

<9/24, 水, 2025> 3-I 解析学 [17] 用ノート (後期最初)

本日 → 2変数関数とその連続性 (テキスト p. 174 ~ ~~180~~ 181)

2変数関数

~~関数~~ $z = f(x, y)$ あるいは $z = z(x, y)$

、 (x, y) の範囲 = 定義域

、 z のとり得る範囲 = 値域 かつ有限値

※ 明記されていない場合、 z が実数^(有限)となる

(x, y) の最大範囲を定義域とする。

※ $z(x, y)$ は原則として実数^(有限)のみ。

例 = 問 5.1

(1) $z = xy$ $\begin{cases} \text{定義域} = \text{all } xy \\ \text{値域} = \text{実数全体} \end{cases}$ (2) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ $\begin{cases} \text{" } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{" } z > 0 \end{cases}$

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ $\begin{cases} \text{定義域 } x^2 + y^2 \geq 1 \\ \text{値域 } z \geq 0 \end{cases}$

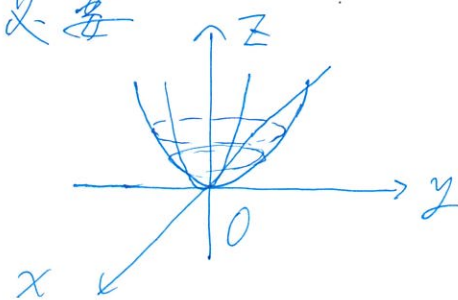
2変数関数のグラフ (p. 175)

→ 詳細は省略。各自でテキストを読め。

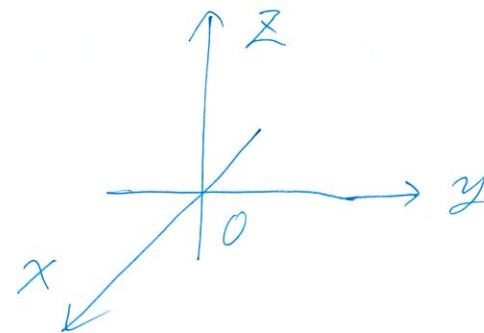
→ 概略だけ。 $z = z(x, y)$ をプロットする以上、

3次元 (x, y, z) 空間が必要

例: $z = x^2 + y^2$



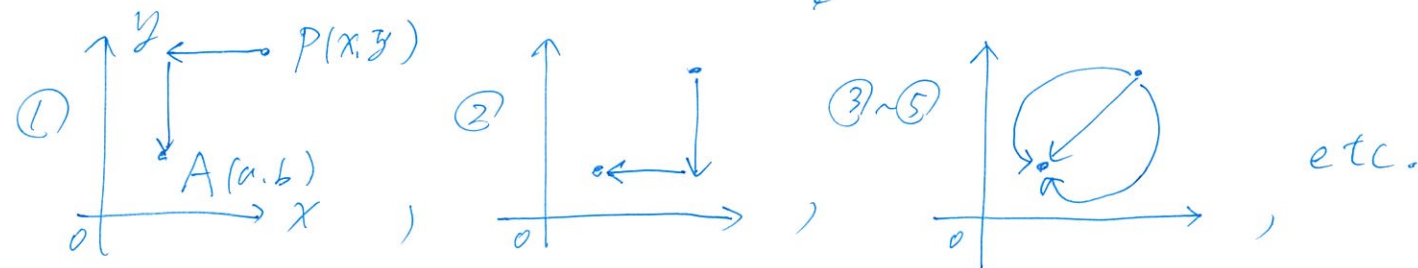
まずは右図を描けること。
(リレポート)



2変数関数の極限值

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \alpha$ or $f(x,y) \rightarrow \alpha, \{(x,y) \rightarrow (a,b)\}$

ただし、1変数関数と異なり、色々な $\lim$ のとり方がある。



$\lim$ のとり方に依らず、極限值 α が定まらなれば、 $f(x, y)$ は α に“収束”する。($(x, y) \rightarrow (a, b)$ で。)

極限の性質 (p. 177)

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \alpha$ および $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = \beta$ のとき、

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [kf(x,y)] = k\alpha$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \alpha \pm \beta$

(続く)

(続き) (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = \alpha \cdot \beta$

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\alpha}{\beta}$

例 = 例題 5.2, (2) & (3) $\rightarrow$ とてをややしい...

(2) $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ は $(x,y) \rightarrow (0,0)$ に対して収束するか?

$\rightarrow$ 原点 $(0,0)$ で定義されない。しかし $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ をとると、

$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} = r \cos^3 \theta$,

$|\cos \theta| \leq 1$ より、 $0 \leq |f(x,y)| = r |\cos^3 \theta| \leq r$ 、また、

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $r \rightarrow 0$ なのだから、 θ のとり方によらず、

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^3}{x^2+y^2} \right] = 0$ の極限値に収束する。

(3) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ は $(x,y) \rightarrow (0,0)$ に対して ~ ?

(i) 曲線 $y = x^2$ について $\lim$ をとると、

$f(x, x^2) = \frac{x^2+x^4}{x^2} = 1+x^2 \rightarrow 1 \quad ((x,y) \rightarrow (0,0))$

(ii) 曲線 $y = 2x^2$ について $\lim$ をとると、

$f(x, 2x^2) = \frac{x^2+4x^4}{2x^2} = \frac{1}{2} + 2x^2 \rightarrow \frac{1}{2} \quad (")$

従って、近付き方によって異なる値に近付くので、

収束しない。= 一意の極限値を持たない。

2変数関数の連続性 (p.179)

点 $(a,b) \in$ 定義域 D について、

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ という極限値が存在。
||
連続である。

2つの $f(x,y)$ と $g(x,y)$ が点 (a,b) で連続ならば、

$f(x,y) \pm g(x,y)$

$f(x,y) \cdot g(x,y)$, $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad (g(a,b) \neq 0)$

これらも (a,b) で連続である。

$x^n, e^x, \log x, \sin x, \cos x$, 分数関数, 無理関数
など組める関数はすべて連続。

原点での連続性 (p.180)

$f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で定義されない場合、極限が一意に定まるかを吟味する必要がある。

例 = 例題 5.3, (3) (p.180)

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & [(x,y) \neq (0,0)] \\ 0 & [(x,y) = (0,0)] \end{cases}$ これは原点で連続か?
 $\rightarrow$ No.

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ を用いると、 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$, よって、
(近づく値が異なり、収束しない。)

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ をとると、 θ の値によって $\rightarrow$ 連続ではない。

例 = 問 5.4 (p. 181)

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x \neq 0, y \neq 0) \\ 0 & (x = 0, y = 0) \end{cases}$$

原点 (0, 0) で
連続ではない。

証明:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 1 - 2 \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \text{を用いると、}$$

$$= 1 - 2 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = 1 - 2 \sin^2 \theta, \quad \text{よって } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ となれば}$$

$r \rightarrow 0$ に対して、 θ によって近づく方が異なる。

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} & (x \neq 0, y \neq 0) \\ 0 & (x = 0, y = 0) \end{cases}$$

原点 (0, 0) で
連続である。

証明:

$$\frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \text{を用いると、}$$

$$= \frac{r^3 (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \cos \theta)}{r^2} = r (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta \sin \theta,$$

これは $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ となれば $r \rightarrow 0$ に対して、どんな θ の値であっても、右辺 $\rightarrow 0$ に収束する。したがって (0, 0) で連続である。

※ r の 1 乗が右辺に残っており、 $r \rightarrow 0$ になる。

例 = 問 5.5 (p. 181)

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & (x \neq 0, y \neq 0) \\ c & (x = 0, y = 0) \end{cases}$$

これが (0, 0) で連続になるように定数 c を定めよ。

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \text{を用いると、} f(x, y) = \sqrt{4 - r^2},$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ (\theta \text{ は任意})}} \left\{ \sqrt{4 - r^2} \right\} \rightarrow 2 \text{ となるので、} \underline{c = 2}$$

偏微分の記法のため、 $f(x, y) = z$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x = z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (\text{p. 183})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y = z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

例: $f(x, y) = x^m + y^n$,
 $f_x = m x^{m-1}, \quad f_y = n y^{n-1}$

$$f(x, y) = \cos(ax + by)$$

$$f_x = a(-\sin(ax + by)), \quad f_y = -b \sin(ax + by)$$

<10/1, 水, 2025> 3-I 解析学 18 ab 用ノート

本日 → 偏微分係数と偏導関数 (p. 182)

2変数関数 $f(x, y)$ の微分 = 2種類ある。

・全微分 → 来週以降に。

・偏微分 → 今週。

偏微分係数の定義 (p. 184, 前回)

$f(x, y)$ がその定義域 D において偏微分可能であるとき、

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \end{cases}$$

をそれぞれ $\begin{cases} x \text{ に関する} \\ y \text{ に関する} \end{cases}$ 偏導関数と呼ぶ。
(という。)

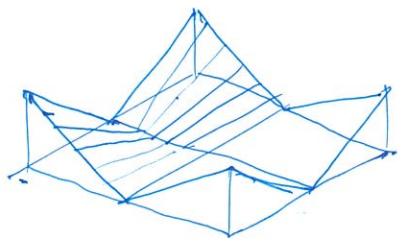
$f(x, y)$ から $f_x(\cdot)$ & $f_y(\cdot)$ を求める手順を偏微分)

偏導関数の連続性

$f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ がともに D で連続であるとき、

$f(x, y)$ は D で C^1 級である、という。

C^1 級ではない例: $f(x, y) = |xy|$



→ $x=0$ と $y=0$ の十字路上
で f_x や f_y が不連続: $1 \rightarrow -1$

記法いろいろ

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{~~これは } f(x, y) \text{ による~~}$$

$$\text{~~これは } \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ による~~} \quad \text{このようにとりあえず OK.}$$

偏微分の計算

$f_x(x, y) \leftarrow f(x, y)$ のうち y を定数と思って、 x について微分。

$f_y(x, y) \leftarrow f(x, y)$ " x を "、 y について微分。

例: $f(x, y) = |xy| = |x| \cdot |y|$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} +|y| & (x \geq 0) \\ -|y| & (x < 0) \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} +|x| & (y \geq 0) \\ -|x| & (y < 0) \end{cases}$$

例その2:

$$f(x, y) = x^3 - 2x^2y + y^2 \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x^2 + 2y \end{aligned}$$

(2)

$$f(x, y) = (x-2y)^3 \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3(x-2y)^2 \cdot \frac{\partial (x-2y)}{\partial x} = 3(x-2y)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3(x-2y)^2 \cdot \frac{\partial (x-2y)}{\partial y} = -6(x-2y)^2 \end{aligned}$$

(3)

$$f(x, y) = \frac{1}{x-y} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -(x-y)^{-2} \cdot \frac{\partial (x-y)}{\partial x} = -(x-y)^{-2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -(x-y)^{-2} \cdot \frac{\partial (x-y)}{\partial y} = +(x-y)^{-2} \end{aligned}$$

偏微分係数 (p. 182)

