

出題者＝大石知広

締め切り＝次回の授業（その際に自己採点も行う。）

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問01－01 六個の数字1, 1, 1, 2, 2, 3の中から,
三個を使ってできる三桁の自然数は何個あるか。

問01－02 赤玉と白玉がたくさん入った袋から1個ずつ取り出し, どちらかの玉が3個になったところで終了する。このとき, 玉の取り出し方は何通りあるか。

問01－03 ひとつの六面サイコロを二回投げたとき,
目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

- (1) 6または9 (2) 10以上
(3) 3の倍数

問01－04 六面サイコロを二個投げたとき, 目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

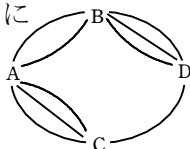
- (1) 6または9 (2) 10以上
(3) 3の倍数

問01－05 4種類の英語の問題集, 5種類の数学の問題集, 3種類の国語の問題集の中から, それぞれ1種類ずつ選んで, 計3冊の組を作る方法は何通りあるか。

問01－06 次の式を展開すると, 項は何個できるか。

- (1) $(a+b+c+d)(x+y)$
(2) $(a+b)(c+d+e)(x+y)$

問01－07 右の図において, 途中でAに戻らずに, AからDに行く経路は何通りあるか。



出題者＝大石知広

締め切り＝次回の授業（その際に自己採点も行う。）

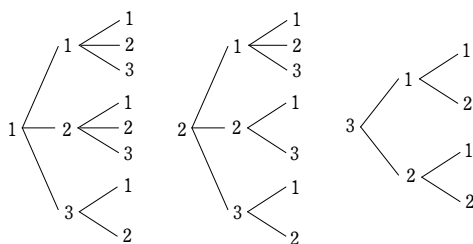
解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問01－01 六個の数字1, 1, 1, 2, 2, 3の中から、
三個を使ってできる三桁の自然数は何個あるか。

解答 19 個

解説

樹形図をかくと次のようになるから 19 個



別解 小さい方から列挙すると

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132,

211, 212, 213, 221, 223, 231, 232,

311, 312, 321, 322

よって 19 個

問01－02 赤玉と白玉がたくさん入った袋から1個ずつ取り出し、どちらかの玉が3個になったところで終了する。このとき、玉の取り出し方は何通りあるか。

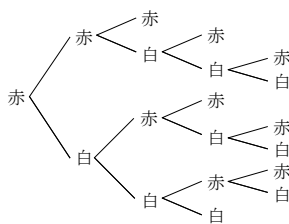
解答 20 通り

解説

1回目が赤玉のとき、どちらかの玉が3個になるまでの取り出し方を樹形図にかくと、右のようになる。

よって、10通り。

1回目が白玉のときも同様に10通りある。
したがって、求める場合の数は 20 通り



問01－03 ひとつの六面サイコロを二回投げたとき、
目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 6 または 9

(2) 10 以上

(3) 3 の倍数

解答 (1) 9 通り (2) 6 通り (3) 12 通り

解説

(1) 目の和が6になるのは、(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)の5通り。

目の和が9になるのは、(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)の4通り。

よって、和の法則により $5+4=9$ (通り)

(2) 目の和が10または11または12になる場合である。

目の和が10になるのは、(4, 6), (5, 5), (6, 4)の3通り。

目の和が11になるのは、(5, 6), (6, 5)の2通り。

目の和が12になるのは、(6, 6)の1通り。

よって、和の法則により $3+2+1=6$ (通り)

(3) 目の和が3または6または9または12になる場合である。

目の和が3になるのは、(1, 2), (2, 1)の2通り。

(1) から、目の和が6になるのは 5 通り

目の和が9になるのは 4 通り

(2) から、目の和が12になるのは 1 通り

よって、和の法則により $2+5+4+1=12$ (通り)

問01－04 六面サイコロを二個投げたとき、目の和が
次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 6 または 9

(2) 10 以上

(3) 3 の倍数

解答 (1) 9 通り (2) 6 通り (3) 12 通り

解説

問01－03と同様。

問01－05 4種類の英語の問題集、5種類の数学の問題
集、3種類の国語の問題集の中から、それぞれ1種類
ずつ選んで、計3冊の組を作る方法は何通りあるか。

解答 60 通り

解説

積の法則により $4 \times 5 \times 3 = 60$ (通り)

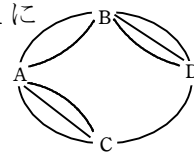
問01－06 次の式を展開すると、項は何個できるか。

(1) $(a+b+c+d)(x+y)$ (2) $(a+b)(c+d+e)(x+y)$ **解答** (1) 8 個 (2) 12 個

解説

(1) $(a+b+c+d)(x+y)$ を展開したときの各項は次の形になる。 $(a, b, c, d \text{ のどれか1つ}) \times (x \text{ か } y \text{ のどちらか})$ よって、展開したときの項の個数は $4 \times 2 = 8$ (個)(2) $(a+b)(c+d+e)(x+y)$ を展開したときの各項は次の形になる。 $(a \text{ か } b \text{ のどちらか}) \times (c, d, e \text{ のどれか1つ}) \times (x \text{ か } y \text{ のどちらか})$ よって、展開したときの項の個数は $2 \times 3 \times 2 = 12$ (個)

問01－07 右の図において、途中でAに
戻らずに、AからDに行く経路
は何通りあるか。

**解答** 9 通り

解説

[1] $A \rightarrow B \rightarrow D$ と通るとき

$A \rightarrow B$ の経路が2通り、そのおのおのに対して $B \rightarrow D$ の経路が3通りあるから
 $2 \times 3 = 6$ (通り)

[2] $A \rightarrow C \rightarrow D$ と通るとき

$A \rightarrow C$ の経路が3通り、そのおのおのに対して $C \rightarrow D$ の経路が1通りあるから
 $3 \times 1 = 3$ (通り)

したがって、求める経路の数は $6+3=9$ (通り)

出題者＝大石知広

締め切り＝次回の授業（その際に自己採点も行う。）

解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
ページ数の制限はない。

問題に不備（難易度調整ミス、誤字、題意の不明瞭など）があった場合、評価には補正を加えます。

問02－01 次の値を求めよ。

- (1) ${}_6P_3$ (2) ${}_5P_1$ (3) ${}_9P_6$
(4) ${}_4P_4$ (5) $5!$ (6) $7!$

解説

- (1) ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
(2) ${}_5P_1 = 5$
(3) ${}_9P_6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$
(4) ${}_4P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
(5) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
(6) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

