

<4/1, 2025>

初回 → 自己紹介、宿題の回収、成績の方法、
ガイダンス（何をやるのか？）、
高専のシステム（留年もあるぞ！）、
学習のツツ { ノートの取り方、
問題をこなすこと！
~~分~~ 解けそうな問題から！

出欠はかなり厳密に取るぞぞ。

（おん）

1年 基礎数学Ⅰ ~~5~~ 組 × 2 / 週

1年 基礎数学Ⅱ ~~2~~ 組 × 1

2年 代数・幾何 4組 × 1

3年 解析学 I組 × 2 / 週

3年 代数・幾何 M2組 × 1

前期 = 16 週

後期 = 16 週

初回

1年生の基①で宿題の

~~提出~~

解答を配る → 自己採点して。

→ 次回に回収!!

<4/9, 2025> 数学基礎 I⑩用

$$\left. \begin{array}{l} A = \sim \\ B = \sim \\ C = \sim \end{array} \right\} \rightarrow \text{代入する前に } OA + OB + OC \text{ の} \\ \text{形に整理しておけ!}$$

大前提: $\frac{\text{前} + \text{後}}{2} \geq 60 \leftarrow \text{進級条件}$

$\text{前} = \text{前期の}$

$\text{後} = \text{後期の}$

<4/14, 2025> 解析 (3-I) 用

問 3.5 (p.84)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int x(x+2)^5 dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = x+2 \\ \Downarrow \\ x = t-2 \\ \frac{dx}{dt} = 1 \end{array} \right. \\ &= \int (t-2)t^5 dt \\ &= \int [t^6 - 2t^5] dt \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^6}{6} + C \\ &= \frac{(x+2)^7}{7} - \frac{(x+2)^6}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \right) \\ &= \int 1 dt = t + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x^2-1} \\ t^2 &= x^2-1 \\ x^2 &= t^2+1 \\ x &= \sqrt{t^2+1} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ dx &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int 2x e^{x^2-2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = x^2-2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \end{array} \right. \\ &= \int \left(\frac{dt}{dx} \right) e^t dx \\ &= \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2-2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \int \frac{(\log x)^2}{x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right. \\ &= \int t^2 \left(\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (\log x)^3 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \int \cos^4 x \sin x dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right. \\ &= \int t^4 \left(-\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= (-) \int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right. \\ &= \int \frac{1}{t^2} \left(-\frac{dt}{dx} \right) dx \\ &= (-) \int \frac{1}{t^2} dt = (-) \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) + C \\ &= \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

〈4/24, 木, 2025〉基礎数 I ③ 用ノート

教科書 p. 11 ~ 16

✓ 剰余の定理

✓ 因数定理

✓ 最大公約数 &
最小公倍数

→ 絶対教23!

✓ 整式の除法、商、あまり

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) = b_m x^m + \cancel{b_{m-1}} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$n > m \rightarrow A(x)$ の次数の方が $B(x)$ の次数より高い。

$\Rightarrow A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$,
余りを $R(x)$ とすると、次式が成り立つ。

$$A(x) = B(x) Q(x) + R(x)$$

✓ 式の除法・筆算と組立除法

例題 1.7 (p. 13)

Ⓢ $A(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ を

$B(x) = x - 2$ で割ったときの商と余りは?

筆算

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 5x + 12 \\ x-2 \overline{) 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1} \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 5x^2 + 2x \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ 12x - 1 \\ \underline{12x - 24} \\ 23 \end{array}$$

$$\Rightarrow A(x) = (4x^2 + 5x + 12)(x - 2) + 23$$

商 = $4x^2 + 5x + 12$,

余り = 23

組立除法

	(x^3)	(x^2)	(x^1)	(x^0)
$(x-2)$	4	-3	2	-1
$\times(-) \rightarrow 2$		8	10	24
	4	5	12	23

✓ 剰余の定理

$P(x)$ を $(x-\alpha)$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい。

証明: $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$ どんな関数
でもかまわない。

$$P(x=\alpha) = (\underbrace{\alpha-\alpha}_0)Q(x) + R$$

$$= 0 + R = R$$

✓ 因数定理

$P(x)$ が $(x-\alpha)$ で割り切れた ~~$R=0$~~ ならば、

$$P(\alpha) = R = 0 \text{ が成り立つ。}$$

逆に $P(\alpha) = 0$ ~~が成り立つ~~ $\rightarrow P(x)$ は $(x-\alpha)$ で割り切れる。

$\rightarrow$ 因数分解でお世話になる。

もし $P(x=\alpha) = 0$ となる $x=\alpha$ を見つけられたのなら、

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

までは保証される。 $Q(x)$ は筆算や組立除法で求める。

✓ 3次式を因数分解する手順 (一番よく使われる例)

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ はすべて違う文字または数。

まずは $a_3 = 1$ とし、 $a_3 \neq 0$ のときは、 $\frac{1}{a_3}P(x)$ とし。

ステップ① $a_0 = a \cdot b \cdot c$ を満たす $\{a, b, c\}$ をリストアップ

ステップ② $P(x)$ に ~~$x=a, x=b, x=c$~~ $x=\{a, b, c\}$ を一つずつ代入して、 $P(x) = 0$ となるものを引き当てる。 $\rightarrow$ 今例では $P(x=a) = 0$ だったとする。

$\rightarrow$ 因数定理により、

$$P(x) = (x-a)Q(x),$$

$$Q(x) = \bigcirc x^2 + \triangle x + \square$$

までは保証される。

ステップ③ $Q(x)$ を整式除法で求める。

$$\frac{P(x)}{(x-a)} = Q(x) \text{ 筆算 or 組立除法}$$

$$\rightarrow Q(x) = \del{(x-e)(x-d)} q_2x^2 + q_1x + q_0$$

ステップ④ $Q(x)$ を因数分解する。2次式なので。

$$Q(x) = (x-d)(x-e)$$

~~ステップ⑤~~ 2つで $P(x) = (x-a)(x-d)(x-e)$ と因数分解が完了!!

注意。ステップ④はできない場合もある。判別式 < 0 。

2の場合は $P(x) = (x-a)(q_2x^2 + q_1x + q_0)$ で完了。

⑨

$$A = x^3 + 0 \cdot x^2 + 5x - 6, \quad B = x + 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 9 \\ x+2 \overline{) x^3 + 5x - 6} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 + 5x - 6 \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ 9x - 6 \\ \underline{9x + 18} \\ -24 \end{array}$$

商

$$Q(x) = x^2 - 2x + 9$$

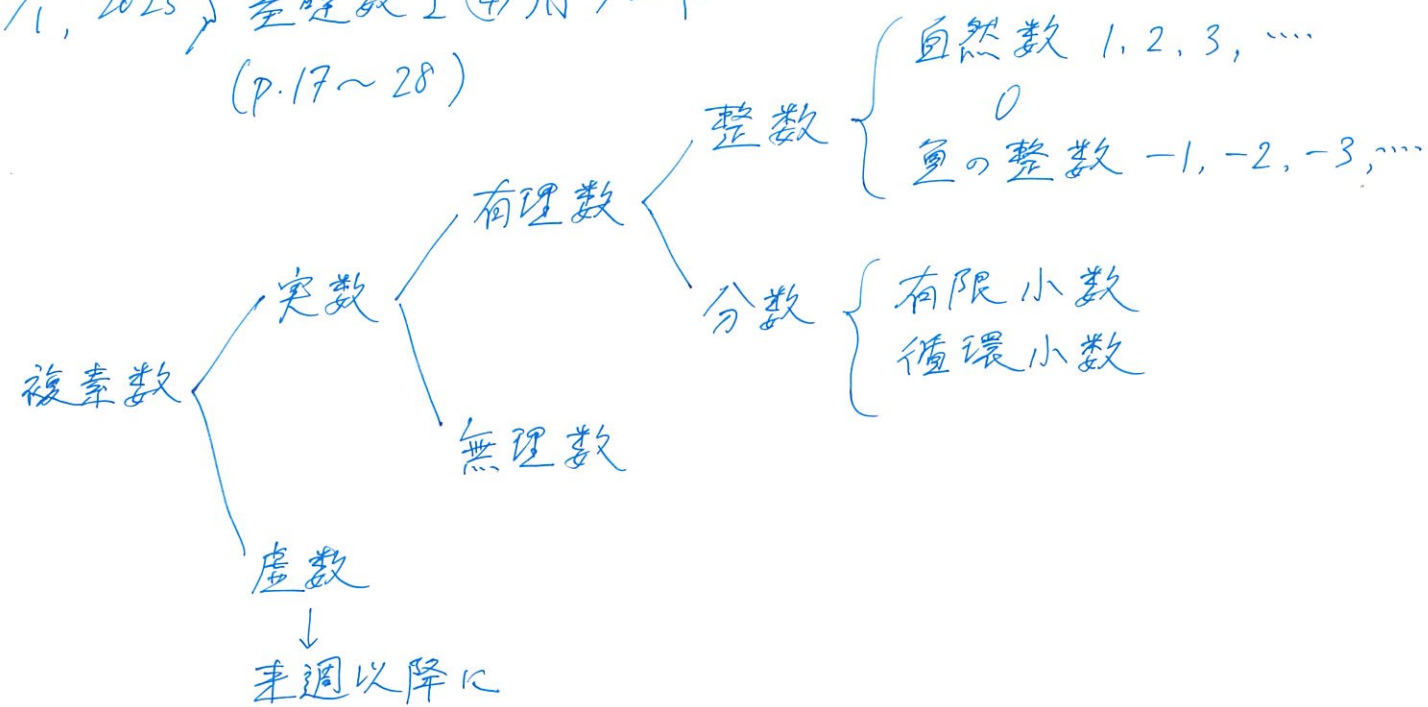
$$\begin{array}{r} -24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} A(-2) &= (-2)^3 + 5(-2) - 6 \\ &= -8 - 10 - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+2)(x^2 - 2x + 9) - 8 \\ &= x^3 - 2x^2 + 9x \\ &\quad + 2x^2 - 4x + 18 - 8 \\ &= x^3 + 0 - 3x - 6 \end{aligned}$$

$$B^2 = (x^2 - 4)^2 \rightarrow B = \pm \sqrt{x^2 - 4}$$

<5/1, 2025> 基礎数 I ④ 用ノート
(p.17~28)



