^2)=-8x^2y^2+12y^3$
- (6) (与式) $=2a \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right)+(-b) \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right)+6c \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right)$

$$=-\frac{1}{3}ac+\frac{1}{6}bc-c^2$$

解説

- 4、
- (1) 与式 $=x^2+(2+4)x+2 \cdot 4=x^2+6x+8$
- (2) 与式 $=x^2+\{(-3)+(-4)\}xy+(-3) \cdot (-4)y^2=x^2-7xy+12y^2$
- (3) 与式 $=a^2+\{1+(-3)\}ab+1 \cdot (-3)b^2=a^2-2ab-3b^2$

(4) 与式 $=(a^2)^2+(-3+7)a^2+(-3) \cdot 7=a^4+4a^2-21$

(5) 与式 $=(ab)^2+(3-4)ab+3 \cdot (-4)=a^2b^2-ab-12$

(6) 与式 $=(4 \cdot 3)x^2+(4 \cdot 1+3 \cdot 3)x+3 \cdot 1=12x^2+13x+3$

(7) 与式 $=(3 \cdot 2)x^2+\{3 \cdot (-3)+(-2) \cdot 2\}xy+(-2) \cdot (-3)y^2$

$$=6x^2-13xy+6y^2$$

(8) 与式 $=(1 \cdot 2)x^2+\{1 \cdot (-3)+4 \cdot 2\}xy+4 \cdot (-3)y^2$

$$=2x^2+5xy-12y^2$$

解説

- 5、
- (1) $(a+3)^3=a^3+3 \cdot a^2 \cdot 3+3 \cdot a \cdot 3^2+3^3=a^3+9a^2+27a+27$
- (2) $(x-5)^3=x^3-3 \cdot x^2 \cdot 5+3 \cdot x \cdot 5^2-5^3=x^3-15x^2+75x-125$
- (3) $(4x-y)^3=(4x)^3-3 \cdot (4x)^2 \cdot y+3 \cdot 4x \cdot y^2-y^3$

$$=64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3$$
- (4) $(5a+2b)^3=(5a)^3+3 \cdot (5a)^2 \cdot 2b+3 \cdot 5a \cdot (2b)^2+(2b)^3$

$$=125a^3+150a^2b+60ab^2+8b^3$$

(5) $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2)=x^3+27$

(6) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a-b)\{(2a)^2+2a \cdot b+b^2\}=8a^3-b^3$

(7) $(5x+4y)(25x^2-20xy+16y^2)=(5x)^3+(4y)^3=125x^3+64y^3$

解説

- 6、
- (1) 与式 $=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-3)(x+3)\}$

$$=(x^2-1)(x^2-9)$$

$$=x^4-10x^2+9$$
- (2) 与式 $=\{(x+2)(x-1)\}\{(x+5)(x-4)\}$

$$=(x^2+x-2)(x^2+x-20)$$

$$=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-20\}$$

$$=(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40$$

$$=x^4+2x^3+x^2-22x^2-22x+40$$

$$=x^4+2x^3-21x^2-22x+40$$
- (3) 与式 $=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=(a^4-b^4)(a^4+b^4)=a^8-b^8$
- (4) 与式 $=\{(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$

$$=\{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$$

$$=(a^6-b^6)^2$$

$$=a^{12}-2a^6b^6+b^{12}$$
- (5) 与式 $=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

$$=(x^3+8)(x^3-8)$$

$$=x^6-64$$

締め切り=2025/04/24 (木) 授業時

(その際に自己採点もしてもらう。)

解答はA4サイズのレポート用紙などにまとめること。
ページ数の制限は無い。表紙に学年、組、番号、名前
を書くこと。

問02-01 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $5a^3b - 25a^2b^2$
- (2) $9a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^2$
- (3) $a^2 + a(b + c)$
- (4) $2a(a - 3b) - b(3b - a)$

【解答】 (1) $5a^2b(a - 5b)$ (2) $3ab(3a^2 + ab - b)$ (3) $a(a + b + c)$
(4) $(2a + b)(a - 3b)$

【解説】

1、

$$(1) \text{ 与式} = 5a^2b \cdot a - 5a^2b \cdot 5b = 5a^2b(a - 5b)$$

$$(2) \text{ 与式} = 3ab \cdot 3a^2 + 3ab \cdot ab - 3ab \cdot b = 3ab(3a^2 + ab - b)$$

$$(3) \text{ 与式} = a\{a + (b + c)\} = a(a + b + c)$$

$$(4) \text{ 与式} = 2a(a - 3b) + b(a - 3b) = (2a + b)(a - 3b)$$

問02-02 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $a^2 + 8ab + 16b^2$
- (2) $25x^2 - 20xy + 4y^2$
- (3) $9a^2 - 16b^2$
- (4) $50x^2 - 18y^2$

【解答】 (1) $(x + 3)^2$ (2) $(a - 7)^2$ (3) $(a + 4b)^2$ (4) $(5x - 2y)^2$
(5) $3(x - 2y)^2$ (6) $(3a + 4b)(3a - 4b)$ (7) $(10x + 7y)(10x - 7y)$
(8) $2(5x + 3y)(5x - 3y)$ (9) $3(2ab + 3)(2ab - 3)$

【解説】

2、

$$(1) a^2 + 8ab + 16b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 4b + (4b)^2 = (a + 4b)^2$$

$$(2) 25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 = (5x - 2y)^2$$

$$(3) 9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$$

$$(4) 50x^2 - 18y^2 = 2(25x^2 - 9y^2) \\ = 2\{(5x)^2 - (3y)^2\} \\ = 2(5x + 3y)(5x - 3y)$$

問02-03 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 - 6x + 8$
- (2) $x^2 - 2x - 24$
- (3) $x^2 + xy - 6y^2$
- (4) $x^2 - 17xy - 18y^2$

【解答】 (1) $(x + 1)(x + 3)$ (2) $(x - 2)(x - 4)$ (3) $(x - 1)(x + 9)$
(4) $(x + 4)(x - 6)$ (5) $(x - 2y)(x + 3y)$ (6) $(x + y)(x - 18y)$

【解説】

3、

$$(1) \text{ (与式)} = x^2 + (-2 - 4)x + (-2) \cdot (-4) = (x - 2)(x - 4)$$

$$(2) \text{ (与式)} = x^2 + (4 - 6)x + 4 \cdot (-6) = (x + 4)(x - 6)$$

$$(3) \text{ (与式)} = x^2 + (-2y + 3y)x + (-2y) \cdot (3y) = (x - 2y)(x + 3y)$$

$$(4) \text{ (与式)} = x^2 + (y - 18y)x + y \cdot (-18y) = (x + y)(x - 18y)$$

問02-04 次の式を因数分解しなさい。(たすき掛けなどを用いる)

- (1) $2x^2 + 7x + 3$
- (2) $3x^2 - 17x - 6$
- (3) $6x^2 - 29x + 20$
- (4) $10x^2 - 31x + 15$

【解答】 (1) $(x + 3)(2x + 1)$ (2) $(x + 2)(3x - 5)$ (3) $(2x + 1)(3x - 2)$
(4) $(x - 6)(3x + 1)$ (5) $(x - 4)(6x - 5)$ (6) $(2x - 5)(5x - 3)$

【解説】

4、

$$(1) 2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$$

$$(2) 3x^2 - 17x - 6 = (x - 6)(3x + 1)$$

$$(1) \begin{array}{ccc} 1 & \times & 3 \rightarrow 6 \\ 2 & & 1 \rightarrow 1 \\ \hline 2 & 3 & 7 \end{array} \quad (2) \begin{array}{ccc} 1 & \times & -6 \rightarrow -18 \\ 3 & & 1 \rightarrow 1 \\ \hline 3 & -6 & -17 \end{array}$$

$$(3) \quad 6x^2 - 29x + 20 = (x-4)(6x-5)$$

$$(4) \quad 10x^2 - 31x + 15 = (2x-5)(5x-3)$$

$$(3) \quad \begin{array}{rcl} 1 & \times & -4 \longrightarrow -24 \\ 6 & \times & -5 \longrightarrow -5 \\ \hline 6 & & 20 \quad -29 \end{array} \quad (4) \quad \begin{array}{rcl} 2 & \times & -5 \longrightarrow -25 \\ 5 & \times & -3 \longrightarrow -6 \\ \hline 10 & & 15 \quad -31 \end{array}$$

説明の通り考えても良いし、独自の方法でも構わない。
色々と試行錯誤してみよう。

問02-05 次の式を因数分解しなさい。（公式を活用する）

$$(1) \quad a^3 + 8$$

$$(2) \quad 27x^3 - y^3$$

$$(3) \quad 64x^3 - 27y^3$$

【解答】 (1) $(a+2)(a^2-2a+4)$ (2) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$
(3) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$ (4) $(5ab+2)(25a^2b^2-10ab+4)$

【解説】

5、

$$(1) \quad (\text{与式}) = a^3 + 2^3 = (a+2)(a^2 - a \cdot 2 + 2^2) \\ = (a+2)(a^2 - 2a + 4)$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = (3x)^3 - y^3 = (3x-y)\{(3x)^2 + (3x) \cdot y + y^2\} \\ = (3x-y)(9x^2 + 3xy + y^2)$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = (4x)^3 - (3y)^3 = (4x-3y)\{(4x)^2 + (4x)(3y) + (3y)^2\} \\ = (4x-3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2)$$

締め切り＝2025/05/01（木）授業時
（その際に自己採点もしてもらう。）

解答はA4サイズのレポート用紙などにまとめること。ページ数の制限は無い。表紙に学年、組、番号、名前を書くこと。

問03－01

剰余の定理を利用して、以下の問題に答えなさい。

- (1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + a$ を $x - 1$ で割ったときの余りを求めなさい。
- (2) 前の(1)で求めた余りが 2 に等しいとき、定数 a の値を求めなさい。
- (3) $Q(x) = 2x^3 + bx + 10$ を $x + 3$ で割ったときの余りが 1 であるとき、定数 b の値を求めなさい。

