

後期 18 [2025/10/02]

締め切り = [2025/10/09]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 18-01

次の 2 変数関数 $f(x, y)$ が原点で連続か否かを判定せよ。

(1)

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} \quad (1)$$

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (2)$$

(3)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (3)$$

問 18-02

次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について、 x に対する偏導関数 $f_x(x, y)$ および y に対する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めよ。

(1) ※ m と n は定数。

$$f(x, y) = x^m + y^n \quad (4)$$

(2) ※ a と b は定数。

$$f(x, y) = \sin(ax + by) \quad (5)$$

(3)

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \quad (6)$$

(4)

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(5)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8)$$

(6)

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad (9)$$

解答編・後期 18 [2025/10/02]

問 18-01

次の2変数関数 $f(x, y)$ が原点で連続か否かを判定せよ。

(1) 連続。

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} \quad (1)$$

極座標をとると $f(x, y) = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - r^2}$ である。したがって $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - r^2} = 0$ が θ の値によらずに成り立つので、原点で連続である。

(2) 不連続。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (2)$$

領域 $(x, y) = (0, 0)$ で極座標をとると $f(x, y) = \frac{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta$ である。したがって $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \theta$ は θ に依存するので原点で収束しない。よって連続ではない。

(3) 連続。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (3)$$

領域 $(x, y) = (0, 0)$ で極座標をとると $f(x, y) = \frac{r^3 g(\theta)}{r^2} = r g(\theta)$ ただし $g(\theta) = \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta$ である。したがって $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r g(\theta) = 0$ が θ の値によらずに成り立つので、原点で連続である。

問 18-02

次の2変数関数 $f(x, y)$ について、 x に対する偏導関数 $f_x(x, y)$ および y に対する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めよ。

(1) ※ m と n は定数。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^m + y^n \\ \longrightarrow f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [x^m] = m x^{m-1}, \\ f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} [y^n] = n y^{n-1}. \end{aligned}$$

(2) ※ a と b は定数。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(ax + by) \\ \longrightarrow f_x(x, y) &= a \cos(ax + by), \\ f_y(x, y) &= b \cos(ax + by). \end{aligned}$$

(3) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} = e^u$, $u = -x^2 - y^2$,

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot e^u = -2x e^{-x^2 - y^2}, \\ f_y(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot e^u = -2y e^{-x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

(4) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{u}$, $u = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{-1}{u^2} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{-1}{u^2} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

(5) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ f_y(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

(6) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) = \log u$, $u = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{u} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \\ f_y(x, y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{u} = \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

後期 19 [2025/10/09]

締め切り = [2025/10/16]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 19-01

教科書 p.195 の問 5.12 に答えよ。

問 19-02

教科書 p.196 の問 5.13 に答えよ。

問 19-03

次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の全微分を求めよ。ただし a と b は定数とする。

(1) $f(x, y) = \cos(ax + by)$

(2) $f(x, y) = e^{-ax^2 - by^2}$

(3) $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$

(4) $f(x, y) = \log(ax^2 + by^2)$

解答編・後期 19 [2025/10/09]

問 19-01

教科書 p.195 の問 5.12 に答えよ。

(1) $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ とおくと、点 $(2, 1, 3)$ での偏微分係数は

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x, & f_y(x, y) &= -2y. \\ \longrightarrow f_x(2, 1) &= 4, & f_y(2, 1) &= -2. \end{aligned}$$

したがって点 $(2, 1, 3)$ での接平面 α は

$$\begin{aligned} \alpha: \quad z - 3 &= 4(x - 2) - 2(y - 1) \\ 4x - 2y - z &= 3. \end{aligned}$$

また法線ベクトルは $\vec{n} = (4, -2, -1)$ なので、法線 ℓ は

$$\ell: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}. \quad (1)$$

(2) $z = f(x, y) = \frac{x}{y}$ とおくと、点 $(2, 1, 2)$ での偏微分係数は

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{y}, & f_y(x, y) &= \frac{-x}{y^2}. \\ \longrightarrow f_x(2, 1) &= 1, & f_y(2, 1) &= -2. \end{aligned}$$

したがって点 $(2, 1, 2)$ での接平面 α は

$$\begin{aligned} \alpha: \quad z - 2 &= (x - 2) - 2(y - 1) \\ x - 2y - z &= -2. \end{aligned}$$

また法線ベクトルは $\vec{n} = (1, -2, -1)$ なので、法線 ℓ は

$$\ell: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}. \quad (2)$$

(3) $z = f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ とおくと、点 $(1, 2, 3)$ での偏微分係数は

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}, \\ f_y(x, y) &= \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}. \\ \longrightarrow f_x(1, 2) &= \frac{-1}{3}, & f_y(1, 2) &= \frac{-2}{3}. \end{aligned}$$

したがって点 $(1, 2, 3)$ での接平面 α は

$$\begin{aligned} \alpha: \quad z - 3 &= \frac{-1}{3}(x - 1) + \frac{-2}{3}(y - 2) \\ 3z - 9 &= -(x - 1) - 2(y - 2) \\ x + 2y + 3z &= 14. \end{aligned}$$

また法線ベクトルは $3\vec{n} = (-1, -2, -3)$ なので、法線 ℓ は

$$\begin{aligned} \ell: \frac{x-1}{-1} &= \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-3} \\ x - 1 &= \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

問 19-02

教科書 p.196 の問 5.13 に答えよ。

(1) $z = f(x, y) = x^2 y^3$ とおくと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \cdot y^3, & f_y(x, y) &= x^2 \cdot 3y^2. \\ \longrightarrow dz &= 2xy^3 \cdot dx + 3x^2 y^2 \cdot dy. \end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y) = e^x \sin y$ とおくと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x \cdot \sin y, & f_y(x, y) &= e^x \cdot \cos y. \\ \longrightarrow dz &= e^x \sin y \cdot dx + e^x \cos y \cdot dy. \end{aligned}$$

(3) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, & f_y(x, y) &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \\ \longrightarrow dz &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot dx - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot dy. \end{aligned}$$

問 19-03

次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の全微分を求めよ。ただし a と b は定数とする。

(1) $z = f(x, y) = \cos(ax + by)$

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= -a \sin(ax + by), \\ f_y(x, y) &= -b \sin(ax + by). \\ \longrightarrow dz &= -a \sin(ax + by) \cdot dx - b \sin(ax + by) \cdot dy. \end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y) = e^{-ax^2 - by^2}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= -2axe^{-x^2 - y^2}, \\ f_y(x, y) &= -2bye^{-x^2 - y^2}. \\ \longrightarrow dz &= e^{-x^2 - y^2} (-2ax \cdot dx - 2by \cdot dy). \end{aligned}$$

(3) $z = f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + by^2}}, \\ f_y(x, y) &= \frac{by}{\sqrt{ax^2 + by^2}}. \\ \longrightarrow dz &= \frac{ax \cdot dx + by \cdot dy}{\sqrt{ax^2 + by^2}}. \end{aligned}$$

(4) $z = f(x, y) = \log(ax^2 + by^2)$

$$\begin{aligned} \longrightarrow f_x(x, y) &= \frac{2ax}{ax^2 + by^2}, & f_y(x, y) &= \frac{2by}{ax^2 + by^2}. \\ \longrightarrow dz &= \frac{2ax \cdot dx + 2by \cdot dy}{ax^2 + by^2}. \end{aligned}$$

後期 20 [2025/10/16]

締め切り = [2025/10/23]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 20-01

教科書 p.189 の問 5.9 に答えよ。

問 20-02

教科書 p.193 の問 5.11 に答えよ。

問 20-03

C^1 級の関数 $f(x, y)$ が任意のゼロでない実数 t に対して、

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

が成り立っている。このとき、

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

が成り立つことを証明せよ。ヒント： $f(ta, tb) = t^n f(a, b)$ を t について微分してみよ。

問 20-04

$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ とする。ただし $(x, y) \neq (0, 0)$ とする。このとき次式を計算せよ。

$$g(x) = xf_x(x, y) + yf_y(x, y)$$

問 20-05

$f(x, y) = e^{ax+by}$ を、原点 $(0, 0)$ 近傍で、変数の 2 次までテイラー展開したい。以下の 2 通りの手順で、展開形を求めよ。

(1) 授業で習ったとおり、2 次までの偏導関数を求め、そこから $(0, 0)$ 近傍での 2 次までの偏微分係数を求めて、2 変数関数に対するテイラーの定理から、テイラー展開した式を書け。3 次以上の剰余項 R_3 は省略してよい。

(2) $p = ax + by$ と置いて、 $f(x, y) = f(p) = e^p$ の 1 変数関数だとみなして、2 次項 (p^2 の項) までのテイラー展開 (1 変数関数の場合) を計算せよ。ただし、最後の式は x と y の関数に直すこと。3 次以上の剰余項 R_3 は省略してよい。