整数 $\rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

~~有限小数~~

有理数 $\rightarrow \frac{m}{n}$, m と n は 整数.

有限小数. (例) $\frac{31}{10} = 3.1$, $-\frac{256}{100} = -2.56$, etc.
循環小数. (例) $\frac{11}{3} = 3.666\dots = 3.\dot{6}$

※ この2つの和.

$$\frac{27}{22} = 1.2272727\dots = 1.2\dot{2}\dot{7} \quad (?)$$

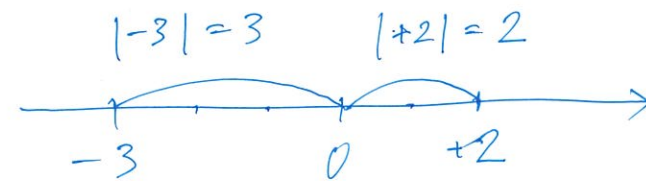
$$\frac{97}{37} = 2.621621\dots = 2.\dot{6}2\dot{1}$$

非有理実数 = 無理数

例: π , $\sqrt{2}$, 循環しない小数など.

絶対値 (p.19~20)

~~実数~~ 実数 a の絶対値を $|a|$ で表す。
 $\rightarrow$ 数直線上で原点 0 から a までの距離。



$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

・ $|a| \geq 0$, $a=0$ のときのみ $|a|=0$.

$$|-a| = |a| \quad , \quad |ab| = |a||b| \quad , \quad \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$$

$$|a|^2 = a^2 \quad , \quad |b-a| \neq |b| - |a|$$

平方根 (p.21)

$\sqrt{a} \geq 0$, a の平方根は $\pm\sqrt{a}$

※ 負の平方根は $-\sqrt{a}$ と表記する.

$$\sqrt{a} \geq 0, (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a \quad (a \geq 0 \text{ とする})$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

分数の有理化

→ 分母を根号 $\sqrt{\quad}$ を含まない式に変形する。

$$(1) \frac{\star}{\sqrt{a}} = \frac{\star \sqrt{a}}{a}, \quad (2) \frac{\star}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \frac{\star(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{\star(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b-a}$$

例 = 問 1.13 (4) (p.24)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+3}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

<5/7, 2025>

基礎数I⑤用ノート

今週は2222。

分数式 → 今週や3。

→ 分子と分母が整式であるもの。 $\frac{B(x)}{A(x)}$ など。

→ 約分: $\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{b(x)c(x)}{a(x)c(x)} = \frac{b(x)}{a(x)}$

→ 「これ以上は約分できない」分数式 = 既約分数式

例 = ~~例題~~ 問 1.14 (p.24)

$$(1) \frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1} = \frac{(2x-3)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x-3}{x+1}$$

$$(2) \frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

$$(3) \frac{8(ab)^2(abc)^3}{12a^6b^7} = \frac{8a^{2+3}b^{2+3}c^3}{12a^6b^7} = \frac{2c^3}{3ab^2}$$

分数式同士の計算

$$\frac{B}{A} \pm \frac{D}{C} = \frac{BC \pm AD}{AC}$$

$$\frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{BD}{AC}$$

$$\frac{B}{A} \div \frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{C}{D} = \frac{BC}{AD}$$

$A = A(x)$

$B = B(x)$

$C = C(x)$

$D = D(x)$, etc.

* $\times$ と $\div$ が共存するときは、左から順に行う。

例 = 問 1.16 (4)

$$\frac{a^2-1}{ab} \div \frac{a^2+a}{a^2-a-6} \times \frac{a^2b+ab}{a^2-2a-3}$$

$$= \frac{(a+1)(a-1)}{ab} \times \frac{(a-3)(a+2)}{a(a+1)} \times \frac{ab(a+1)}{\cancel{ab(a+1)}(a-3)(a+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(a+1)}(a-1) \cdot \cancel{(a-3)}(a+2) \cdot \cancel{ab(a+1)}}{\cancel{ab} \cdot a(a+1) \cdot \cancel{(a-3)}(a+1)} = \frac{(a-1)(a+2)}{a}$$

繁分数式

分子・分母がさらに分数式になっているもの。

$$\frac{\frac{D}{C} + \frac{G}{F}}{\frac{A}{B} + \frac{E}{B}} \quad \text{とかとか。}$$

→ ① 割り算の形に直して計算する。

② 分子・分母に同じ整式 D をかける。 $\frac{B}{A} = \frac{BD}{AD}$

例 = 問 1.17 (3) & (4) (p. 28)

$$(3) \frac{\frac{3}{x^3-y^3}}{\frac{2}{x^2-y^2}} = \left(\frac{3}{x^3-y^3}\right) \div \left(\frac{2}{x^2-y^2}\right), \quad \begin{cases} x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ x^2-y^2 = (x-y)(x+y) \end{cases}$$

$$= \frac{3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{2} = \frac{3(x+y)}{2(x^2+xy+y^2)}$$

$$(4) \frac{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}}{\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}} = \frac{\left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}\right)(2-x)(2+x)}{\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right)(2-x)(2+x)}$$

$$= \frac{(2+x) - (2-x)}{(2+x) + (2-x)} = \frac{x - (-x)}{4} = \frac{x}{2}$$

2次方程式 (p. 31) ← 来週やる?

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解の公式 (p. 32)

証明:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{両辺} \\ \text{aで割る} \end{array}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{左辺} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<5/8, 木, 2025> 基礎数学I ⑤B ≡ ⑥用ノート

2次方程式 (p. 32 ~ 40)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{判別式 } D = b^2 - 4ac$$

証明: $ax^2 + bx + c = 0$, 両辺 $\times \frac{1}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(= \frac{ac}{4a^2} \right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解の公式 (別バージョン)

元々の方程式で $b = 2d$ だった場合には、

$$ax^2 + 2dx + c = 0$$

$$x = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - ac}}{a}$$

複素数 (p. 34)

これまでは $\{a, b, c\}$ の値によっては $D = b^2 - 4ac < 0$ となり、
その場合、実数の範囲内では解が存在しなかった。

↓

どんな場合でも $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が解として存在する

よって、数の世界を拡張する。

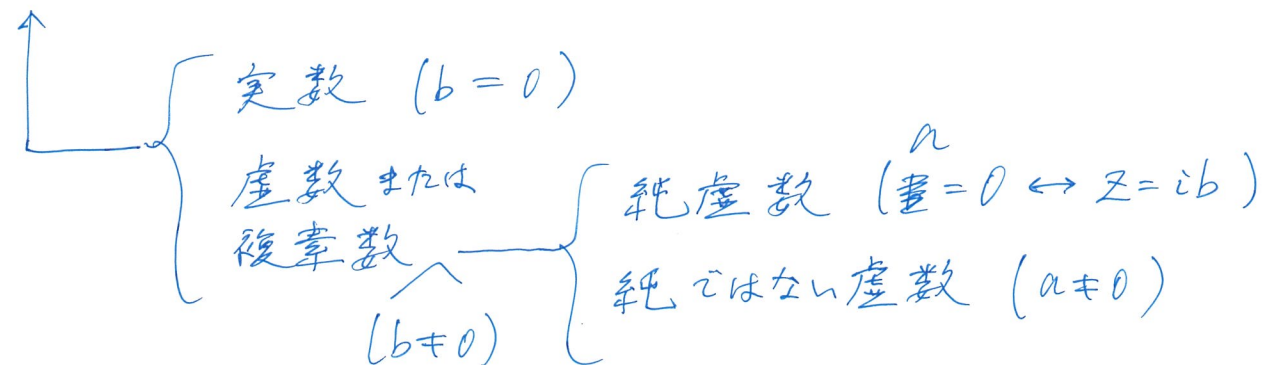
↓

虚数単位 i を次式のように定める。

$$i^2 = -1, \quad \sqrt{-1} = i$$

拡張された数 = 複素数

$z = a + ib$, a と b は実数



実部と虚部 (p. 34)

$$z = a + ib, \begin{cases} a \cdots z \text{ の実部: } \operatorname{Re}(z) = a \\ b \cdots z \text{ の虚部: } \operatorname{Im}(z) = b \end{cases}$$