問03－02

次の整式を因数分解しなさい。

- (1) $3x^2 + 10x + 3$
ヒント: $x = -3$ を代入してみる。
- (2) $6x^2 + 17xy - 14y^2$
ヒント: x^2 の係数と y^2 の係数を満たすパターンを考える。
- (3) $(x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 3$
ヒント: $(x + 2y) = X$ と置いてみる。

問03－03

次の整式 A , B について、 A を B で割った商と余りを求めよ。

- (1) $A = x^3 + 5x - 6$, $B = x + 2$
- (2) $A = x - 3x^3 + 2x^4 + 5$, $B = x^2 - x - 2$

問03－04

次の条件を満たす整式 A , B を求めよ。

- (1) A を $x^2 + 4x - 3$ で割ると、商が $3x + 2$ 、余りが $4x + 5$ となる。
- (2) $6x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ を B で割ると、商が $2x^2 - 3x + 1$ 、余りが $2x + 3$ となる。
- (3) $x^4 - 8x^2 + 3x + 14$ を B で割ると、商が B と一致し、余りが $3x - 2$ となる。

問03－05

以下の整式のセットについて、因数分解したのち、それらの最小公倍数と最大公約数を答えなさい。

- (1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ & $Q(x) = x^2 - 3x + 2$
- (2) $A(x) = x^2 + 3x - 10$ &
 $B(x) = x^2 - 4x + 4$ &
 $C(x) = x^2 - 8x - 12$

(解説)

4、

- (1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + a$ とおいたとき、剰余の定理より
求める余りは $P(1) = -2 + a$

- (2) 前の(1) から $a - 2 = 2$ よって $a = 4$

- (3) $P(x) = 2x^3 + bx + 10$ とおいたとき、剰余の定理により、
 $P(-3) = -54 - 3b + 10 = -44 - 3b$
よって $P(-3) = -44 - 3b = 1$ を解いて、 $b = -15$

もちろん筆算で考えてもよいが、剰余の定理を使うと計算量が
少なくすむ。剰余の定理の欠点として、割る式が1次式に限られ
る。2次式以上で割るとなると、例外的に剰余の定理を応用する
こともできるが、基本的には筆算で求めるしかない。

(解説)

1、たすき掛けを活用する。

- (1) $3x^2 + 10x + 3 = (x + 3)(3x + 1)$

$$\begin{array}{r} 1 \times 3 \rightarrow 9 \\ 3 \times 1 \rightarrow 3 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 10 \end{array}$$

- (2) $6x^2 + 17xy - 14y^2 = (2x + 7y)(3x - 2y)$

$$\begin{array}{r} 2 \times 7y \rightarrow 14y \\ 3 \times -2y \rightarrow -6y \\ \hline 6 \quad -14y^2 \quad 17y \end{array}$$

- (3) $(x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 3$
 $= \{(x + 2y) + 1\} \{(x + 2y) - 3\}$
 $= (x + 2y + 1)(x + 2y - 3)$

(解説)

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 9 \\ x + 2 \overline{) x^3 \quad + 5x - 6} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 + 5x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 9x - 6 \\ \underline{9x + 18} \\ -24 \end{array}$$

商 $x^2 - 2x + 9$
余り -24

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ x^2 - x - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 \quad + x + 5} \\ \underline{2x^4 - 2x^3 - 4x^2} \\ -x^3 + 4x^2 + x \\ \underline{-x^3 + x^2 + 2x} \\ 3x^2 - x + 5 \\ \underline{3x^2 - 3x - 6} \\ 2x + 11 \end{array}$$

商 $2x^2 - x + 3$
余り $2x + 11$

(解説)

- (1) 条件から $A = (x^2 + 4x - 3)(3x + 2) + 4x + 5$
 右辺を整理して $A = 3x^3 + 14x^2 + 3x - 1$

- (2) 条件から $6x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3x + 5 = B \times (2x^2 - 3x + 1)$

+ 2x + 3

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = \cancel{B \times (2x^2 - 3x + 1)} \\ \text{よって、} 6x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \text{ は } (2x^2 - 3x + 1) \text{ で割り切れて、その商が } B \text{ である。} \end{array}$$

右の計算により $B = 3x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \\ \underline{2x^3 - 3x + 1} \\ 6x^4 - 9x^3 + 3x^2 \\ \underline{2x^3 + x^2 - 5x} \\ 4x^2 - 6x + 2 \\ \underline{4x^2 - 6x + 2} \\ 0 \end{array}$$

- (3) 条件から、次の等式が成り立つ。

$$x^4 - 8x^2 + 3x + 14 = B^2 + 3x - 2$$

$$\text{よって } B^2 = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$\text{すなわち } B^2 = (x^2 - 4)^2$$

$$\text{したがって } B = x^2 - 4, -x^2 + 4$$

(解説)

5、

- (1) それぞれの整式を因数分解すると、 $(x - 1)^3$ 、 $(x - 1)(x - 2)$
 となる。よって

$$\text{最小公倍数は } (x - 1)^3(x - 2)$$

$$\text{最大公約数は } x - 1$$

- (2) それぞれの整式を因数分解すると $(x - 2)(x + 5)$ 、 $(x - 2)^2$ 、
 $(x - 2)(x - 6)$ となる。よって、

$$\text{最小公倍数は } (x - 2)^2(x + 5)(x - 6)$$

$$\text{最大公約数は } x - 2$$

出題者＝大石知広

- 締め切り＝次回の授業（その際に自己採点も行う。）
- 解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
- ページ数の制限はない。
- 問題に不備（難易度調整ミス、誤字、題意の不明瞭など）があった場合、評価には補正を加えます。

解説説

(青字解説文)

問05-01 次の式の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \quad (2) \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

解説説

$$(1) \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + 3\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{10 + 8\sqrt{2}}{2} = 5 + 4\sqrt{2}$$

問05-02 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^4+1}$$

$$(2) \frac{ca}{(a-b)(b-c)} + \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)}$$

解説説

$$(1) \text{ (与式) } = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$$

$$= \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{4}{x^4-1} - \frac{4}{x^4+1}$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4+1-(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)} = \frac{8}{x^8-1}$$

$$(2) \text{ (与式) } = \frac{ca(c-a) + ab(a-b) + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\text{ (分子) } = c^2a - ca^2 + a^2b - ab^2 + bc(b-c)$$

$$= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} = (b-c)(a-b)(a-c)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\text{ よって (与式) } = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$$

問05-03 次の式を計算せよ。分子や分母の因数分解を活用すること。

$$(1) \frac{2a^3 + 2a^2b}{a^3 + b^3} \div \frac{3ab}{a^2 - b^2} \times \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + 2ab - 3b^2}$$

$$(2) \frac{12x^2 - 6x}{2x^2 - x - 1} \times \frac{x^2 - 1}{4x^2 - 4x + 1} \div \frac{12x^3 + 18x^2 - 12x}{4x^2 - 1}$$

解説説

$$(1) \text{ (与式) } = \frac{2a^3 + 2a^2b}{a^3 + b^3} \times \frac{a^2 - b^2}{3ab} \times \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + 2ab - 3b^2}$$

$$= \frac{2a^2(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{3ab} \times \frac{a^2 - ab + b^2}{(a+3b)(a-b)}$$

$$= \frac{2a(a+b)}{3b(a+3b)}$$

$$(2) \text{ (与式) } = \frac{12x^2 - 6x}{2x^2 - x - 1} \times \frac{x^2 - 1}{4x^2 - 4x + 1} \times \frac{4x^2 - 1}{12x^3 + 18x^2 - 12x}$$

$$= \frac{6x(2x-1)}{(x-1)(2x+1)} \times \frac{(x+1)(x-1)}{(2x-1)^2} \times \frac{(2x+1)(2x-1)}{6x(x+2)(2x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{(x+2)(2x-1)}$$

問05-04 次の分数式を約分して簡単にせよ。分子や分母の因数分解を活用すること。

$$(1) \frac{15a^2b^2}{40a^3b} \quad (2) \frac{4a^3 + 8ab^2}{5a^2} \quad (3) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(4) \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} \quad (5) \frac{a^2 - (b-c)^2}{(a+b)^2 - c^2} \quad (6) \frac{a^3 - a^2b + ab^2}{a^3 + b^3}$$

解説説

$$(1) \text{ 与式 } = \frac{5a^2b \cdot 3b}{5a^2b \cdot 8a} = \frac{3b}{8a}$$

$$(2) \text{ 与式 } = \frac{a(4a^2 + 8b^2)}{a \cdot 5a} = \frac{4a^2 + 8b^2}{5a}$$

$$(3) \text{ 与式 } = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

$$(4) \text{ 与式 } = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

$$(5) \text{ 与式 } = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{a-b+c}{a+b+c}$$

$$(6) \text{ 与式 } = \frac{a(a^2 - ab + b^2)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a}{a+b}$$

問05-05 (繁分数式) 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \frac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}} \quad (2) \frac{x+1}{1 - \frac{1}{x+2}} + \frac{x+3}{1 + \frac{1}{x+2}}$$

解説説

$$(1) \text{ (与式) } = \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \div \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right)$$

$$= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} \div \frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)^2 - (x+y)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2}{-4xy} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

別解 分母と分子に $(x+y)(x-y)$ を掛けると

$$\text{ (与式) } = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)^2 - (x+y)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2}{-4xy} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

(2) 各項の分母と分子に $x+2$ を掛けると

$$\text{ (与式) } = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)-1} + \frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} + \frac{(x+3)(x+2)}{x+3}$$

$$= (x+2) + (x+2) = 2x+4$$

出題者＝大石知広

● 締め切り＝次回2025/05/22（木）の授業開始時。その際に自己採点も行います。つまり先週の演習課題と合わせて、今回は2回分の課題を集めます。

● 解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。

● ページ数の制限はない。

● 問題に不備（難易度調整ミス、誤字、題意の不明瞭など）があった場合、評価には補正を加えます。

● 例によって、手ごわそうな問題はいったん飛ばして、解けそうな問題から解くことをおすすめします。

(解説)