解答編・後期 20 [2025/10/16]

問 20-01 解答

教科書 p.189 の問 5.9 に答えよ。

(1) $z = f(x, y) = xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial y} = 2sy + 2sx = 4s^3 \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y} = 2ty - 2tx = -4t^3\end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y} = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta\end{aligned}$$

(3) $z = f(x, y)$, $x = s$, $y = s + t$ である。ただし x で偏微分する場合は $y = x + t$ であるから $f(x, y) = f(x, x + t) = f(x, t)$ と書き直され (変数の独立性)、 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, t)$ と書ける。したがって $\frac{\partial z}{\partial s}$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot f_x(x, t) + 1 \cdot f_y(x, y) \\ &= f_x(s, t) + f_y(s, s + t)\end{aligned}$$

となる。一方で $\frac{\partial z}{\partial t}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \cdot f_x(x, t) + 1 \cdot f_y(x, y) \\ &= f_y(s, s + t)\end{aligned}$$

問 20-02 解答

教科書 p.193 の問 5.11 に答えよ。

(1) $f(x, y) = \cos(x - y)$ より、点 $(0, 0)$ 近傍では

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= -\sin(x - y) \longrightarrow f_x(0, 0) = 0 \\ f_y(x, y) &= \sin(x - y) \longrightarrow f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx}(x, y) &= -\cos(x - y) \longrightarrow f_{xx}(0, 0) = -1 \\ f_{yy}(x, y) &= -\cos(x - y) \longrightarrow f_{yy}(0, 0) = -1 \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \cos(x - y) \longrightarrow f_{xy}(0, 0) = 1\end{aligned}$$

よって $(0, 0)$ 近傍での 2 次までのテイラー展開は次式。

$$\begin{aligned}f(x, y) &\cong f(0, 0) + \frac{1}{1!} [xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] \\ &+ \frac{1}{2!} [x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0)] + R_3 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + R_3\end{aligned}$$

(2) $f(x, y) = \sqrt{2x + y} = (2x + y)^{1/2}$ より $(1, 2)$ 近傍では

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= (2x + y)^{-1/2} \longrightarrow f_x(1, 2) = \frac{1}{2} \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{2}(2x + y)^{-1/2} \longrightarrow f_y(1, 2) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= -(2x + y)^{-3/2} \longrightarrow f_{xx}(1, 2) = -\frac{1}{8} \\ f_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{4}(2x + y)^{-3/2} \longrightarrow f_{yy}(1, 2) = -\frac{1}{32} \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -\frac{1}{2}(2x + y)^{-3/2} \\ &\longrightarrow f_{xy}(1, 2) = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

加えて $f(1, 2) = 2$ である。よって $(1, 2)$ 近傍での 2 次までのテイラー展開は次式。

$$\begin{aligned}f(x, y) &\cong 2 + \frac{(x - 1)}{2} + \frac{(y - 2)}{4} \\ &- \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(x - 1)(y - 2)}{16} - \frac{(y - 2)^2}{64} + R_3\end{aligned}$$

問 20-03 解答

$f(ta, tb) = t^n f(a, b)$ の両辺を t について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(ta, tb) &= \frac{d(ta)}{dt} \frac{\partial f}{\partial (ta)} + \frac{d(tb)}{dt} \frac{\partial f}{\partial (tb)} \\ &= a \frac{\partial f}{\partial (ta)} + b \frac{\partial f}{\partial (tb)} = nt^{n-1} f(a, b)\end{aligned}$$

ここに $t = 1$ を代入すると

$$a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} = af_a(a, b) + bf_b(a, b) = nf(a, b)$$

となり、 $(a, b) \rightarrow (x, y)$ と置き換えれば、証明終了。

問 20-04 解答

前問で証明した公式を利用する。 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ 、ただし $(x, y) \neq (0, 0)$ と与えられている。これは $f(tx, ty) = f(x, y)$ を満たすので、前問の条件式で $n = 0$ である場合に該当する。したがって

$$g(x) = xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = 0 \cdot f(x, y) = 0$$

である。もちろん直接計算して証明してもよい。

問 20-05 解答

(1) $f(x, y) = e^{ax+by}$ の 2 次までの偏導関数と、 $(0, 0)$ での 2 次までの偏微分係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= ae^{ax+by} \longrightarrow f_x(0, 0) = a \\ f_y(x, y) &= be^{ax+by} \longrightarrow f_y(0, 0) = b \\ f_{xx}(x, y) &= a^2 e^{ax+by} \longrightarrow f_{xx}(0, 0) = a^2 \\ f_{yy}(x, y) &= b^2 e^{ax+by} \longrightarrow f_{yy}(0, 0) = b^2 \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = abe^{ax+by} \longrightarrow f_{xy}(0, 0) = ab\end{aligned}$$

したがって $(0, 0)$ 近傍での 2 次までのテイラー展開は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}f(x, y) &\cong f(0, 0) + \frac{1}{1!} [xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] \\ &+ \frac{1}{2!} [x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0)] \\ &= 1 + ax + by + \frac{a^2 x^2}{2} + ax \cdot by + \frac{b^2 y^2}{2}\end{aligned}$$

(2) $p = ax + by$ と置いて、 $f(x, y) = f(p) = e^p$ の1変数関数だとみなして、 $p = 0$ 近傍で2次項までテイラー展開すると

$$\begin{aligned} f(p) = e^p &\cong 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} \\ &= 1 + (ax + by) + \frac{a^2x^2 + 2ax \cdot by + b^2y^2}{2} \\ &= 1 + ax + by + \frac{a^2x^2}{2} + ax \cdot by + \frac{b^2y^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

注意： この問題での $f(x, y) = e^{ax+by}$ は、たまたま (1) と (2) の方法で結果が一致した。しかし一般の $f(x, y)$ では、これは必ずしも正しくない。基本的には (1) の正規の方法でテイラー展開すること。

後期 21 [2025/10/23]

締め切り＝なし。試験前の自主学習用。解答は来週の授業時に配布します。

問 21-01

以下の関数のヘッセ行列式を求めよ。

(1) $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 2y$

(2) $z = f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4$

(3) $z = f(x, y) = e^{-xy}(x + y)$

(4) $z = f(x, y) = e^{-(x-3)^2} \cdot e^{-(y+2)^2}$

問 21-02

前問の関数 (1)～(4) について、極値を持つかどうかを調べ、持つ場合には極値を求めよ。

問 21-03

ある三角形は、三辺の長さがそれぞれ x, y, z で、それらの和が $x + y + z = 2l > 0$ を満たす。このような三角形のうち、面積が最大のものは正三角形であること ($x = y = z$) を証明せよ。ヒント：ヘロンの公式。

問 21-04

(復習) 2 変数関数で表される曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ について、曲面上の点 $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ での接平面の方程式と、法線の方程式を求めよ。

解答編・後期 21 [2025/10/23]

問 21-01

以下の関数のヘッセ行列式 $H(x, y)$ は下記ようになる。

$$(1) z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 2y$$

$$f_x = 2x - y - 1$$

$$f_y = -x + 4y - 2$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 4$$

$$\implies H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 7$$

$$(2) z = f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4$$

$$f_x = 4x^3 - 4y$$

$$f_y = 4y - 4x$$

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 4$$

$$\implies H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 48x^2 - 16$$

$$(3) z = f(x, y) = e^{-xy}(x + y)$$

$$f_x = e^{-xy}[-y(x + y) + 1] = e^{-xy}[1 - xy - y^2]$$

$$f_y = e^{-xy}[-x(x + y) + 1] = e^{-xy}[1 - xy - x^2]$$

$$f_{xx} = e^{-xy}[-y(1 - xy - y^2) - y] = e^{-xy}[xy^2 + y^3 - 2y]$$

$$f_{yy} = e^{-xy}[-x(1 - xy - x^2) - x] = e^{-xy}[x^2y + x^3 - 2x]$$

$$f_{xy} = e^{-xy}[-x(1 - xy - y^2) - x - 2y]$$

$$= e^{-xy}[xy(x + y) - 2x - 2y] = e^{-xy}(x + y)(xy - 2)$$

$$\implies H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$= e^{-2xy}\{(xy^2 + y^3 - 2y)(x^2y + x^3 - 2x)$$

$$- (x + y)^2(xy - 2)^2\}$$

$$(4) z = f(x, y) = e^{-(x-3)^2} \cdot e^{-(y+2)^2}$$

$$f_x = -2(x-3)e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}$$

$$f_y = -2(y+2)e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}$$

$$f_{xx} = e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}[4(x-3)^2 - 2]$$

$$f_{yy} = e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}[4(y+2)^2 - 2]$$

$$f_{xy} = 4(x-3)(y+2)e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}$$

$$\implies H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$= e^{-(x-3)^2-(y+2)^2}\{[4(x-3)^2 - 2][4(y+2)^2 - 2]$$

$$- 16(x-3)^2(y+2)^2\}$$

問 21-02

(1) $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - x - 2y$ は停留点 $(\frac{6}{7}, \frac{5}{7})$ で極小値 $-\frac{8}{7}$ をとる。