複素共役 (p. 34)

$$z = a + ib \text{ の共役複素数 } \bar{z} \text{ は、} \bar{z} = a - ib.$$

虚部の符号が逆転。

重要事項のまとめ演習問題 [2025/05/09] 基礎数学Ⅰ (1-5)

複素数 $z = a + ib$ についての重要事項をまとめておく。ここで a と b は任意の実数である。また i は虚数単位であり、 $i^2 = -1$ を満たす。

実部と虚部

複素数 $z = a + ib$ において、 a をその実部 (real part)、 b をその虚部 (imaginary part) という。

加法と減法

ふたつの複素数の加法と減法は次式で与えられる。

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d). \quad (2)$$

一般にその答えも複素数になり得る。

乗法

ふたつの複素数の乗法 (かけ算) は次式で与えられる。虚数単位も一種の文字と考えてよい。ただし $i^2 = -1$ に注意。

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + (i^2)bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned} \quad (3)$$

一般にその答えも複素数になり得る。

除法

ふたつの複素数の除法 (わり算) は次式で与えられる。数学世界の作法として、分母を実数化するので、とてもややこしい。

$$\begin{aligned} (a + ib) \div (c + id) &= \frac{a + ib}{c + id} \\ &= \frac{a + ib}{c + id} \times \frac{c - id}{c - id} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

一般にその答えも複素数になり得る。

共役な複素数

複素数 $z = a + ib$ に対して、その虚部の正負を反転させると $\bar{z} = a - ib$ となる。この $\bar{z} = a - ib$ を共役な複素数と呼ぶ。

複素共役の性質

z とその複素共役 $\bar{z}$ は以下の性質を満たす。

$$z + \bar{z} = 2a \quad (\text{pure real}), \quad (5)$$

$$z - \bar{z} = 2ib \quad (\text{pure imaginary}), \quad (6)$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad (\text{pure real}). \quad (7)$$

それぞれの答えが純実数、純虚数、純実数になっている点に注意。

演習問題 [2025/04/29] 解析学 (3-I)

- 締め切り = 2025/05/13 (火) 授業開始時。GW 課題もあるため、今回は書き写しのみとします。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 04-01

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int [\alpha \sin mx + \beta \cos nx] dx &= \alpha \frac{(-) \cos mx}{m} + \beta \frac{\sin nx}{n} + C \\ \int e^{-k(x+\alpha)} dx &= \frac{e^{-k(x+\alpha)}}{(-k)} + C \\ \int \log(x + \alpha) dx &= (x + \alpha) \log(x + \alpha) - x + C\end{aligned}\quad (8)$$

問 04-02

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int g'(x)f(x)dx &= g(x)f(x) - \int g(x)f'(x)dx \\ \int f(x)dx &= \int (x + \alpha)'f(x)dx = (x + \alpha)f(x) - \int (x + \alpha)f'(x)dx\end{aligned}\quad (9)$$

問 04-03

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= (-) \int_b^a f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx\end{aligned}\quad (10)$$

問 04-04

以下の公式を 5 回書き写せ。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s)ds = f(x) \quad (11)$$

演習問題 [2025/04/29] 代数・幾何 (2-4)

- 締め切り = 2025/05/13 (火) 授業開始時。GW 課題もあるため、今回は書き写しのみとします。
- 解答は A4 レポート用紙にまとめ、表紙には学年、組、番号、氏名を書くこと。
- 解答状況から、作問者側の不足（難易度調整、誤字など）があったと判断した場合、評価点には補正を加えます。

問 04-01

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}k\vec{a} &= (ka_1, ka_2) \\ \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2) \\ \left| \vec{a} + \vec{b} \right| &= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}\end{aligned}\tag{12}$$

問 04-02

以下の公式セットを 5 回書き写せ。

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{13}$$

問 04-03

以下の公式セットを 5 回書き写せ。なお記号 $\times$ は「ベクトルの外積」を表すものであるが、現時点ではその意味は気にしないで良い。

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \times \vec{a} &= (-)\vec{a} \times \vec{b}\end{aligned}\tag{14}$$

<5/22, 木, 2025> 基礎数 I ⑦ 用ノート

本日 → ~~2次方程式の判別式と解と複素数平面~~

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow D = b^2 - 4ac,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

✓ $D > 0 \leftrightarrow$ 異なる2つの実数解

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

✓ $D = 0 \leftrightarrow$ 重解

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

✓ $D < 0 \leftrightarrow$ 異なる2つの虚数解

$$\sqrt{D} = \sqrt{-|D|} = \pm i\sqrt{|D|} \text{ より,}$$

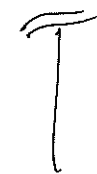
$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}, x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}$$

複素数の分数の計算

$$\frac{B+ib}{A+ia} = \frac{(B+ib)(A-ia)}{(A+ia)(A-ia)} = \frac{(AB+ab) + i(Ab-aB)}{A^2+a^2}$$

※ 分母の実数化

$$\frac{b}{ia} = \frac{b}{ia} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ib}{(i)^2 a} = -\frac{ib}{a}$$



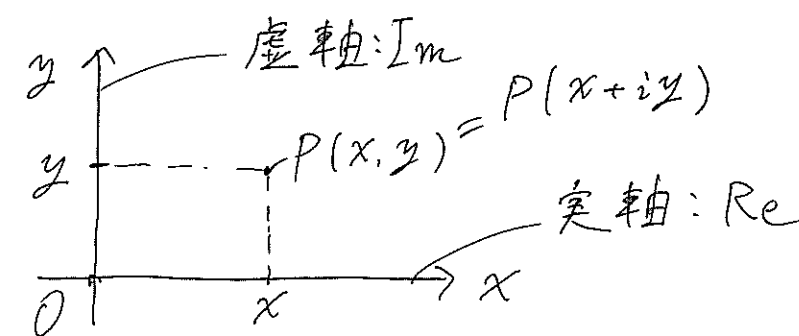
$$\frac{(B+ib)}{(A+ia)} \times \frac{(D+id)}{(C+ic)} = \frac{(B+ib)(D+id)}{(A+ia)(C+ic)}$$
$$= \frac{(BD-bd) + i(Bd+bD)}{(AC-ac) + i(Ac+aC)}$$

$$\frac{(B+ib)}{(A+ia)} \div \frac{(F+if)}{(E+ie)} = \frac{(B+ib)}{(A+ia)} \times \frac{(E+ie)}{(F+if)} = \sim$$

複素数平面 (ガウス平面)

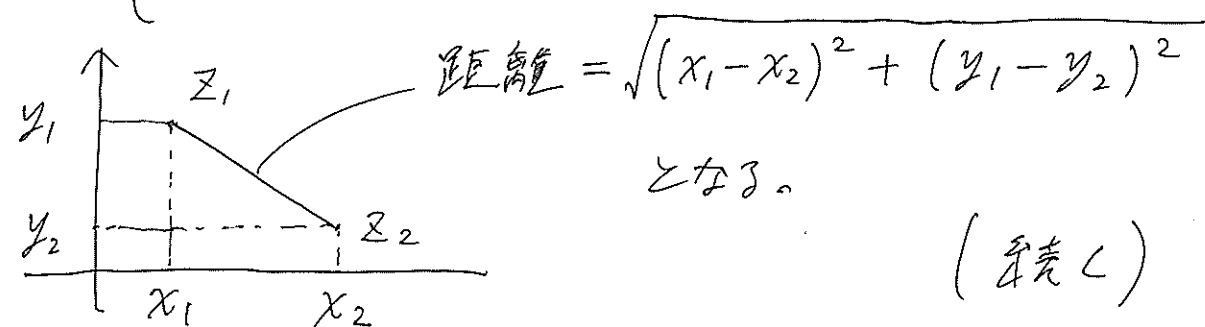
$z = x + iy$ に対して点 $P(x, y)$ を対応させる。

この平面を複素数平面と呼ぶ。



複素数の絶対値

2つの $\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$ をガウス平面上に打点すると、



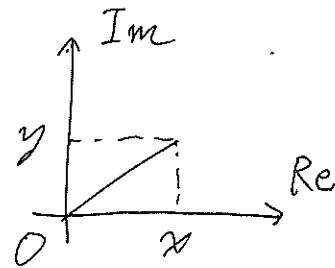
となる。

(続く)

(続き)

特に、原点 $0 = 0 + i0$ からの距離を、その複素数の絶対値と定義する。

$$|z_1| = |x_1 + iy_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



以下の公式が成り立つ。

~~$|z_1|$~~ $|z| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ここで $\bar{z} = x - iy$
(複素共役)
 $z = x + iy$ のとき、

