

後期 18 [2025/10/01]

締め切り = [2025/10/08]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 18-01

教科書 p.41 の問 1.51 に答えよ。

問 18-02

空間内の 3 個の点 $A(3, 3, 3)$, $B(3, 3, -3)$, $C(3, -3, -3)$ を通る平面 α の方程式を求めよ。

問 18-03

空間内のふたつの平面 $\alpha_1 : 2x + 2y + 4z - 3 = 0$ と $\alpha_2 : x - 2y - z = 0$ のなす角 θ が $\theta = \frac{\pi}{3}$ であることを証明せよ。

問 18-04

教科書 p.43 の問 1.54 に答えよ。

問 18-05

自由課題につき、提出は必須ではない。空間内に好きな 3 個の点を取り、それらを通る平面の方程式を導出せよ（サイコロを振るなどして決めてもよい）。答えの正誤の確認には、導出した方程式に 3 個の点の座標値を代入して、3 個すべてが方程式を満たしていれば、正しいことが言える。

解答編・後期 18 [2025/10/01]

問 18-01

教科書 p.41 の問 1.51 に答えよ。

【解答】平面 α の一般式は $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ただし法線ベクトル $\vec{n}=(a,b,c)$ および通る点 $A(x_0,y_0,z_0)$ で与えられる。

(1) 答えは $3x+4y-z=0$ 。 $A=O=(0,0,0)$ と $(a,b,c)=(3,4,-1)$ を代入して求まる。

(2) 答えは $2x+y+3z+3=0$ 。 $A=(1,-2,-1)$ と $(a,b,c)=(2,1,3)$ を代入して求まる。

(3) 答えは $4x-y+2z+5=0$ 。直線 l に垂直なので $\vec{n}=(a,b,c)=(4,-1,2)$ であり、 $A=(0,1,-2)$ と合わせて求まる。

(4) 答えは $3x-y+7=0$ 。与えられた直線をベクトル表示すると $(x,y,z)=(2,3,-1)+t\vec{n}$ と書けるので、 $\vec{n}=(3,-1,0)$ である。 $A=(-1,4,-1)$ と合わせて求まる。

(5) 答えは $3x-y+2z-13=0$ 。与えられた平面と平行ならば共通の法線ベクトルを持つ。つまり $\vec{n}=(3,-1,2)$ であり、 $A=(3,0,2)$ と合わせて求まる。

問 18-02

空間内の3個の点 $A(3,3,3)$, $B(3,3,-3)$, $C(3,-3,-3)$ を通る平面 α の方程式を求めよ。

【解答】3点の x 値がすべて $x=3$ であるので、 $\alpha: x-3=0$ である。

問 18-03

空間内のふたつの平面 $\alpha_1: 2x+2y+4z-3=0$ と $\alpha_2: x-2y-z=0$ のなす角 θ が $\theta=\frac{\pi}{3}$ であることを証明せよ。

【解答】各平面の法線ベクトルは $\vec{n}_1=(2,2,4)$ と $\vec{n}_2=(1,-2,-1)$ である。したがって

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \pm \frac{2-4-4}{\sqrt{4+4+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} \\ &= \pm \frac{-6}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \pm \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。

問 18-04

教科書 p.43 の問 1.54 に答えよ。

【解答】交点は $(0,-3,1)$ 。平面 $\alpha: 2x-y+3z-6=0$ および直線 $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ より、まず l を媒介変数表示する。

$$l: x=t+2, \quad y=2t+1, \quad z=-t-1. \quad (1)$$

これを平面 α に代入して次式を得る。

$$2(t+2)-(2t+1)+3(-t-1)-6=0 \longrightarrow t=-2. \quad (2)$$

$t=-2$ を l の式に代入して $(x,y,z)=(0,-3,1)$ を得る。

後期 19 [2025/10/15]

締め切り = [2025/10/22]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 19-01

教科書 p.44 の問 1.55 に答えよ。

問 19-02

教科書 p.45 の問 1.56 に答えよ。

問 19-03

三つのベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4, 4)$, $\vec{c} = (3, 3, k)$ を考える。これらが一次従属となるように定数 k を定めよ。

問 19-04

自由課題につき、提出は必須ではない。 xyz 空間内の 2 本のベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ および $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を考える。ただし $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではない ($\vec{b} \neq k\vec{a}$)。さらに第三のベクトル $\vec{c}$ を以下のように定義する。

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (1)$$

このとき $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ および $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ を確認せよ。すなわち $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の双方に対して垂直になっている。

このベクトル $\vec{c}$ を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対する「外積」または「クロス積」と呼び、通常 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ と書かれる。たとえば $\vec{a}$ を運動している質点の位置ベクトル、 $\vec{b}$ を運動量ベクトルにとると、外積 $\vec{c}$ は角運動量ベクトルになる。

もし $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行ではない ($\vec{b} \neq k\vec{a}$) のなら、 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は互いに一次独立である。

解答編・後期 19 [2025/10/15]

問 19-01

教科書 p.44 の問 1.55 に答えよ。

(1) 原点 $O(0, 0, 0)$ と平面 $2x - y + 5z + 3 = 0$ との距離は

$$h = \left| \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

(2) 点 $A(0, 1, -2)$ と平面 $3x - 2y + z + 1 = 0$ との距離は

$$h = \left| \frac{3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + (-2) + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