(2) $z = f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4$ は停留点 $(\pm 1, \pm 1)$ で極小値 -1 をとる。停留点 $(0, 0)$ では極値をとらない。

(3) $z = f(x, y) = e^{-xy}(x + y)$ は停留点 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ を持つが、そこでは極値をとらない。

(4) $z = f(x, y) = e^{-(x-3)^2} \cdot e^{-(y+2)^2}$ は停留点 $(3, -2)$ で極大値 1 をとる。

問 21-03

ヘロンの公式より三角形の面積 S は次式で与えられる。

$$S = \sqrt{l(l-x)(l-y)(l-z)}$$

ただし条件より $x + y + z = 2l$ である。面積 S と長さ l はつねに正であるから、面積を最大化するには

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{S^2}{l} = (l-x)(l-y)(l-z) \\ &= (x-l)(y-l)(x+y-l) \end{aligned}$$

この関数を最大化する条件を考えればよい。必要な偏導関数とヘッセ行列式を求めると

$$f_x = (y-l)[(x+y-l) + (x-l)] = (2x+y-2l)(y-l)$$

$$f_y = (x-l)[(x+y-l) + (y-l)] = (2y+x-2l)(x-l)$$

$$f_{xx} = 2(y-l), \quad f_{yy} = 2(x-l),$$

$$f_{xy} = (y-l) + (2x+y-2l) = 2x+2y-3l$$

$$\implies H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$= 4(x-l)(y-l) - (2x+2y-3l)^2$$

停留条件は

$$f_x(a, b) = (2a+b-l)(b-l) = 0,$$

$$f_y(a, b) = (2b+a-l)(a-l) = 0,$$

これを解いて $(a, b) = (\frac{2}{3}l, \frac{2}{3}l)$ であり、この点でヘッセ行列式は $H(a, b) = \frac{l^2}{3} > 0$ なので、極値をとる。 $f_{xx}(a, b) = -\frac{2}{3}l < 0$ なので、 $f(a, b) = \frac{l^2}{27}$ は極大値である。

したがって、 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}l, \frac{2}{3}l, \frac{2}{3}l)$ のとき面積は最大であり、正三角形となる。その面積は $S = \sqrt{\frac{l^4}{27}} = \frac{l^2}{3\sqrt{3}}$ である。

問 21-04

曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f_x = -2x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y = -2y \cdot \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

したがって曲面上の点 $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ での偏微分係数は以下の値になる。

$$f_x(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -1, \quad f_y(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -1.$$

接平面の方程式は次式で与えられる。

$$z - \frac{1}{\sqrt{3}} = (-1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1)\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\implies x + y + z - \sqrt{3} = 0.$$

法線の方程式は次式で与えられる。

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1} \implies x = y = z.$$

後期 22 [2025/10/30]

締め切り＝なし。試験前の自主学習用。解答は来週の火曜日までに配布します。

全ての問題をやる必要は無い。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 22-01

次の関数が連続となるように定数 a, b の値を定めよ。

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ a & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ b & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

問 22-02

$z = (x+y)^{-1}$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$ とする。次式を計算せよ。最終結果は s, t の式で表すこと。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (2) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

問 22-03

$z = 4x^2 - y^2$ とする。極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて、次式を計算せよ。最終結果は r, θ の式で表すこと。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) \quad (2) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)$$

問 22-04

以下の関数について1次の偏導関数 f_x, f_y を求めよ。

$$(1) z = f(x, y) = (x-a)(x-b)(y-c)(y-d)$$

(※ a, b, c, d は定数)

$$(2) z = f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$(3) z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$$

問 22-05

曲面 $z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$ を考える。

(1) 全微分 dz を求めよ。

(2) 曲面上の点 $P(1, 0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

問 22-06

曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ を考える。

(1) 曲面上の点 $P(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ での接平面の方程式と、法線の方程式を求めよ。

(2) 曲面上の点 $P(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ での接平面の方程式と、法線の方程式を求めよ。

問 22-07

以下の関数について2次の偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

(訳：計算をがんばれ。)

$$(1) z = f(x, y) = \cos(ax + by) \quad (\text{※ } a, b \text{ は定数})$$

$$(2) z = f(x, y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2$$

$$(3) z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

問 22-08

関数 $z = f(x, y) = \cos(x-y)$ を原点のまわりで2次の項までテイラー展開せよ。3次以上の剰余項 R_3 は省略してよい。

問 22-09

曲面 $z = f(x, y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2$ を考える。

(1) 停留点をすべて求めよ。

(2) 極値を持つか否か？ 持つ場合にはその値を求めよ。

問 22-10

曲面 $z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$ を考える。

(1) 停留点をすべて求めよ。

(2) 極値を持つか否か？ 持つ場合にはその値を求めよ。

後期 22 [2025/10/30]

締め切り＝なし。試験前の自主学習用。解答は来週の火曜日までに配布します。

全ての問題をやる必要は無い。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 22-01

次の関数が連続となるように定数 a, b の値を定めよ。

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ a & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ b & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

問 22-02

$z = (x+y)^{-1}$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$ とする。次式を計算せよ。最終結果は s, t の式で表すこと。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (2) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

問 22-03

$z = 4x^2 - y^2$ とする。極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて、次式を計算せよ。最終結果は r, θ の式で表すこと。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) \quad (2) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)$$

問 22-04

以下の関数について1次の偏導関数 f_x, f_y を求めよ。

$$(1) z = f(x, y) = (x-a)(x-b)(y-c)(y-d)$$

(※ a, b, c, d は定数)

$$(2) z = f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$(3) z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$$

問 22-05

曲面 $z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$ を考える。

(1) 全微分 dz を求めよ。

(2) 曲面上の点 $P(1, 0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

問 22-06

曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ を考える。

(1) 曲面上の点 $P(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ での接平面の方程式と、法線の方程式を求めよ。

(2) 曲面上の点 $P(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ での接平面の方程式と、法線の方程式を求めよ。

問 22-07

以下の関数について2次の偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

(訳：計算をがんばれ。)

$$(1) z = f(x, y) = \cos(ax + by) \quad (\text{※ } a, b \text{ は定数})$$

$$(2) z = f(x, y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2$$

$$(3) z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

問 22-08

関数 $z = f(x, y) = \cos(x-y)$ を原点のまわりで2次の項までテイラー展開せよ。3次以上の剰余項 R_3 は省略してよい。

問 22-09

曲面 $z = f(x, y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2$ を考える。

(1) 停留点をすべて求めよ。

(2) 極値を持つか否か？ 持つ場合にはその値を求めよ。

問 22-10

曲面 $z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$ を考える。

(1) 停留点をすべて求めよ。

(2) 極値を持つか否か？ 持つ場合にはその値を求めよ。

解答編・後期 22 [2025/10/30]

問 22-01

極座標をとれば原点での極限値が定まる。

(1) $a = 1$

(2) $b = 0$

問 22-02

$z = (x + y)^{-1}$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$ とする。

$$\begin{aligned} (1) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= 2s(-)(x + y)^{-2} + 2t(-)(x + y)^{-2} \\ &= 2(s + t) \frac{-1}{(s^2 + t^2 + 2st)^2} = \frac{-2}{(s + t)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= 2t(-)(x + y)^{-2} + 2s(-)(x + y)^{-2} \\ &= 2(t + s) \frac{-1}{(s^2 + t^2 + 2st)^2} = \frac{-2}{(s + t)^3} \end{aligned}$$

問 22-03

$z = 4x^2 - y^2$ とする。極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いて、次式を計算せよ。最終結果は r, θ の式で表すこと。

$$\begin{aligned} (1) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} = \cos \theta (8x) + \sin \theta (-2y) \\ &= 8r \cos^2 \theta - 4r \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y} = -r \sin \theta (8x) + r \cos \theta (-2y) \\ &= -10r^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