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

<6/12, 2025> 1-5 基礎数 I 因用ノート

✓ 解と係数の関係

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \alpha, \beta$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \left(= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \right) \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \left(= \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \right) \end{cases}$$

例 = 例題 2.7 (p. 41)

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 5 = 0 \text{ の2つの解を } \alpha, \beta \text{ とする。}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3 \text{ はどんな値?}$$

$$\star \text{ まず解の公式より } x = \frac{-4 \pm \sqrt{4 - 60}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-11}}{3}$$

→ これはやさなくて良い! 代わりに、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{3} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ を使う。}$$

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{(-\frac{4}{3})}{(\frac{5}{3})} = -\frac{4}{5}$$

$$(2) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} = \frac{16 - 30}{9} = -\frac{14}{9}$$

$$(3) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{5}{3} \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-64 + 180}{27} = \frac{116}{27}$$

✓ 対称式 (p. 42)

2つの文字 α, β を入れ替えても意味や値が変わらない式の2つ。例は以下。

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} \\ \text{他にも色々...} \end{cases}$$

✓ 解の公式による因数分解 (p. 43)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - \alpha)(x - \beta), \text{ ただし } \alpha, \beta \text{ は } f(x) = 0 \text{ の2つの解。}$$

✓ 連立方程式 (p. 43)

$$\text{例: } \begin{cases} ax + by = c \\ cx + dy = e \end{cases}, \begin{cases} ax + by + pz = c \\ cx + dy + qz = e \\ fx + gy + rz = h \end{cases}$$

変数が2個 $\{x, y\}$ なら2本、

変数が3個 $\{x, y, z\}$ なら3本の式が必要。

例 = 例題 2.10

$$(1) \begin{cases} x+y+z=6 \cdots ① \\ 2x+y-z=1 \cdots ② \\ x-y+2z=5 \cdots ③ \end{cases}$$

$$①+② \text{ より } 3x+2y=7 \cdots ④$$

$$① \times 2 - ③ \text{ より } x+3y=7 \cdots ⑤$$

$$④-⑤ \times 3 \text{ より } -7y=-14 \rightarrow y=2$$

$$⑤ \text{ に } y=2 \text{ を代入して } x=1$$

$$① \text{ に } \{x=1, y=2\} \text{ を代入して } z=3$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{array} \right\}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=1 \cdots ① \\ xy=-6 \cdots ② \end{cases}$$

$$① \text{ より } x=1-y$$

$$② \text{ に } x=1-y \text{ を代入して } y-y^2=-6$$

$$y^2-y-6=0$$

$$(y-3)(y+2)=0 \rightarrow y=3, -2$$

$$① \text{ に } 2 \text{ つの } y \text{ をそれぞれ代入して } x=-2, 3$$

$$\text{したがって } \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}, \text{ どちらでも良い。}$$

別解

$$f(t) = at^2 + bt + c = 0 \text{ の } 2 \text{ つの解として } \{x, y\} \text{ を}$$

$$\text{想定すると、} \begin{cases} x+y = -\frac{b}{a} = 1 \\ xy = \frac{c}{a} = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^2 + \frac{b}{a}t + \frac{c}{a} = 0 \\ t^2 - t - 6 = 0 \\ (t-3)(t+2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{したがって } f(t)=0 \text{ の解は } t = \{x, y\} = \{3, -2\} \text{ または } \\ = \{y, x\} = \{3, -2\}.$$

不等式 (p.46)

※不等式は定数同士とのみ成り立つ。

原則として

✓基本

$$(1) A < B \Rightarrow A + C < \overset{B}{\cancel{A}} + C, \\ A - C < B - C.$$

$$(2) A < B \text{ か } k > 0 \Rightarrow kA < kB, \\ \frac{A}{k} < \frac{B}{k}.$$

$$(3) A < B \text{ か } k < 0 \Rightarrow kA > kB, \\ \frac{A}{k} > \frac{B}{k}.$$

※全2について、
“ $< \rightarrow \leq$ ”と
“ $> \rightarrow \geq$ ”といふ
成り立つ。ただし
 $k=0$ の割り算
だけはダメ。

要注意!

✓日本語の「以上」「以下」「超」「未満」

$$5 \leq x \cdots x \text{ は } 5 \text{ 以上。 (5もアリ)}$$

$$5 \geq x \cdots x \text{ は } 5 \text{ 以下。 (")}$$

$$5 < x \cdots x \text{ は } 5 \text{ 超。 (5はナシ) } \text{※「超」=「より大」}$$

$$5 > x \cdots x \text{ は } 5 \text{ 未満。 (")}$$

余談

“それ以上でもそれ以下でもない!”

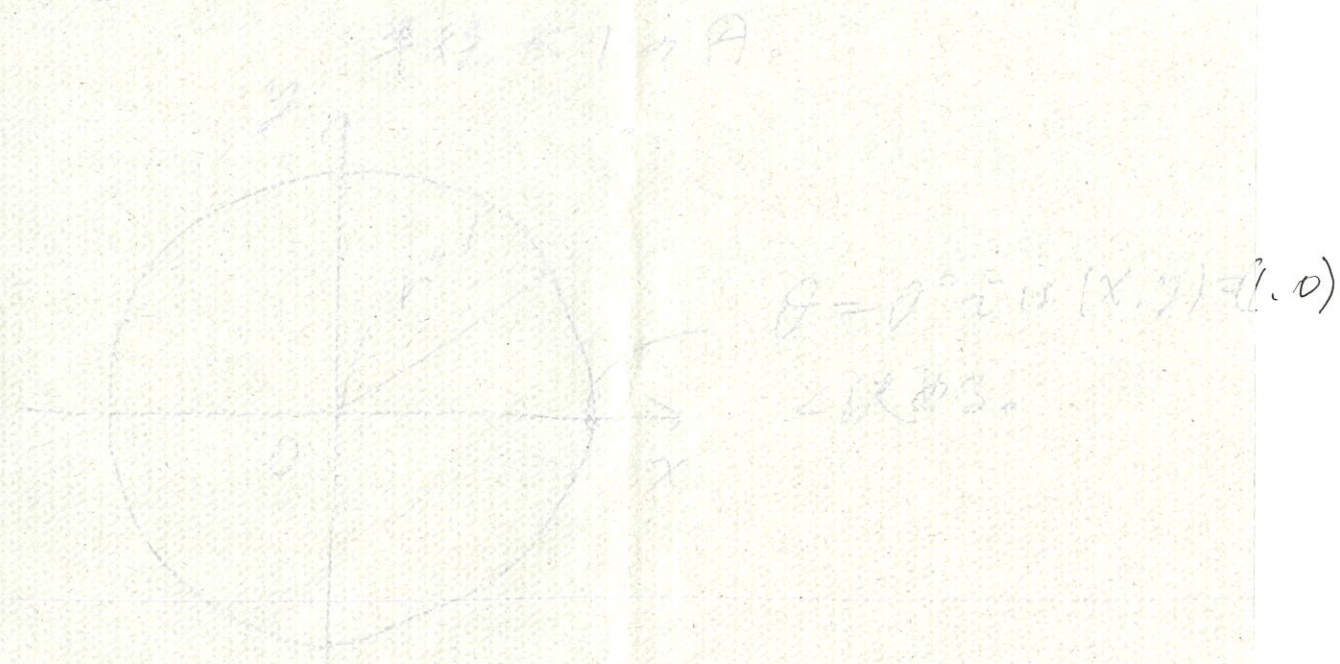
↑

“なす何でもないだろ!”

某国 やりとだが.....

90°より大きい角の三角比 → 単位円で定義

単位円 $r=1$ の平面内で、原点 O を中心とすると、



$\theta = 0^\circ$ のとき $(x, y) = (1, 0)$

と決める。

<6/16, 2025> 基礎数I (1-5) 9月10日続き

1次不等式 → $x \geq 0$ の形に変形できるもの。
 $\{\geq, \leq, >, <\}$

例 = 例題 2.12 ~~2.12~~

(1) $2x - 3 \geq 1$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

(2) $-2x - 3 > 1$

$-2x > 4$

$\left(\times \frac{1}{-2}\right) \rightarrow x < -2$

(3) $\frac{x-4}{2} < \frac{x+1}{3}$ ($\times 6$)

$3x - 12 < 2x + 2$

$x < 14$

数直線上での表現



連立不等式

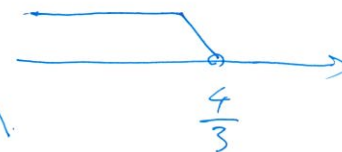
→ 1次不等式が2本のセット。

例 = 例題 2.13

$$\begin{cases} 3x - 4 < 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -5x < -2 - x \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より、 $3x < 4$