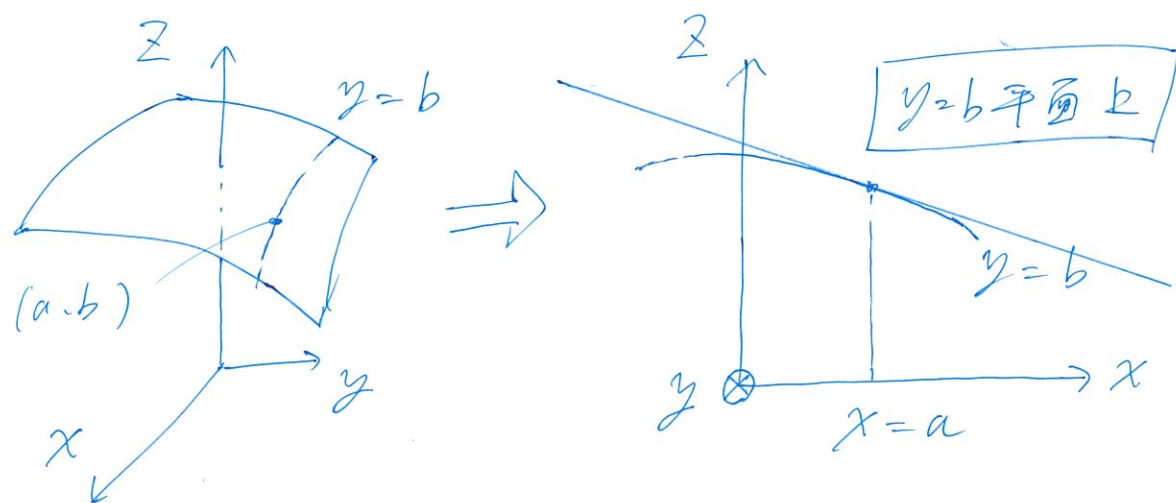
$f_x(x, y)$ や $f_y(x, y)$ の点 (a, b) 上での値を偏微分係数と呼ぶ。

$$f_x(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

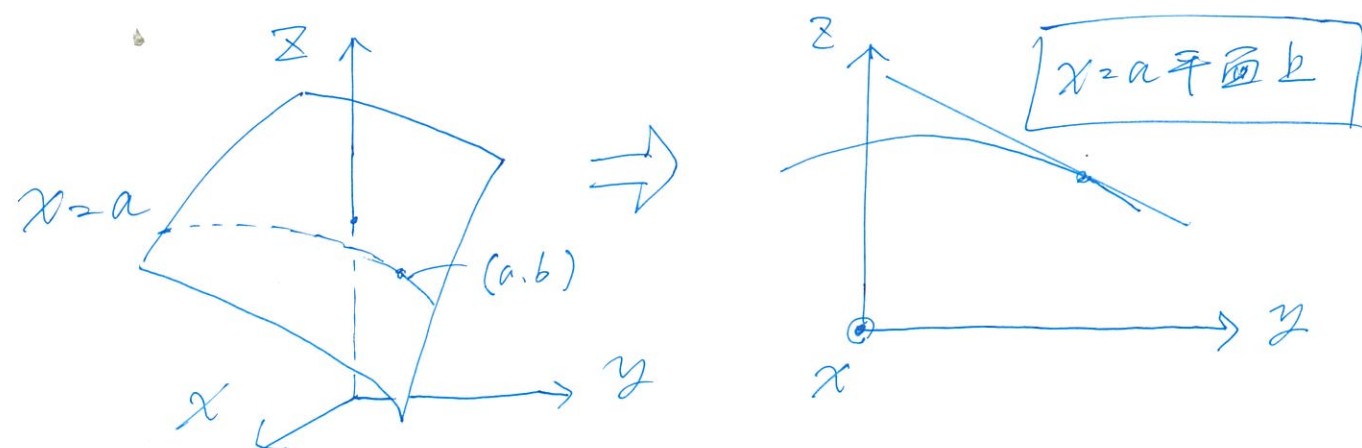
$$f_y(a, b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

偏微分係数の意味

$z = f(x, y)$ の曲線を考える。 $f_x(a, b)$ は、点 (a, b) における、 x 軸 ~~方向の~~ 接線の傾きに等しい。



同様に考えて、 $f_y(a, b)$ は、点 (a, b) における、 y 軸方向の接線の傾きに等しい。



例 = 問 5.6 (p. 184)

以下の ~~f(x, y)~~ $f(x, y)$ の x と y への偏導関数を求めよ。
さらに点 $(1, 0)$ での偏微分係数も求めよ。

(3)

$$f(x, y) = \frac{1}{x-y} \rightarrow f_x(x, y) = \frac{-1}{(x-y)^2}, f_y(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\rightarrow f_x(1, 0) = -1, f_y(1, 0) = 1$$

(4)

$$f(x, y) = e^x \sin y \rightarrow f_x(x, y) = \frac{\partial (e^x)}{\partial x} \cdot \sin y = e^x \sin y$$

$$f_y(x, y) = e^x \frac{\partial (\sin y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\rightarrow f_x(1, 0) = 0, f_y(1, 0) = e$$

合成関数の偏微分 [I] (p. 185)

$$f(x, y) = f(u), u = u(x, y)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

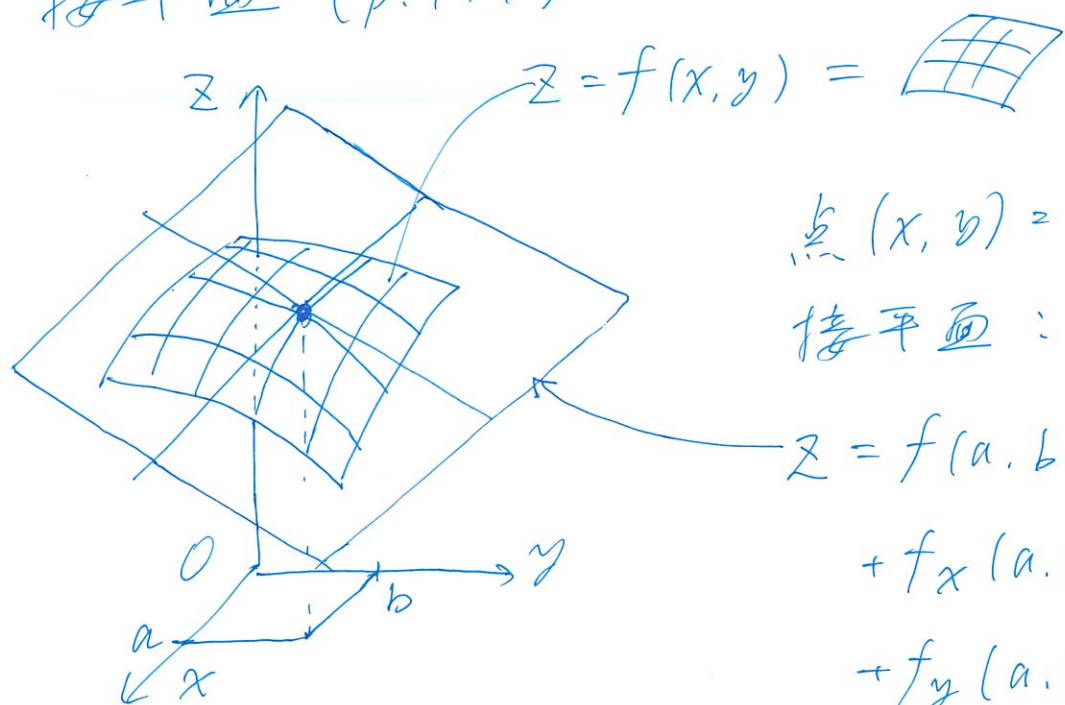
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{例: } f(u) = \frac{1}{u}, u = x - y$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{u^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{u^2} \cdot (-1) = +\frac{1}{(x-y)^2}$$

接平面 (p. 194)



点 $(x, y) = (a, b)$ における

接平面:

$$\begin{aligned} z &= f(a, b) \\ &+ f_x(a, b) \cdot (x - a) \\ &+ f_y(a, b) \cdot (y - b) \end{aligned}$$

接平面の方程式を変形:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b) - (z - f(a, b)) \\ &= \vec{n}(a, b) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{n}(a, b) \equiv (f_x(a, b), f_y(a, b), -1) \\ \vec{p}(a, b) \equiv (x - a, y - b, z - f(a, b)) \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{n}(a, b) \cdot \vec{p}(a, b) = 0 \quad \text{と表せる。}$$

ここで $\vec{n}(a, b)$ は点 (a, b) における法線ベクトル。

これは接平面に対して垂直なベクトル。

法線の方程式 (p. 195)

曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $P(a, b, f(a, b))$ における法線 = P を通り、法線ベクトル $\vec{n}(a, b)$ と平行な直線 l_n のこと。 $f_x(a, b) \neq 0$ & $f_y(a, b) \neq 0$ ならば次式で与えられる。

$$l_n: \frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}$$

※ ~~基礎数学 I~~ 2年生のときに習った

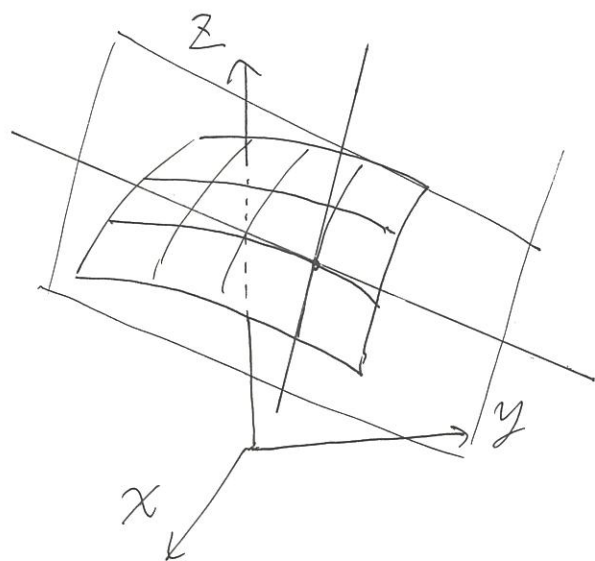
直線 $l: \frac{x - a}{h} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$ の同型。

$\vec{n} = (h, m, n) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ としたものが $f(\frac{a}{a, b})$ に対する l_n 。

<10/8, 水, 2025> 3-I 解析学 [19] 用ノート

今週 → 接平面 & 全微分

接平面の方程式 (p. 124)



$z = f(x, y) =$  上の,

点 $(x, y) = (a, b)$ における

接平面 α とする。

$$\alpha: z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

接平面の方程式のベクトル化

$$\alpha: \vec{n} \cdot \vec{w} = 0, \quad \begin{cases} \vec{n} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1) \\ \vec{w} = (x - a, y - b, z - f(a, b)) \end{cases}$$

法線ベクトル (p. 125)

$\vec{n} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ を、 曲面 $z = f(x, y)$ の、点 (a, b) における、

法線ベクトルと呼ぶ。

法線の方程式

曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) を通る法線を ℓ とする。

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a, b) \end{pmatrix} + t \vec{n} = \begin{pmatrix} a + t f_x(a, b) \\ b + t f_y(a, b) \\ f(a, b) - t \end{pmatrix}$$