(青字解説文)

問06-01 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

(2) $x^2 - y^2 + 4y - 4$

(3) $4x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

(4) $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2$

(解説)

(1) 与式 $= (x^2 - 6x + 9) - y^2 = (x - 3)^2 - y^2 = \{(x - 3) + y\}\{(x - 3) - y\}$
 $= (x + y - 3)(x - y - 3)$

(2) 与式 $= x^2 - (y^2 - 4y + 4) = x^2 - (y - 2)^2 = \{x + (y - 2)\}\{x - (y - 2)\}$
 $= (x + y - 2)(x - y + 2)$

(3) 与式 $= 4x^2 - (4y^2 - 4y + 1) = (2x)^2 - (2y - 1)^2 = \{2x + (2y - 1)\}\{2x - (2y - 1)\}$
 $= (2x + 2y - 1)(2x - 2y + 1)$

(4) 与式 $= (x^2 - 2xy + y^2) - 9z^2 = (x - y)^2 - (3z)^2 = \{(x - y) + 3z\}\{(x - y) - 3z\}$
 $= (x - y + 3z)(x - y - 3z)$

問06-02 次の式を因数分解せよ。

(1) $18a^2b^2 - 8b^4c^2$

(2) $4a^2 - \frac{1}{9}(b - c)^2$

(3) $2x^2 + 28xy - 144y^2$

(4) $x^2 + (a - b)x - ab$

(5) $15x^2 - 4x - 3$

(6) $(x + 2y)(3x + 5y) - 4y^2$

(解説)

(1) 与式 $= 2b^2(9a^2 - 4b^2c^2) = 2b^2\{(3a)^2 - (2bc)^2\} = 2b^2(3a + 2bc)(3a - 2bc)$

(2) 与式 $= \frac{1}{9}\{36a^2 - (b - c)^2\} = \frac{1}{9}\{(6a)^2 - (b - c)^2\}$
 $= \frac{1}{9}\{6a + (b - c)\}\{6a - (b - c)\}$
 $= \frac{1}{9}(6a + b - c)(6a - b + c)$

(3) 与式 $= 2(x^2 + 14xy - 72y^2) = 2\{x^2 + (-4y + 18y)x + (-4y) \cdot 18y\}$
 $= 2(x - 4y)(x + 18y)$

(4) 与式 $= (x + a)(x - b)$

(5) 与式 $= (3x + 1)(5x - 3)$

(6) 与式 $= 3x^2 + 11xy + 10y^2 - 4y^2 = 3x^2 + 11xy + 6y^2$
 $= (x + 3y)(3x + 2y)$

(5)
$$\begin{array}{r} 3 \times 1 \rightarrow 5 \\ 5 \times -3 \rightarrow -9 \\ \hline 15 \quad -3 \quad -4 \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{r} 1 \times 3y \rightarrow 9y \\ 3 \times 2y \rightarrow 2y \\ \hline 3 \quad 6y^2 \quad 11y \end{array}$$

問06-03 ある整式 $A(x, y)$ から $P(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^2$ を引くべきところを、誤ってこの式を加えたので、答えが $2x^2 + xy - y^2$ となった。正しい答えを求めよ。

(解説)

ある整式を A とすると $A + (3x^2 - xy + 2y^2) = 2x^2 + xy - y^2$

よって $A = (2x^2 + xy - y^2) - (3x^2 - xy + 2y^2) = -x^2 + 2xy - 3y^2$

ゆえに、正しい答えは

$$(-x^2 + 2xy - 3y^2) - (3x^2 - xy + 2y^2) = -4x^2 + 3xy - 5y^2$$

(別解) ある整式を A , $3x^2 - xy + 2y^2$ を B とする。誤った答えは $A + B$ であるから、正しい答え $A - B$ は

$$A - B = (A + B) - 2B = (2x^2 + xy - y^2) - 2(3x^2 - xy + 2y^2) = -4x^2 + 3xy - 5y^2$$

問06-04 次の整式 A , B について、 A を B で割った商と余りをそれぞれ求めよ。

(1) $A = 2x^2 - 3x + 1$, $B = x + 1$

(2) $A = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$, $B = x^2 - x + 1$

(解説)

(1)
$$\begin{array}{r} 2x - 5 \\ x+1 \overline{) 2x^2 - 3x + 1} \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -5x + 1 \\ \underline{-5x - 5} \\ 6 \end{array}$$

よって 商 $2x - 5$, 余り 6

また $2x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(2x - 5) + 6$

(2)

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x^2 - x + 1 \overline{) 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1} \\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 2x} \\ -3x^2 + 2x - 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\ -x + 2 \end{array}$$

よって 商 $2x - 3$, 余り $-x + 2$

また $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = (x^2 - x + 1)(2x - 3) - x + 2$

問06-05 (絶対値の計算) 次の値を求めよ。

(1) $|-6|$

(2) $|2.7|$

(3) $\left| -\frac{2}{5} \right| - |-2|$

(4) $|\pi - 4|$

(5) $|\sqrt{3} - 2|$

(解説)

(1) $|-6| = -(-6) = 6$

(2) $|2.7| = 2.7$

(3) $\left| -\frac{2}{5} \right| - |-2| = \frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$

(4) $\pi - 4 < 0$ であるから $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$

(5) $\sqrt{3} - 2 < 0$ であるから $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$

問06-06 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\frac{4}{3\sqrt{8}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$

(5) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

(6) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

(7) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3} - 5}$

(8) $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(解説)

$$(1) \text{ 与式} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(2) \text{ 与式} = \frac{4}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(3) \text{ 与式} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \sqrt{2}-1$$

$$(4) \text{ 与式} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$$

$$(5) \text{ 与式} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 7+4\sqrt{3}$$

$$(6) \text{ 与式} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{5-2\sqrt{10}+2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

$$(7) \text{ 与式} = \frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-5)(2\sqrt{3}+5)} = \frac{6+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-5}{(2\sqrt{3})^2-5^2} = -\frac{1+3\sqrt{3}}{13}$$

$$(8) \text{ 与式} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6}-4-3+\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = -7+3\sqrt{6}$$

問06-07 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ 与式} &= \frac{(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})} \\ &= \frac{15-3\sqrt{15}-5\sqrt{15}+15}{5-3} + \frac{45+24\sqrt{15}+48}{45-48} \\ &= \frac{30-8\sqrt{15}}{2} - \frac{93+24\sqrt{15}}{3} = (15-4\sqrt{15}) - (31+8\sqrt{15}) \\ &= -16-12\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 与式} &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &+ \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= (3-2\sqrt{2}) + (5-2\sqrt{6}) + (2\sqrt{3}+3+2\sqrt{2}+\sqrt{6}) \\ &= 11+2\sqrt{3}-\sqrt{6} \end{aligned}$$

問06-08 （複素数の四則演算） 次の式を計算せよ。

$$(1) (2+3i)+(3-5i)$$

$$(2) (5+3i)-(6-8i)$$

$$(3) (3-4i)-(3+4i)$$

$$(4) (5+2i)(2-3i)$$

$$(5) (3-2i)^2$$

$$(6) (2-5i)(2i-5)$$

$$(7) (6-2i)(6+2i)$$

$$(8) i^5$$

$$(9) (1+2i)^3$$

解説

$$(1) \text{ 与式} = (2+3)+(3-5)i = 5-2i$$

$$(2) \text{ 与式} = (5-6)+(3+8)i = -1+11i$$

$$(3) \text{ 与式} = (3-3)+(-4-4)i = -8i$$

$$(4) \text{ 与式} = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 3i + 2 \cdot 2i - 2 \cdot 3i^2 = (10+6) + (-15+4)i = 16-11i$$

$$(5) \text{ 与式} = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + 2^2 i^2 = (9-4) - 12i = 5-12i$$

$$(6) \text{ 与式} = 2 \cdot 2i - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 2i^2 + 5 \cdot 5i = (-10+10) + (4+25)i = 29i$$

$$(7) \text{ 与式} = 6^2 - (2i)^2 = 36 - (-4) = 40$$

$$(8) \text{ 与式} = i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = i$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ 与式} &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i + 3 \cdot 2^2 \cdot i^2 + 2^3 \cdot i^3 \\ &= 1 + 6i - 12 + 8 \cdot i^2 \cdot i = (1-12) + (6-8)i = -11-2i \end{aligned}$$

出題者=大石知広

- 締め切り=無し。提出の必要も無し。
- 連絡：中間試験の範囲は教科書p.1～p.39になります。
- 中間試験直前の演習になります。提出は不要ですが、各自で取り組んで、試験対策を十分に行ってください。過去に配布した演習課題も活用してください。
- 自己採点用の解答は来週電子メールにて配布します。

解説

(青字解説文)

(虚数の計算) 次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt{-3}\sqrt{-6} \quad (2) (\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2$$

$$(3) \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}} \quad (4) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$$

解説

$$(1) \sqrt{-3}\sqrt{-6} = \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i = \sqrt{18}i^2 = -3\sqrt{2}$$

$$(2) (\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2 = (\sqrt{2}-\sqrt{3}i)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}i + 3i^2 = 2 - 2\sqrt{6}i - 3 = -1 - 2\sqrt{6}i$$

$$(3) \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} = 2$$

$$(4) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}i} = \frac{2}{i} = \frac{2i}{i^2} = -2i$$

(複素数の計算) 次の計算をせよ。

$$(1) \left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2 \quad (2) \frac{3-i}{1-i} + \frac{3+i}{1+i}$$

$$(3) \frac{2-i}{3+i} - \frac{5+10i}{1-3i} \quad (4) \frac{1+3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} + \frac{3\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i}$$