問 22-04

以下の関数について 1 次の偏導関数 f_x , f_y を求めよ。

(1) $z = f(x, y) = (x - a)(x - b)(y - c)(y - d)$

$$f_x = (2x - a - b)(y - c)(y - d),$$

$$f_y = (x - a)(x - b)(2y - c - d)$$

(2) $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

(3) $z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$

$$f_x = -(x^2 - xy + y^2)^{-2} (2x - y) = \frac{-2x + y}{(x^2 - xy + y^2)^2},$$

$$f_y = -(x^2 - xy + y^2)^{-2} (-x + 2y) = \frac{x - 2y}{(x^2 - xy + y^2)^2}$$

問 22-05

曲面 $z = f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^{-1}$ を考える。

(1) 全微分 dz を求めよ。

$$dz = \frac{-2x + y}{(x^2 - xy + y^2)^2} dx + \frac{x - 2y}{(x^2 - xy + y^2)^2} dy$$

(2) 曲面上の点 $P(1, 0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

$$\begin{aligned} f_x(1, 0) &= \frac{-2}{1^2} = -2, \quad f_y(1, 0) = \frac{1}{1^2} = 1, \\ \implies z - f(1, 0) &= -2 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) \\ \implies 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

問 22-06

曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ を考える。

(1) 曲面上の点 $P(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ での接平面の方程式は次式で与えられる。

$$f_x(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{-(-2/\sqrt{3})}{\sqrt{4/3}} = +1,$$

$$f_y(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{-(2/\sqrt{3})}{\sqrt{4/3}} = -1,$$

$$\implies z - \frac{2}{\sqrt{3}} = (+1) \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + (-1) \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\implies x - y - z = -\sqrt{6}$$

法線ベクトルは $\vec{n} = (1, -1, -1)$ より、法線の方程式は次式で与えられる。

$$\frac{x + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{y - \frac{2}{\sqrt{3}}}{-1} = \frac{z - \frac{2}{\sqrt{3}}}{-1} \implies x = -y = -z$$

(2) 曲面上の点 $P(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ での接平面の方程式は次式で与えられる。

$$f_x(0, \sqrt{2}) = 0,$$

$$f_y(0, \sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1,$$

$$\implies z - \sqrt{2} = 0 \cdot (x - 0) + (-1) (y - \sqrt{2})$$

$$\implies y + z = 2\sqrt{2}$$

法線ベクトルは $\vec{n} = (0, -1, -1)$ より、媒介変数を t とすると、法線の方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= 0 + t \cdot 0, \quad y = \sqrt{2} + t(-1), \quad z = \sqrt{2} + t(-1) \\ \implies x &= 0, \quad y = z \end{aligned}$$

問 22-07

(1) $z = f(x, y) = \cos(ax + by)$ ($\ast a, b$ は定数)

$$f_x = -a \sin(ax + by), \quad f_y = -b \sin(ax + by)$$

$$f_{xx} = -a^2 \cos(ax + by)$$

$$f_{xy} = -ab \cos(ax + by)$$

$$f_{yy} = -b^2 \cos(ax + by)$$

(2) $z = f(x, y) = 2(x - 1)^2 - (y + 2)^2$

$$f_x = 4(x - 1), \quad f_y = -2(y + 2)$$

$$f_{xx} = 4$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = -2$$

$$(3) z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

$$f_x = 6(x-3)e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

$$f_y = 6(y-3)e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

$$f_{xx} = [6 - 12(x-3)^2] e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

$$f_{xy} = [-12(x-3)(y-3)] e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

$$f_{yy} = [6 - 12(y-3)^2] e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$$

問 22-08

関数 $z = f(x, y) = \cos(x - y)$ を原点のまわりで 2 次の項までテイラー展開せよ。3 次以上の剰余項 R_3 は省略してよい。

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = -1, \quad f_{xy}(0, 0) = 1, \quad f_{yy}(0, 0) = -1$$

したがって $(0, 0)$ 周辺で 2 次の項までテイラー展開すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} f(x, y) &\cong f(0, 0) + 0 \\ &\quad + \frac{-(x-0)^2 + 2(x-0)(y-0) - (y-0)^2}{2} \\ &= 1 - \frac{(x-y)^2}{2} \end{aligned}$$

問 22-09

曲面 $z = f(x, y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2$ を考える。

(1) $f_x = 4(x-1)$, $f_y = -2(y+2)$ より、停留点は $(a, b) = (1, -2)$ である。

(2) 停留点でのヘッセ行列式 $H(a, b) = -8 < 0$ より、極値を持たない（いわゆる鞍点である）。

問 22-10

曲面 $z = f(x, y) = -3e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$ を考える。

(1) $f_x(x, y) = 6(x-3)e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$ および $f_y(x, y) = 6(y-3)e^{-(x-3)^2} e^{-(y-3)^2}$ より、停留点は $(a, b) = (3, 3)$ である。

(2) 停留点でのヘッセ行列式 $H(3, 3) = 6^2 - 0^2 > 0$ なので極値を持つことは確定している。 $f_{xx}(3, 3) = 6 > 0$ より、極小値を持つ。その値は $f(3, 3) = -3$ である。

後期 24 [2025/11/20]

締め切り = [2025/11/27]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけでなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 24-01

方程式

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0$$

について、点 $(1, 0)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

問 24-02

以下の曲線について、与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

- (1) 曲線 $x^2 + 2y^2 = 4$ 点 $(-\sqrt{2}, 1)$
- (2) 曲線 $xe^y - \log y = 1$ 点 $(\frac{1}{e}, 1)$
- (3) 曲線 $xe^{2x+y} + \frac{y}{2} = 0$ 点 $(1, -2)$

問 24-03

制約条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = x^2 + 4y$ の最大値を求めたい。ラグランジュの未定乗数法を用いた場合の、停留点における x, y および λ (ラグランジュの未定乗数) の満たす方程式系を答えよ。

問 24-04

ある企業のある製品の生産量は、設備投資 K と労働力 L の関数として $f(K, L) = \sqrt{KL}$ で与えられる。一方で総費用は $C = K + 2L$ で与えられる。つまり労働者を雇うには、設備投資に比べて 2 倍の費用がかかるとする。 $C = 12$ という制約のもとで、生産量 $f(K, L)$ を最大化したい。

(1) ラグランジュの未定乗数を λ として、 $Z(K, L) = f(K, L) - \lambda(K + 2L - 12)$ とする。 $\frac{\partial Z}{\partial K}$ および $\frac{\partial Z}{\partial L}$ を求めよ。

(2) 制約条件を遵守した場合の $f(K, L)$ の最大値を求めよ。

(3) おまけ。このときのラグランジュの未定乗数 λ の経済学的な意味を考えてみよ。

後期 24 [2025/11/20]

締め切り = [2025/11/27]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 24-01

方程式

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0$$

について、点 $(1, 0)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

問 24-01 解答

$F(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0$ と置くと $F(1, 0) = 0$ であり、さらに

$$F_y(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$$

より $F_y(1, 0) = -1 \neq 0$ なので、 $(1, 0)$ 近傍で陰関数が存在する。 $f'(x = 1)$ を計算すると $f'(1) = -F_x(1, 0)/F_y(1, 0) = 1$ である。

問 24-02

以下の曲線について、与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) 曲線 $x^2 + 2y^2 = 4$ 点 $(-\sqrt{2}, 1)$

(2) 曲線 $xe^y - \log y = 1$ 点 $(\frac{1}{e}, 1)$

(3) 曲線 $xe^{2x+y} + \frac{y}{2} = 0$ 点 $(1, -2)$

問 24-02 解答

(1) $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4$ より $F_x = 2x$, $F_y = 4y$ であるから、点 $(a, b) = (-\sqrt{2}, 1)$ での偏微分係数は $F_x(-\sqrt{2}, 1) = -2\sqrt{2}$, $F_y(-\sqrt{2}, 1) = 4$ である。これらを次式に代入する。

$$\text{接線 } F_y(a, b)(y - b) + F_x(a, b)(x - a) = 0$$

$$\text{法線 } F_x(a, b)(y - b) - F_y(a, b)(x - a) = 0$$

結果は接線が $\sqrt{2}x - 2y + 4 = 0$ 、法線が $2x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$ となる。

(2) 同様に考えて接線が $x - \frac{1}{e} = 0$ 、法線が $y - 1 = 0$ となる。

(3) 同様に考えて接線が $2x + y = 0$ 、法線が $x - 2y - 5 = 0$ となる。

問 24-03

制約条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = x^2 + 4y$ の最大値を求めたい。ラグランジュの未定乗数法を用いた場合の、停留点における x, y および λ (ラグランジュの未定乗数) の満たす方程式系を答えよ。

問 24-03 解答

$Z(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ と置くと、ラグランジュの未定乗数法より、停留点では $\frac{\partial Z}{\partial x} =$

0 , $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$ が成り立っている。したがって $2x(1 - \lambda) = 0$, $4 - 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ を満たす。