$x < \frac{4}{3}$ $\rightarrow$



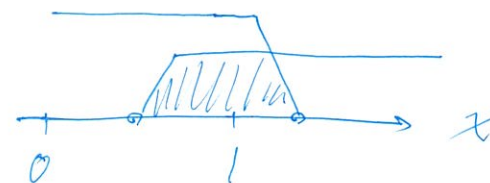
②より、 $-4x < -2$

$x > \frac{1}{2}$ $\rightarrow$



① & ②より、

$\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$



6/18, 水, 2025 1-5 基礎数 I 用ノート

今日 → 2次不等式 (p. 48 ~)

種の正負 (p. 48)

$$(1) AB > 0 \iff [A > 0 \text{ かつ } B > 0], \text{ または } [A < 0 \text{ かつ } B < 0].$$

$$(2) AB < 0 \iff [A > 0 \text{ かつ } B < 0], \text{ または } [A < 0 \text{ かつ } B > 0].$$

$$\text{例: } (x-\alpha)(x-\beta) > 0 \iff [(x-\alpha) > 0 \text{ かつ } (x-\beta) > 0], \text{ または } [(x-\alpha) < 0 \text{ かつ } (x-\beta) < 0].$$

$$(x-\gamma)(x-\delta) < 0 \iff [(x-\gamma) > 0 \text{ かつ } (x-\delta) < 0], \text{ または } [(x-\gamma) < 0 \text{ かつ } (x-\delta) > 0].$$

例題 2.14 (p. 49)

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ を解け.}$$

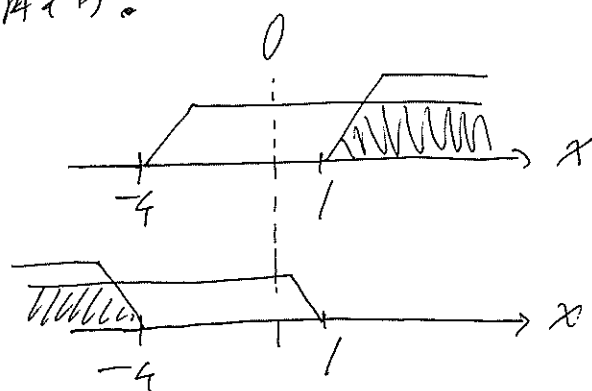
$$\text{左辺} = (x+4)(x-1) > 0$$

⇓

$$[(x+4) > 0 \text{ かつ } (x-1) > 0] \text{ または } [(x+4) < 0 \text{ かつ } (x-1) < 0].$$

⇓

$$[x > -4 \text{ かつ } x > 1] \text{ または } [x < -4 \text{ かつ } x < 1].$$



$$\Rightarrow x < -4, \quad 1 < x$$

2次不等式の解

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の異なる実数解が 2つ存在するとき (つまり $D > 0$ のとき),

$$(1) ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$$

↑
 $x < \alpha, \beta < x$

$$(2) ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) < 0$$

↑
 $\alpha < x < \beta$

補足

$$-ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{--- } a < 0 \text{ のときは、両辺を}$$

(-1) 倍して、

$$ax^2 - bx - c < 0 \quad \text{の形に直して解く。}$$

不等号の逆転を忘れずに。

絶対値付きの不等式

x のある整式を $f(x)$ とする。以下のように直して解く。

$$(1) |f(x)| < a \rightarrow -a < f(x) < a$$

$$(2) |f(x)| > a \rightarrow f(x) < -a, \quad a < f(x)$$

実数式の2乗の不等式 (p.51)

例=例題 2.16

(1) $(x-2)^2 \geq 0 \rightarrow x = \text{すべての実数}$

(2) $(x-2)^2 > 0 \rightarrow x \neq 2$ であるすべての実数 ($x=2$ はダメ)

(3) $(x-2)^2 \leq 0 \rightarrow x=2$ のみ。 $0 \leq 0$

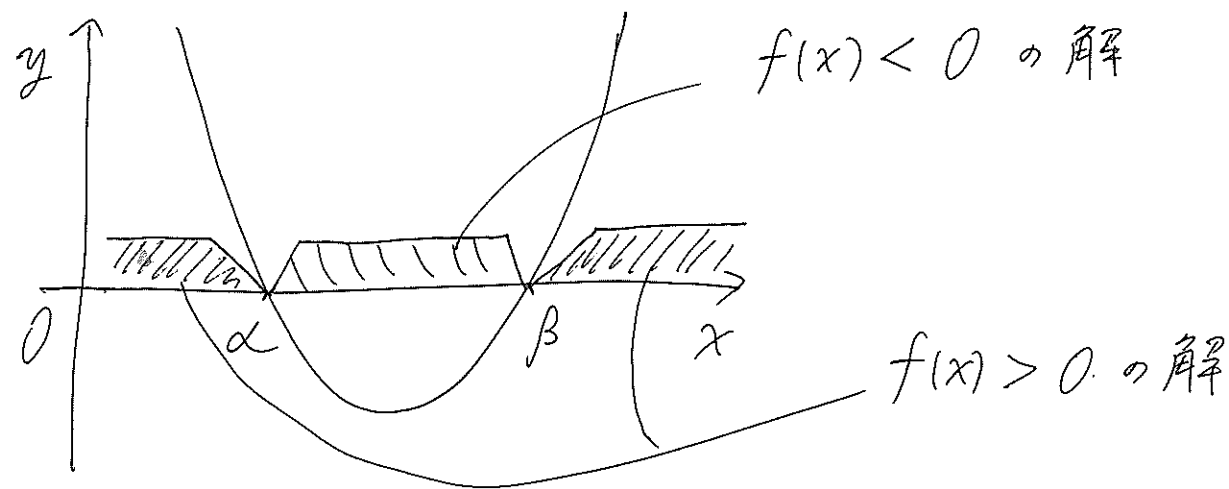
(4) $(x-2)^2 < 0 \rightarrow$ 解無し。 やった?

(5) $x^2 - 4x + 5 > 0$, 平方完成すると、
 $(x-2)^2 + 1 > 0$
 $(x-2)^2 > -1 \rightarrow x = \text{すべての実数}$

(6) $x^2 - 4x + 5 < 0$, 平方完成すると、
 $(x-2)^2 + 1 < 0$
 $(x-2)^2 < -1 \rightarrow$ 解無し。

2次関数のグラフを使った不等式の解き方

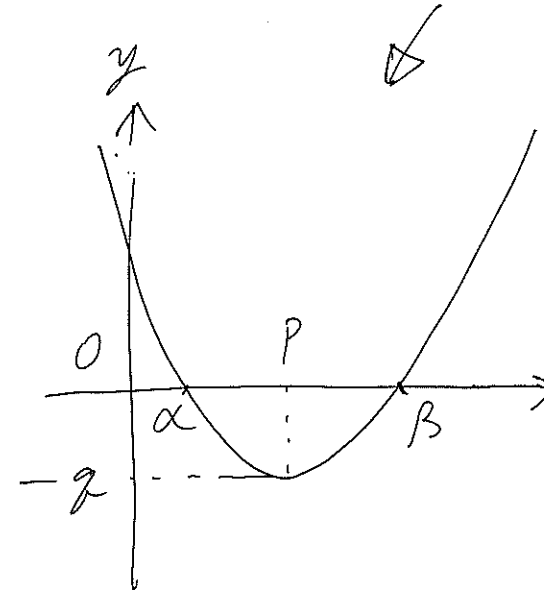
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$



2次関数のグラフ: $f(x) = ax^2 + bx + c$

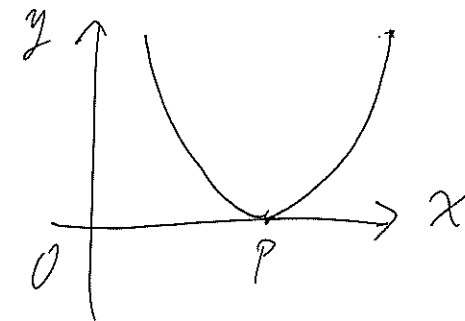
描くために { ① $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$
 “因数分解”

② $f(x) = a(x-p)^2 \pm q$
 “平方完成”

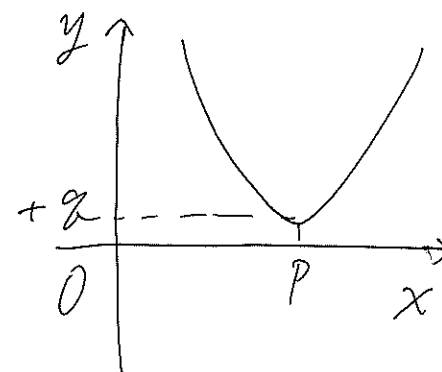


$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$
 $= a(x-p)^2 - q$

ちなみに、こんな場合もある↓



$f(x) = a(x-p)^2$



$f(x) = a(x-p)^2 + q$

* 実数の範囲では
 因数分解できない。

<6/25, 木, 2025> 1-5 基礎数工用ノート 11

恒等式 $\rightarrow$ x にどんな値を代入しても成り立つ等式
(p. 53)

例①: (1) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x に
ついても恒等式 $\Leftrightarrow a=a' \ \& \ b=b' \ \& \ c=c'$