解説

$$(1) \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{4-8i+3i-6i^2}{1^2+2^2}$$

$$= \frac{10-5i}{5} = 2-i$$

よって (与式) $= (2-i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 3-4i$

$$(2) \frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i-i-i^2}{1^2+1^2}$$

$$= \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

$$\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2}$$

$$= \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

よって (与式) $= (2+i) + (2-i) = 4$

$$(3) \frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i-3i+i^2}{3^2+1^2}$$

$$= \frac{5-5i}{10} = \frac{1-i}{2}$$

$$\frac{5+10i}{1-3i} = \frac{5(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$

$$= \frac{5(1+3i+2i+6i^2)}{1^2+3^2}$$

$$= \frac{5(-5+5i)}{10} = \frac{-5+5i}{2}$$

$$\text{よって (与式)} = \frac{1-i}{2} - \frac{-5+5i}{2}$$

$$= \frac{1-i+5-5i}{2} = \frac{6-6i}{2}$$

$$= 3-3i$$

$$(4) \frac{1+3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+3\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i+9i-3\sqrt{3}i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+8i}{4} = \sqrt{3}+2i$$

$$\frac{3\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(3\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-9i+i-\sqrt{3}i^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-8i}{4} = \sqrt{3}-2i$$

よって (与式) $= (\sqrt{3}+2i) + (\sqrt{3}-2i) = 2\sqrt{3}$

(複素数の計算) 次の式を計算せよ。

$$(1) \left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^{10} \quad (2) i+i^2+i^3+\dots+i^{50}$$

解説

$$(1) \frac{7+3i}{2+5i} = \frac{(7+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{(14+15)+(-35+6)i}{2^2+5^2} = 1-i$$

また $(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$

よって

$$\left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^{10} = (1-i)^{10} = \{(1-i)^2\}^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 \cdot i^5$$

$$= -32 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = -32i$$

$$(2) i+i^2+i^3+i^4 = i+i^2+i^2 \cdot i+i^2 \cdot i^2 = i-1-i+1=0$$

よって

$$i+i^2+i^3+\dots+i^{50}$$

$$= (i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) + \dots + i^{44}(i+i^2+i^3+i^4) + i^{49}+i^{50}$$

$$= i^{49}+i^{50} = i^{48}(i+i^2) = (i^4)^{12}(i-1) = 1^{12}(i-1) = i-1$$

次の2次方程式を解け。

$$(1) 3x^2-4x=0 \quad (2) -4x^2+4x-1=0$$

$$(3) 5x^2+17x+14=0 \quad (4) -6x^2+5x+4=0$$

$$(5) x^2-2x-5=0 \quad (6) -2x^2+3x+4=0$$

解説

$$(1) \text{左辺を因数分解すると } x(3x-4)=0$$

よって $x=0$ または $3x-4=0$

$$\text{したがって } x=0, \frac{4}{3}$$

(2) 両辺に -1 を掛けると $4x^2 - 4x + 1 = 0$

左辺を因数分解すると $(2x-1)^2 = 0$

よって $2x-1=0$

したがって $x = \frac{1}{2}$

(3) 左辺を因数分解すると $(x+2)(5x+7)=0$

よって $x+2=0$ または $5x+7=0$

したがって $x = -2, -\frac{7}{5}$

(4) 両辺に -1 を掛けると $6x^2 - 5x - 4 = 0$

左辺を因数分解すると $(2x+1)(3x-4)=0$

よって $2x+1=0$ または $3x-4=0$

したがって $x = -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

(5) $x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-5)} = 1 \pm \sqrt{6}$

(6) 両辺に -1 を掛けると $2x^2 - 3x - 4 = 0$

よって $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 = -18$

(2) $x^2 + 5x + 7 = 0$

(3) $-x^2 + 4x - 7 = 0$

(4) $5x^2 + 3x + 2 = 0$

(5) $3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

(6) $x^2 + 4\sqrt{3}x + 13 = 0$

(7) $(x+1)(x+3) = 2x$

(解答例)

(1) $x = \pm \sqrt{-18} = \pm \sqrt{18}i = \pm 3\sqrt{2}i$

(2) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(3) 両辺に -1 を掛けると $x^2 - 4x + 7 = 0$

よって $x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 7} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm \sqrt{3}i$

(4) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{31}i}{10}$

(5) $x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$
 $= \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{6} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{7}i}{6}$

(6) $x = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 13} = -2\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}$
 $= -2\sqrt{3} \pm i$

(7) 方程式を整理すると $x^2 + 2x + 3 = 0$

よって $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 3} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}i$

2次方程式 $x^2 - x + 7 = m(x+1)$ が虚数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

(解答例)

右辺を展開して整理すると $x^2 - (m+1)x + 7 - m = 0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = \{-(m+1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (7-m)$$

$$= m^2 + 6m - 27 = (m-3)(m+9)$$

虚数解をもつための必要十分条件は

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad (m-3)(m+9) < 0$$

よって、求める m の値の範囲は $-9 < m < 3$

(復習：整式の除法) 次の整式 A, B について、 A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^2 + 5x + 6, B = x + 2$

(2) $A = a^2 - 4a + 2, B = a - 1$

(3) $A = 3x^2 - 4x - 4, B = 3x - 1$

(解答例)

(1)
$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+2 \overline{) x^2+5x+6} \\ \underline{x^2+2x} \\ 3x+6 \\ \underline{3x+6} \\ 0 \end{array}$$

よって 商 $x+3$, 余り 0

(2)
$$\begin{array}{r} a-3 \\ a-1 \overline{) a^2-4a+2} \\ \underline{a^2-a} \\ -3a+2 \\ \underline{-3a+3} \\ -1 \end{array}$$

よって 商 $a-3$, 余り -1

(3)
$$\begin{array}{r} x-1 \\ 3x-1 \overline{) 3x^2-4x-4} \\ \underline{3x^2-x} \\ -3x-4 \\ \underline{-3x+1} \\ -5 \end{array}$$

よって 商 $x-1$, 余り -5

(復習：剰余の定理) 次の整式を、[] 内の1次式で割った余りを求めよ。

(1) $x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ [$x-3$]

(2) $3x^3 - 5x^2 - 8x + 1$ [$x+1$]

(3) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 4$ [$x-2$]

(4) $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ [$2x-1$]

(解答例)

与えられた整式を $P(x)$ とする。

(1) 求める余りは

$$P(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = -1$$

(2) 求める余りは

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 1 = 1$$

(3) 求める余りは

$$P(2) = 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 14$$

(4) 求める余りは

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

出題者＝大石知広

● 解答はすべて表面のみに記入すること。

問08－01（複素数の計算） 次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2$

(2) $\frac{3-i}{1-i} + \frac{3+i}{1+i}$

(3) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{5+10i}{1-3i}$

問08－02 次の複素数を計算し、実部と虚部と絶対値を答えよ。

$$z = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10}$$

問08－03 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2 - 4x = 0$

(2) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

(3) $5x^2 + 17x + 14 = 0$

問08－04 2次方程式 $x^2 - x + 7 = m(x+1)$ が虚数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

出題者=大石知広

- 締め切り=[2025/06/19]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

(解説)

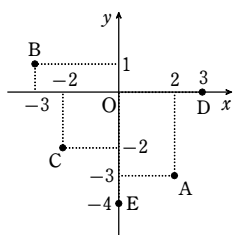
(青字解説文)

問09-01 複素数平面を描画し、以下の4点をその上に記せ。

A(2-3i), B(-3+i), C(-2-2i), D(3), E(-4i)

(解説)

[図]



問09-02 以下の複素数の絶対値を求めよ。

- (1) $-3+4i$
- (2) $8i$
- (3) $(1-2i)^2$
- (4) $\frac{2+3i}{5-i}$

(解説)

(1) $|-3+4i|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

(2) $|8i|=\sqrt{8^2}=8$

(3) $(1-2i)^2=1^2-4i+4i^2=-3-4i$

よって $|(1-2i)^2|=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

(4) $\frac{2+3i}{5-i}=\frac{(2+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{10+(2+15)i+3i^2}{5^2+1^2}=\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$

よって $\left|\frac{2+3i}{5-i}\right|=\left|\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{26}\right)^2+\left(\frac{17}{26}\right)^2}=\frac{\sqrt{338}}{26}$
 $=\frac{13\sqrt{2}}{26}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【参考】 2つの複素数 z_1, z_2 に対して、 $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ が

成り立つ。これを用いると

(3) $|(1-2i)^2|=|1-2i|^2=1^2+(-2)^2=5$

(4) $\left|\frac{2+3i}{5-i}\right|=\frac{|2+3i|}{|5-i|}=\frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

問09-03 次の2次式を複素数の範囲まで含めて因数分解せよ。

- (1) x^2-2x-1
- (2) x^2+2x+5
- (3) $2x^2-3x+4$

(解説)

(1) $x^2-2x-1=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{2}$

よって $x^2-2x-1=\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

(2) $x^2+2x+5=0$ の解は $x=-1\pm 2i$

よって

$$x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$$
$$=(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(3) $2x^2-3x+4=0$ の解は $x=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{4}$

よって $2x^2-3x+4=2\left(x-\frac{3+\sqrt{23}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{23}i}{4}\right)$

問09-04 2次方程式 $2t^2+2t+3=0$ のふたつの解を x, y とするとき、以下の式の値を求めよ。

(1) $x+y$

(2) xy

(3) x^2+y^2

(4) $x^3+y^3+x^2y+xy^2$

(解説)

(1) $x+y=\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}=-1$

(2) $xy=\left(\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}\right)=\frac{(-1)^2+(\sqrt{5})^2}{2^2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(3) (1), (2) から

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-1)^2-2\cdot\frac{3}{2}=-2$$

(4) (1), (3) から

$$x^3+y^3+x^2y+xy^2=x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x^2+y^2)(x+y)$$
$$=(-2)\cdot(-1)=2$$

問09-05 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} xy=6 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

(解説)

(1) $\begin{cases} xy=6 & \dots\dots ① \\ x+y+xy=11 & \dots\dots ② \end{cases}$ とする。