したがって、 t について解くと、 ℓ の方程式が得られる。

$$\ell: \frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1} (= t)$$

例 = 問 5.12, (3)

$z = f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$, 点 $(1, 2, 3)$ での接平面
と法線の方程式を求めよ。

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [u^{\frac{1}{2}}], \quad u = (14 - x^2 - y^2)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \right\} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \{ \dots \} \cdot (-2x)$$

$$= -x \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}, \quad f_x(1, 2) = \frac{-1}{3}$$

$$f_y(x, y) = \dots = \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(1, 2) = \frac{-2}{3}$$

$$\text{接平面: } z - 3 = \left(\frac{-1}{3} \right) (x - 1) + \left(\frac{-2}{3} \right) (y - 2)$$

$$3z - 9 = -(x - 1) - 2(y - 2)$$

$$\Rightarrow \underline{x + 2y + 3z - 14 = 0}$$

$$\text{法線: } \frac{x - 1}{(-1/3)} = \frac{y - 2}{(-2/3)} = \frac{z - 3}{-1}, \quad \text{全辺} \times \left(-\frac{1}{3} \right) \text{して、}$$

$$\Rightarrow \underline{x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}}$$

<10/16, 木, 2025> 3-I 解析学 [20] 用ノート

実習、今週含めてあと2週しかない...! 対して、

[20] 合成関数
[21] 高次偏導関数
[22] 極大・極小

合成関数の偏微分

(I) $z = f(u(x, y))$ $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \rightarrow u \rightarrow f$

(II) $z = f(x(t), y(t))$ $t \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \rightarrow f$

(III) $z = f(x(s, t), y(s, t))$ $\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \rightarrow f$

(I) の偏微分 (p. 185)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) u_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) u_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial u}$$

→ これは先週までに使ってきた。

(II) の偏微分 (p. 186)

$z = f(x(t), y(t)) = f(t)$, 実質は t のみの関数。

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = f_x(x, y) \cdot x'(t) + f_y(x, y) \cdot y'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

※証明は教科書を読んで。

覚えて!

例 = 問 5.8 (p. 188)

(1) $z = (x+y)^4, \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -\sin t \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t) \\ &= 4(x+y)^3 \cdot \cos t + 4(x+y)^3 \cdot (-\sin t) \\ &= 4(\cos t + \sin t)^3 (\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y), x = at, y = bt$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t) = a f_x(\overset{at, bt}{x}, \overset{at, bt}{y}) + b f_y(\overset{at, bt}{x}, \overset{at, bt}{y})$$

(III) の偏微分 (p. 188)

$z = f(x, y), \begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{cases}$

覚えて!

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = f_x \cdot x_s(s, t) + f_y \cdot y_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = f_x \cdot x_t(s, t) + f_y \cdot y_t(s, t)$$

※証明は教科書を読んで。

例 = 問 5.9 (p. 189)

(1) $z = xy, x = s^2 + t^2, y = s^2 - t^2$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial y} = 2s \cdot y + 2s \cdot x = 2s(y+x) = 4s^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y} = 2t \cdot y - 2t \cdot x = 2t(y-x) = -4t^3$$

高次偏導関数とテイラーの定理 (p.190)

2次の偏導関数

$$\textcircled{1}: f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\textcircled{2}: f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

同様に第n次の偏導関数も定義される。第n次までの導関数がすべて存在し連続なら「Cⁿ級」。

※ f_{xy} と f_{yx} の同一性問題:

$f_{xy} \neq f_{yx}$ となる関数もあり得る。しかし、たいていの場合 $= f(x, y)$ が C² 級の場合、 $f_{xy} = f_{yx}$ 。

例 = 問 5.10 (p.190)

$$(3) z = f(x, y) = \log |x^2 - y^2|$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \quad f_y = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2 - y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = -2 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{2x \{ -(-2y) \}}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{-2y \cdot \{ (-) \cdot 2x \}}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{-2(x^2 - y^2) - (-2y)(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = -2 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

2変数関数のテイラー展開とテイラーの定理 (p.191)

$$D = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{と置く。}$$

$$\rightarrow Df = hf_x + kf_y, \quad D^2f = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}, \dots$$

$\rightarrow$ テイラーの定理 (p.191):

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!} D^2f(a, b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1}f(a, b) + \underbrace{R_n}_{\text{剰余項}}$$

右辺をテイラー展開という。証明は教科書を。

$\rightarrow$ 1次までのテイラー展開:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + R_2$$

$\rightarrow$ 2次までのテイラー展開:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2!} \left\{ h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \right\} + R_3$$

近似式 (p.193)

2次までのテイラー展開にて、 $\begin{cases} x = a+h \\ y = b+k \end{cases}$ と置くと、

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2!} \left\{ (x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b) \right\} + R_3$$

$\Rightarrow$ 点 (a, b) 付近での $f(x, y)$ の近似値と与えらる。

例 = 例題 5.9, (1) より、 $f(x, y) = e^{x+y} \cong 1 + x + y + \frac{x^2 + 2x + y^2}{2}$
 $\textcircled{a} (0, 0)$ 付近。

Ex 5.11, (1)

$$f(x, y) = \cos(x-y), \quad f_x = -\sin(x-y), \quad f_y = \sin(x-y)$$

$$f(0,0) = 1 \quad f_x(0,0) = 0 \quad f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xx} = -\cos(x-y), \quad f_{xy} = \cos(x-y), \quad f_{yy} = -\cos(x-y)$$

$$f_{xx}(0,0) = -1 \quad f_{xy}(0,0) = 1 \quad f_{yy}(0,0) = -1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x, y) &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2!} \{ (-1)x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + (-1)y^2 \} + R_3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + R_3 \quad @ (x, y) \approx (0, 0) \end{aligned}$$

(2)

$$f(x, y) = \sqrt{2x+y}, \quad f_x = (2x+y)^{-\frac{1}{2}}, \quad f_y = \frac{1}{2}(2x+y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2x+y)^{\frac{1}{2}} \quad f_x(1,2) = \frac{1}{2} \quad f_y(1,2) = \frac{1}{4}$$

$$f(1,2) = 2$$

$$f_{xx} = -(2x+y)^{-\frac{3}{2}}, \quad f_{xy} = -\frac{1}{2}(2x+y)^{-\frac{3}{2}}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{4}(2x+y)^{-\frac{3}{2}}$$

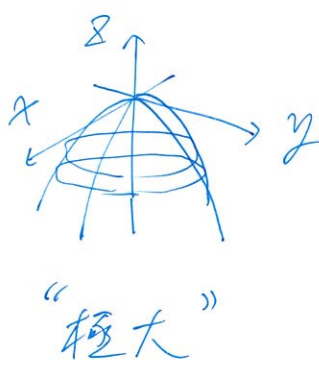
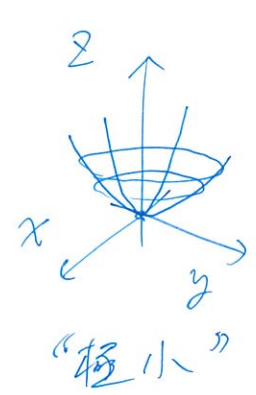
$$f_{xx}(1,2) = -\frac{1}{8} \quad f_{xy}(1,2) = -\frac{1}{16} \quad f_{yy}(1,2) = -\frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x, y) &= f(1,2) + (x-1)f_x(1,2) + (y-2)f_y(1,2) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \{ (x-1)^2 f_{xx}(1,2) + 2(x-1)(y-2)f_{xy}(1,2) \\ &\quad + (y-2)^2 f_{yy}(1,2) \} + R_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-2) - \frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)(y-2) \\ &\quad - \frac{1}{64}(y-2)^2 + R_3 \quad @ (x, y) \approx (1, 2) \end{aligned}$$

今週 → 極大値、極小値 & 最大値・最小値

2変数関数の極値 (p. 197 ~)



① $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0,$

かつ、

② $\begin{cases} f(a, b) > f(x, y) \dots \text{極大} \\ f(a, b) < f(x, y) \dots \text{極小} \end{cases}$

注意: 1回の偏微分だけでは極値かどうかの判定はできない。2回の偏微分も必要。

極値の求め方 (p. 197 ~ 199)

手順①: $f(x, y)$ は C^2 級と仮定する。= 2回^{まで}の偏微分可能性は ~~ほぼ~~ 保証する。

① 手順②: $f_x(x, y)$ & $f_y(x, y)$ を求め、それらがゼロになっような $(x, y) = (a, b)$ を見つける。"停留点"

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

手順③: 2次の偏導関数 $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$ をすべて求め、それらのヘッセ行列式を求めます。

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - |f_{xy}(x, y)|^2$$
$$= \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \quad (A)$$

(1) ※ 実際には $(x, y) = (a, b)$ での $H(a, b)$ だけで良い。

手順④: 以下のように判定する。(p. 199)

(i) $H(a, b) > 0$ のとき、

(a) $f_{xx}(a, b) > 0 \rightarrow f(x, y)$ は (a, b) で極小。

(b) $f_{xx}(a, b) < 0 \rightarrow f(x, y)$ は " 極大。

(ii) $H(a, b) < 0$ のときは、 $f(x, y)$ は (a, b) では極値をとらない。

導出 → 教科書 (p. 197 ~ 199) を各自で読んで!

例 = 問 5.14 (p. 201)

(1) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, f_x = 2x, f_y = 8y,$

$f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 8. \rightarrow (a, b) = (0, 0)$ で $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ (停留点)。
 $f_{xx} = 2 > 0,$

$\rightarrow H(a, b) = 16 - 0 > 0$, よって $(x, y) = (0, 0)$ で極小。

極小値 = $f(0, 0) = 0^2 + 4 \cdot 0^2 = 0$.

(2) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 2y^2, f_x = x, f_y = -4y,$

$f_{xx} = 1, f_{xy} = 0, f_{yy} = -4. \rightarrow (x, y) = (0, 0)$ で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ (停留点)。

$\rightarrow H(0, 0) = -4 - 0 < 0$, よって極値をとらない。

(3) $f(x, y) = -x^2 + 4xy - 6y^2, f_x = -2x + 4y, f_y = 4x - 12y,$

$f_{xx} = -2, f_{xy} = 4, f_{yy} = -12. \rightarrow (x, y) = (0, 0)$ で停留。

$\rightarrow H(0, 0) = 24 - 8 = 16 > 0$, かつ $f_{xx} = -2 < 0$ より, $(x, y) = (0, 0)$ で極大。極大値 = $f(0, 0) = 0$.