問 24-04

ある企業のある製品の生産量は、設備投資 K と労働力 L の関数として $f(K, L) = \sqrt{KL}$ で与えられる。一方で総費用は $C = K + 2L$ で与えられる。つまり労働者を雇うには、設備投資に比べて 2 倍の費用がかかるとする。 $C = 12$ という制約のもとで、生産量 $f(K, L)$ を最大化したい。

(1) ラグランジュの未定乗数を λ として、 $Z(K, L) = f(K, L) - \lambda(K + 2L - 12)$ とする。 $\frac{\partial Z}{\partial K}$ および $\frac{\partial Z}{\partial L}$ を求めよ。

(2) 制約条件を遵守した場合の $f(K, L)$ の最大値を求めよ。

(3) おまけ。このときのラグランジュの未定乗数 λ の経済学的な意味を考えてみよ。

問 24-04 解答

(1) 次式。

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}} - \lambda, \quad \frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} - 2\lambda$$

(2) まずラグランジュの未定乗数法から停留点を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial K} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}, \\ \frac{\partial Z}{\partial L} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} - 2\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} - \sqrt{\frac{L}{K}} = 0 \\ &\rightarrow K = 2L, \end{aligned}$$

これを $K + 2L - 12 = 0$ に代入すると停留点は $(K, L) = (6, 3)$ と求まる。この点では生産量は $f(6, 3) = 3\sqrt{2}$ となる。

一方で制約条件より $K = 12 - 2L$ を $f(K, L)$ に代入すると $\sqrt{L(12 - 2L)}$ であり、根号の中の関数を考えると、これは $L = 3$ で最大値をとることが読み取れる。つまり最大値は $f(6, 3) = 3\sqrt{2}$ である。

(3) いわゆるシャドウプライス。生産量が最大値の近傍で、追加でわずかに投資した費用を ΔC とする。対応する生産量の増加分を Δf とすれば $\Delta f = \lambda \Delta C$ である。

後期 25 [2025/12/04]

締め切り = [2025/12/11]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 25-01

次の 2 重積分を求めよ。ちなみに主観的な意見であるが、(1) と (2) はきれいな答えにはならない。

- (1) $\iint_D (x^3 - y^2) dx dy,$
 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}$
- (2) $\iint_D \sqrt{x+y} dx dy,$
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (3) $\iint_D \cos(x-y) dx dy,$
 $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

問 25-02

半径が a の 3 次元半球領域 A は次式で定義される。

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$$

この A の体積 V を 2 重積分として表せ。具体的な計算はしなくてよい。ここで $a > 0$ とする。

問 25-03

次の 2 重積分を求めよ。やはり主観的な意見であるが、(1) と (3) はきれいな答えにはならない。

- (1) $\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^x (x+2y) dy \right\} dx$
- (2) $\int_1^2 \left\{ \int_{y-1}^{y+1} (2x+y) dx \right\} dy$
- (3) $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dx dy,$
 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$

ヒント：(3) では一回目の積分で $\arctan$ が出てくる。

後期 25 [2025/12/04]

締め切り = [2025/12/11]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 25-01 解答

次式参照。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \iint_D (x^3 - y^2) dx dy &= \int_1^2 \left\{ \int_3^4 (x^3 - y^2) dy \right\} dx \\
 &= \int_1^2 \left[x^3 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=3}^{y=4} dx \\
 &= \int_1^2 \left\{ \left(4x^3 - \frac{64}{3} \right) - \left(3x^3 - \frac{27}{3} \right) \right\} dx \\
 &= \int_1^2 \left(x^3 - \frac{37}{3} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{37}{3} x \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{16}{4} - \frac{74}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{37}{3} \right) \\
 &= 4 - \frac{1}{4} - \frac{37}{3} = -\frac{103}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \iint_D (x+y)^{\frac{1}{2}} dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}} dx \right\} dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} (x+y)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 \left((1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\
 &= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} (1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15} \left[(1+y)^{\frac{5}{2}} - y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{15} \left\{ \left(2^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right) - \left(1^{\frac{5}{2}} - 0 \right) \right\} \\
 &= \frac{4}{15} (4\sqrt{2} - 1 - 1) = \frac{8(2\sqrt{2} - 1)}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \iint_D \cos(x-y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) dx \right\} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x-y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(-y) \right\} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \sin y) dy \\
 &= [\sin y - \cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1 - 0) - (0 - 1) = 2
 \end{aligned}$$

問 25-02 解答

領域 A は xy 平面上の円領域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ の上にある曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ と xy 平面 ($z = 0$) で囲まれた立体である。よって、体積 V は以下のように表される。

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

問 25-03 解答

(1) 次式参照。

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 [xy + y^2]_{y=x^2}^{y=x} dx &= \int_0^1 \{(x^2 + x^2) - (x^3 + x^4)\} dx \\
 &= \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{40 - 15 - 12}{60} = \frac{13}{60}
 \end{aligned}$$

(2) まず内側の積分 (x について) を計算する。

$$\begin{aligned}
 \int_{y-1}^{y+1} (2x+y) dx &= [x^2 + xy]_{x=y-1}^{x=y+1} \\
 &= \{(y+1)^2 + (y+1)y\} - \{(y-1)^2 + (y-1)y\} \\
 &= (y^2 + 2y + 1 + y^2 + y) - (y^2 - 2y + 1 + y^2 - y) \\
 &= (2y^2 + 3y + 1) - (2y^2 - 3y + 1) = 6y
 \end{aligned}$$

これを外側の積分 (y について) に代入する。

$$\int_1^2 6y dy = [3y^2]_1^2 = 3(4 - 1) = 9$$

(3) 指定された領域 D に従い、累次積分を行う。 $\frac{1}{x^2+y^2}$ の y 積分が $\arctan$ を用いる形になることに注目する。

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &= \int_1^2 \left\{ \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2} dy \right\} dx \\
 &= \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{x} (\arctan(1) - \arctan(0)) dx \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{4} dx = \frac{\pi}{4} [\log |x|]_1^2 = \frac{\pi}{4} (\log 2 - \log 1) = \frac{\pi \log 2}{4}
 \end{aligned}$$

後期 26 [2025/12/11]

締め切り = [2025/12/18]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 26-01

次の 2 重積分についての等式が成り立つような数または数式 A, B を求めよ。

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left\{ \int_{y^2}^2 f(x, y) dx \right\} dy = \int_0^A \left\{ \int_0^B f(x, y) dy \right\} dx$$

問 26-02

次の 2 重積分の順序を変更せよ。

$$(1) \int_0^1 \left\{ \int_y^1 f(x, y) dx \right\} dy$$

$$(2) \int_0^2 \left\{ \int_{x^2}^4 f(x, y) dy \right\} dx$$

$$(3) \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right\} dx \quad (a > 0)$$

問 26-03

次の 2 つの積分の和を、積分の順序を変更して 1 つの積分にまとめよ。

$$V = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y) dx dy$$

問 26-04

極座標変換による 2 重積分を用いて、次の積分を求めよ。積分領域を変数 (r, θ) を用いて表すこと。 a は正の実数とする。

$$(1) \iint_D 1 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

後期 26 [2025/12/11]

問 26-01 解答

この積分の領域は $y = \sqrt{x}$ と x 軸と $x = 2$ の線で囲まれた領域である。すなわち $x = 0 \rightarrow 2$, $y = 0 \rightarrow \sqrt{x}$ であるから、 $A = 2, B = \sqrt{x}$ となる。

問 26-02 解答

次の2重積分の順序を変更せよ。

(1) 正解: $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$

この領域は $0 \leq x \leq 1$ かつ $0 \leq y \leq x$ と書き換えることができる。

(2) 正解: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$

y の範囲は 0 から 4 までとなり、その各 y に対して x は 0 から $\sqrt{y}$ まで動く。

(3) 正解: $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy$

この領域は半径 a の円の4分の1の扇形であり、 x と y の入れ替わりについて対称なので、 $x \rightarrow y$ となる。

問 26-03

次の2つの積分の和を、積分の順序を変更して1つの積分にまとめよ。

$$V = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y) dx dy$$

正解は $\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx$ 。元の領域は y 軸と折れ線 $x = y, x = 2 - y$ に囲まれた三角形 $(0, 0), (1, 1), (0, 2)$ である。よって $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $x \leq y \leq 2 - x$ となる。

問 26-04

極座標変換による2重積分を用いて、次の積分を求めよ。積分領域を変数 (r, θ) を用いて表すこと。 a は正の実数とする。

(1) $\iint_D 1 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

$$= \int_{r=0}^{r=a} \int_0^{2\pi} 1 \cdot r d\theta dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \pi a^2$$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$= \int_{r=0}^{r=1} \int_0^{2\pi} r^4 \cdot r d\theta dr = 2\pi \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

後期 27 [2025/12/18]