問02－02 次のような並び方は何通りあるか。

- (1) 4 個の文字 a, b, c, d から 3 個選んで 1 列に並べる。
(2) 5 個の文字 a, b, c, d, e すべてを 1 列に並べる。
(3) 7 人の生徒のうち、3 人が 1 列に並ぶ。

解説

- (1) ${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (通り)
(2) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)
(3) ${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ (通り)

問02－03 次のような場合の数は何通りあるか。

- (1) 7 人のうち、4 人が 1 列に並ぶ方法は何通りあるか。
(2) 5 人が 1 列に並ぶ方法は何通りあるか。
(3) 駅が 12 ある鉄道会社で、出発駅と到着駅を指定する片道乗車券を考える。出発駅と到着駅は必ず異なる。可能な片道乗車券は何種類か。
(4) 男子 3 人、女子 3 人が 1 列に並ぶとき、女子 3 人が続いて並ぶような並び方は何通りあるか。

解説

- (1) ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ (通り)
(2) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)
(3) 必要となる片道乗車券の種類は、12 個から 2 個を選んでできる順列の総数に等しいから
 ${}_{12}P_2 = 12 \cdot 11 = 132$ (種類)
(4) 続いて並ぶ女子 3 人をまとめて 1 組と考えると、男子 3 人と女子 1 組の並び方は

4! 通りある。

1 組と考えた女子 3 人の並び方は

3! 通りある。

よって、求める並び方は、積の法則により

$$4! \times 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144 \text{ (通り)}$$

問02－04 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 を使ってできる、次のような整数は何個あるか。ただし、同じ数字は 2 度以上は使わないものとする。また、一番左の桁が 0 のものは除く。

- (1) 6 桁の整数。
(2) 6 桁の整数で 5 の倍数。

解説

(1) 十万の位は 0 でないから、その選び方は 5 通り
そのおのおのに対して、他の位には残りの 5 個の数字を並べるから、その方法は 5! 通り

よって、求める 6 桁の整数の個数は

$$5 \times 5! = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600 \text{ (個)}$$

別解 0 ～ 5 の 6 個の数字を 1 列に並べる順列の総数は
 $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (個)

このうち、1 番目の数字が 0 であるものは

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (個)}$$

よって、求める個数は $720 - 120 = 600$ (個)

(2) 一の位に使えるのは、0 か 5 である。

[1] 一の位が 0 のとき

他の位に残りの 5 個の数字を並べるから

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (個)}$$

[2] 一の位が 5 のとき

十万の位は 1 ～ 4 から 1 個を選ぶから、

その選び方は 4 通り

そのおのおのに対して、他の位に残りの 4 個の数字を並べる方法は 4! 通り

$$\text{よって } 4 \times 4! = 4 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96 \text{ (個)}$$

[1], [2] から、求める個数は $120 + 96 = 216$ (個)

出題者＝大石知広

- 締め切り＝次回の授業（その際に自己採点も行う。）
- 解答はA4サイズのレポート用紙にまとめること。
- ページ数の制限はない。
- 問題に不備（難易度調整ミス、誤字、題意の不明瞭など）があった場合、評価には補正を加えます。

解説

(青字解説文)

問05-01 (二項定理の復習) 次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

- (1) $(3x+1)^5$ $[x^4]$ (2) $(3x-2)^5$ $[x^3]$
 (3) $(2-x)^{10}$ $[x^7]$ (4) $(2x-3y)^7$ $[x^5y^2]$

解説

- (1)
- $(3x+1)^5$
- の展開式の一般項は

$${}_5C_r(3x)^{5-r} \cdot 1^r = {}_5C_r \cdot 3^{5-r} x^{5-r}$$

 x^4 の項は $r=1$ のときで, その係数は ${}_5C_1 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$

- (2)
- $(3x-2)^5$
- の展開式の一般項は

$${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2)^r = {}_5C_r \cdot 3^{5-r}(-2)^r x^{5-r}$$

 x^3 の項は $r=2$ のときで, その係数は

$${}_5C_2 \cdot 3^3(-2)^2 = 10 \cdot 27 \cdot 4 = 1080$$

- (3)
- $(2-x)^{10}$
- の展開式の一般項は

$${}_{10}C_r \cdot 2^{10-r}(-x)^r = {}_{10}C_r \cdot 2^{10-r}(-1)^r x^r$$

 x^7 の項は $r=7$ のときで, その係数は

$${}_{10}C_7 \cdot 2^3(-1)^7 = 120 \cdot 8 \cdot (-1) = -960$$

- (4)
- $(2x-3y)^7$
- の展開式の一般項は

$${}_7C_r(2x)^{7-r}(-3y)^r = {}_7C_r \cdot 2^{7-r}(-3)^r x^{7-r} y^r$$

 x^5y^2 の項は $r=2$ のときで, その係数は

$${}_7C_2 \cdot 2^5(-3)^2 = 21 \cdot 32 \cdot 9 = 6048$$

問05-02 (二項定理の復習) 二項定理を用いて, 次のことを証明せよ。ただし, n は 2 以上の整数とする。

- (1)
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$

- (2)
- $x > 0$
- のとき
- $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$

解説

二項定理により

$$(a+b)^n$$

$$= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (1) ① で
- $a=1$
- ,
- $b=\frac{1}{n}$
- とすると

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \frac{1}{n} + {}_nC_2 \frac{1}{n^2} + \cdots + {}_nC_n \frac{1}{n^n}$$

 ${}_nC_r > 0$, $\frac{1}{n} > 0$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$${}_nC_2 \frac{1}{n^2} + \cdots + {}_nC_n \frac{1}{n^n} > 0$$

$$\text{よって } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > {}_nC_0 + {}_nC_1 \frac{1}{n} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \text{である。}$$