(2)
~~恒等式~~ $ax^2 + bx + c = 0$ が x についても恒等式
 $\Leftrightarrow a=0 \ \& \ b=0 \ \& \ c=0$

例②: ~~$(x+4)(x-3) = 0$~~ , これは $x = -\frac{5}{2}$ か
 $x = 3$ ではない

なにか x には成り立たないので、恒等式では
ない。

$$\begin{aligned} (x+\frac{5}{2})(x-3) &= \cancel{x^2 + 2x - 15} = (x+\frac{5}{2})^2 - 16 \\ &= x^2 + 2x - 15 \end{aligned}$$

$$= (x+1)^2 - 16, \text{ これは恒等式}$$

多くの
例③: ~~恒等式~~ 数学の公式は恒等式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

例④: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}, \quad (\text{続く})$

(続き)

$n(n+1)^2 - 2n^2 = n^3 + n$, などなど、左辺を
展開や計算して右辺
にしたものを恒等式。

例⑤ = 例題 2.19

(1) $2x+1 = a(x-1) + b$ を恒等式にせよ。

$\rightarrow$ 右辺 $= ax + (b-a)$ より、

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=1 \end{cases} \rightarrow a=2, b=3 \text{ である。}$$
$$2x+1 = 2(x-1) + 3$$

(2) $\frac{5x-5}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ を恒等式
にせよ。

$$\text{右辺} = \frac{a(x-3) + b(x+2)}{(x+2)(x-3)}, \quad \cancel{\frac{(a+b)x}{(x+2)(x-3)}}$$

左辺と右辺から分母を払って、

$$5x-5 = a(x-3) + b(x+2)$$

$$\rightarrow \textcircled{1} x=3 \text{ を代入して、 } 15-5 = \overset{a}{0} + b \cdot 5$$
$$10 = 5b \rightarrow b=2$$

$$\textcircled{2} x=-2 \text{ を代入して、 } -10-5 = a(-5) + b \cdot 0$$
$$-15 = -5a \rightarrow a=3$$

したがって $a=3 \ \& \ b=2$ のとき恒等式となる。

$$\frac{5x-5}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-3}$$

部分分数分解:

$$\frac{-x+14}{(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{x+4}$$

このような
分数式に
分けたと。
恒等式

より一般的な形:

$$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b}$$

$$m \text{ と } n \text{ の決め方} \rightarrow \text{まず右辺} = \frac{m(x-b) + n(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

より、両辺から分母を払うと、

$$cx+d = m(x-b) + n(x-a)$$

$$\textcircled{1} x=a \text{ を代入して、 } m = \frac{ca+d}{a-b},$$

$$\textcircled{2} x=b \text{ を代入して、 } n = \frac{cb+d}{b-a},$$

と求められる。

高次方程式、高次不等式 (p.55)

→ 次数が3以上の方程式と不等式

例 = 例題 2.20 (p.55)

$$(1) x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

$$\text{左辺} = (x-1)(x-2)(x+1),$$

$$\rightarrow x = -1, 1, 2 //$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2) & & +2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$(2) x^3 + 8 = 0$$



$$(x+2)(x^2-2x+4) = 0,$$

$$x^2-2x+4=0 \text{ の解は } x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i \text{ より}$$

$$\text{これらの解は } x = -2, \pm \sqrt{3}i //$$

$$(3) x^4 - x^2 - 20 = 0, \quad X = x^2 \text{ とおくと、}$$

$$X^2 - X - 20 = 0$$

$$(X-5)(X+4) = 0$$

$$(x^2-5)(x^2+4) = 0$$

$$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+4) = 0, \quad \text{22で } x^2+4=0 \text{ の解は } x^2 = -4 \text{ より } x = \pm 2i \text{ なので、}$$

$$\text{これらの解は } x = \pm \sqrt{5}, \pm 2i //$$

高次不等式 (p.56)

例 = 例題 2.21 (p.56)

$$(1) (x+1)(x-2)(x-3) > 0 \text{ を解け。}$$

考え方: $ABC > 0$ となるのは、3つのうち、

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 個が正} \\ 3 \text{ 個が正} \end{array} \right\}$ または $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 個が負} \\ 3 \text{ 個が負} \end{array} \right\}$ のとき。 (続く)

(続き)

x	-1	2	3
$A = (x+1)$	-	+	+
$B = (x-2)$	-	-	+
$C = (x-3)$	-	-	-
ABC	-	+	-

→ $ABC > 0$ となるのは、 $-1 < x < 2$ & $3 < x$
 $= (x+1)(x-2)(x-3)$

(2)

$$(x+2)(x^2-2x+4) < 0$$

$$A \quad B = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3,$$

つまり、 $B = (\text{実数})^2 + 3$ より、常に $B > 0$ 。

したがって $AB < 0$ を満たすためには $A < 0$ 。

$$A = x+2 < 0 \rightarrow \underline{x < -2}$$

例② = 例① 2.21, (1)

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 < 0,$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ 5) & & 5 & 5 & -10 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{左辺} = (x-5)(x^2+x-2)$$

$$= (x-5)(x+2)(x-1),$$

(★)

(★) よって表を作ると、

x	-2	1	5
$A = (x-5)$	-	-	+
$B = (x-1)$	-	+	+
$C = (x+2)$	-	+	+
ABC	-	+	+

よって $ABC = (x-5)(x-1)(x+2) \leq 0$ の解は

$$\underline{x < -2 \text{ \& } 1 < x < 5}$$

7/2, 水, 2025 基礎数学I (1-5) 12 用ノート

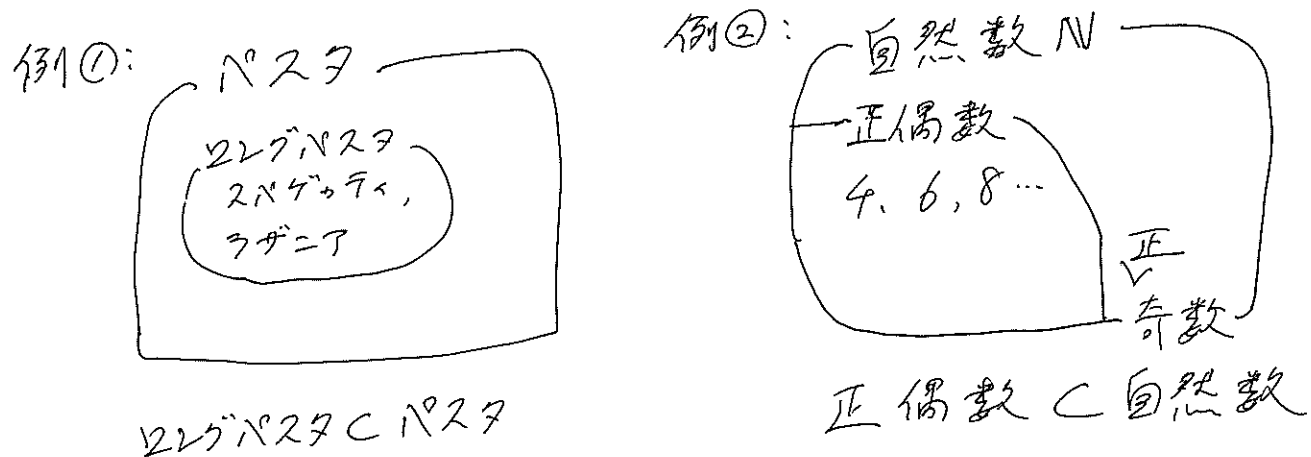
集合と命題 (p.57)

集合 $\rightarrow$ グループ,
要素 $\rightarrow$ グループ内のメンバー
部分集合 $\rightarrow$ ホグループ

例① パスタ
スパゲッティ
マカロニ
例② 自然数 $\mathbb{N}$
4
正偶数

ベレ

$\rightarrow$ 集合と要素の関係を図にしたもの。

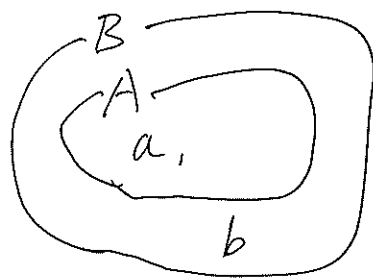


記号①: "属する" 用の $\subset$ と $\in$

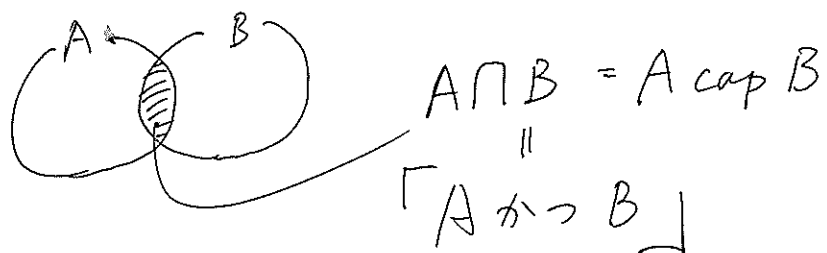
$A \subset B \rightarrow$ 部分集合 A は集合 B に属する