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学习用であり、提出不要。

問 27-01

平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ と、3 枚の座標平面 (xy , yz , xz 平面) で囲まれた領域の体積を求めよ。 a , b , c はすべて正の実定数とする。

問 27-02

曲面 $z = x^2$ と、平面 $x + y = a$ と、3 枚の座標平面 (xy , yz , xz 平面) で囲まれた領域の体積を求めよ。 a は正の実定数とする。

問 27-03

円柱 $y^2 + z^2 \leq a^2$ から、別の円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ がくり抜く部分の体積を求めよ。 a は正の実定数とする。

問 27-04

領域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ と、別の領域 $x^2 + y^2 \leq x$ の共通部分の体積を求めよ。

後期 27 [2025/12/18]

締め切り=なし（冬休み課題があるため）。自主学習用であり、提出不要。

問 27-01

平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ と、3枚の座標平面（ xy , yz , xz 平面）で囲まれた領域の体積を求めよ。 a , b , c はすべて正の実定数とする。

問 27-02

曲面 $z = x^2$ と、平面 $x + y = a$ と、3枚の座標平面（ xy , yz , xz 平面）で囲まれた領域の体積を求めよ。 a は正の実定数とする。

問 27-03

円柱 $y^2 + z^2 \leq a^2$ から、別の円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ がくり抜く部分の体積を求めよ。 a は正の実定数とする。

問 27-04

領域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ と、別の領域 $x^2 + y^2 \leq x$ の共通部分の体積を求めよ。

問 27-01 解答

積分領域 D は、 xy 平面上において x 軸、 y 軸、および直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ で囲まれた三角形である。したがって積分領域は $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})\}$ とおける。領域の高さは $z = c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})$ であるから、体積 V は以下のようになる。

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dx dy \\ &= c \int_0^a \left[y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b} \right]_0^{b(1-x/a)} dx \\ &= c \int_0^a \left(b(1 - \frac{x}{a}) - \frac{bx}{a}(1 - \frac{x}{a}) - \frac{b}{2}(1 - \frac{x}{a})^2 \right) dx \\ &= bc \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx \\ &= \frac{bc}{2} \left[-\frac{a}{3} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right]_0^a = \frac{1}{6} abc \end{aligned}$$

問 27-02 解答

xy 平面における積分領域は $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$ である。高さは $z = x^2$ であるから、体積 V は以下のようになる。

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} x^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^a x^2 [y]_0^{a-x} dx = \int_0^a (ax^2 - x^3) dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^a = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{1}{12} a^4 \end{aligned}$$

問 27-03 解答

求める領域は、 xy 平面上の円盤 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ の上で、 $-\sqrt{a^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ の範囲にある。対称性（第1象限の8倍）を利用すると

$$V = 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dy \right) dx$$

ここで積分順序を交換する。 y で先に積分するよりも、 x で先に積分する方が計算が容易になる。 D を y 軸に関する領域 $0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ と見なすと、体積は次式のよう

に計算できる。

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dx \right) dy \\ &= 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - y^2) dy = 8 \left[a^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^a = \frac{16}{3} a^3 \end{aligned}$$

問 27-04 解答

領域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ と、別の領域 $x^2 + y^2 \leq x$ に関して、まず2番目の積分領域を D とすると、これは xy 平面上の円 $(x - 1/2)^2 + y^2 \leq (1/2)^2$ である。極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ に変換すると、領域 D は $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \cos \theta$ と表される。一方で、1番目の領域より、高さは

$z = \pm\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \pm\sqrt{1 - r^2}$ なので、上下の対称性から、体積は次式のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos \theta} r \sqrt{1 - r^2} dr \right) d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (1 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \left([\theta]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi - \frac{8}{9} \end{aligned}$$

後期 28 [2025/12/25]

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学习用であり、提出不要。

問 28-01

次の広義積分の値を求めよ。

- (1) $\iint_D \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy,$
 $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}$
- (2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

問 28-02

以下の積分領域における2重積分を考える。

$$D_R = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \} \quad (R > 0),$$

$$V_R(a) = \iint_{D_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dx dy \quad (a > 1)$$

ここで $a > 1$ は実数とする。

- (1) $V_R(a)$ を求めよ。
- (2) 極限值 $\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a)$ を求めよ。
- (3) おまけ。 $a = 1$ および $0 < a < 1$ の場合にはどうなるか考えてみよ。

問 28-03

以下の広義積分を考える。ただし $k > 0$ とする。

$$I_0(k) = \int_0^\infty e^{-kx^2} dx,$$

$$I_1(k) = \int_0^\infty x e^{-kx^2} dx$$

$\vdots$

$$I_n(k) = \int_0^\infty x^n e^{-kx^2} dx \quad (n > 0)$$

- (1) $I_1(k)$ を求めよ。
- (2) $[I_0(k)]^2$ を計算することで、 $I_0(k)$ を求めよ。
- (3) $I_0(k)$ および $I_1(k)$ を k について微分することで、 $I_2(k)$ および $I_3(k)$ を求めよ。符号に注意。

後期 28 [2025/12/25]

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学習用であり、提出不要。

問 28-01

次の広義積分の値を求めよ。

- (1) $\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy,$
 $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}$
- (2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

問 28-02

以下の積分領域における2重積分を考える。

$$D_R = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \} \quad (R > 0),$$

$$V_R(a) = \iint_{D_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dx dy \quad (a > 1)$$

ここで $a > 1$ は実数とする。

- (1) $V_R(a)$ を求めよ。
- (2) 極限值 $\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a)$ を求めよ。
- (3) おまけ。 $a = 1$ および $0 < a < 1$ の場合にはどうなるか考えてみよ。

問 28-03

以下の広義積分を考える。ただし $k > 0$ とする。

$$I_0(k) = \int_0^\infty e^{-kx^2} dx,$$

$$I_1(k) = \int_0^\infty x e^{-kx^2} dx$$

$\vdots$

$$I_n(k) = \int_0^\infty x^n e^{-kx^2} dx \quad (n > 0)$$

- (1) $I_1(k)$ を求めよ。
- (2) $[I_0(k)]^2$ を計算することで、 $I_0(k)$ を求めよ。
- (3) $I_0(k)$ および $I_1(k)$ を k について微分することで、 $I_2(k)$ および $I_3(k)$ を求めよ。符号に注意。

解答・問 28-01

どちらの小問でも積分領域 D が円の一部分であるため、極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いる。ヤコビアンは $|J(r, \theta)| = r$ となる。

(1) $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}$ より、極座標における領域は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である。

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{r^3} dr = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [r]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ より、極座標における領域は $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ である。

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

ここで $\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = -\sqrt{1-r^2}$ より、

$$= 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi \cdot (0 - (-1)) = 2\pi$$

解答・問 28-02

(1) $V_R(a)$ を求める ($a > 1$)。極座標変換により $1 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ となる。積分領域は $D_R = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ であるから

$$\begin{aligned} V_R(a) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^R \frac{1}{(r^2)^a} \cdot r dr = 2\pi \int_1^R r^{1-2a} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^{2-2a}}{2-2a} \right]_1^R = \frac{\pi}{a-1} (1 - R^{2-2a}) \end{aligned}$$

(2) 極限值 $\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a)$ を求める。 $a > 1$ より $2-2a < 0$ である。したがって $R \rightarrow \infty$ のとき $R^{2-2a} \rightarrow 0$ となる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a) = \frac{\pi}{a-1}$$

(3) まず $a = 1$ のときは $V_R(a=1) = \int_1^R \frac{1}{r} dr = \ln R \rightarrow \infty$ となり、 $\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a)$ は発散する。

次に $0 < a < 1$ のとき、 $V_R(a)$ は (1) と同じ式になるが、 $2-2a > 0$ なので $R^{2-2a} \rightarrow \infty$ となり、 $\lim_{R \rightarrow \infty} V_R(a)$ は発散する。

解答・問 28-03

(1) $I_1(k) = \int_0^\infty x e^{-kx^2} dx$ を求める。 $u = -kx^2$ と置換すると $du = -2kx dx$ より、

$$I_1(k) = \left[-\frac{1}{2k} e^{-kx^2} \right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2k}$$

と求まる。

(2) $I_0(k) = \int_0^\infty e^{-kx^2} dx$ を求める。これ自身の2乗は

$$\begin{aligned} [I_0(k)]^2 &= \int_0^\infty e^{-kx^2} dx \int_0^\infty e^{-ky^2} dy \\ &= \iint_{x,y \geq 0} e^{-k(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

ここで極座標変換 ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi/2$) を用いる。

$$\begin{aligned} [I_0(k)]^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-kr^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2k} e^{-kr^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{4k} \end{aligned}$$