- (2) ① で
- $a=1$
- ,
- $b=x$
- とすると

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- [1]
- $n \geq 3$
- のとき

$${}_nC_r > 0, x > 0 \text{ であるから } {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n > 0$$

$$\text{よって, } \textcircled{2} \text{ から } (1+x)^n > {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2$$

$$\text{したがって } (1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

- [2]
- $n=2$
- のとき

$$\textcircled{2} \text{ から } (1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2$$

$$\text{よって } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

- [1], [2] から,
- $n \geq 2$
- のとき

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \text{である。}$$

問05-03 八ヶ国の代表者(合計八人)が円卓で会議を行った。着席の方法は何通りあるか。

解説

$$(8-1)! = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \text{ (通り)}$$

問05-04 同じ数字を重複して用いてもよいとすると, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 種類の数字を用いてできる 3 桁の整数は何個あるか。

解説

百の位, 十の位, 一の位のそれぞれについて, 6 通りの数字の選び方があるから $6^3 = 216$ (個)

問05-05 五人が一回じゃんけんをするとき, 手の出し方の組み合わせは何通りあるか。

解説

1 人の手の出し方は, それぞれ 3 通りある。よって

$$3^5 = 243 \text{ (通り)}$$

出題者＝大石知広

- 締め切り＝無し。提出の必要も無し。
- 連絡：中間試験の範囲は教科書p.208～p.222になります。
- 中間試験直前の演習になります。提出は不要ですが、各自で取り組んで、試験対策を十分に行ってください。過去に配布した演習課題も活用してください。
- 自己採点用の解答は後日電子メールにて配布します。

(解説)

(青字解説文)

問07-01 a 5 個, b 3 個, c 2 個の 10 文字全部を 1 列に並べるとき、並べ方の総数を求めよ。

(解説)

同じ文字が 5 個, 3 個, 2 個あり, これらを 1 列に並べるから

$$\frac{10!}{5!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = 2520 \text{ (通り)}$$

問07-02 次の整数の個数を求めよ。

- (1) 6 個の数 1, 1, 1, 2, 2, 3 を並べてできる 6 桁の整数
- (2) 7 個の数 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 を並べてできる 7 桁の整数

(解説)

(1) 1 を 3 個, 2 を 2 個, 3 を 1 個並べるから

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60 \text{ (個)}$$

(2) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 の 7 個の数字を並べる方法は

$$\frac{7!}{3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 420 \text{ (通り)}$$

このうち、最初の数字が 0 である場合は、(1) から 60 通り
よって、求める個数は $420 - 60 = 360$ (個)

問07-03 GAKUSEI の 7 文字を 1 列に並べるとき、G, K, S, I がこの順にあるものは何通りあるか。

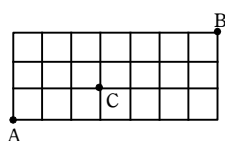
ヒント： G, K, S, I を同じ文字○と考えて、○4 個と残り 3 文字の順列を作り、○に順に G, K, S, I を入れると、条件を満たす順列ができる。

(解説)

G, K, S, I を同じ文字○と考えて、○4 個と残り 3 文字の順列を作り、○に順に G, K, S, I を入れると、条件を満たす順列ができる。よって

$${}_7C_4 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ (通り)}$$

問07-04 右の図のような道のある地域で、次のような最短の道順は何通りあるか。



- (1) A から B まで行く。
- (2) A から C を通って B まで行く。
- (3) A から C を通らずに B まで行く。

(解説)

右へ 1 区画進むことを → で、上へ 1 区画進むことを ↑ で表す。

(1) A から B まで行く最短の道順は、→ 7 個と ↑ 3 個の順列で表される。

$$\text{よって、求める最短の道順の総数は } \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (通り)}$$

(2) A から C まで行く最短の道順は、→ 3 個と ↑ 1 個の順列で表されるから

$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{ (通り)}$$

C から B まで行く最短の道順は、→ 4 個と ↑ 2 個の順列で表されるから

$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (通り)}$$

よって、求める道順の総数は $4 \times 15 = 60$ (通り)

(3) A から C を通らずに B まで行く道順の数は、すべての道順の数から、A から C を

通って B まで行く道順の数を引いたものである。

よって、求める道順の総数は $120 - 60 = 60$ (通り)

問07-05 柿、りんご、みかんの 3 種類の果物の中から合計 10 個の果物を買う。買わない果物があってもよい場合、買い方は何通りあるか？

ヒント： 10 個の○と 2 個の仕切り▼の計 12 個の順列を作り、仕切りで分けられた 3 か所の○の個数を順に柿、りんご、みかんの個数にすると考えればよい。

例 1 = ○○○▼○○○○▼○○

→ 柿 3、りんご 5、みかん 2。

例 2 = ○○○▼▼○○○○○○○

→ 柿 3、りんご 0、みかん 7。

例 3 = ▼○○○○○○○○○○▼

→ 柿 0、りんご 10、みかん 0。

(解説)

(1) 10 個の○と 2 個の仕切り▼の順列を作り、仕切りで分けられた 3 か所の○の個数を順に柿、りんご、みかんの個数にすると考えればよい。したがって、求める総数は、12 個の場所から、○を入れる 10 個の場所を選ぶ方法の個数に等しく

$${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66 \text{ (通り)}$$

(別解)

3 種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{ (通り)}$$

問07-06 前問と同じく、柿、りんご、みかんの 3 種類の果物の中から合計 10 個の果物を買う。どの果物も最低 1 個は買う場合、買い方は何通りか？

(解説)

(1) 3 種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{ (通り)}$$

(2) まず、3種類の果物を1個ずつ購入する。

残りは3種類の果物から重複を許して7個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ (通り)}$$

【別解】 (1) 10個の○と2個の仕切りの順列を作り、仕切りで分けられた3か所の○の個

数を順に柿, りんご, みかんの個数にすると考えればよい。

したがって、求める総数は、12個の場所から、○を入れる10個の場所を選ぶ方法の個

$$\text{数に等しく } {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66 \text{ (通り)}$$

問07-07 次式が成り立つことを証明せよ。

$$k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

【解説】

$$\begin{aligned} k \cdot {}_nC_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \end{aligned}$$

問07-08 次の式の展開式における [] 内の項の係数を求めよ。

$$(1) (2x+3y)^5 \quad [x^3y^2]$$

$$(2) (5x^2-2)^6 \quad [x^6]$$

$$(3) \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^9 \quad [\text{定数項}]$$