$a \in A \rightarrow$ 要素 a は A に属する。

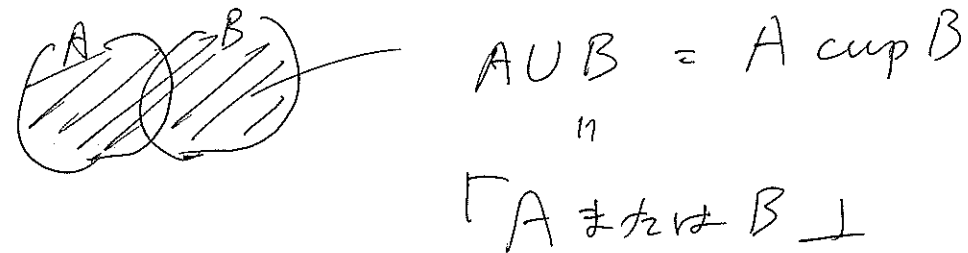
$b \notin A \rightarrow$ 要素 b は A に属さない。



記号②: 共通部分 $\cap$ [キャップ] [cap]



記号③: 和集合 $\cup$ [カップ or ユニオン] [cup]



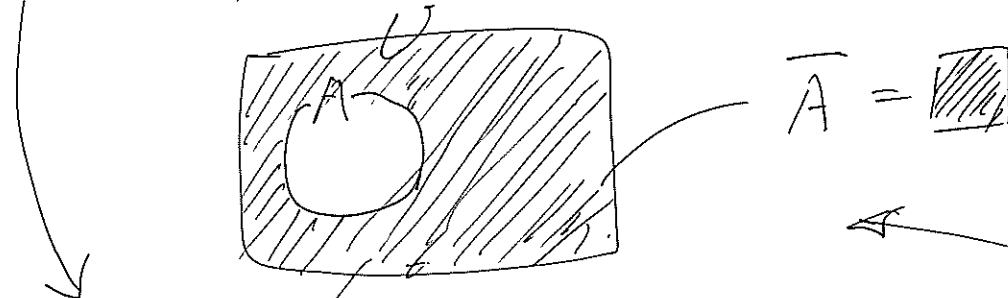
空集合 $\emptyset$ (p.58)

$\rightarrow$ 要素がひとつもない集合。

例: 実数全体のうち、3以上でも3以下でもない集合。

補集合 $\bar{A}$

$\rightarrow$ A からあぶれたやつらの集合



全体集合 U

$\rightarrow$ 考えている要素全てを包む集合。

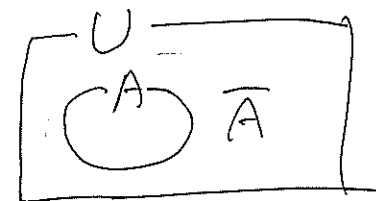
例: $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ のとき、
 $\bar{A} = \{2, 4\}$ である

補集合の性質 (p.59)

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ (そんなものは無い!)}$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

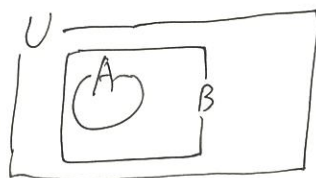


(続く)

(続き)

$A \subset B$ ならば

$$\overline{A} \supset \overline{B}$$

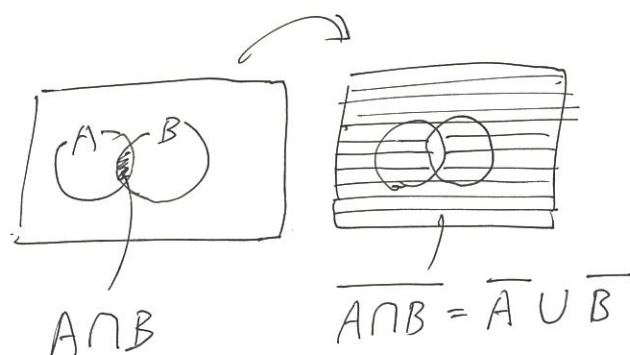


$$\text{斜線} = \overline{A}$$

$$\text{横線} = \overline{B}$$

ド・モルガンの法則 (p.59)

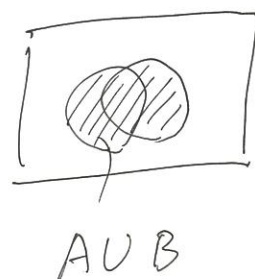
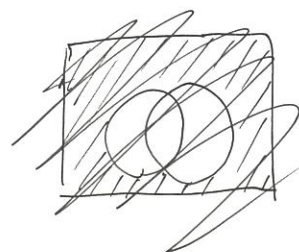
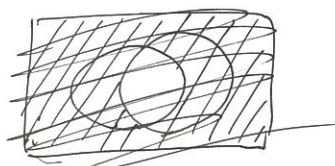
$$(1) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



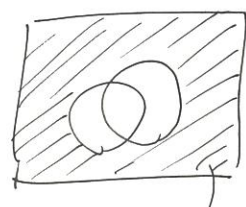
$A \cap B$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(2) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$A \cup B$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

例 = 例題 2.22 (p.59)

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$$

$$B = \{1, 3, 6, 9\}$$

$$(1) A \cap B = \{1, 3\} \quad (2) A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

$$(3) \overline{A} = \{4, 6, 7, 9, 10\}$$

$$(4) \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \overline{\{1, 3\}} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(5) \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{4, 7, 10\}$$

個数 $n(A)$

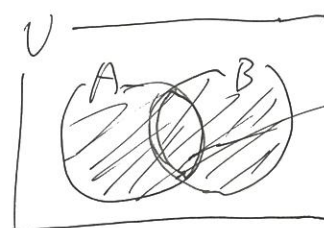
→ 集合 A に属する要素の個数。 $n(A) = \infty$ になることもある。ただし必ず $n(A) \geq 0$ 。

$$n(A) = 0 \iff A = \emptyset \text{ (空集合)}.$$

個数定理

A と B を全体 U の部分集合とし、 $n(U)$ は有限とする。2つのとき、

$$(1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



単に $n(A) + n(B)$ だけだと、 $A \cap B$ の個数だけは2重に数えることになる。よって、 $n(A \cap B)$ を1回引く。

$$(2) n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$



<7/10, 木, 2025> 1-5 基礎数学I ⑬ 用ノート

今日 → 命題 (p. 61)

命題 ---- 正しいか否か (真偽) を明確に判断できる文または式。正しい = 真、正しくない = 偽。

例: $x < 0$ であるならば $x < 1$ である。真

$$x < 0 \Rightarrow x < 1 \quad \text{真}$$

$$x > 0 \Rightarrow x > 1 \quad \text{偽}$$

命題の数学的書式: $p \Rightarrow q$

ここで p や q は条件。だいたいの数式で表される。

~~命題~~の否定 ~~表~~: 「 p ではない。」 = $\bar{p}$ と表す。

条件 $p \Rightarrow q$ (否定) $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

例: $\overline{x < 0 \Rightarrow x < 1}$
 $x > 0 \Rightarrow x > 1$

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q} \quad \text{と} \quad \overline{p \cap q} = \bar{p} \cup \bar{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q} \quad \text{と} \quad \overline{p \cup q} = \bar{p} \cap \bar{q}$$

例 = 問 2.25, (1)

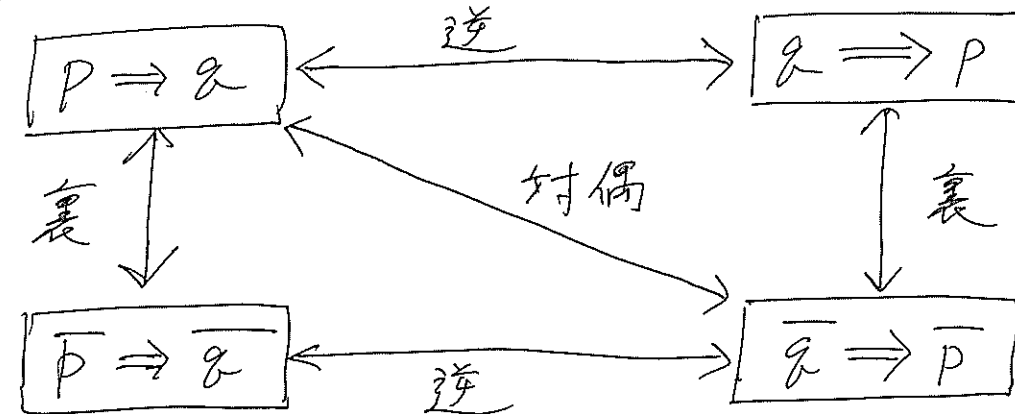
$$\overline{a \neq 3 \text{ かつ } b \neq 5} \Leftrightarrow a = 3 \text{ または } b = 5$$

(2)

$$\overline{x < -1 \text{ または } x > 4} \Leftrightarrow x \geq -1 \text{ かつ } x \leq 4$$

||
 $-1 \leq x \leq 4$

命題の逆、裏、対偶



例: $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$, 真。

逆 $\rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$, 偽。 ($x = 2$ もアリ。)