(つづく)

(つづき)

$$(4) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y, \quad f_x = 2x + y - 2, \quad f_y = 2y + x - 2,$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2,$$

$f_x = f_y = 0$ となるためには、

$$2x + y - 2 = 2y + x - 2$$

$$x = y, \rightarrow 3x - 2 = 3y - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

z が停留点。

$$H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = +2 > 0,$$

よって $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ で極大。

$$\text{極大値} = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{12-24}{9} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

$$(5) f(x, y) = x^3 + y^2 + y^3, \quad f_x = 3x^2, \quad f_y = 3y^2 + 2y,$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y + 2.$$

まず $f_x(a, b) = 3a^2 = 0$ & $f_y(a, b) = 3b^2 + 2b = 0$ の解は

$$(a, b) = (0, 0) \text{ と } \left(0, -\frac{2}{3}\right) \text{ の停留点がある。 のみ!}$$

$(x, y) = (0, 0)$ では、 $H(0, 0) = 0$, ハッセ行列式からは判定不可。

しかし、 $f(x, y)$ を $(0, 0)$ 付近で考えたと、 δ を微小量として、

$$\begin{array}{ccccc} f(0, -\delta) & < & f(0, 0) & < & f(0, +\delta) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ -\delta^3 & & 0 & & +\delta^3 \end{array} \quad \text{となり、極値にはなっていない。}$$

$$(x, y) = \left(0, -\frac{2}{3}\right) \text{ では、 } H\left(0, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \cdot 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$H(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

[2] 21-03

$$S = \sqrt{l(l-x)(l-y)(l-z)}, \quad x+y+z = 2l$$

$$z = 2l - x - y$$

$$S^2 = l(l-x)(l-y)(x+y-l)$$

$$= l(x-l)(y-l)(x+y-l)$$

$$= l \{ xy - lx - ly + l^2 \} (x+y-l)$$

$$= l \left\{ x^2 y - lx^2 - lxy + l^2 x + xy^2 - ly^2 - lxy + l^2 y - lxy + l^2 x + l^3 + l^2 y \right\}$$

$$= l \{ \dots \}$$

$$\frac{x}{2} \hat{z} \text{ は } (x, y, z)$$

$$= \left(\frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}\right)$$

$$S^2 = f(x, y) \text{ とおくと、}$$

$$f_x = l(y-l)(x+y-l) + l(x-l)(y-l)$$

$$f_y = l(x-l)(x+y-l) + l(x-l)(y-l)$$

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \text{ となるのは、}$$

$$(y-l)(x+y-l) + (x-l)(y-l)$$

$$= (x-l)(x+y-l) + (x-l)(y-l) = 0$$

<10/30, 木, 2025> 3-I 解析学 [22] 用ノート
本日 → 復習。明日 → 自習!! (スミレ...)

✓ 極座標を使う連続性の判定, 極限計算

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ (\theta \text{ は任意})}} f(r,\theta), \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

例:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r}{r} = 1$$

例②:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は連続か? → 極座標をとると、 $\neq (0,0)$ にて、

$$f(x,y) = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta,$$

よって、 $r \rightarrow 0$ をとったとき、 θ によって値が変化する
ため、一気に定まらない。したがって原点で不連続。

✓ 合成関数の偏微分 (p. 185)

→ 重要! なのだが、各自で!

✓ “1次 or 2次の偏微分が必要か?” の見極め

f_x, f_y だけでいい... 全微分,
接平面、法線
1次までのテイラー展開
停留点の求め方

f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} まで必要... ヘッセ行列式と極値、
最大、最小、
2次までのテイラー展開

✓ 試験では、特に何も言われなければ、出てくる関数は
すべて C^n 級と考える! 何回でも偏微分可!

✓ 全微分 $dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

✓ 接平面の方程式 (p. 194)

$z = f(x,y)$ 上の点 (a,b) での接平面 ↓

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

✓ 法線の方程式 (p. 195)

$z = f(x,y)$ 上の点 (a,b) をつらぬく法線ベクトル ↓

$$\vec{n} = (f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$$

これを用いて、媒介変数 t による表すは、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} a + t f_x(a,b) \\ b + t f_y(a,b) \\ f(a,b) - t \end{pmatrix}$$

もし $f_x(a, b) \neq 0$ & $f_y(a, b) \neq 0$ であれば、法線 $\downarrow$

$$\frac{x-a}{f_x(a, b)} = \frac{y-b}{f_y(a, b)} = \frac{z-f(a, b)}{-1}$$

✓ 2変数関数のテイラー展開

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left\{ (x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b) \right\}$$

+ R_3 (3次以上の剰余項)

$$= f(a, b) + \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^{N-k}}(a, b) (x-a)^k (y-b)^{N-k} \right\}$$

✓ 停留条件: $f_x(a, b) = 0$ & $f_y(a, b) = 0$

✓ ヘッセ行列式:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

✓ 極値の判定法 (p. 199)

停留点 (a, b) において、

(i) $H(a, b) > 0$ のとき、極大 or 極小で、

(a) $f_{xx}(a, b) > 0 \rightarrow f(a, b)$ は極小値。

(b) $f_{xx}(a, b) < 0 \rightarrow f(a, b)$ は極大値。

(c) $f_{xx}(a, b) = 0 \rightarrow$ 有り得ない。 $H(a, b) = 0$ より、必ず $H(a, b) < 0$ となる。(ii)へ。

(ii) $H(a, b) < 0$ のとき、極値をとらない

(iii) $H(a, b) = 0$ のときは、もう少しだが (a, b) の周辺での $f(x, y)$ を調べて判定する。

<11/20, 本, 2025> 3-I 解析学 図用ノート

今週 → 陰関数定理 (p. 204 ~ 206) &

条件付き極値問題 (p. 207 ~ 209)

陰関数 (p. 204)

$F(x, y) = 0$ で表される $y = f(x)$ のこと、ただし、

“ $y = m$ ” の形で解けないもの。

例: $\log \sqrt{x^2 + y^2} - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow y = m$?

陰関数定理 (p. 204)

$F(x, y)$ は点 (a, b) の近くで Δ^1 級。さらに

$F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ ならば、 $x = a$ の

近くにおける関数 $y = f(x)$ で、

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}, f(x)\right) = 0, \quad b = f(a)$$

を満たすものが一意に存在する。このとき $y = f(x)$

は微分可能で、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad \text{と与えられる。}$$

※ 証明はスキップ。

もう少し実用的な説明

$F(x, y) = 0$ で ~~間~~ 間接的に表されている $y = f(x)$ の微分を知りたいのだが?、ただし $y = m$ とは解けない。

$$\rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad \text{と計算できるよ。}$$

例 = 例 5.16, (3)

$$F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0, \quad -3x$$

まず任意の点 (x, y) にて、 $F_y(x, y) = \cancel{3x^2} + 3y^2$,

したがって $(0, 0)$ 以外では $F_y(x, y) \neq 0$ なので陰関数が

存在する。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{-3x + 3y^2} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

接線と法線 (p. 205)

xy 平面上の曲線 C が、 $C: F(x, y) = 0$ という形式

で与えられている。この C の、点 (a, b) における、

$$\text{接線: } F_y(a, b)(y - b) + F_x(a, b)(x - a) = 0$$

$$\text{法線: } F_x(a, b)(y - b) - F_y(a, b)(x - a) = 0$$

接線の証明:

(a, b) を通る接線は、傾き $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ を用いて、

$$y - b = m(x - a)$$

22で陰関数定理より $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ なので

$$-F_y(a, b)(y - b) = F_x(a, b)(x - a) \rightarrow \text{証明終了。}$$

法線の証明 → 省略。ヒント: $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$

条件付き極値問題 (p. 207)

条件: $g(x, y) = 0$ の下で、 $f(x, y)$ の極大値や極小値を求めたい。

→ $g(x, y) = 0$ を $y = a(x)$ の形で解けるなら、
素直に $f(x, y=a(x)) = f(x)$ を考えれば良い。

→ $g(x, y) = 0$ が $y \neq a(x)$ である場合、ラグランジュの未定乗数法を使う。

λ ... ラグランジュの未定乗数

ラグランジュの未定乗数法 (p. 207~208)

条件: $g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ が極値をとり得る点を (a, b) とすると、

$$\begin{cases} f_x(a, b) = \lambda g_x(a, b) \text{ or } \frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \\ f_y(a, b) = \lambda g_y(a, b) \text{ or } \frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$$

⇒ $\{a, b, \lambda\}$ についての3元連立方程式が得られる。これを解いて、停留点の候補が分かる。
→ 実際は極値かどうかはまだ不明。
停留点 ≠ 極値点。

より一般的なラグランジュの未定乗数法

$$L(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y) \text{ として、}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x, y) = 0$$

を満たすような (x, y) が ~~停留~~ 極値点の候補となる。

例 = 問 5.18 (p. 208)

$$\text{制約条件: } \cancel{g(x, y)} = x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow g(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$L = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 3),$$

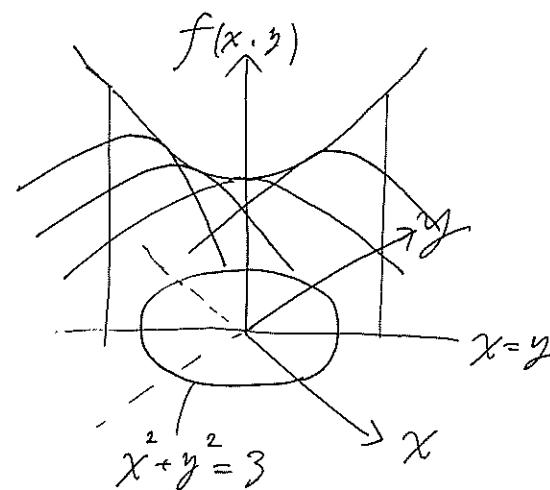
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y - \lambda \cdot 2x = 0 \rightarrow \lambda = \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x - \lambda \cdot 2y = 2x - \frac{y}{x} \cdot 2y = 2\left(x - \frac{y^2}{x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \begin{matrix} y^2 \\ \cancel{x^2} \end{matrix} = 3 - \begin{matrix} \cancel{y^2} \\ x^2 \end{matrix} \xrightarrow{x^2 - y^2 = 0} 2x^2 = 3, \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

よって極値点の候補は、以下の4点。

$$\underbrace{\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\lambda = +1}, \quad \underbrace{\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\lambda = -1}$$



最大・最小化問題への応用 (p. 209)

3変数レジェの未定乗数法で求めた極値点の候補は、多くの場合で、制約条件下での最大値または最小値を与える。

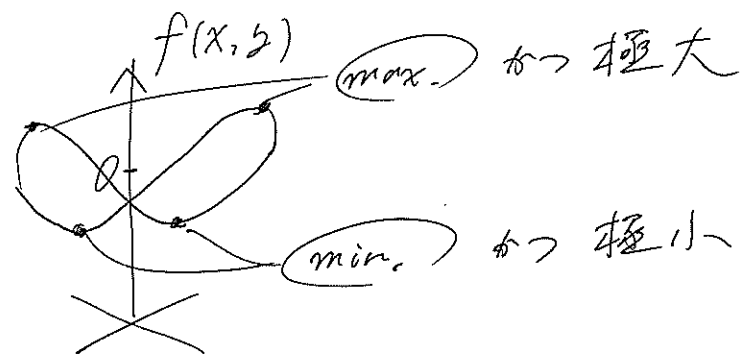
例 = 問 5, 18 のつづき

$$f(x, y) = 2xy \quad \text{with} \quad x^2 + y^2 = 3$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}_{\lambda = +1}, \underbrace{\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}_{\lambda = -1}$$

$$\rightarrow f\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 3, \quad (\text{max.})$$

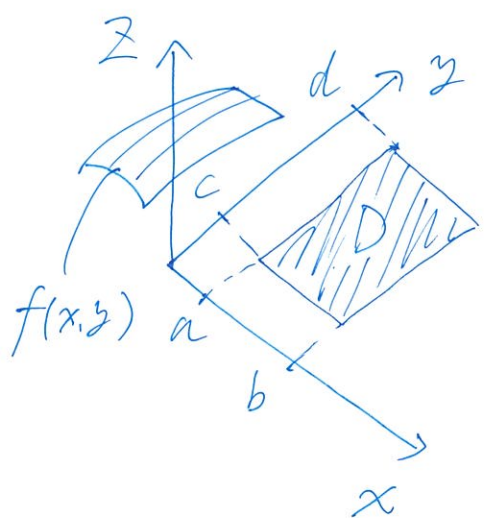
$$f\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -3, \quad (\text{min.})$$



<12/4, 木, 2025> 3-I 解析学 25

今週 → 2重積分 (p. 215 ~)

長方形領域における2重積分 (p. 216)



$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

“長方形領域”

上の D 上で定義された $f(x, y)$ に対して、2重積分を次式で定める。

$$\underbrace{\iint_D f(x, y) dx dy}_{\text{2重積分}} = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \cdots \textcircled{1}$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \cdots \textcircled{2}$$

累次積分

特に $f(x, y) \geq 0$ の場合、②の値は D (xy 平面) と $z = f(x, y)$ 面ではさまれる立体の体積になる。

※ 詳細は各自テキストを!