【解説】

$$(1) \text{ 展開式の一般項は } {}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r = {}_5C_r \cdot 2^{5-r} \cdot 3^r x^{5-r} y^r$$

x^3y^2 の項は $r=2$ のときで、その係数は

$${}_5C_2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 10 \cdot 8 \cdot 9 = 720$$

$$(2) \text{ 展開式の一般項は } {}_6C_r(5x^2)^{6-r}(-2)^r = {}_6C_r \cdot 5^{6-r} \cdot (-2)^r x^{2(6-r)}$$

ここで、 $2(6-r)=6$ とすると $r=3$

よって、 x^6 の項の係数は

$${}_6C_3 \cdot 5^3 \cdot (-2)^3 = 20 \cdot 125 \cdot (-8) = -20000$$

$$(3) \text{ 展開式の一般項は } {}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_9C_r \cdot (-2)^r \frac{x^{2(9-r)}}{x^r}$$

$$\text{これが定数項となるとき } \frac{x^{2(9-r)}}{x^r} = 1 \quad \text{よって } x^{18-2r} = x^r$$

$$\text{両辺の } x \text{ の指数を比較して } 18-2r=r \quad \text{ゆえに } r=6$$

$$\text{よって、定数項は } {}_9C_6 \cdot (-2)^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

問07-09 $(a+b+c)^8$ の展開式における $a^3b^3c^2$ の項の係数を求めよ。

【解説】

$$\{(a+b)+c\}^8 \text{ の展開式において、} c^2 \text{ を含む項は } {}_8C_2(a+b)^6 c^2$$

$$(a+b)^6 \text{ の展開式において、} a^3b^3 \text{ の項は } {}_6C_3 a^3 b^3$$

$$\text{よって、求める係数は } {}_8C_2 \times {}_6C_3 = 28 \times 20 = 560$$

問07-10 $(1+x)^n$ の二項定理による展開式を利用して、次の等式を証明せよ。

$$(1) {}_nC_0 + 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 + \dots + 2^n{}_nC_n = 3^n$$

$$(2) {}_nC_0 - 3{}_nC_1 + 9{}_nC_2 - \dots + (-3)^n{}_nC_n = (-2)^n$$

【解説】

二項定理により

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n \quad \dots\dots ①$$

(1) 等式①に $x=2$ を代入すると

$$3^n = {}_nC_0 + 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 + \dots + 2^n{}_nC_n$$

よって、与えられた等式が成り立つ。

(2) 等式①に $x=-3$ を代入すると

$$(-2)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1(-3) + {}_nC_2(-3)^2 + \dots + {}_nC_n(-3)^n$$

すなわち

$$(-2)^n = {}_nC_0 - 3{}_nC_1 + 9{}_nC_2 - \dots + (-3)^n{}_nC_n$$

よって、与えられた等式が成り立つ。

出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/06/20]、自己採点后に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

(解説)

(青字解説文)

問09-01 以下の三角関数表を完成させよ。横線があるマスには分数が入る (ハズ)。

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	—	—	—	1
$\cos \theta$	1	—	—	—	0
$\tan \theta$	0	—			$\pm \infty$

(解説)

省略。

問09-02 前問で完成させた三角関数表を、教科書の131ページのものと比較しながら修正せよ。さらに修正した表を4回書き写せ (完璧に暗記すること)。

(解説)

省略。

問09-03 以下の公式をそれぞれ5回書き写せ (完璧に暗記すること)。

- (1) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
- (2) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$
- (3) $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

(解説)

省略。

問09-04 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

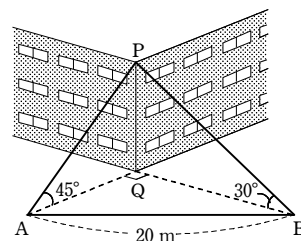
- (1) $\sin 57^\circ$
- (2) $\cos 82^\circ$
- (3) $\tan 71^\circ$

(解説)

- (1) $\sin 57^\circ = \sin(90^\circ - 33^\circ) = \cos 33^\circ$
- (2) $\cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \sin 8^\circ$
- (3) $\tan 71^\circ = \tan(90^\circ - 19^\circ) = \frac{1}{\tan 19^\circ}$

問09-05

建物の高さ PQ を知るために、地点 Q の真西の地点 A から屋上 P の仰角を測ったら 45° 、真南の地点 B から P の仰角を測ったら 30° 、 AB 間の距離を測ったら 20 m であった。建物の高さを求めよ。
ヒント: $PQ = x \text{ (m)}$ とおくと次式が成り立つ。



$$\tan 45^\circ = \frac{x}{AQ}, \quad \tan 30^\circ = \frac{x}{BQ}$$

(解説)

$PQ = x \text{ (m)}$ とおくと

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{AQ}, \quad \tan 30^\circ = \frac{x}{BQ}$$

よって

$$AQ = \frac{x}{\tan 45^\circ} = x, \quad BQ = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$$

$\triangle ABQ$ は直角三角形であるから、三平方の定理より

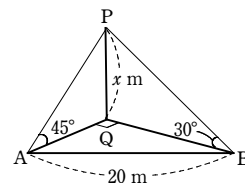
$$AQ^2 + BQ^2 = AB^2$$

$$\text{すなわち } x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 20^2$$

$$\text{よって } 4x^2 = 400 \quad \text{すなわち } x^2 = 100$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 10$$

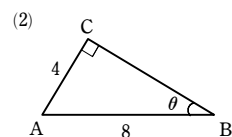
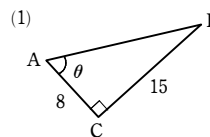
$$\text{よって、建物の高さは } 10 \text{ m}$$



問09-06

右図 (1) および (2)

について、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値をそれぞれ求めよ。



(解説)

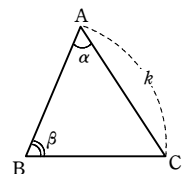
(1) $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ であるから

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = \frac{8}{17}, \quad \tan \theta = \frac{15}{8}$$

(2) $BC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ であるから

$$\sin \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan \theta = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

問09-07 $\triangle ABC$ において、 $AC = k$ 、 $\angle A = \alpha$ 、 $\angle B = \beta$ とする。辺 BC の長さを k 、 α 、 β と必要な三角比を用いて表せ。ただし、 α 、 β は鋭角とする。



(解説)

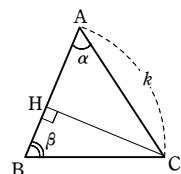
頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CH とする。