裏 $\rightarrow x \neq -2 \Rightarrow x^2 \neq 4$, 偽。 ($x = 2$ 也是アリ。)

対偶 $\rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$, 真。

反例 ---- 命題が成り立たない例。これ ~~国~~ が一つでもあれば、その命題は偽。

$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$, 偽。 $x = 2$ が反例。

命題の真偽 (p. 62)

・ 元命題の真偽 = 対偶の真偽

・ 裏の真偽 = 逆の真偽

“逆は必ずしも真ならず。”

例 = 問 2.26, (3)

元 $\rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ または $y = 0$, 真

逆 $\rightarrow x = 0$ または $y = 0 \Rightarrow xy = 0$, 真

裏 $\rightarrow x \neq 0$ かつ $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$, 真

対偶 $\rightarrow xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ かつ $y \neq 0$, 真

十分条件, 必要条件, 必要十分条件 (p. 63)

$p \Rightarrow q$ が真 $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ は } q \text{ のための十分条件} \\ q \text{ は } p \text{ のための必要条件} \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{array} \right\}$ が両方とも真 $\rightarrow p \Leftrightarrow q$, p は q の必要十分条件 (p と q は同値)

例①: ~~$x^2=4 \Rightarrow x=2$~~

$x=2 \Rightarrow x^2=4$, 真。 $x=2$ は $x^2=4$ の十分条件。

$x^2=4$ は $x=2$ の必要条件。

例②: $xy=0 \Rightarrow x=0$ または $y=0$, 真。

$\left[xy=0 \right]$ は $\left[x=0 \text{ または } y=0 \right]$ の必要十分条件。

背理法 (p. 63)

$\rightarrow$ 数学的証明法のひとつ。 A が正しくないと仮定すると矛盾が起きることを示せば、 A は証明されたことになる。

例①: $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明 $\rightarrow$ テキスト p. 64

判定法

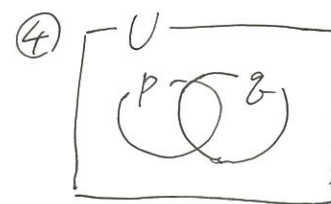
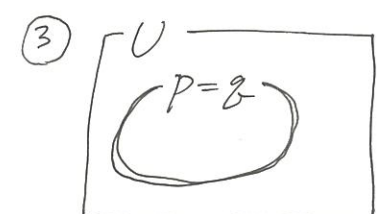
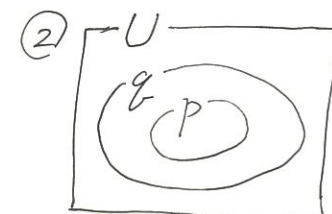
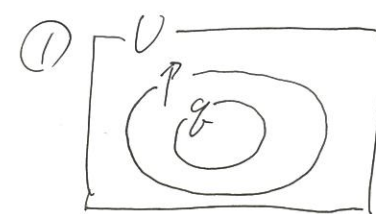
元命題 = $\left[p \Rightarrow q \right]$ とする。逆 = $\left[q \Rightarrow p \right]$ とする。

① 元 $\rightarrow$ 逆に対して 真 $\rightarrow$ 偽 なら、
 p は q の十分条件である。必要条件ではない。

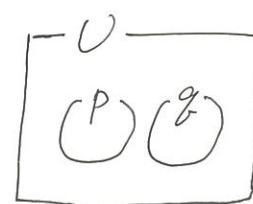
② 元 $\rightarrow$ 逆に対して 偽 $\rightarrow$ 真 なら、
 p は q の必要条件である。十分条件ではない。

③ 元と逆がどちらも真 なら、
 p と q は互いの必要十分条件である。

④ 元と逆がどちらも偽 なら、
 p は q の必要条件でも十分条件でもない。



or



+ 等式の証明, 問 2, 28 もやった。

〈7/17, 木, 2025〉1-5 基礎数学 I [14] 用ノート

連絡: 期末テスト範囲 = p. 39 ~ p. 69

今日 → 等式・不等式の証明 (つづき)

条件付きの等式の証明

例 = 問 2.28, (2)

$a:b = c:d$ のとき、 $(a^2+c^2)(b^2+d^2) = (ab+cd)^2$ を証明せよ。

まず $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \rightarrow a = kb \ \& \ c = kd$,

$$\text{左辺} = (k^2b^2 + k^2d^2)(b^2 + d^2) = k^2(b^2 + d^2)^2,$$

$$\text{右辺} = (kb^2 + kd^2)^2 = \{k(b^2 + d^2)\}^2 = k^2(b^2 + d^2)^2,$$

したがって 左辺 = 右辺 となったので、証明終了。

復習: 等式証明のパターン

① 左辺 = = 右辺

② 左辺 = = (⊖) , 右辺 = = (⊖)

③ 左辺 - 右辺 = 0

不等式の証明

左辺 $\geq$ 右辺 $\rightarrow$ 左辺 - 右辺 ≥ 0 を示せば
証明終了。

いくつかの基本的パターン ↓

① 左辺 - 右辺 = (実数) ≥ 0

①' 左辺 - 右辺 = (実数) ≥ 0 + 正数

② 相加平均と相乗平均の関係式を使う。(p. 67)

$a \geq 0, b \geq 0$ のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{または } a+b \geq 2\sqrt{ab})$$

である。等号は $a=b$ のときにのみ成り立つ。

証明 → 省略 (テスト p. 67 参照)。

例 = 問 2.29, (1)

$$a^2 + b^2 \geq 2ab ? \rightarrow \text{左辺} - \text{右辺} = a^2 - 2ab + b^2 \\ = (a-b)^2 = (\text{実数})^2 \geq 0, \text{ 終。}$$

(2) $x > y > 0$ のとき、

$$\frac{x-1}{x} > \frac{y-1}{y} ? \rightarrow \text{左辺} - \text{右辺} = \frac{x-1}{x} - \frac{y-1}{y} \\ = \frac{y(x-1) - x(y-1)}{xy} = \frac{-y + x}{xy}$$

$$= \frac{x-y}{xy} \quad \begin{array}{l} x > y > 0 \text{ より、} \\ x-y > 0 \text{ かつ} \\ xy > 0 \text{ なので、} \end{array}$$

左辺 - 右辺 > 0 , 終。

例 = 問 2.30

$a > 0, b > 0$ のとき、 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ を証明せよ。また
等号が成り立つ条件を答えよ。

相加と相乗平均の関係式を用いる。

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = X \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{X} \quad \text{とすると、}$$

$$X + \frac{1}{X} \geq 2\sqrt{X \cdot \frac{1}{X}} = 2, \quad \text{証明終了。}$$

また等号が成り立つ、即ち $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 2$ となるのは、

$1 = X = \frac{1}{X}$ より、 $a = b$ のときのみ。

$$X + \frac{1}{X} = 2 \rightarrow \frac{X^2 + 1}{X} = 2, \quad X^2 + 1 = 2X \\ X^2 - 2X + 1 = 0 \quad (\text{である。}) \\ (X-1)^2 = 0 \quad \text{が成り立つとき}$$

やや難しいパートへ ↓

③ 左辺 > 0 かつ 右辺 > 0 のときに限って、

左辺² - 右辺² > 0 を示せば、証明終了。

例 = 問 14-06. (1)

$$\sqrt{7} + \sqrt{8} > \sqrt{5} + \sqrt{10} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \text{左辺}^2 - \text{右辺}^2 &= [7 + 2\sqrt{56} + 8] - [5 + 2\sqrt{50} + 10] \\ &= 2\sqrt{56} - 2\sqrt{50} = 2(\sqrt{56} - \sqrt{50}), \end{aligned}$$

$\sqrt{56} > \sqrt{50}$ なのて、左辺² $>$ 右辺²。

~~左~~ 左辺 $= \sqrt{7} + \sqrt{8} > 0$ かつ 右辺 $= \sqrt{5} + \sqrt{10} > 0$

あったのて、証明終了。

✓ (複素数) $z = x + iy, \operatorname{Re}(z) = x, \operatorname{Im}(z) = y$

✓ 判別式 $D = b^2 - 4ac$

✓ 解と係数の関係 (p. 41)

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

✓ 不等式 (p. 46)

$$A > B \Rightarrow A \pm C > B \pm C$$

$$A > B \text{ かつ } k > 0 \Rightarrow kA > kB$$

$$A > B \text{ かつ } k < 0 \Rightarrow kA < kB$$

✓ 2次不等式

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \quad a > 0 \text{ のとき、}$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \Rightarrow x < \alpha, \beta < x$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$$

✓ 恒等式 (p. 53)

<7/22, 火, 2025> 3-I 解析学 15 用ノート

→ 内容は無し、試験前のまとめ！

<7/23, 水, 2025> ³⁻M2 代数・カ ~~14~~ 15 用ノート

→ 問題 14 の解説で終わり！

R7 年度・前期

授業終了！！