被積分関数 e^{-kx^2} の正値性から $I_0(k) > 0$ なので、

$$I_0(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

と求まる。

(3) $I_n(k)$ の導出。

$n = 2$ の場合： $I_0(k)$ を k で微分する。

$$\frac{d}{dk} \int_0^\infty e^{-kx^2} dx = \int_0^\infty -x^2 e^{-kx^2} dx = -I_2(k)$$

一方で $\frac{d}{dk}(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}k^{-1/2}) = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi}k^{-3/2}$ なので、 $I_2(k) = \frac{1}{4k}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ となる。

$n = 3$ の場合： $I_1(k)$ を k で微分する。

$$\frac{d}{dk} \int_0^\infty x e^{-kx^2} dx = \int_0^\infty -x^3 e^{-kx^2} dx = -I_3(k)$$

一方で $\frac{d}{dk}(\frac{1}{2}k^{-1}) = -\frac{1}{2}k^{-2}$ であるから、 $I_3(k) = \frac{1}{2k^2}$ となる。

後期 29 [2026/01/08]

問 29-01 方程式 $e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0$ について、点 $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

問 29-02 曲線 $x \cos y + y \sin x = 0$ について、点 $(0, 0)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

問 29-03 改 次の2重積分を求めよ。

$$\iint_D \sin(x+y) \, dx dy,$$
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

問 29-04 改 ある工場の生産量 $f(K, L)$ は資本 K と労働力 L によって $f(K, L) = K^{2/5} L^{3/5}$ で与えられる。総予算は $C = 30$ であり、資本の単価が2、労働力の単価が3である。すなわち制約条件は $2K + 3L = 30$ となる。ラグランジュの未定乗数を λ とし、ラグランジュの未定乗数法を用いて、制約条件のもとで生産量 $f(K, L)$ を最大にする (K, L) の値を求めよ。

解答

[2026/01/06]Gemini ちゃんに作ってもらった。
問 29-01 解答（陰関数の存在と微分係数） 方程式

$$e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0$$

について、点 $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに、微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

$$F(x, y) = e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0 \text{ と置くと、}$$
$$F(1, 1) = e^0 + \sin 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

である。また、各変数の偏導関数は以下の通りとなる。
 $F_x(x, y) = e^{x-y} + \cos(x-y)$ および $F_y(x, y) = -e^{x-y} - \cos(x-y)$ 。
点 $(1, 1)$ において $F_y(1, 1) = -e^0 - \cos 0 = -1 - 1 = -2 \neq 0$ なので、陰関数定理により $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在する。
微分係数は、 $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{2}{-2} = 1$ である。

問 29-02 解答（接線と法線の方程式）以下の曲線について、与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

$$F(x, y) = x \cos y + y \sin x \text{ とすると、}$$
$$F_x = \cos y + y \cos x, \quad F_y = -x \sin y + \sin x$$

点 $(0, 0)$ では $F_x = 1, F_y = 0$ 。
接線： $1(x - 0) + 0(y - 0) = 0 \implies x = 0$ 。
法線： $0(x - 0) - 1(y - 0) = 0 \implies y = 0$ 。

問 29-03 改解答（長方形領域の2重積分）次式参照。
Gemini ちゃん式。

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos(y) \right\} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y + \cos y) dy \\ &= [-\cos y + \sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0 - 1) + (1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

おれ式。

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin x \cos y + \cos x \sin y\} dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s ds \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= 2 [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1 - 0)(-(0 - 1)) = 2 \end{aligned}$$

問 29-04 改解答（生産量の最大化）ある工場の生産量 $f(K, L)$ は資本 K と労働力 L によって $f(K, L) = K^{2/5} L^{3/5}$ で与えられる。総予算は $C = 30$ であり、資本の単価が 2、労働力の単価が 3 である。すなわち制約条件は $2K + 3L = 30$ となる。ラグランジュの未定乗数を λ とし、ラグランジュの未定乗数法を用いて、制約条件のもとで生産量 $f(K, L)$ を最大にする (K, L) の値を求めよ。

解答：ラグランジュ関数は

$$Z(K, L) = K^{2/5} L^{3/5} - \lambda [2K + 3L - 30]$$

偏導関数を計算すると以下の通り。

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{2}{5} K^{-3/5} L^{3/5} - 2\lambda$$

および

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{3}{5} K^{2/5} L^{-2/5} - 3\lambda$$

停留点では

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial L} = 0$$

より

$$\lambda = \frac{1}{5} \left(\frac{L}{K} \right)^{3/5}, \quad \lambda = \frac{1}{5} \left(\frac{K}{L} \right)^{2/5}$$

したがって

$$\left(\frac{L}{K} \right)^{3/5} = \left(\frac{K}{L} \right)^{2/5}$$

が導かれる。両辺に $K^{3/5} L^{2/5}$ を掛けると $L = K$ となる。かつ制約条件 $2K + 3L = 30$ から $5K = 30 \implies K = 6$ より、 $(K, L) = (6, 6)$ において $f(K, L)$ は極大値＝最大値をとる。
最大値は $f(6, 6) = 6^{2/5} \cdot 6^{3/5} = 6$ である。このときは $\lambda = \frac{1}{5}$ となる。これは予算が 1 単位増加したときには生産量が約 20% 増加することを意味する（シャドウプライス）。

後期 29 [2026/01/07]

問 29-01 方程式 $e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0$ について、点 $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

問 29-02 曲線 $x \cos y + y \sin x = 0$ について、点 $(0, 0)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

問 29-03 次の 2 重積分を求めよ。

$$\iint_D \cos(x-y) dx dy,$$
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

問 29-04 ある工場の生産量 $f(K, L)$ は資本 K と労働力 L によって $f(K, L) = K^{1/4}L^{3/4}$ で与えられる。総予算は $C = 20$ であり、資本の単価が 1、労働力の単価が 3 である。すなわち制約条件は $K + 3L = 20$ となる。ラグランジュの未定乗数を λ とし、関数 $Z(K, L) = f(K, L) - \lambda(K + 3L - 20)$ を定義する。ラグランジュの未定乗数法を用いて、予算制約のもとで生産量 $f(K, L)$ を最大にする (K, L) の値を求めよ。

草案

[2026/01/06]Gemini ちゃんに作ってもらった。

問 1（陰関数の存在と微分係数）方程式

$$e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0$$

について、点 $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。さらに、微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

問 1 解答 $F(x, y) = e^{x-y} + \sin(x-y) - 1 = 0$ と置くと、 $F(1, 1) = e^0 + \sin 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$ である 2。また、各変数の偏導関数は以下の通りとなる。 $F_x(x, y) = e^{x-y} + \cos(x-y)$ $F_y(x, y) = -e^{x-y} - \cos(x-y)$ 点 $(1, 1)$ において、 $F_y(1, 1) = -e^0 - \cos 0 = -1 - 1 = -2 \neq 0$ なので、陰関数定理により $(1, 1)$ の近傍で陰関数 $y = f(x)$ が存在する 3。微分係数は、 $f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{2}{-2} = 1$ である。

問 2(接線と法線の方程式)以下の曲線について、与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。曲線 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 、点 $(1, 2)$ 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ 、点 $(4, 1)$ 曲線 $x \cos y + y \sin x = 0$ 、点 $(0, 0)$

問 2 解答接線の方程式は $F_x(a, b)(x-a)+F_y(a, b)(y-b) = 0$ 、法線の方程式は $F_y(a, b)(x-a) - F_x(a, b)(y-b) = 0$ を用いる。

(1) $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7$ とすると、 $F_x = 2x + y, F_y = x + 2y$ 6。点 $(1, 2)$ では $F_x = 4, F_y = 5$ 。接線: $4(x-1) + 5(y-2) = 0 \implies 4x + 5y - 14 = 0$ 7 法線: $5(x-1) - 4(y-2) = 0 \implies 5x - 4y + 3 = 0$

(2) $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 3$ とすると、 $F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ 9。点 $(4, 1)$ では $F_x = \frac{1}{4}, F_y = \frac{1}{2}$ 。接線: $\frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}(y-1) = 0 \implies x + 2y - 6 = 0$ 法線: $\frac{1}{2}(x-4) - \frac{1}{4}(y-1) = 0 \implies 2x - y - 7 = 0$

(3) $F(x, y) = x \cos y + y \sin x$ とすると、 $F_x = \cos y + y \cos x, F_y = -x \sin y + \sin x$ 。点 $(0, 0)$ では $F_x = 1, F_y = 0$ 。接線: $1(x-0) + 0(y-0) = 0 \implies x = 0$ 。法線: $0(x-0) - 1(y-0) = 0 \implies y = 0$ 。

問 3（条件付き極値問題：方程式系）制約条件 $g(x, y) = x + 2y - 5 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = xy^2$ の極値を求めたい。ラグランジュの未定乗数法を用いた場合の、停留点における x, y および λ （ラグランジュの未定乗数）が満たすべき方程式系を答えよ。