直角三角形 ACH において $CH = k \sin \alpha$

直角三角形 BCH において $CH = BC \sin \beta$

よって $k \sin \alpha = BC \sin \beta$

$$\text{したがって } BC = \frac{k \sin \alpha}{\sin \beta}$$



出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/06/27]、自己採点後に提出。
- 回答はA4レポート用紙に記入すること。
- 提出する際は
 - (1) この用紙を表紙として、
 - (2) 左上をホチキス留めし、
 - (3) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

解説

(青字解説文)

問10-01 以下の三角関数表を完成させよ。尚、正接は

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ で計算できる。ただし $\cos \theta = 0$ のときは正接は定義されない(ということにしておいて下さい)。

θ	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	1	—	—	—	0
$\cos \theta$	0	—	—	—	-1

θ	180°	210°	225°	240°	270°
$\sin \theta$	0	—	—	—	-1
$\cos \theta$	-1	—	—	—	0

θ	270°	300°	315°	330°	$360^\circ = 0^\circ$
$\sin \theta$	-1	—	—	—	0
$\cos \theta$	0	—	—	—	1

解説

省略。

問10-02 以下の公式をそれぞれ5回書き写せ(完璧に暗記すること)。

- (1) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
- (2) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
- (3) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- (4) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- (5) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

解説

省略。

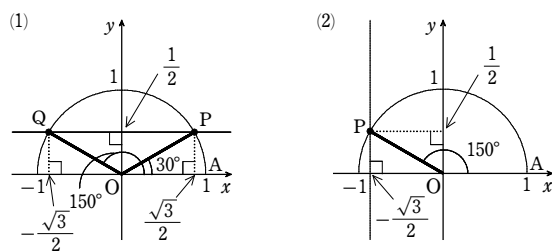
問10-03 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。尚、 θ として複数の値が許される可能性もある。

- (1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$
- (2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\tan \theta = \sqrt{3}$
- (4) $\sin \theta = 1$
- (5) $\cos \theta = \frac{1}{2}$
- (6) $\tan \theta = -1$

解説

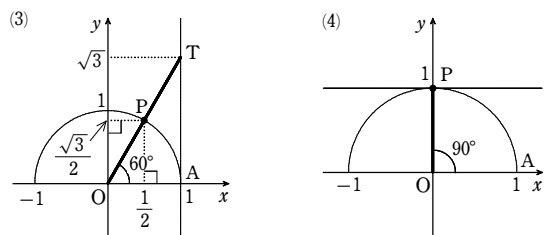
(1) 半径1の半円周上で、 y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は、下の図の2点P、Qである。求める θ は $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ であるから $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

(2) 半径1の半円周上で、 x 座標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は、下の図の点Pである。求める θ は $\angle AOP$ であるから $\theta = 150^\circ$



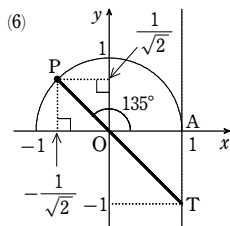
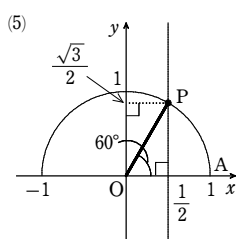
(3) 直線 $x=1$ 上で、 y 座標が $\sqrt{3}$ となる点をTとすると、直線OTと半径1の半円の交点は、下の図の点Pである。よって求める θ は $\angle AOP$ であるから $\theta = 60^\circ$

(4) 半径1の半円周上で、 y 座標が1となる点は、下の図の点Pである。求める θ は $\angle AOP$ であるから $\theta = 90^\circ$



(5) 半径1の半円周上で、 x 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は、下の図の点Pである。求める θ は $\angle AOP$ であるから $\theta = 60^\circ$

(6) 直線 $x=1$ 上で、 y 座標が -1 となる点をTとすると、直線OTと半径1の半円の交点は、下の図の点Pである。よって求める θ は $\angle AOP$ であるから $\theta = 135^\circ$



問10-04 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の値を求めよ。ヒント：問10-02の公式(4)と(3)。

- (1) $\sin \theta$ (ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)
- (2) $\cos \theta$
- (3) $\tan \theta$

解説

(1) $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$ から $\cos \theta = \frac{1}{2} - \sin \theta$

これを $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると $\sin^2 \theta + \left(\frac{1}{2} - \sin \theta\right)^2 = 1$

整理して $2\sin^2 \theta - \sin \theta - \frac{3}{4} = 0$

よって $8\sin^2 \theta - 4\sin \theta - 3 = 0$

これを解くと $\sin \theta = \frac{4 \pm 4\sqrt{7}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから

$$\sin \theta = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$$

(2) (1) から $\cos \theta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$

$$\begin{aligned} (3) \quad \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1 + \sqrt{7}}{4}}{\frac{1 - \sqrt{7}}{4}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} = \frac{(1 + \sqrt{7})^2}{(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})} \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

問10-05 以下の等式を証明せよ。ヒント：問10-02の公式(4)と(5)。

(1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$

(2) $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = 0$

解説

(1) 与式 $= (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$+ (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \cdot 1 = 2$

(2) 与式 $= (1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta = 1 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1 - 1 = 0$

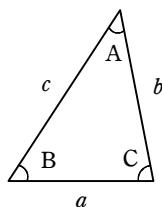
別解 与式 $= (1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = 0$

出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/07/04]、自己採点后に提出。
- 回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数枚使ってもよい。
- 提出の際、複数ページになる場合は、
 - (1) 左上をホチキス留めし、
 - (2) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

以下の問題では、三角形の角は大文字のアルファベットで表す。対応する辺は小文字のアルファベットで表す。それらの位置関係は右図の通りとする。問題によって角や辺の値は変わるので注意。また外接円の半径は R とする。



解説

(青字解説文)

問11-01 $\triangle ABC$ において、以下の値を求めよ。

- (1) $b=4$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$ のときの a
- (2) $a=2$, $c=2\sqrt{2}$, $C=135^\circ$ のときの A
- (3) $a=2$, $b=2\sqrt{2}$, $A=30^\circ$ のときの B