例 = 例題 6.1 & 問 6.1

$$\text{与式} = \iint_D (x+y+1) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$$

✓ $dy \rightarrow dx$ の累次積分:

x は定数だと思って定積分。

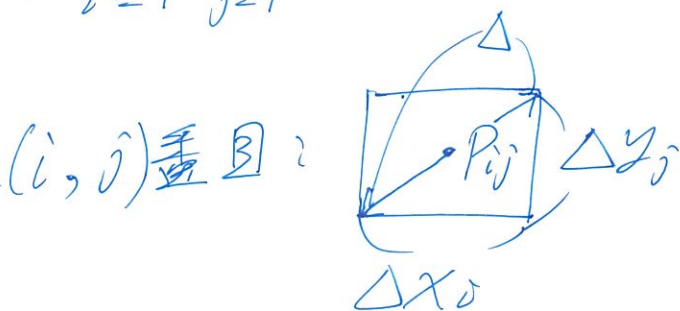
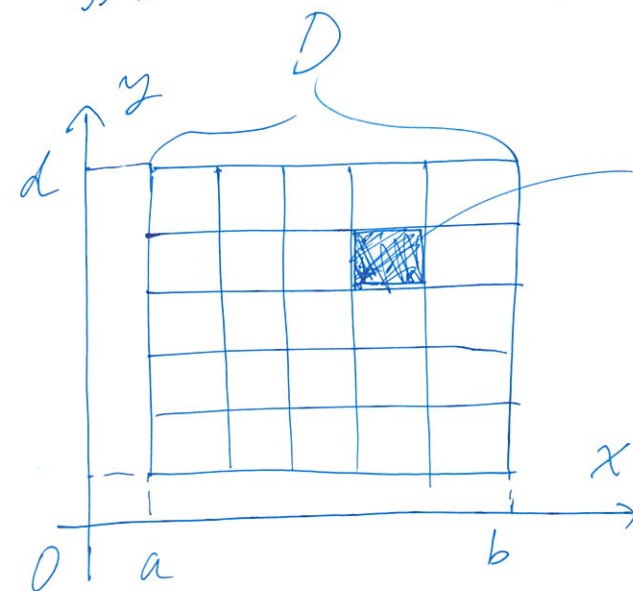
$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_1^2 (x+y+1) dy \right\} dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_1^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} \right]_0^1 = 3 \end{aligned}$$

✓ $dx \rightarrow dy$ の累次積分:

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_1^2 \left\{ \int_0^1 (x+y+1) dx \right\} dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + yx + x \right]_0^1 dy \\ &= \int_1^2 \left(y + \frac{3}{2} \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} \right]_1^2 = \frac{10}{2} - \frac{4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

長方形領域の区分求積

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$



$$|\Delta| \rightarrow 0 \iff \begin{cases} \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0 \end{cases}$$

~~± 子と~~

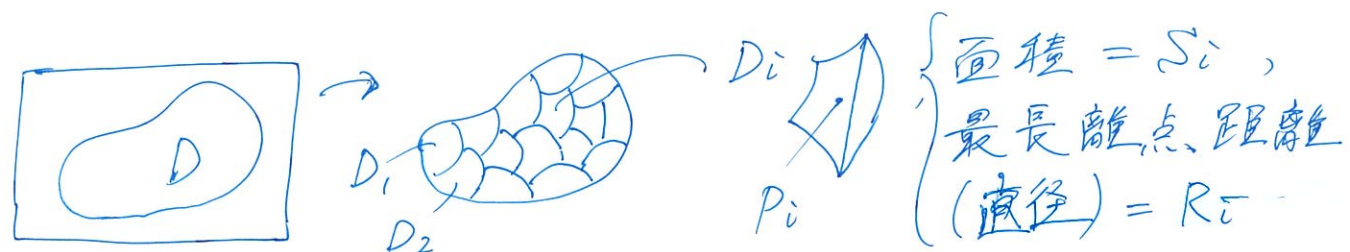
②のとき、右辺の $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ が一意に

収束するなら、 $f(x, y)$ は2重積分可能である、とする。

一般領域における2重積分 (p. 222)

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D \cdots \text{テクト}$$

D が有界 $\Leftrightarrow D$ を含む長方形がある。



分割 Δ とおく。 $|\Delta| \rightarrow 0$ ならば、 $S_i \rightarrow 0$ & $R_i \rightarrow 0$ 。
2重積分 (D 上の) は、次式で定義する。
2のとき分割数 $n \rightarrow \infty$ となる。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) S_i$$

右辺が Δ や P_i に依らずに収束するならば、 $f(x, y)$ は領域 D において2重積分可能である、という。

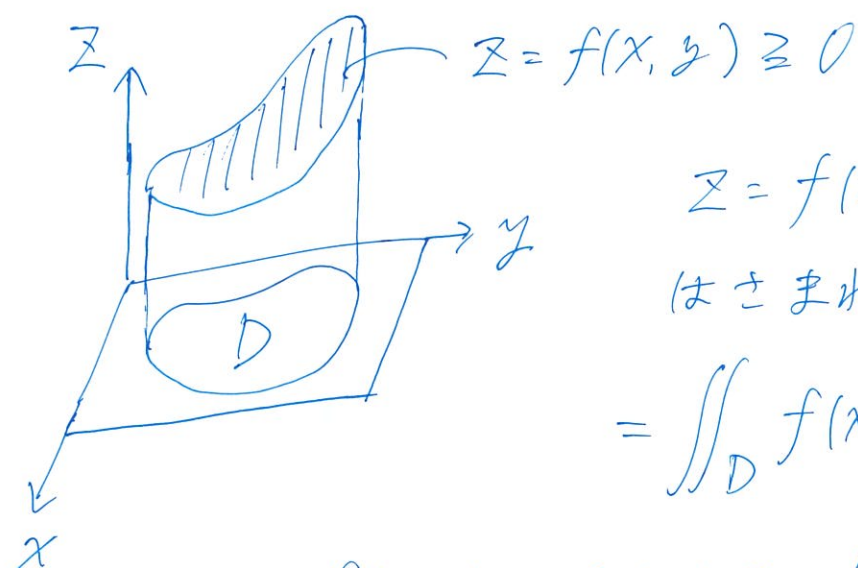
特に $f(x, y) = 1$ とした場合、

$$\iint_D 1 \cdot dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S_i = S \cdots D \text{ の面積, となる。}$$

※ 正確には底面積が S で、高さが一律に1の、立体の体積。

※ $f(x, y) = -1$ とすると、体積の (-1) 倍が求まる。

立体の体積 (p. 223)



$$\begin{aligned} & z = f(x, y) \text{ と底面 } D \text{ で} \\ & \text{はさまれた立体の体積} \\ & = \iint_D f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

また、 $f(x, y) \leq 0$ ならば、体積の (-1) 倍が求まる。

重積分の性質 (p. 225)

$$(1) \iint_D \{f(x, y) \pm g(x, y)\} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

(2) 実数 k に対し、

$$\iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy$$

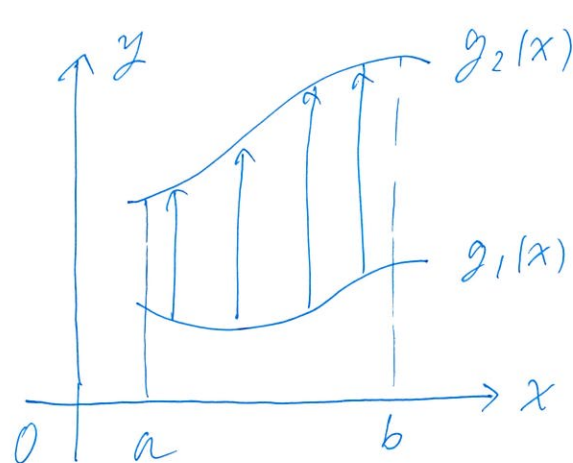
$$(3) f(x, y) \geq 0 \text{ ならば } \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

(4) 領域の分割: $D = D_1 + D_2$, (D_1, D_2)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

一般領域における累次積分 (p. 226)

✓ (xy平面上で) $y = g_1(x)$ & $g_2(x)$ で囲まれた領域の場合:



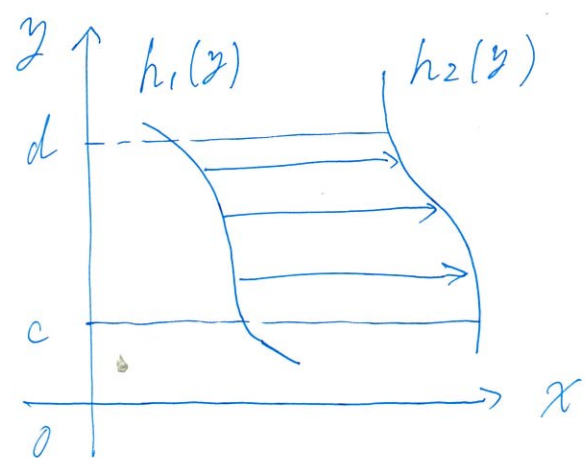
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

⇒ 底面が D & $z = f(x, y)$ で囲まれた体積 V

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

→ dy 積分を先にやる。

✓ $x = h_1(y)$ & $h_2(y)$ で囲まれた領域の場合:



$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\Rightarrow V = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

(関数が出た)

→ dx 積分を先にやる。→ y の

※ 以下のように略して書くこともある。

$$V = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy f(x, y) \quad \text{for } \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{graph} \end{array}$$

$$V = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx f(x, y) \quad \text{for } \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{graph} \end{array}$$