①を②に代入すると $x+y+6=11$ すなわち $x+y=5$

したがって、 x, y は2次方程式 $t^2-5t+6=0$ の解である。

これを解くと $t=2, 3$

よって $(x, y)=(2, 3), (3, 2)$

(2) $\begin{cases} x+y=2 & \dots\dots ① \\ x^2+y^2=10 & \dots\dots ② \end{cases}$ とする。

②より $(x+y)^2-2xy=10$

これに①を代入すると $2^2-2xy=10$ すなわち $xy=-3$

したがって、 x, y は2次方程式 $t^2-2t-3=0$ の解である。

これを解くと $t=-1, 3$

よって $(x, y)=(-1, 3), (3, -1)$

【別解】 $\begin{cases} x+y=2 & \dots\dots ① \\ x^2+y^2=10 & \dots\dots ② \end{cases}$ とする。

①より $y=2-x$ $\dots\dots ③$

③を②に代入すると $x^2+(2-x)^2=10$

展開して整理すると $x^2-2x-3=0$

これを解いて $x=-1, 3$

③より、 $x=-1$ のとき $y=3$

$x=3$ のとき $y=-1$

したがって $(x, y)=(-1, 3), (3, -1)$

問09-06 次の文章で表されている数量の大小関係を、不等式を使って表せ。

- (1) ある数 x から 5 を引いた数の 3 倍は、 x より大きくなる。
- (2) 重さ 400 g の箱に、1 個 200 g の品物を x 個入れたところ、全体の重さが 5 kg 以下となった。

解説

- (1) $3(x-5) > x$
- (2) $400 + 200x \leq 5000$

問09-07 次の不等式を解け。

- (1) $4x + 3 > 15$
- (2) $-3x + 2 \leq 20$
- (3) $5x + 10 < -25$
- (4) $-6x - 3 \geq -21$
- (5) $7 - 2x > 3$
- (6) $8 + 3x \geq 2$

解説

- (1) $4x + 3 > 15$
 移項すると $4x > 15 - 3$
 すなわち $4x > 12$
 よって $x > 3$
- (2) $-3x + 2 \leq 20$
 移項すると $-3x \leq 20 - 2$
 すなわち $-3x \leq 18$
 よって $x \geq -6$
- (3) $5x + 10 < -25$
 移項すると $5x < -25 - 10$
 すなわち $5x < -35$
 よって $x < -7$
- (4) $-6x - 3 \geq -21$
 移項すると $-6x \geq -21 + 3$
 すなわち $-6x \geq -18$
 よって $x \leq 3$
- (5) $7 - 2x > 3$
 移項すると $-2x > 3 - 7$
 すなわち $-2x > -4$
 よって $x < 2$
- (6) $8 + 3x \geq 2$
 移項すると $3x \geq 2 - 8$
 すなわち $3x \geq -6$
 よって $x \geq -2$

出題者=大石知広

- 締め切り=[2025/06/26]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

解説

(青字解説文)

問10-01 次の複素数 z と共役な複素数 $\bar{z}$ を答えよ。さらに共役な複素数との和と積を求めよ。

- (1) $z = 3 + 4i$ (2) $z = 5 - 2i$ (3) $z = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2}$
 (4) $z = -\sqrt{6}i$ (5) $z = -7$

解説

- (1) 共役な複素数は $3 - 4i$
 和は $(3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$
 積は $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 25$

- (2) 共役な複素数は $5 + 2i$
 和は $(5 - 2i) + (5 + 2i) = 10$
 積は $(5 - 2i)(5 + 2i) = 25 - 4i^2 = 29$

- (3) 共役な複素数は $\frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$
 和は $\frac{1 - \sqrt{5}i}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}i}{2} = 1$
 積は $\left(\frac{1 - \sqrt{5}i}{2}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{5}i}{2}\right) = \frac{1 - 5i^2}{4} = \frac{3}{4}$

- (4) 共役な複素数は $\sqrt{6}i$
 和は $(-\sqrt{6}i) + (\sqrt{6}i) = 0$
 積は $(-\sqrt{6}i)(\sqrt{6}i) = -6i^2 = 6$

- (5) 共役な複素数は -7
 和は $(-7) + (-7) = -14$
 積は $(-7) \cdot (-7) = 49$

問10-02 次の不等式を解け。

- (1) $\frac{1}{4}(x-7) < \frac{1}{3}(2x+1)$ (2) $2x-1 \geq \frac{x+1}{3}$
 (3) $\frac{x}{3} - \frac{x-5}{2} > 0$ (4) $-0.3x - 1.5 \leq 0.2x - 1.5$
 (5) $0.4x - 0.7 \geq -1 + \frac{x}{2}$ (6) $\frac{3}{10}x + 1.6 \leq 0.8x - \frac{2}{5}$

解説

- (1) $\frac{1}{4}(x-7) < \frac{1}{3}(2x+1)$
 両辺に 12 を掛けると $3(x-7) < 4(2x+1)$
 両辺を展開すると $3x-21 < 8x+4$
 移項すると $3x-8x < 4+21$
 すなわち $-5x < 25$
 よって $x > -5$

- (2) $2x-1 \geq \frac{x+1}{3}$
 両辺に 3 を掛けると $3(2x-1) \geq x+1$
 左辺を展開すると $6x-3 \geq x+1$
 移項すると $6x-x \geq 1+3$

すなわち $5x \geq 4$

よって $x \geq \frac{4}{5}$

(3) $\frac{x}{3} - \frac{x-5}{2} > 0$

両辺に 6 を掛けると $2x-3(x-5) > 0$

左辺を展開すると $2x-3x+15 > 0$

移項すると $2x-3x > -15$

すなわち $-x > -15$

よって $x < 15$

(4) $-0.3x - 1.5 \leq 0.2x - 1.5$

両辺に 10 を掛けると $-3x-15 \leq 2x-15$

移項すると $-3x-2x \leq -15+15$

すなわち $-5x \leq 0$

よって $x \geq 0$

(5) $0.4x - 0.7 \geq -1 + \frac{x}{2}$

両辺に 10 を掛けると $4x-7 \geq -10+5x$

移項すると $4x-5x \geq -10+7$

すなわち $-x \geq -3$

よって $x \leq 3$

(6) $\frac{3}{10}x + 1.6 \leq 0.8x - \frac{2}{5}$

両辺に 10 を掛けると $3x+16 \leq 8x-4$

移項すると $3x-8x \leq -4-16$

すなわち $-5x \leq -20$

よって $x \geq 4$

問10-03 次の連立不等式を解け。

- (1) $\begin{cases} 4x+3 \leq -21 \\ 2x+1 < 3x+11 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 8-3x > 2x+6 \\ 5+3x > 5x+9 \end{cases}$
 (3) $\begin{cases} 3x-2 < 4(x-1) \\ 0.3(x-1) > 0.2x+0.1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3+x \leq \frac{1}{2}(x+11) \\ 3x-5 > \frac{x+1}{3} \end{cases}$

解説

- (1) $\begin{cases} 4x+3 \leq -21 & \dots\dots ① \\ 2x+1 < 3x+11 & \dots\dots ② \end{cases}$

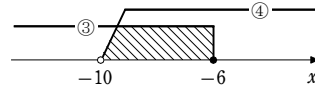
① から $4x \leq -24$

よって $x \leq -6$ ③

② から $-x < 10$

よって $x > -10$ ④

③ と ④ の共通範囲を求めて $-10 < x \leq -6$



- (2) $\begin{cases} 8-3x > 2x+6 & \dots\dots ① \\ 5+3x > 5x+9 & \dots\dots ② \end{cases}$

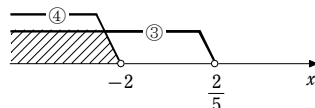
① から $-5x > -2$

よって $x < \frac{2}{5}$ ③

② から $-2x > 4$

よって $x < -2$ ④

③ と ④ の共通範囲を求めて $x < -2$



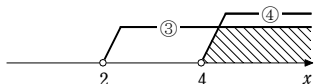
- (3) $\begin{cases} 3x-2 < 4(x-1) & \dots\dots ① \\ 0.3(x-1) > 0.2x+0.1 & \dots\dots ② \end{cases}$

① から $3x-2 < 4x-4$

よって $-x < -2$

ゆえに $x > 2$ ③

② から $3x-3 > 2x+1$



よって $x > 4$ …… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて $x > 4$

$$(4) \begin{cases} 3+x \leq \frac{1}{2}(x+11) & \dots\dots ① \\ 3x-5 > \frac{x+1}{3} & \dots\dots ② \end{cases}$$

① から $6+2x \leq x+11$

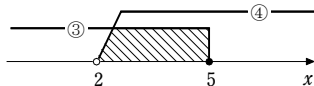
よって $x \leq 5$ …… ③

② から $9x-15 > x+1$

よって $8x > 16$

ゆえに $x > 2$ …… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて $2 < x \leq 5$



問10-04 次の不等式を解け。

(1) $|x-5| < 3$ (2) $|x+2| \geq 4$ (3) $|2x+7| \leq 2$

解説

(1) $|x-5| < 3$ から $-3 < x-5 < 3$

各辺に 5 を加えて $2 < x < 8$

(2) $|x+2| \geq 4$ から $x+2 \leq -4$ または $4 \leq x+2$

よって $x \leq -6, 2 \leq x$

(3) $|2x+7| \leq 2$ から $-2 \leq 2x+7 \leq 2$

各辺から 7 を引いて $-9 \leq 2x \leq -5$

よって $-\frac{9}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}$

問10-05 濃度が12%と8%の食塩水を混ぜて、合計500gの食塩水を作る。その濃度を9%以上にしたいとき、8%の食塩水は何g以下まで混ぜてよいのか。

ヒント：8%の食塩水を x g とすると、12%の食塩水は $(500-x)$ g となる。また、含まれている食塩の重さは、食塩水の重さに、その濃度をかければ求まる。