解説

- (1) 正弦定理により $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ}$
 よって $a = \frac{4\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$
- (2) 正弦定理により $\frac{2}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$
 よって $\sin A = \frac{2\sin 135^\circ}{2\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
 $C=135^\circ$ より $0^\circ < A < 45^\circ$ であるから $A=30^\circ$
- (3) 正弦定理により $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$
 よって $\sin B = \frac{2\sqrt{2}\sin 30^\circ}{2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $A=30^\circ$ より $0^\circ < B < 150^\circ$ であるから $B=45^\circ, 135^\circ$

問11-02 $\triangle ABC$ (外接円の半径を R とする) において、以下の情報が与えられた場合の、矢印の先の値を求めよ。

- (1) $a=6$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ \longrightarrow b$
- (2) $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $C=120^\circ \longrightarrow B$
- (3) $a=8$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ \longrightarrow b$
- (4) $a=7$, $A=135^\circ \longrightarrow R$
- (5) $A=135^\circ$, $R=4 \longrightarrow a$
- (6) $b=2\sqrt{3}$, $R=2 \longrightarrow B$
- (7) $a=6$, $B=70^\circ$, $C=80^\circ \longrightarrow R$
- (8) $c=R \longrightarrow C$

解説

- (1) 正弦定理により $\frac{6}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$

$$\text{よって } b = \frac{6\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

$$(2) \text{ 正弦定理により } \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin B}$$

$$\text{よって } \sqrt{3}\sin B = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ゆえに, } \sin B = \frac{1}{2}, C=120^\circ \text{ であるから } B < 60^\circ$$

$$\text{よって } B=30^\circ$$

$$(3) A=180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$$

$$\text{正弦定理により } \frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって } b = \frac{8\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$(4) \text{ 正弦定理により } \frac{7}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$$\text{よって } R = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$(5) \text{ 正弦定理により } \frac{a}{\sin 135^\circ} = 2 \cdot 4$$

すなわち

$$a = 8\sin(180^\circ - 135^\circ) = 8\sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$(6) \text{ 正弦定理により } \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = 2 \cdot 2$$

$$\text{ゆえに } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } B=60^\circ, 120^\circ$$

$$(7) A=180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$$

$$\text{正弦定理により } \frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\text{よって } R = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6$$

$$(8) \text{ 正弦定理により } \frac{R}{\sin C} = 2R$$

$$\text{よって } \sin C = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } C=30^\circ, 150^\circ$$

問11-03 (復習) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき、他の 2 つの値を求めよ。

$$(2) \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$(3) \tan \theta = 6$$

$$(4) \tan \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

解説

$$(2) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin \theta \geq 0 \text{ であるから } \sin \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 6^2 = 37 \quad \text{よって}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{37}$$

$$\tan \theta > 0 \text{ より } 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ であるから } \cos \theta > 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = 6 \times \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5} \quad \text{よって}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$$

$$\tan \theta < 0 \text{ より } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ であるから } \cos \theta < 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

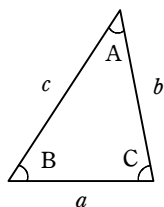
$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

出題者＝大石知広

- 締め切り＝[2025/07/11]、自己採点后に提出。
- 回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数枚使ってもよい。
- 提出の際、複数ページになる場合は、
 - (1) 左上をホチキス留めし、
 - (2) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

以下の問題では、三角形の角は大文字のアルファベットで表す。対応する辺は小文字のアルファベットで表す。それらの位置関係は右図の通りとする。問題によって角や辺の値は変わるので注意。また外接円の半径は R とする。



(解説文)

問12-01 (余弦定理) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) $b=3$, $c=2\sqrt{3}$, $A=30^\circ$ のとき a
- (2) $a=\sqrt{2}$, $b=5$, $C=135^\circ$ のとき c

(解説)

- (1) 余弦定理により $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$
 $= 3^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cos 30^\circ = 3$
 $a > 0$ であるから $a = \sqrt{3}$
- (2) 余弦定理により $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$
 $= (\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cos 135^\circ = 37$
 $c > 0$ であるから $c = \sqrt{37}$

問12-02 (余弦定理) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$ のとき A
- (2) $a=1+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$ のとき B

(解説)

- (1) 余弦定理により $cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $= \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
 よって $A = 135^\circ$
- (2) 余弦定理により $cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
 $= \frac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$
 よって $B = 60^\circ$

問12-03 (余弦定理) $\triangle ABC$ において、 $a=4$, $b=5$, $c=8$ のとき、 A , B , C はそれぞれ鋭角、直角、鈍角のいずれであるか答えよ。

(解説)

$a^2 = 16$, $b^2 = 25$, $c^2 = 64$ から
 $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < c^2 + a^2$, $c^2 > a^2 + b^2$
 よって $\cos A, \cos B, \cos C$ の正負はそれぞれ正、正、負。
 よって $A < 90^\circ$, $B < 90^\circ$, $C > 90^\circ$
 つまり、 A は鋭角、 B は鋭角、 C は鈍角である。

問12-04 (余弦定理) $\triangle ABC$ において、 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ のとき、 C を求めよ。更に、 $a=3$, $c=\sqrt{7}$ のとき、 b を求めよ。

(解説)

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$ …… ① とする。
 $\triangle ABC$ において、余弦定理により $cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 ① を代入すると
 $cos C = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - ab)}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$
 よって $C = 60^\circ$
 また、① において $a=3$, $c=\sqrt{7}$ とすると
 $(\sqrt{7})^2 = 3^2 + b^2 - 3b$
 整理すると $b^2 - 3b + 2 = 0$
 よって $(b-1)(b-2) = 0$
 したがって $b=1, 2$

問12-05 (正弦定理の復習) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

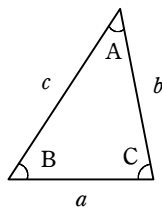
- (1) $B=70^\circ$, $C=50^\circ$, $a=10$ のとき、外接円の半径 R
- (2) $A=120^\circ$, 外接円の半径 $R=8$ のとき a
- (3) $a=5\sqrt{3}$, 外接円の半径 $R=5$ のとき A

(解説)

- (1) $A = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$
 正弦定理により $\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$
 よって $R = \frac{10}{2\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$
- (2) 正弦定理により $\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 8$
 よって $a = 2 \cdot 8 \sin 120^\circ = 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$
- (3) 正弦定理により $\frac{5\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \cdot 5$
 よって $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ゆえに $A = 60^\circ, 120^\circ$