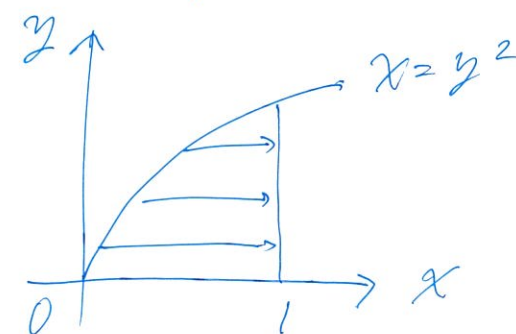
例 = 例題 6.3, (2) (p. 229)

$$V = \iint_D xy^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$$

↓

$$= \int_0^1 dy \left\{ \int_{y^2}^1 dx xy^2 \right\}$$

$$= \int_0^1 y^2 dy \left\{ \int_{y^2}^1 x dx \right\}$$

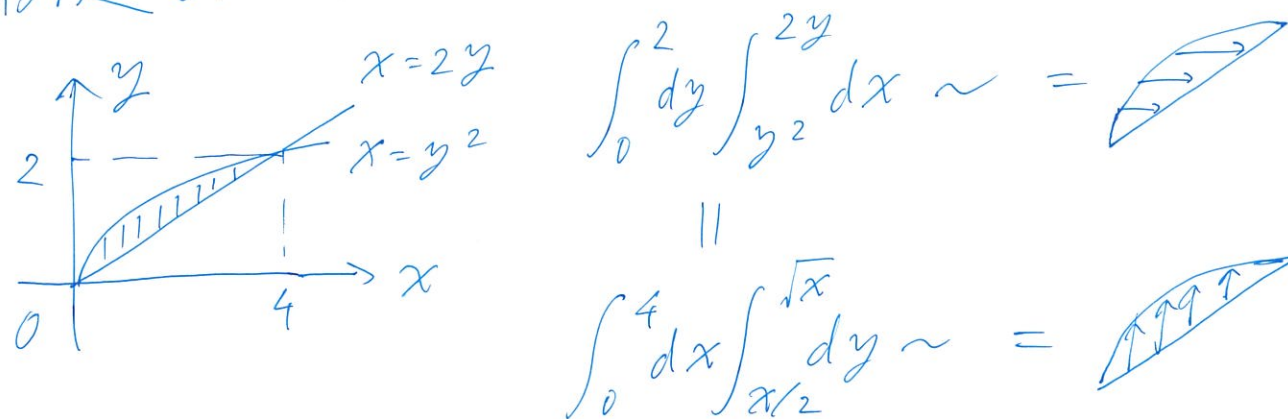


$$= \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^1 dy = \int_0^1 y^2 \frac{1 - y^4}{2} dy = \int_0^1 \frac{y^2 - y^6}{2} dy$$

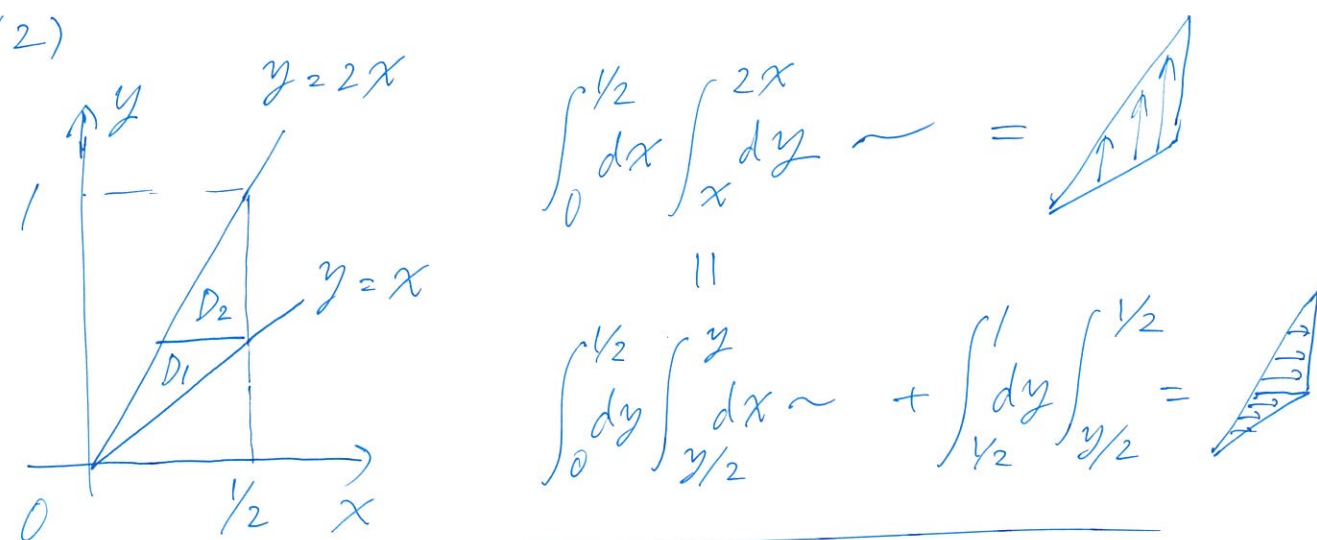
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{2}{21}$$

$\langle 12/11, \text{木}, 2025 \rangle$ 3-I解析学 [26] 用ノート
 累次積分の順序の変更 (p. 232)

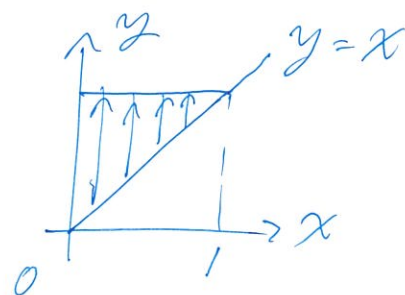
例题 6.5 (1)



(2)


$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} 6.7$$

$$V = \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{y^2/2}$$




 $= \left\{ \begin{array}{l} y: 0 \sim 1 \\ x: 0 \sim y \end{array} \right\}, \quad x > y$

$$V = \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{y^2/2} = \int_0^1 dy \left[x e^{y^2/2} \right]_0^y = \int_0^1 dy \cancel{y-1}^y e^{y^2/2} \quad (\text{A})$$

$$(r \rightarrow) V = \int_0^1 dy \, y e^{+y^2/2} = \left[e^{y^2/2} \right]_0^1 = e^{1/2} - 1 = \sqrt{e} - 1$$

極座標変換による2重積分 (先出, p. 240)

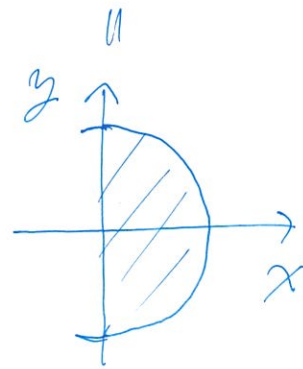
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{よって } D'(r, \theta) \text{ が } D(x, y) \text{ の領域に} \\ \text{1:1 にうつすときは、} \end{array}$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, \underbrace{r \, d\theta \, dr}_{r \, dA}$$

A diagram illustrating the transformation from Cartesian to polar coordinates. On the left, a small rectangular area element is shown with horizontal side dx and vertical side dy . An arrow points to the right, where a corresponding polar area element is shown. This element is a small sector of a circle with radial width dr and angular width $d\theta$. The area is labeled $r dr d\theta$.

例 = 例 6.10 (p. 240)

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x\}$$





$$= \left\{ \begin{array}{l} r=1, \\ \theta = -\pi/2 \\ \sim \pi/2 \end{array} \right\},$$
 したがって、

$$\begin{aligned} \oint \mathcal{A} &= \iint_D x^3 dx dy = \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} r^3 \cos^3 \theta \cdot r d\theta dr \\ &= \int_0^1 r^4 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \cdot \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

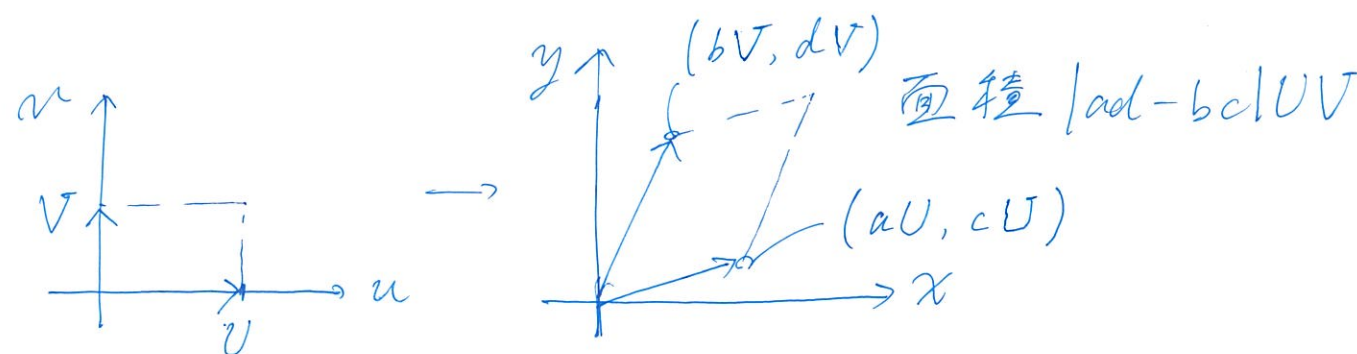
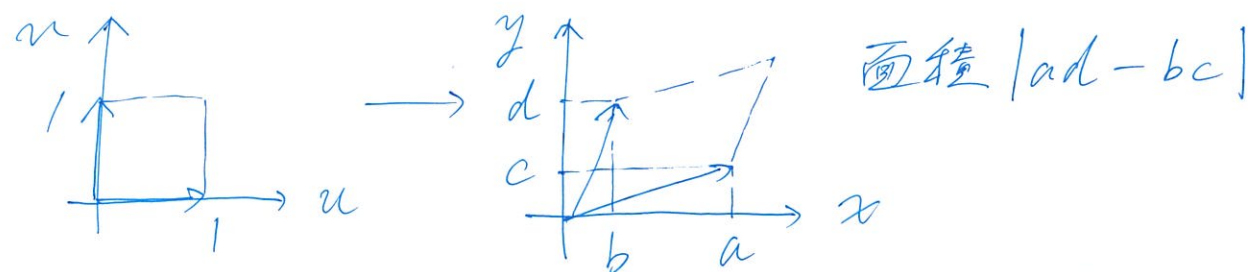
~~一般~~的な重積分の変数変換 (p. 235)
線形

$$\{x, y\} \rightarrow \{u, v\}, \quad \begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

あるいは、変換行列を A とし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \dots \text{線形変換}$$

線形変換による像 (p. 235)



$$A \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aU & bV \\ cU & dV \end{pmatrix}$$

"→" "↑"

$$= \begin{pmatrix} x_U & x_V \\ y_U & y_V \end{pmatrix}$$

線形変換による重積分 (p. 236)

線形変換: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により、 uv 平面上の

領域 D' が xy 平面上の領域 D になるならば
(A)

(10) 次式が成立する。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(au+bv, cu+dv) |ad-bc| du dv$$

導出 → 各自で! (p. 235 ~ 236)

一般の変数変換 (p. 237)