問 3 解答 $Z(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy^2 - \lambda(x + 2y - 5)$ と置く 15。停留点では $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$ が成り立つので、求める方程式系は以下の通り 16。

$$\begin{cases} y^2 - \lambda = 0 \\ 2xy - 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

問 4（生産量の最大化：応用問題）ある工場の生産量 $f(K, L)$ が、資本 K と労働力 L によって $f(K, L) = K^{1/4}L^{3/4}$ で与えられているとする。総予算が $C = 20$ であり、資本の単価が 1、労働力の単価が 3 であるとする（すなわち、制約条件は $K + 3L = 20$ となる）。ラグランジュの未定乗数を λ とし、関数 $Z(K, L) = f(K, L) - \lambda(K + 3L - 20)$ を定義する。偏導関数 $\frac{\partial Z}{\partial K}$ および $\frac{\partial Z}{\partial L}$ を求めよ。ラグランジュの未定乗数法を用いて、予算制約のもとで生産量 $f(K, L)$ を最大にする K と L 、およびその最大値を求めよ。このときのラグランジュの未定乗数 λ の値を求めよ。

問 4 解答 (1) 偏導関数を計算すると以下の通り。 $\frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{1}{4}K^{-3/4}L^{3/4} - \lambda \frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{3}{4}K^{1/4}L^{-1/4} - 3\lambda$

(2) 停留点では $\frac{\partial Z}{\partial K} = 0, \frac{\partial Z}{\partial L} = 0$ より、 $\lambda = \frac{1}{4}(\frac{L}{K})^{3/4}$ および $3\lambda = \frac{3}{4}(\frac{K}{L})^{1/4}$ 。これより $\frac{1}{4}(\frac{K}{L})^{1/4} = \lambda$ となり、 $\frac{1}{4}(\frac{L}{K})^{3/4} = \frac{1}{4}(\frac{K}{L})^{1/4}$ が導かれる。両辺に $4K^{3/4}L^{1/4}$ を掛けると $L = K$ となる。制約条件 $K + 3L = 20$ に代入すると、 $4K = 20 \implies K = 5, L = 5$ 。最大値は $f(5, 5) = 5^{1/4} \cdot 5^{3/4} = 5$ である。

(3) $K = 5, L = 5$ を $\lambda = \frac{1}{4}(\frac{L}{K})^{3/4}$ に代入すると、 $\lambda = \frac{1}{4}(1)^{3/4} = \frac{1}{4}$ となる。これは、予算が 1 単位増加したときに生産量が約 0.25 増加することを意味する（シャドウプライス） 22。

作成のポイント

問 1: 指数関数と三角関数を組み合わせ、計算のプロセス ($F(a, b) = 0$ の確認と $F_y \neq 0$ の確認) を重視しました。

問 2: 多項式、無理関数、超越関数の 3 パターンを用意し、偏微分の練習になるようにしています。

問 3: 添付資料の「方程式系を答える」というステップを重視し、計算ミスを防ぐための論理構成を確認させる意図です。

問 4: 経済学でよく使われる「コブ＝ダグラス型生産関数」を採用しました。指数部分の和を 1 に設定しているため、計算も比較的スムーズに進むはずです。こちらの問題の解答作成や、さらに踏み込んだ解説が必要な場合は、いつでもお知らせください。

問 29-03 解答

次式参照。

$$\begin{aligned} (3) \quad \iint_D \cos(x-y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x-y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(-y) \right\} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \sin y) dy \\ &= [\sin y - \cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1 - 0) - (0 - 1) = 2 \end{aligned}$$

後期 30 [2026/01/14]

問 30-01 以下の積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, -x \leq y \leq x\}$$

問 30-04 以下の積分に変数変換 $x = s + t$, $y = st$ を行い、 s と t の重積分に変換せよ（実行はしないでも良い）。

$$V = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4y}} dy dx, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2 - 1}{2} \leq y \leq 0 \right\}$$

問 30-02 以下の積分を求めよ。ここで積分領域 D は直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域とする。

$$V = \iint_D 2xy dx dy,$$

問 30-05 改 以下の広義積分を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$$

問 30-03 積分順序を変更して以下の積分を求めよ。

$$V = \int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{-y^2/2} dy \right\} dx$$

解答

問 30-01 以下の積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, -x \leq y \leq x\}$$

解答：指定された領域 D に従い、累次積分を行う。 $\frac{1}{x^2+y^2}$ の y 積分が $\arctan$ を用いる形になることに注目する。

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_1^e \left\{ \int_{-x}^x \frac{1}{x^2 + y^2} dy \right\} dx \\ &= \int_1^e \left[\frac{1}{x} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{y=-x}^{y=x} dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} [\arctan(1) - \arctan(-1)] dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} [\log |x|]_1^e = \frac{\pi}{2} (\log e - \log 1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

問 30-02 以下の積分を求めよ。ここで積分領域 D は直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域とする。

$$V = \iint_D 2xy dx dy,$$

解答：

$$\begin{aligned} \iint_D 2xy dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} 2xy dy \right\} dx = \int_0^1 [xy^2]_x^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 [x^2 - x^3] = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

問 30-03 積分順序を変更して以下の積分を求めよ。

$$V = \int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{-y^2/2} dy \right\} dx$$

解答：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{-y^2/2} dy \right\} dx &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y e^{-y^2/2} dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 ye^{-y^2/2} dy = \left[-e^{-y^2/2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

問 30-04 以下の積分に変数変換 $x = s + t$, $y = st$ を行い、 s と t の重積分に変換せよ（実行はしないで良い）。

$$V = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4y}} dy dx, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2 - 1}{2} \leq y \leq 0 \right\}$$

解答：ヤコビアンと被積分関数を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} = s - t, \\ \sqrt{x^2 - 4y} &= \sqrt{s^2 + t^2 - 2st} = \sqrt{(s - t)^2} = (s - t), \end{aligned}$$

したがって $D: x^2 - 2y \leq 1 \rightarrow s^2 + t^2 \leq 1$ および $y = st \leq 0$ より

$$V = \iint_{D'(s, t)} ds dt, \quad D' = \{(s, t) \mid s^2 + t^2 \leq 1, st \leq 0\}$$

問 30-05 改 以下の広義積分を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$$

後期 31 [2026/01/22]

問 31-01 曲面 $z = x^2$ 、平面 $x + y = 1$ 、 xy 平面、 yz 平面、および xz 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ。

問 31-03 円柱領域 $y^2 + z^2 \leq 1$ と、別の円柱領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ の共通部分の体積を求めよ。

問 31-02 xyz 空間内で $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ かつ $x^2 + y^2 \leq a^2$ を満たす領域の体積を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

問 31-04 以下の広義積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

解答・後期 31 [2026/01/22]

問 31-01 曲面 $z = x^2$ 、平面 $x + y = 1$ 、 xy 平面、 yz 平面、および xz 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ。

問 31-01 解答 積分領域 D は xy 平面上の三角形であり、 $0 \leq x \leq 1$ かつ $0 \leq y \leq 1 - x$ と定義されます。したがって

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [x^2 y]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求められます。

問 31-02 xyz 空間内で $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ かつ $x^2 + y^2 \leq a^2$ を満たす領域の体積を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

問 31-02 解答 極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用います。ヤコビアンは $J(r, \theta) = r$ です。領域 D は $0 \leq r \leq a$ かつ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ となります。したがって

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r^3 dr = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

と求められます。

問 31-03 円柱領域 $y^2 + z^2 \leq 1$ と、別の円柱領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ の共通部分の体積を求めよ。

問 31-03 解答 対称性より、第1象限 $(x, y, z \geq 0)$ の体積を求め、それを8倍します。 $x^2 + y^2 \leq 1$ より、積分領域 D は xy 平面上の単位円の第1象限部分、高さ z は $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}$ と決まっているので

$$V = 8 \iint_D \sqrt{1 - x^2} dx dy$$

ここで $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ より

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 [\sqrt{1-x^2} y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= 8 \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 8 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

と求められます。

問 31-04 以下の広義積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

問 31-04 解答 分母が $x^2 + y^2 = 9$ (境界線上) で0になるため、広義積分として計算します。極座標変換を行い、半径 r を3に近づける極限を考えます。

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-r^2}} r dr d\theta$$

ここで $u = 9 - r^2$ と置換すると $du = -2r dr$ なので

$$\int \frac{r}{\sqrt{9-r^2}} dr = -\sqrt{9-r^2}$$

したがって $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$ は処分でできて

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[-\sqrt{9-r^2} \right]_{r=0}^{r=3} = 2\pi \cdot [0 - (-\sqrt{9})] = 6\pi$$

と求められます。