- 締め切りは無し。試験前の自主学習用です。解答は後日電子メールにて配布します。
- 試験対策としては教科書の問や章末問題も有効です。

以下の問題では、三角形の角は大文字のアルファベットで表す。対応する辺は小文字のアルファベットで表す。それらの位置関係は右図の通りとする。問題によって角や辺の値は変わるので注意。また外接円の半径は R とする。



(解説)

(青字解説文)

問13-01 次のような $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

- (1) $b=7, c=8, A=45^\circ$
- (2) $a=2\sqrt{2}, c=\sqrt{6}, B=150^\circ$
- (3) $a=1+\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, A=105^\circ, B=30^\circ$
- (4) $a=11, b=6, c=7$
- (5) $a=\sqrt{5}, b=2, c=3$

(解説)

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

$$(1) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin 45^\circ = 14\sqrt{2}$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \sin 150^\circ = \sqrt{3}$$

$$(3) C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{3}{7}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = 6\sqrt{10}$$

$$(5) \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

問13-02 ヘロンの公式を用いて、次のような $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

- (1) $a=3, b=6, c=7$
- (2) $a=5, b=7, c=9$

(解説)

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

$$(1) 2s = 3 + 6 + 7 \text{ であるから } s = 8$$

$$\text{よって } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 4\sqrt{5}$$

$$(2) 2s = 5 + 7 + 9 \text{ であるから } s = \frac{21}{2}$$

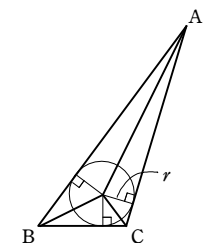
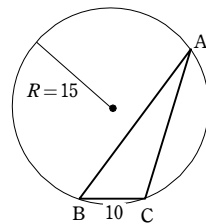
$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \sqrt{\frac{21}{2} \left(\frac{21}{2} - 5 \right) \left(\frac{21}{2} - 7 \right) \left(\frac{21}{2} - 9 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{21\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

問13-03 $\triangle ABC$ は半径 15 の外接円を持つ。 $BC=10$,

$$\cos B = \frac{3}{5} \text{ とするとき,}$$

次のものを求めよ。

- (1) $\sin A$ の値
- (2) 2 辺 AC, AB の長さ
- (3) $\triangle ABC$ の面積 S
- (4) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r



(解説)

$$(1) \triangle ABC \text{ において, 正弦定理により } \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

ただし, R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

$$\text{よって } \sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{10}{2 \cdot 15} = \frac{1}{3}$$

(2) $\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\triangle ABC$ において, 正弦定理により

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

ただし, R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

$$\text{よって } AC = 2R \sin B = 2 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 24$$

$AB = x$ とおくと, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$24^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cos B$$

$$\cos B = \frac{3}{5} \text{ を代入して整理すると } x^2 - 12x - 476 = 0$$

$$\text{よって } x = \frac{12 \pm 32\sqrt{2}}{2} = 6 \pm 16\sqrt{2}$$

$$x > 0 \text{ から } x = 6 + 16\sqrt{2}$$

$$\text{すなわち } AB = 6 + 16\sqrt{2}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot (6 + 16\sqrt{2}) \cdot 24 \cdot \frac{1}{3} = 24 + 64\sqrt{2}$$

$$(4) S = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA) \text{ であるから}$$

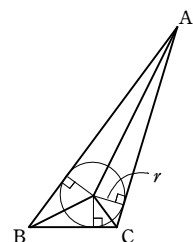
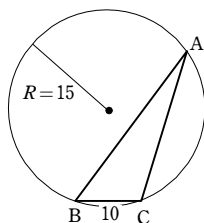
$$\frac{1}{2}r(6 + 16\sqrt{2} + 10 + 24) = 24 + 64\sqrt{2}$$

$$\text{すなわち } r(20 + 8\sqrt{2}) = 24 + 64\sqrt{2}$$

$$\text{よって } r = \frac{24 + 64\sqrt{2}}{20 + 8\sqrt{2}} = \frac{6 + 16\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(6 + 16\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})}{(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{68\sqrt{2} - 34}{17} = 4\sqrt{2} - 2$$



問13-04 (復習) $\triangle ABC$ において, 正弦定理または余弦定理を用いて、次の等式が成り立つことを証明せよ。

- (1) $c(\sin^2 A + \sin^2 B) = (a \sin A + b \sin B) \sin C$
- (2) $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

(解説)

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

よって (左辺) $= c \left\{ \left(\frac{a}{2R} \right)^2 + \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \right\} = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$

(右辺) $= \left(a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R} \right) \cdot \frac{c}{2R} = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$

したがって (左辺) = (右辺)

(2) 余弦定理により $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

よって (左辺) $= a \left(b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)$
 $= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = b^2 - c^2 = (\text{右辺})$

問13-05 (復習) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) $a=1, b=\sqrt{2}, B=45^\circ$ のとき A
- (2) $a=5\sqrt{3},$ 外接円の半径 $R=5$ のとき A
- (3) $a=4, b=6, C=60^\circ$ のとき c
- (4) $a=1+\sqrt{3}, b=2, c=\sqrt{6}$ のとき C

解説

(1) 正弦定理により $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

よって $\sin A = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$B=45^\circ$ より $0^\circ < A < 135^\circ$ であるから $A=30^\circ$

(2) 正弦定理により $\frac{5\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \cdot 5$

よって $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $A=60^\circ, 120^\circ$

(3) 余弦定理により $c^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28$

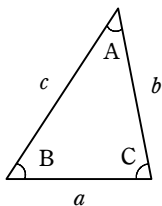
$c > 0$ であるから $c = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(4) 余弦定理により $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot 2} = \frac{1}{2}$

よって $C=60^\circ$

- 締め切りは無し。試験前の自主学習用です。解答は後日電子メールにて配布します。
- 試験対策としては教科書の問や章末問題も有効です。
- 角の単位について。前期期末試験では、角は度数法で表すこととします。弧度法(ラジアン)は使いません。