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \quad \text{ただし } 1:1 \text{ の変換だと仮定}$$

変換 $D' \rightarrow D$ が 1:1 とは $\begin{bmatrix} (u_1, v_1) \\ \neq (u_2, v_2) \end{bmatrix}$ ならば

$$\begin{bmatrix} \varphi(u_1, v_1) & \psi(u_1, v_1) \\ \neq \varphi(u_2, v_2) & \neq \psi(u_2, v_2) \end{bmatrix} \text{ となることを指す。}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi(u_1, v_1) \\ \psi(u_1, v_1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \varphi(u_2, v_2) \\ \psi(u_2, v_2) \end{pmatrix}$$

2重積分の変数変換 (p. 239)

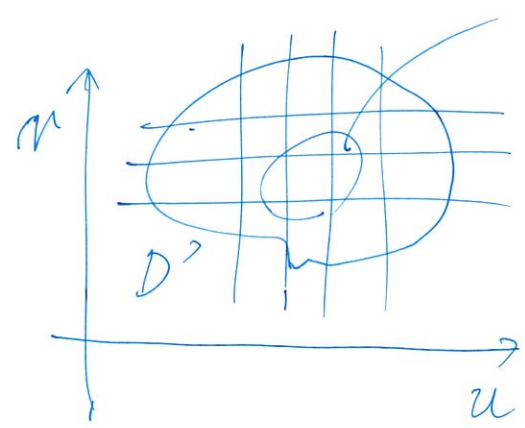
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \underbrace{|J(u, v)|}_{\text{ヤコビアン}} du dv$$

22でヤコビアンは次式。

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$$

ヤコビアンの絶対値

導出:

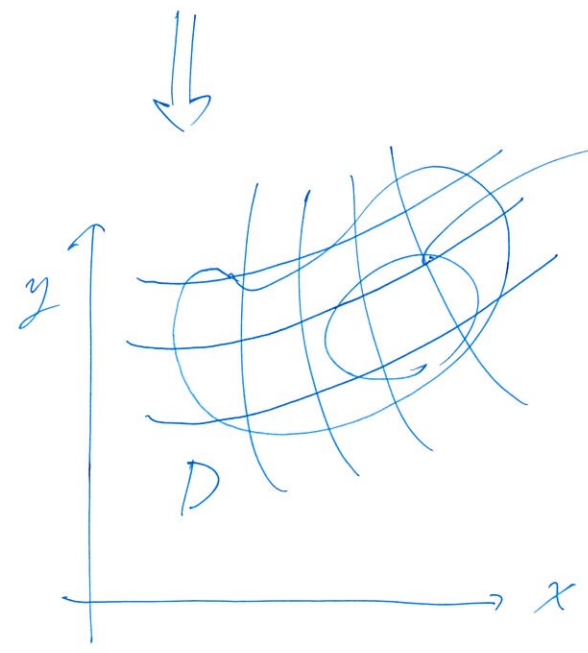


D_{ij} : Δu_i
 Δv_j

分割:

$$\begin{cases} i = 1 \sim m \rightarrow \infty \\ j = 1 \sim n \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \Delta u_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v_j \end{pmatrix}$$



D_{ij} : $\cong$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \varphi_u(u_i, v_j) \Delta u_i \\ \varphi_v(u_i, v_j) \Delta u_i \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} \varphi_u(u_i, v_j) \Delta v_j \\ \varphi_v(u_i, v_j) \Delta v_j \end{pmatrix}$$

$$\text{222} \begin{cases} A = (\varphi(u_i, v_j), \psi(u_i, v_j)) \\ B = (\varphi(u_i + \Delta u_i, v_j), \psi(u_i + \Delta u_i, v_j)) \\ D = (\varphi(u_i, v_j + \Delta v_j), \psi(u_i, v_j + \Delta v_j)) \end{cases}$$

を使った。したがって D_{ij} の面積は

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \left| \left\{ \varphi_u(u_i, v_j) \psi_v(u_i, v_j) - \varphi_v(u_i, v_j) \psi_u(u_i, v_j) \right\} \Delta u_i \Delta v_j \right| \\ &= \Delta S_{ij} \end{aligned}$$

したがって、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \cdot \Delta S_{ij}$$

$$= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i \sum_j f(\varphi(u_i, v_j), \psi(u_i, v_j)) \cdot |J(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$= \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv, \text{ where}$$

$$J(u, v) = \varphi_u(u, v) \psi_v(u, v) - \varphi_v(u, v) \psi_u(u, v),$$

となる。

極座標のヤコビアン

$$\begin{cases} x = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = \psi(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial \psi}{\partial r} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} J(r, \theta) &= \cos \theta \cdot r \cos \theta - \{ \sin \theta \cdot (-r \sin \theta) \} \\ &= r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r, \text{ したがって、} \end{aligned}$$

$$\iint_D \sim dx dy \rightarrow \iint_{D'} \sim J(r, \theta) dr d\theta = \iint_{D'} \sim r dr d\theta, \text{ となる。}$$

$$dx dy \rightarrow r dr d\theta$$

<12/18, 木, 2025> 3-I 解析学 27 用ノート

前回の復習: 2重積分の変数変換 (p. 239)

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{このとき } u \text{ と } v \text{ による 2重積分} \\ \text{には次式で変換される。} \end{array} \right\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |J(u, v)| \cdot du dv,$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$$

特に極座標変換 $\begin{cases} x = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = \psi(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$ のとき、

$$J(r, \theta) = r \cos^2 \theta - r(-\sin^2 \theta) = r \text{ より、}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

今週 → 重積分の実践としての体積 (p. 241 ~)

例 = 半球の体積 (p. 242)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z = +\sqrt{1-x^2-y^2}, \text{ これを } f(x, y) \text{ と置いて、}$$

$$V = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

極座標に変換して、

$$V = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1-r^2} \cdot r d\theta dr = 2\pi \int_{r=0}^1 \sqrt{1-r^2} \cdot r dr,$$

$$\leftarrow \begin{cases} t = 1-r^2, & \frac{dt}{dr} = -2r, & \left| \begin{array}{l} r: 0 \rightarrow 1 \\ t: 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. \\ r dr = -\frac{1}{2} dt, & \end{cases}$$

$$= 2\pi \int_{t=1}^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \pi \int_0^1 \sqrt{t} dt = \pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

楕円体 (3次元) の体積 (p. 244)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a>0, b>0, c>0)$$

$$\rightarrow z = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

上下の対称性より、 $z = +c \sqrt{\dots}$ と xy 平面

との間の体積が、楕円体の体積の $\frac{1}{2}$ にたす。

$$\rightarrow V = 2 \iint_D c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy,$$

$$D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} : \quad \text{図: } D_2 \text{ (楕円)}$$

$$= 2 \cdot 4 \iint_{D_2} c \sqrt{\dots} dx dy,$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$x = aX, y = bY \text{ とおくと, } J(x, Y) = ab - 0 = ab$$

であるから,

$$V = 8 \iint_{D'_2} c \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot ab \cdot dX dY,$$

$$D'_2 = \{(X, Y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, X \geq 0, Y \geq 0\}$$

$$= 8abc \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dR \cdot R \sqrt{1-R^2}, \text{ with } \begin{cases} X = R \cos \theta \\ Y = R \sin \theta \end{cases}$$

$$= 8abc \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{t=1}^0 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt \left(-\frac{1}{2} dt \right)$$

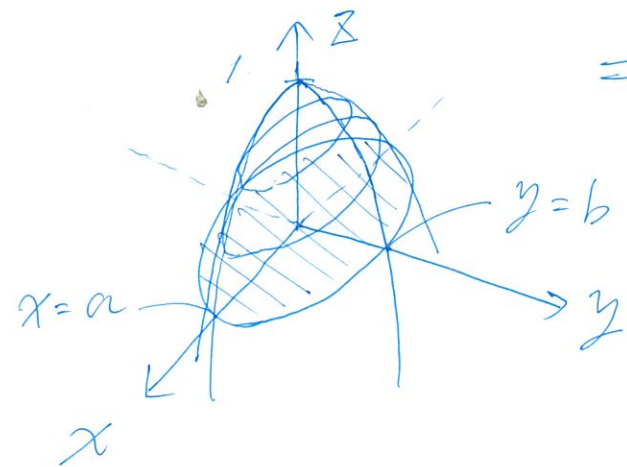
$$= 8abc \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{t} \frac{dt}{2} = 8abc \cdot \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{4\pi}{3} abc$$

例③ = 問 6.13

$$a > 0, b > 0, 0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ で定義}$$

される立体の体積は?



$$\Rightarrow D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

$$V = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

(2)

$$x = aX, y = bY \text{ とおくと,}$$

$$V = \iint_{D'} (1-x^2-y^2) ab \cdot dX dY, \quad D' = \{(X, Y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{R=0}^1 (1-R^2) \cdot ab \cdot \overset{R}{d\theta dR} \text{ with } \left\{ \right.$$

$$= ab \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{R=0}^1 (R-R^3) dR = 2\pi ab \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right]_0^1$$

$$= 2\pi ab \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi ab}{2}$$

毎体の課題 → 〈1/7, 2026, 金〉に集めた。

<12/25, 木, 2025> 解析学 28 用 1-1

本日 → 広義積分 …… ① $f(x, y)$ が特異点を持つ場合 & ② 積分領域が $\pm\infty$ の場合。

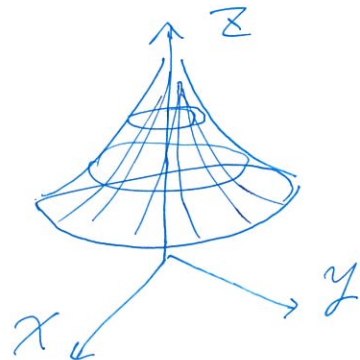
① の例 = 例 6.6 (p. 249)

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad V = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

$(x, y) = (0, 0)$ で被積分関数 $f(x, y)$ は定義されない。
しかし、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad D_\varepsilon = \{(x, y) \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r} r dr \cdot d\theta = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r} dr \\ &= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon) = 2\pi \end{aligned}$$

つまり $(x, y) = (0, 0)$ で $f(x, y)$ は
 ∞ だが、体積は 2π に
定まる。



他の例： $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ に対して、

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \infty \quad (\text{例 6.7})$$

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \log(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{グリンの定理}) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

例 6.16 (p. 250)

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/3}} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{2/3}} \cdot r dr \\ &= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 r^{1/3} dr = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{4} r^{4/3} \right]_\varepsilon^1 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

② の例 = 例題 6.14 (p. 251)

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}, \quad V = \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

つまり (x, y) 平面の第 1 象限全体。

$$\begin{aligned} D &= \lim_{R \rightarrow \infty} D_R, \quad D_R = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-r^2} \cdot r dr \\ &= \frac{(\pi/2)}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_R^0 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

→ 積分領域が無限でも積分は有限に収まる
ケースもある。

ちなみに D が (x, y) 平面全体だと、(ガウス積分)

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2 - y^2} = 4 \left\{ \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy e^{-x^2 - y^2} \right\} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