解説

8%の食塩水を x g, 12%の食塩水を $(500-x)$ g 混ぜるとする。

混ぜてできた食塩水の濃度が9%以上であるとき、食塩の量の関係から

$$x \times \frac{8}{100} + (500-x) \times \frac{12}{100} \geq 500 \times \frac{9}{100}$$

両辺に 100 を掛けて $8x + 12(500-x) \geq 4500$

すなわち $8x + 6000 - 12x \geq 4500$

よって $-4x \geq -1500$ ゆえに $x \leq \frac{1500}{4} = 375$

したがって、混ぜてよい8%の食塩水は 375 g 以下

問10-06 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-7x+10 > 0$ (2) $x^2-2x-8 < 0$ (3) $x^2+5x \leq 0$

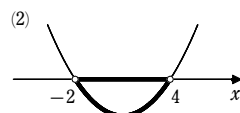
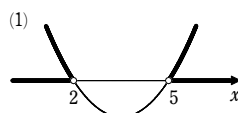
解説

(1) $x^2-7x+10 > 0$ から $(x-2)(x-5) > 0$

よって $x < 2, 5 < x$

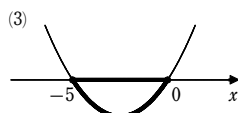
(2) $x^2-2x-8 < 0$ から $(x+2)(x-4) < 0$

よって $-2 < x < 4$



(3) $x^2+5x \leq 0$ から $x(x+5) \leq 0$

よって $-5 \leq x \leq 0$



問10-07 次の2次不等式を解け。

(1) $-x^2+3x+10 < 0$ (2) $3x-x^2 \geq 0$ (3) $-3x^2+6x-2 \geq 0$

解説

(1) 両辺に -1 を掛けて $x^2-3x-10 > 0$

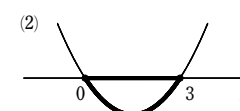
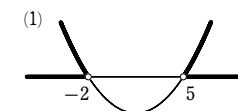
すなわち $(x+2)(x-5) > 0$

よって $x < -2, 5 < x$

(2) 両辺に -1 を掛けて $-3x+x^2 \leq 0$

すなわち $x(x-3) \leq 0$

よって $0 \leq x \leq 3$

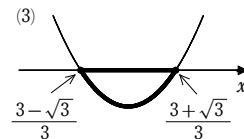


(3) 両辺に -1 を掛けて $3x^2-6x+2 \leq 0$

$3x^2-6x+2=0$ を解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

よって、 $3x^2-6x+2 \leq 0$ の解は

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$



出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/07/03]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

(解説)

(青字解説文)

問11-01 次の等式が恒等式であるかどうかを確認せよ。

$$(1) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x(x+4)} \quad (2) \frac{1}{x} + \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{x(2x+1)}$$

(解説)

$$(1) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x(x+4)}$$

等式の左辺を計算すると

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{(x+4)-x}{x(x+4)} = \frac{4}{x(x+4)}$$

等式の左辺を計算すると右辺が導かれるから、この等式は恒等式である。

$$(2) \frac{1}{x} + \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{x(2x+1)}$$

等式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{x}{2x+1} &= \frac{(2x+1)+x^2}{x(2x+1)} = \frac{x^2+2x+1}{x(2x+1)} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x(2x+1)} \end{aligned}$$

等式の左辺と右辺は同じ式にならないから、恒等式ではない。

問11-02 次の等式が x についての恒等式であるとき、定数 a , b , c の値を求めよ。

$$2x^2+5x-4=a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

(解説)

等式の右辺を x について整理すると

$$\begin{aligned} a(x+1)^2+b(x+1)+c &= a(x^2+2x+1)+b(x+1)+c \\ &= ax^2+(2a+b)x+(a+b+c) \end{aligned}$$

よって、等式は次のようになる。

$$2x^2+5x-4=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

これが x についての恒等式であるから、両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a=2, 2a+b=5, a+b+c=-4$$

これを解いて $a=2, b=1, c=-7$

問11-03 次の方程式を解け。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x(x+1)(x-3)=0 & (2) \quad & (x+3)(x-7)(5x-2)=0 \\ (3) \quad & x^3+7x^2+10x=0 & (4) \quad & 2x^3-x^2+x=0 \end{aligned}$$

(解説)

$$(1) \text{ 与式から } x=0 \text{ または } x+1=0 \text{ または } x-3=0$$

よって $x=0, -1, 3$

$$(2) \text{ 与式から } x+3=0 \text{ または } x-7=0 \text{ または } 5x-2=0$$

$$\text{よって } x=-3, 7, \frac{2}{5}$$

$$(3) \text{ 左辺を因数分解すると } x(x^2+7x+10)=0$$

$$\text{ゆえに } x(x+2)(x+5)=0$$

$$\text{すなわち } x=0 \text{ または } x+2=0 \text{ または } x+5=0$$

$$\text{よって } x=0, -2, -5$$

$$(4) \text{ 左辺を因数分解すると } x(2x^2-x+1)=0$$

$$\text{すなわち } x=0 \text{ または } 2x^2-x+1=0$$

$$\text{よって } x=0, \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

問11-04 次の方程式を解け。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^3=-8 & (2) \quad & (x+1)^3=27 \\ (3) \quad & x^4=81 & (4) \quad & (x^2+1)(x^2-9)=0 \\ (5) \quad & x^4-7x^2+12=0 & (6) \quad & x^4-5x^2-36=0 \end{aligned}$$

(解説)

$$(1) \text{ 移項すると } x^3+8=0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (x+2)(x^2-2x+4)=0$$

$$\text{すなわち } x+2=0 \text{ または } x^2-2x+4=0$$

$$\text{よって } x=-2, 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$(2) \text{ 移項すると } (x+1)^3-27=0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } \{(x+1)-3\}\{(x+1)^2+3(x+1)+9\}=0$$

$$\text{すなわち } (x-2)(x^2+5x+13)=0$$

$$\text{ゆえに } x-2=0 \text{ または } x^2+5x+13=0$$

$$\text{よって } x=2, \frac{-5 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) \text{ 移項すると } x^4-81=0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (x^2-9)(x^2+9)=0$$

$$\text{すなわち } x^2-9=0 \text{ または } x^2+9=0$$

$$\text{よって } x=\pm 3, \pm 3i$$

$$(4) \text{ 与式から } x^2-9=0 \text{ または } x^2+1=0$$

$$\text{よって } x=\pm 3, \pm i$$

$$(5) \text{ 左辺を因数分解すると } (x^2-3)(x^2-4)=0$$

$$\text{すなわち } x^2-4=0 \text{ または } x^2-3=0$$

$$\text{よって } x=\pm 2, \pm \sqrt{3}$$

$$(6) \text{ 左辺を因数分解すると } (x^2-9)(x^2+4)=0$$

$$\text{すなわち } x^2-9=0 \text{ または } x^2+4=0$$

$$\text{よって } x=\pm 3, \pm 2i$$

問11-05 以下の不等式を解け。(自作)

$$(1) (x-5)(x-3)(x+2) \leq 0$$

$$(2) (x-3)(x^2-2x+3) > 0$$

(解説)

x	...	-2	...	3	...	5	...
$A=x-5$	-	-	-	-	-	0	+
$B=x-3$	-	-	-	0	+	+	+
$C=x+2$	-	0	+	+	+	+	+
ABC	-	0	+	0	-	0	+

この表より、解は $x \leq -2$ および $3 \leq x \leq 5$

(2)

左辺 $= (x-3)[(x-1)^2+2]$ であり、 $[(x-1)^2+2]$ は常に正。
よって左辺 > 0 となるには $(x-3) > 0$ となる必要があるので、
解は $x > 3$

- 締め切り=[2025/07/03]、自己採点后に提出。
- 回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。
- 複数ページになる場合は、
 - (1) 左上をホチキス留めし、
 - (2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしてもよい。

解説

(青字解説文)

問12-01 集合 $A = \{x \mid x \text{ は } 30 \text{ 以下の素数}\}$ とする。次の の中に、
 $\in$ または $\notin$ のうち、適するものを書き入れよ。

- (1) $2 \quad \square \quad A$ (2) $15 \quad \square \quad A$ (3) $21 \quad \square \quad A$
 (4) $29 \quad \square \quad A$

解説

- (1) 2 は 30 以下の素数であるから $2 \in A$
 (2) $15 = 3 \cdot 5$ より、15 は素数でないから $15 \notin A$
 (3) $21 = 3 \cdot 7$ より、21 は素数でないから $21 \notin A$
 (4) 29 は 30 以下の素数であるから $29 \in A$

問12-02 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を全体集合とする。 U の部分集合として $A = \{1, 2, 4, 8\}$,

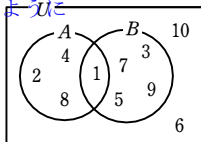
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

をとったとき、以下の集合を求めよ。

- (1) $\overline{A}$
 (2) $\overline{B}$
 (3) $\overline{A \cap B}$
 (4) $\overline{A \cup B}$
 (5) $A \cup \overline{B}$
 (6) $\overline{A} \cap B$

解説

A, B, U の要素を図にかき込んでいくと、右のようになる。



- (1) $\overline{A} = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
 (2) $\overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 (3) $\overline{A \cap B} = \{6, 10\}$
 (4) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ であるから
 $\overline{A \cup B} = \{6, 10\}$

別解 $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ であるから、(3) より

$$\overline{A \cup B} = \{6, 10\}$$

- (5) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$
 (6) $\overline{A} \cap B = \{3, 5, 7, 9\}$

問12-03 全体集合 U を 10 以下の自然数全体の集合とするととき、次の集合の補集合と、その個数を求めよ。

- (1) $A = \{1, 4, 7, 10\}$
 (2) $B = \{n \mid n \text{ は } 8 \text{ の正の約数}\}$

解説

全体集合は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- (1) $\overline{A} = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$
 (2) $B = \{1, 2, 4, 8\}$ であるから $\overline{B} = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
 (3) $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ であるから $\overline{C} = \{1, 2, 3, 10\}$