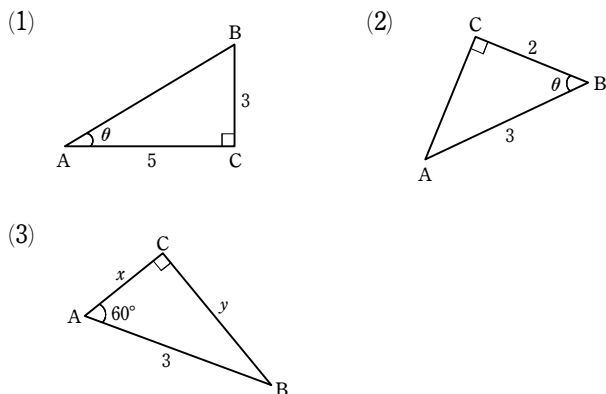
以下の問題では、三角形の角は大文字のアルファベットで表す。対応する辺は小文字のアルファベットで表す。それらの位置関係は右図の通りとする。問題によって角や辺の値は変わるので注意。また外接円の半径は R とする。



角解説

(青字解説文)

問14-01 (復習) 下の図(1), (2)において, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を, それぞれ求めよ。また, 図(3)においては x , y の値を求めよ。



角解説

$$\begin{aligned} (1) \quad AB &= \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \\ \text{よって} \quad \sin \theta &= \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \\ (2) \quad AC &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \\ \text{よって} \quad \sin \theta &= \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \tan \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ (3) \quad \cos 60^\circ &= \frac{x}{3} \text{ であるから} \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \quad \text{よって} \quad x = \frac{3}{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{y}{3} \text{ であるから} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \quad \text{よって} \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

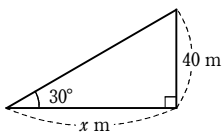
問14-02 (復習) ある地点から高さ 40 m の建物の屋上を見上げたところ, 仰(ぎょう)角が 30° であった。その地点と建物との距離は約何 m か。

角解説

その地点と建物との距離を x m とすると

$$\tan 30^\circ = \frac{40}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{40}{x} \\ \text{よって} \quad x &= 40\sqrt{3} \\ &\approx 40 \times 1.73 \\ &= 69.2 \\ &\approx 69 \text{ (m)} \end{aligned}$$



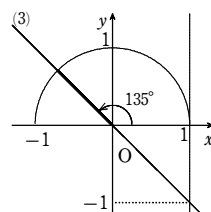
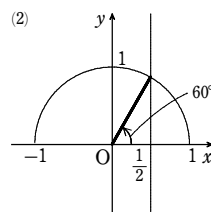
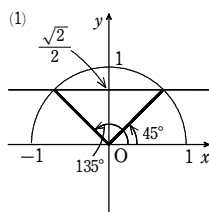
問14-03 (復習) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。次の等式を満たす θ を

求めよ。答えは複数存在する可能性もある。

- $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos \theta = \frac{1}{2}$
- $\tan \theta = -1$
- $2\sin \theta = 1$
- $2\cos \theta = -\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}\tan \theta - 1 = 0$

角解説

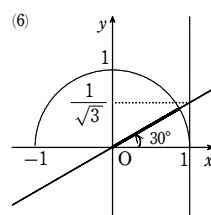
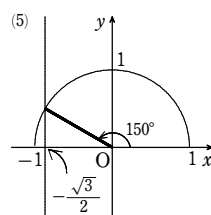
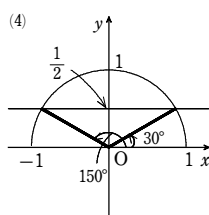
- $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ したがって $\theta = 45^\circ, 135^\circ$
- $\cos \theta = \frac{1}{2}$ したがって $\theta = 60^\circ$
- $\tan \theta = -1$ したがって $\theta = 135^\circ$



- $2\sin \theta = 1$ よって $\sin \theta = \frac{1}{2}$ したがって $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

- $2\cos \theta = -\sqrt{3}$ よって $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ したがって $\theta = 150^\circ$

- $\sqrt{3}\tan \theta - 1 = 0$ よって $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ したがって $\theta = 30^\circ$



問14-04 (復習) 次の式を簡単にせよ。ヒント: 90° や 180° から θ を足し引きした場合の三角比の公式を用いよ。

- $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$
- $\frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \tan^2 110^\circ$
- $\sin^2(180^\circ - \theta) + \sin^2(90^\circ - \theta)$
- $\sin^2(90^\circ + \theta) + \cos^2(90^\circ - \theta)$

角解説

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos 80^\circ &= \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ \\ \sin 100^\circ &= \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ \\ \cos 170^\circ &= \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ \\ \text{よって} \quad \text{与式} &= \sin 10^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ (-\cos 10^\circ) = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \tan 110^\circ &= \tan(90^\circ + 20^\circ) = -\frac{1}{\tan 20^\circ} \\ \text{よって} \quad \text{与式} &= \frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \left(-\frac{1}{\tan 20^\circ}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \left(-\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \frac{\cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = \frac{1 - \cos^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{与式} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(4) \quad \text{与式} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

問14-05 (復習) 正弦定理や余弦定理を駆使して、次の各場合について、 $\triangle ABC$ の残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

- (1) $b=2\sqrt{3}$, $c=3-\sqrt{3}$, $A=120^\circ$
- (2) $a=8$, $A=45^\circ$, $C=30^\circ$
- (3) $a=2$, $b=2\sqrt{3}$, $c=4$
- (4) $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $c=\sqrt{3}-1$

解答例

(1) 余弦定理により $a^2=(2\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cos 120^\circ=18$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

余弦定理により $\cos B=\frac{(3-\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $B=45^\circ$

よって $C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

【参考】 a を求めた後で B を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$

よって $\sin B=\frac{2\sqrt{3}\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$A=120^\circ$ より $0^\circ<B<60^\circ$ であるから $B=45^\circ$

以下同様。

(2) $B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

正弦定理により $\frac{8}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$

よって $c=\frac{8\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

余弦定理により $a^2=b^2+c^2-2bccos A$ であるから

$$8^2=b^2+(4\sqrt{2})^2-2b\cdot 4\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

よって $b^2-8b-32=0$

これを解くと $b=4\pm 4\sqrt{3}$

$b>0$ であるから $b=4+4\sqrt{3}$

(3) 余弦定理により $\cos A=\frac{(2\sqrt{3})^2+4^2-2^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

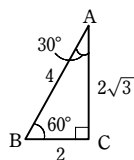
よって $A=30^\circ$

$$\cos B=\frac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

よって $B=60^\circ$

ゆえに $C=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

【別解】 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ から $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$



(4) 余弦定理により $\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}$

$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $A=30^\circ$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $B=135^\circ$

ゆえに $C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$