12] 6.17 (p. 252)

$$V = \iint_D \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{(2+y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(2+y)^2} dy = \left[\frac{-1}{(1+x)} \right]_0^{\infty} \cdot \left[\frac{-1}{(2+y)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \left\{ \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+\infty} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2+0} - \frac{1}{2+\infty} \right\} = \frac{1}{2}$$

<1/9, 水, 2026> 解析学 (3-I) [29] 用ノート

復習: 陰関数定理 (p. 204)

$F(x, y) = 0$ で与えられる関数 $y = f(x)$ を
(間接的に) 陰関数と呼ぶ。

関数 $F(x, y)$ が点 (a, b) 近傍で C^1 級で、

$$\left. \begin{array}{l} F(a, b) = 0, \\ F_y(a, b) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ならば、} x=a \text{ 近傍で} \\ y = f(x) \text{ で}$$

$$F(x, f(x)) = 0, \quad b = f(a)$$

を満たす $f(x)$ がただひとつ存在する。このとき

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad \text{と計算できる。}$$

ざっくりまとめ: $F(x, y) = 0$ が与えられたら、

$y = f(x)$ を満たす $f(x)$ の微分は、点 (a, b) の近傍で

$$f'(x) = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

で計算できるよ。あくまで点 (a, b) の近傍で。

ただし $F(a, b) = 0$ & $F_y(a, b) \neq 0$ が条件だよ。

復習: 接線と法線 (p. 205)

点 $(x, y) = (a, b)$ の近傍を考える。 (a, b) は

曲線 $C: F(x, y) = 0$ の特異点ではない。このとき

曲線 C の (a, b) における接線と法線は

$$\text{接線: } F_y(a, b)(y - b) + F_x(a, b)(x - a) = 0$$

$$\text{法線: } F_x(a, b)(y - b) - F_y(a, b)(x - a) = 0$$

で与えられる。ただし $\{F_x(a, b), F_y(a, b)\}$ の少なくとも
どちらか一つは $\neq 0$ だとする。

復習: 条件付き極値問題 (ラグランジュの未定乗数法)

ターゲット: $f(x, y) = \text{min}$, これを

制約条件: $g(x, y) = 0$ の下で極値を持つか?

→ このときラグランジュの未定乗数を λ と置いて、

$$Z(x, y) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する (ラグランジュ関数)。

→ $Z_x(a, b) = 0$ & $Z_y(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) が
存在すれば、それは極値点の候補となる。

→ 多くの場合で、極値点は最大または最小値を
与える点になっている。with $g(a, b) = 0$ (制約)

$$V = \iint_D \cos(x-y) dx dy = ?, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \right. \\ \left. 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

→ 領域 D の定義に $\{x, y\}$ の依存関係が
含まれていないので、好きな方から積分すれば良い。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} dx \cos(x-y) = \int_0^{\pi/2} dy \left[\sin(x-y) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \int_0^{\pi/2} dy \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(-y) \right\} = \int_0^{\pi/2} dy \{ \cos y + \sin y \} \\ &= \left[+\sin y - \cos y \right]_0^{\pi/2} = [1 - 0] - [0 - 1] = 2 \end{aligned}$$

あるいは 変数分離型 を利用するのも手。

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \text{ より、}$$

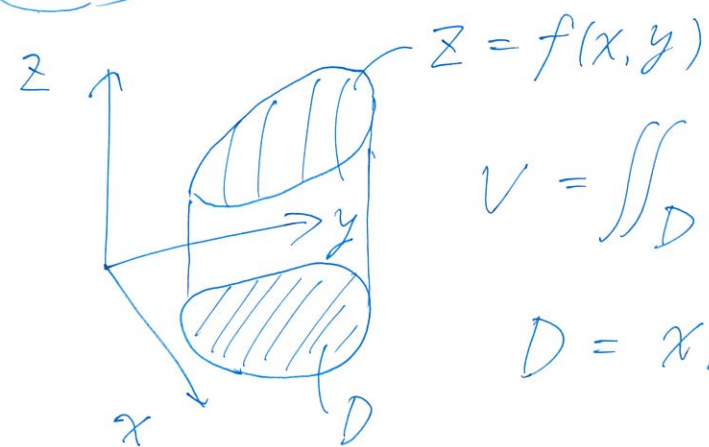
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dy \{ \cos x \cos y + \sin x \sin y \} \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy + \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \sin y dy \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos t dt &= [\sin t]_0^{\pi/2} = 1, \\ \int_0^{\pi/2} \sin t dt &= [-\cos t]_0^{\pi/2} = -1, \text{ より、} \end{aligned} \right.$$

$$= (1 \cdot 1) + (-1) \cdot (-1) = 2$$

<1/15, 木, 2026> 3-工解析学 [30] 用 1-1

復習 重積分



$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

$D = xy$ 平面上的有界領域

性質 (p. 225)

$$(1) \iint_D \{f(x, y) \pm g(x, y)\} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$(2) \text{ 実数 } k \text{ に対し } \iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$(3) D \text{ 上で } f(x, y) \geq 0 \text{ ならば } \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

(4) $D = D_1 + D_2$ に分割可能であれば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

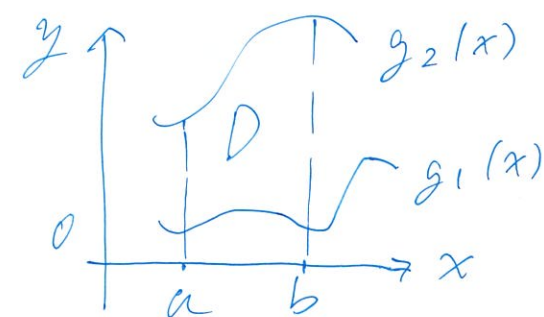
長方形領域: y $\rightarrow \int dx, \int dy,$

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

OK.

一般領域 (1):

$$D = \{a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

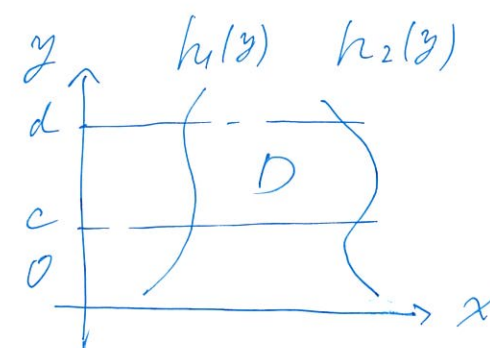


$$\rightarrow V = \iint_D \sim dx dy = \int_a^b dx \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sim dy \right\}$$

dy 積分を先にやる。

一般領域 (2):

$$D = \{c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

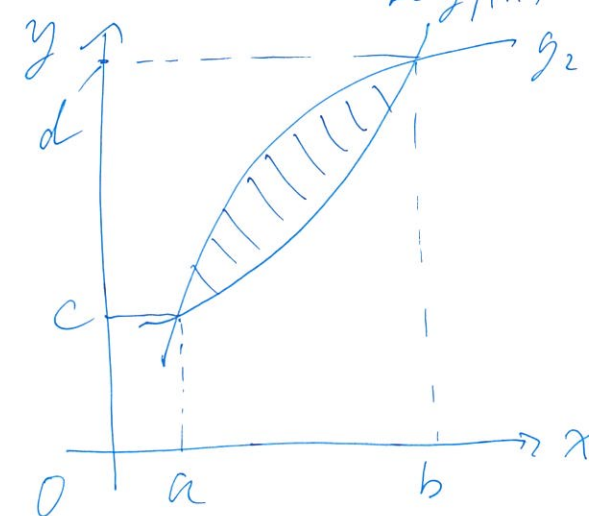


$$\rightarrow V = \iint_D \sim dx dy = \int_c^d dy \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \sim dx \right\}$$

dx 積分を先にやる。

累次積分の順序変更 (p. 232)

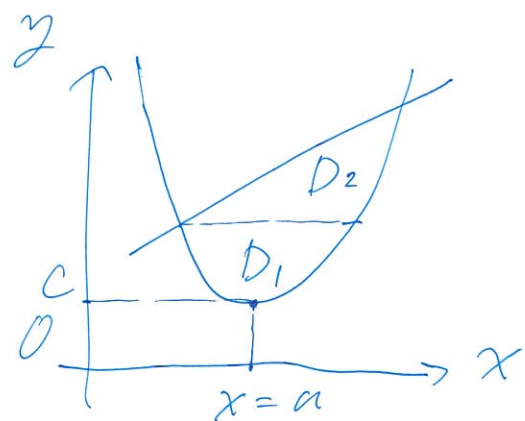
$$D = \{a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



$$= \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$h_1 = g_2^{-1}, h_2 = g_1^{-1}$$

注意：順序の変更には、 $g^{-1}(y)$ が変数 y についての一価関数である必要がある。

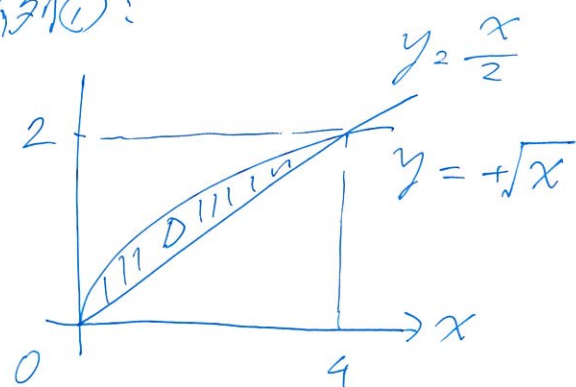


$D_1 \rightarrow$ 順序変更は可能。

$D_2 \rightarrow ?$ 若 $y = (x-a)^2 + c$

を逆に解くと、 $x = h(y)$ が y について 2 価になる。

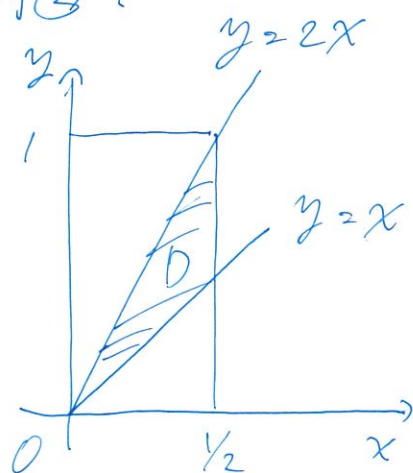
例①:



$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y \right\}$$

例②:



$$D = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \leq y \leq 2x \right\}$$

$$= D_1 + D_2,$$

$$D_1 = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \leq x \leq y \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

2重積分の変数変換 (p. 235 ~ 237)

変数変換 $\begin{cases} x = \phi(s, t) \\ y = \psi(s, t) \end{cases}$ により、 ϕ, ψ 平面上の D' が、 xy 平面上の D に ~~移す~~ $1:1$ に移る。

このとき、2重積分は

$$V = \int_D f(x, y) dx dy = \int_{D'} f(\phi(s, t), \psi(s, t)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right|}_{J(s, t)} ds dt$$

に変換される。

$$J(s, t) = \det \begin{pmatrix} \phi_s & \phi_t \\ \psi_s & \psi_t \end{pmatrix}$$

$$J(s, t) = \det \begin{pmatrix} \phi_s & \phi_t \\ \psi_s & \psi_t \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)$$