問12-04 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{ は整数}\}$ を全体集合とする。 U の部分集合として $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$,

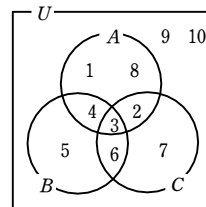
$$B = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$C = \{2, 3, 6, 7\} \text{ をとったとき、次の集合を求めよ。}$$

- (1) $A \cap B \cap C$
 (2) $A \cup B \cup C$

解説

A, B, C, U の要素を図にかき込んでいくと、右のようになる。



- (1) $A \cap B \cap C = \{3\}$
 (2) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

問12-05 (復習) $x = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{5}i}{2}$ であるとき、次の

式の値を求めよ。

- (1) $x + y$
 (2) xy
 (3) $x^2 + y^2$
 (4) $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$

解説

$$(1) x + y = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{5}i}{2} = -1$$

$$(2) xy = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}i}{2} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{5}i}{2} \right) = \frac{(-1)^2 + (\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(3) (1), (2) \text{ から } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (-1)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = -2$$

$$(4) (1), (3) \text{ から } x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = x^2(x + y) + y^2(x + y) = (x^2 + y^2)(x + y) = (-2) \cdot (-1) = 2$$

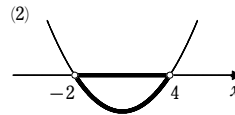
問12-06 (復習) 次の 2 次不等式を解け。

- (2) $x^2 - 2x - 8 < 0$
 (3) $x^2 + 5x \leq 0$

解説

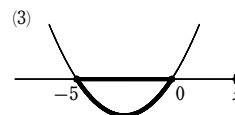
$$(2) x^2 - 2x - 8 < 0 \text{ から } (x + 2)(x - 4) < 0$$

$$\text{よって } -2 < x < 4$$



$$(3) x^2 + 5x \leq 0 \text{ から } x(x + 5) \leq 0$$

$$\text{よって } -5 \leq x \leq 0$$



- 締め切りは無し。試験前の自主学習用です。解答は後日電子メールにて配布します。
- 試験対策としては教科書の問や章末問題も有効です。

解説

(青字解説文)

問13-01 x, y は実数, n は自然数とする。次の命題が偽であることを、反例を挙げることで示せ。

- (1) $x^2=3 \implies x=\sqrt{3}$
- (2) $|x|>|y| \implies x>y$
- (3) n は奇数 $\implies 10n+1$ は素数

解説

- (1) $x=-\sqrt{3}$ のとき, $x^2=3$ であるが, $x=\sqrt{3}$ でない。
よって, $x=-\sqrt{3}$ は反例である。
ゆえに, 命題は偽である。
- (2) $x=-2, y=1$ のとき, $|x|>|y|$ であるが, $x>y$ でない。
よって, $x=-2, y=1$ は反例である。
ゆえに, 命題は偽である。
- (3) $n=5$ のとき, n は奇数であるが,
 $10n+1=51$ は $51=3 \cdot 17$ であるから素数でない。
よって, $n=5$ は反例である。ゆえに, 命題は偽である。

問13-02 x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

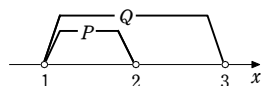
- (1) $1<x<2 \implies 1<x<3$
- (2) $x<1 \implies 0<x<1$
- (3) $x>3 \implies |x+1|>2$
- (4) $|x|\leq 2 \implies |x-1|<3$

解説

- (1) $P=\{x \mid 1<x<2\}, Q=\{x \mid 1<x<3\}$ とする。

P, Q は下の図のようになり $P \subset Q$

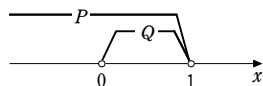
よって, 命題は真である。



- (2) $P=\{x \mid x<1\}, Q=\{x \mid 0<x<1\}$ とする。

P, Q は下の図のようになり, $P \subset Q$ は成り立たない。

よって, 命題は偽である。



- (3) $P=\{x \mid x>3\}, Q=\{x \mid |x+1|>2\}$ とする。

$|x+1|>2$ から $x+1<-2, 2<x+1$

よって $x<-3, 1<x$

ゆえに $Q=\{x \mid x<-3, 1<x\}$

よって, P, Q は下の図のようになり $P \subset Q$

ゆえに, 命題は真である。



- (4) $P=\{x \mid |x|\leq 2\}, Q=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする。

$|x|\leq 2$ から $-2\leq x\leq 2$

よって $P=\{x \mid -2\leq x\leq 2\}$

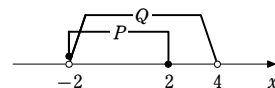
$|x-1|<3$ から $-3<x-1<3$

各辺に 1 を加えて $-2<x<4$

よって $Q=\{x \mid -2<x<4\}$

ゆえに, P, Q は下の図のようになり, $P \subset Q$ は成り立たない。

よって, 命題は偽である。



参考 (4) $x=-2$ は P に属するが Q に属さないから, $P \subset Q$ は成り立たない。

問13-03 x, y, z は実数とする。以下の ☐ の中は,

「必要条件であるが十分条件ではない」,

「十分条件であるが必要条件ではない」,

「必要十分条件である」,

「必要条件でも十分条件でもない」

のうち, それぞれどれが適するか答えよ。

- (1) $(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための ☐。
- (2) 「 $x>0$ かつ $y<0$ 」は $xy<0$ であるための ☐。
- (3) $x=y=0$ は「 $xy=0$ かつ $x+y=0$ 」であるための ☐。
- (4) $\angle A < 90^\circ$ は $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための ☐。
- (5) $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB の長さを, それぞれ a, b, c とする。
 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$
は $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であるための ☐。

解説

- (1) 「 $(x-y)(y-z)=0 \implies x=y=z$ 」は偽。(反例: $x=y=1, z=0$)

「 $x=y=z \implies (x-y)(y-z)=0$ 」は真。

したがって, 必要条件であるが十分条件ではない。

- (2) 「 $x>0$ かつ $y<0 \implies xy<0$ 」は真。

「 $xy<0 \implies x>0$ かつ $y<0$ 」は偽。

(反例: $x=-1, y=1$)

したがって, 十分条件であるが必要条件ではない。

- (3) 「 $x=y=0 \implies xy=0$ かつ $x+y=0$ 」は真。

$xy=0$ かつ $x+y=0$ とする。

$x+y=0$ から $y=-x$ …… ①

これを $xy=0$ に代入すると $-x^2=0$

よって $x=0$

これを ① に代入して $y=0$

よって, 「 $xy=0$ かつ $x+y=0 \implies x=y=0$ 」は真。

したがって, 必要十分条件である。

- (4) 「 $\angle A < 90^\circ \implies \triangle ABC$ は鋭角三角形」は偽。

(反例: $\angle A = 60^\circ, \angle B = 100^\circ, \angle C = 20^\circ$ の鈍角三角形)

「 $\triangle ABC$ は鋭角三角形 $\implies \angle A < 90^\circ$ 」は真。

したがって, 必要条件であるが十分条件ではない。

(5) 「 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \implies \triangle ABC$ は直角二等辺三角形」は偽である。

(反例: $a=1, b=1, c=1$ の正三角形)

「 $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形 $\implies (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ 」は偽である。

(反例: $a=\sqrt{2}, b=1, c=1$ の直角二等辺三角形)

したがって、必要条件でも十分条件でもない。

参考 (5) $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ のとき

$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$ よって、このとき $\triangle ABC$ は $a=b$ の二等辺三角形

または AB (長さ c) を斜辺とする直角三角形となる。

問13-04 x, y は実数, n は整数とする。対偶を考えて、次の命題を証明せよ。

(1) $x^3 \neq 1 \implies x \neq 1$

(2) $x+y > 3 \implies$ 「 $x > 2$ または $y > 1$ 」

(3) n^2 が 3 の倍数でないならば, n は 3 の倍数でない。

(4) n^3+1 が奇数ならば, n は偶数である。

解説

(1) 対偶「 $x=1 \implies x^3=1$ 」を証明する。

$x=1$ のとき $x^3=1^3=1$

よって、対偶は真である。

したがって、もとの命題は真である。

(2) 対偶「 $x \leq 2$ かつ $y \leq 1 \implies x+y \leq 3$ 」を証明する。

$x \leq 2$ かつ $y \leq 1$ のとき $x+y \leq 2+1$

すなわち $x+y \leq 3$

よって、対偶は真である。

したがって、もとの命題は真である。

(3) 対偶「 n が 3 の倍数ならば, n^2 は 3 の倍数である」を証明する。 n が 3 の倍数のとき, n はある整数 k を用いて $n=3k$ と表される。このとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3 \cdot 3k^2$$

$3k^2$ は整数であるから, n^2 は 3 の倍数である。ゆえに、対偶は真である。したがって、もとの命題は真である。

(4) 対偶「 n が奇数ならば, n^3+1 は偶数である」を証明する。 n が奇数のとき, n はある整数 k を用いて $n=2k+1$ と表される。このとき

$$n^3+1=(2k+1)^3+1$$

$$=(8k^3+12k^2+6k+1)+1=2(4k^3+6k^2+3k+1)$$

$4k^3+6k^2+3k+1$ は整数であるから, n^3+1 は偶数である。

よって、対偶は真である。したがってもとの命題は真である。

問13-05 n は自然数, x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、対偶、裏を述べ、それらの真偽を調べよ。

(1) n は 9 の倍数である $\implies n$ は 3 の倍数である

(2) $x \neq 2 \implies x^2-3x+2 \neq 0$

(3) $x^2-x=0 \implies$ 「 $x=0$ または $x=1$ 」

解説

(1) 与えられた命題は真である。

逆: n は 3 の倍数である $\implies n$ は 9 の倍数である

6 は 3 の倍数であるが, 9 の倍数ではない。

よって、逆は偽である。

対偶: n は 3 の倍数でない $\implies n$ は 9 の倍数でない

対偶は真である。

裏: n は 9 の倍数でない $\implies n$ は 3 の倍数でない

6 は 9 の倍数でないが, 3 の倍数である。

よって、裏は偽である。

(2) $x^2-3x+2=0$ とすると $(x-1)(x-2)=0$

よって $x=1$ または $x=2$

$x=1$ のとき, $x \neq 2$ であるが $x^2-3x+2=0$ である。

よって、与えられた命題は偽である。

逆: $x^2-3x+2 \neq 0 \implies x \neq 2$

$x^2-3x+2 \neq 0$ とすると $x \neq 1$ かつ $x \neq 2$

よって、逆は真である。

対偶: $x^2-3x+2=0 \implies x=2$

$x=1$ のとき, $x^2-3x+2=0$ であるが $x \neq 2$ である。

よって、対偶は偽である。

裏: $x=2 \implies x^2-3x+2=0$

$x=2$ のとき $x^2-3x+2=0$

よって、裏は真である。

(3) $x^2-x=0$ とすると $x(x-1)=0$

よって $x=0$ または $x=1$

ゆえに、与えられた命題は真である。

逆: 「 $x=0$ または $x=1$ 」 $\implies x^2-x=0$

$x=0$ および $x=1$ は、ともに $x^2-x=0$ を満たす。

よって、逆は真である。

対偶: 「 $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$ 」 $\implies x^2-x \neq 0$

$x^2-x=0$ を満たす x は 0 と 1 以外にはない。

よって、対偶は真である。

裏: $x^2-x \neq 0 \implies$ 「 $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$ 」

$x^2-x \neq 0$ とすると $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$

よって、裏は真である。

問13-06 実数 x が正の無理数であるとき, $\sqrt{x}$ は無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

解説

$\sqrt{x}$ は無理数でないとは仮定すると, $\sqrt{x}$ は有理数である。

その有理数を r とすると $\sqrt{x}=r$

両辺を 2 乗すると $x=r^2$

r が有理数のとき r^2 は有理数であるから、この等式は x が無理数であることに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{x}$ は無理数である。

- 締め切りは無し。試験前の自主学習用です。解答は後日電子メールにて配布します。
- 試験対策としては教科書の問や章末問題も有効です。

解説

(青字解説文)

問14-01 次の等式を証明せよ。

- (1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
 (2) $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac - 3bd)^2 + 3(ad + bc)^2$
 (3) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
 $= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

解説

- (1) (左辺) $= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$
 = (右辺)
 (2) (左辺) $= a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2$
 (右辺) $= (a^2c^2 - 6abcd + 9b^2d^2) + 3(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)$
 $= a^2c^2 + 3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2 =$ (左辺)
 (3) (右辺) $= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)]$
 $= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$ (左辺)

問14-02 $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1) $a^2 - 2bc = b^2 + c^2$
 (2) $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = 0$
 (3) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$

解説

 $a+b+c=0$ から $c=-(a+b)$ …… ①

(1) ① を代入すると

$$\begin{aligned} a^2 - 2bc - (b^2 + c^2) &= a^2 + 2b(a+b) - b^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2b^2 - b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(2) ① を左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a+b)(b-(a+b))\{-(a+b)+a\} + ab\{-(a+b)\} \\ &= ab(a+b) - ab(a+b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(3) ① を左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2\{b-(a+b)\} + b^2\{-(a+b)+a\} + \{-(a+b)\}^2(a+b) + 3ab\{-(a+b)\} \\ &= -a^3 - b^3 + (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (3a^2b + 3ab^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

別解 $a+b+c=0$ から $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$ …… ②

(2) ② を左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (-c)(-a)(-b) + abc = -abc + abc \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

(3) 左辺を式変形すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 3abc \\ &= ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc \end{aligned}$$

② を代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc = -abc - abc - abc + 3abc \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

問14-03 次の不等式を証明せよ。また等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

- (1) $x^2 + x + 1 \geq 3x$ (2) $x^2 - 2x + 2 > 0$
 (3) $2x^2 + 3y^2 \geq 4xy$ (4) $9x^2 \geq y(6x - y)$

解説

- (1)
- $(x^2 + x + 1) - 3x = (x-1)^2 \geq 0$

よって $x^2 + x + 1 \geq 3x$ 等号が成り立つのは $x-1=0$ すなわち、 $x=1$ のときである。

- (2)
- $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$

よって $x^2 - 2x + 2 > 0$

- (3)
- $(2x^2 + 3y^2) - 4xy = 2(x-y)^2 + y^2 \geq 0$

よって $2x^2 + 3y^2 \geq 4xy$ 等号が成り立つのは $x-y=0$ かつ $y=0$ すなわち、 $x=y=0$ のときである。

- (4)
- $9x^2 - y(6x - y) = (3x - y)^2 \geq 0$

よって $9x^2 \geq y(6x - y)$ 等号が成り立つのは $3x - y = 0$ すなわち、 $3x = y$ のときである。

問14-04 相加平均と相乗平均の関係を利用して、次の不等式を証明せよ。また等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

- (1) $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) \geq (x^3 + y^3)^2$
 (2) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$

解説

- (1)
- $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3)^2 = x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 - (x^6 + 2x^3y^3 + y^6)$
-
- $= x^2y^2(x^2 - 2xy + y^2) = x^2y^2(x - y)^2 \geq 0$

よって $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) \geq (x^3 + y^3)^2$ 等号が成り立つのは、 $x=0$ または $y=0$ または $x=y$ のときである。

- (2)
- $(x^4 + y^4) - (x^3y + xy^3) = x^3(x - y) - y^3(x - y) = (x - y)(x^3 - y^3)$
-
- $= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$

ここで $(x - y)^2 \geq 0$, $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ よって $(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$ ゆえに $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ 等号が成り立つのは $x=y$ または $x=y=0$ のとき、すなわち $x=y$ のときである。問14-05 $x > 0$, $y > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

- (1) $x + \frac{8}{x} \geq 4\sqrt{2}$ (2) $\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + y\right) \geq 16$

(解説)

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

$$(1) \quad x > 0, \quad \frac{8}{x} > 0 \text{ であるから} \quad x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{8}{x}} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは、 $x = \frac{8}{x}$ すなわち $x^2 = 8$ のときであるが、

$x > 0$ であるから $x = 2\sqrt{2}$ のときである。

$$(2) \quad \left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + y\right) = 9 + 3xy + \frac{3}{xy} + 1 = 3\left(xy + \frac{1}{xy}\right) + 10$$

$x > 0, y > 0$ より、 $xy > 0, \frac{1}{xy} > 0$ であるから

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{xy}} = 2$$

$$\text{よって} \quad \left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + y\right) \geq 3 \cdot 2 + 10 = 16$$

等号が成り立つのは、 $xy = \frac{1}{xy}$ すなわち $(xy)^2 = 1$ のときであるが、

$xy > 0$ であるから $xy = 1$ のときである。

注意 (2)を次のように証明しようとすると、途中で行き詰まってしまう。

$x > 0, y > 0$ であるから

$$3x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{y}}, \quad \frac{3}{x} + y \geq 2\sqrt{\frac{3y}{x}}$$

$$\text{辺々を掛けて} \quad \left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + y\right) \geq 2\sqrt{\frac{3x}{y}} \cdot 2\sqrt{\frac{3y}{x}}$$

$$\text{すなわち} \quad \left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x} + y\right) \geq 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① 自体は成り立っているが、実際には左辺は 12 以上ではなく、16 以上になる。

もし ① の等号が成り立つとすると、それは $3x = \frac{1}{y}$ かつ $\frac{3}{x} = y$ すなわち xy

$= \frac{1}{3}$ かつ $xy = 3$ のときであるが、このような x, y の値は存在しない。

したがって、① の等号だけは成り立たないことがわかる。

問14-06 次の不等式を証明せよ。

$$(1) \quad \sqrt{7} + \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{10}$$

$$(2) \quad \sqrt{7} - \sqrt{6} > \sqrt{14} - \sqrt{13}$$

(解説)

$$(1) \quad (\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 \\ = (15 + 2\sqrt{56}) - (15 + 2\sqrt{50}) = 2(\sqrt{56} - \sqrt{50}) > 0$$

$$\text{よって} \quad (\sqrt{7} + \sqrt{8})^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2$$

$\sqrt{7} + \sqrt{8} > 0, \sqrt{5} + \sqrt{10} > 0$ であるから

$$\sqrt{7} + \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{10}$$

$$(2) \quad (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2$$

$$= (20 + 2\sqrt{91}) - (20 + 2\sqrt{84}) = 2(\sqrt{91} - \sqrt{84}) > 0$$

$$\text{よって} \quad (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2 > (\sqrt{6} + \sqrt{14})^2$$

$\sqrt{7} + \sqrt{13} > 0, \sqrt{6} + \sqrt{14} > 0$ であるから

$$\sqrt{7} + \sqrt{13} > \sqrt{6} + \sqrt{14}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sqrt{7} - \sqrt{6} > \sqrt{14} - \sqrt{13}$$

問14-07 以下の言葉を考える。

「努力した者がかならず成功するとは限らない。

しかし、成功する者は皆努力していた。」

現実世界での実情はいったん忘れて、この言葉が正しいと仮定した上で、以下の問いに答えよ。

(1) この言葉があらわす内容を、数学の命題の形式に書き直せ。

(2) 上で書き直した命題の逆、裏、対偶を書け。

(解説)

(1) 成功する。⇒ 努力した。

【参考】ここで「努力した。」は「成功する。」の必要条件であるが、十分条件ではない。

(2)

逆：努力した。⇒ 成功する。

裏：成功しない。⇒ 努力していない。

対偶：努力していない。⇒ 成功しない。

【注意】厳密には、命題とは「真偽」を明確にできる文章または式を指す。この問題の答えは、真偽を判断できるとは限らないので、命題とはいえない。あくまで形式（書き方）を命題らしくしただけである。