問 19-02

教科書 p.45 の問 1.56 に答えよ。与式より

$$\begin{aligned} l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} &= l'\vec{a} + m'\vec{b} + n'\vec{c} \\ \implies (l - l')\vec{a} + (m - m')\vec{b} + (n - n')\vec{c} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

ここで3本のベクトルは一次従属だと仮定されているので、この条件を満たすためには、それぞれの係数がすべてゼロでなければならない。したがって

$$\begin{aligned} (l - l') = (m - m') = (n - n') &= 0, \\ \implies l = l', \quad m = m', \quad n = n'. \end{aligned}$$

問 19-03

三つのベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4, 4)$, $\vec{c} = (3, 3, k)$ を考える。これらが一次従属となるように定数 k を定めよ。

一次従属であるから

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0} \longrightarrow \vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

となるような定数 $(p, q) \neq (0, 0)$ が存在できる。それぞれの成分を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p - q \\ -3p + 4q \\ p + 4q \end{pmatrix} \longrightarrow p = 3, \quad q = 3$$

と解ける。したがって $k = 3 + 12 = 15$ である。

後期 20 [2025/10/22]

締め切り = [2025/10/29]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけでなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 20-01

行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

第 i 行 j 列の成分を A_{ij} と表記する。以下の値を答えよ。

(1) A_{11} (2) A_{22} (3) A_{34} (4) A_{43}

問 20-02

前問と同じ行列 A を考える。

- (1) 第 1 行目の行ベクトルを書け。
- (2) 第 2 行目の行ベクトルを書け。
- (3) 第 3 列目の列ベクトルを書け。

問 20-03

以下の等式が成り立つように定数 a, b, c, d を定めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} 2a+b & 5a+c \\ 0 & -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (2) \quad & \begin{pmatrix} -6 & a+b \\ b+2c & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 20-04

行列 A と B を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき以下の等式を満たす行列 X, Y, Z を求めよ。

- (1) $A - 2X = B$
- (2) $A - 2B + 3Y = 2(Y - A)$
- (3) $2(2A - 3B) - 3(Z + A) = -5(Z + 2B)$

問 20-05

以下の行列 A と行列 B のセットについて、積 AB および BA を計算せよ。一般に $AB \neq BA$ である点に注意すること。また AB と BA のうち定義不可のものには「不可」と記すこと。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

おまけ 20-XX

おまけなので解答する必要はない。次のキーワード (イ) ~ (ニ) について調べてみよ。

- (イ) スレイター行列式 (Slater Determinant)。
- (ロ) 有限要素法の連立方程式。
- (ハ) 線形回帰分析。
- (ニ) 行列式点過程 (Determinantal Point Process)。

あああああああああああああああああああああああ
あああああ。

解答編・後期 20 [2025/10/22]

問 20-01

行列 A を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

第 i 行 j 列の成分を A_{ij} と表記する。以下の値を答えよ。

$$(1) A_{11} = 1 \quad (2) A_{22} = 6 \quad (3) A_{34} = 12 \quad (4) A_{43} = 15$$

問 20-02

前問と同じ行列 A を考える。

(1) 第 1 行目の行ベクトルを書け。答え：(1 2 3 4)

(2) 第 2 行目の行ベクトルを書け。答え：(5 6 7 8)

(3) 第 3 列目の列ベクトルを書け。答え：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

問 20-03

以下の等式が成り立つように定数 a, b, c, d を定めよ。

$$(1) \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 5a + c = 7 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1, c = -3.$$

$$(2) \begin{cases} -6 = 3a \\ a + b = -7 \\ b + 2c = 9 \\ -c + d = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = -5, c = 7, d = 11.$$

問 20-04

行列 A と B を次式で与える。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) $A - 2X = B$ より

$$X = \frac{-1}{2}[B - A] = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -3 - 5 & 2 - 3 \\ 4 + 2 & 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A - 2B + 3Y = 2(Y - A)$ より

$$Y = -3A + 2B = \begin{pmatrix} -15 - 6 & -9 + 4 \\ +6 + 8 & -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $2(2A - 3B) - 3(Z + A) = -5(Z + 2B)$ より

$$2Z = -4A + 6B + 3A - 10B = -A - 4B$$

$$Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 + 12 & -3 - 8 \\ +2 - 16 & -1 - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$$

問 20-05

以下の行列 A と行列 B のセットについて、積 AB および BA を計算せよ。一般に $AB \neq BA$ である点に注意すること。また AB と BA のうち定義不可のものには「不可」と記すこと。

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 & 2 + 3 \\ -6 - 1 & -4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4 & 9 + 2 \\ -1 - 2 & -3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ -6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$BA = \text{不可}$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3 & 2 + 3 & 1 - 6 \\ -6 - 1 & -4 + 1 & -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -7 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$BA = \text{不可}$

後期 21 [2025/10/29]

締め切り＝無し。提出の必要も無し。中間試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。

全ての問題をやる必要は無い。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 21-01

2×2 の単位行列 E を次式で与える。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これは任意の 2×2 行列 A と可換であることを示せ。

問 21-02

以下の行列 A と行列 B のセットを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

このとき tAB , $A({}^tB)$ および tBA , $B({}^tA)$ を計算せよ。ただし定義不可のものがあった場合は「不可」と記すこと。ちなみに AB と BA はどちらも定義不可である。

問 21-03

以下の行列 $A \sim F$ の転置行列を求めよ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) $C = 2(A + B)$

(4) $D = 2(A - B)$

(5) $E = BA$

(6) $F = {}^t(({}^tA)({}^tB))$

問 21-04

以下の行列が正則かどうかを調べ、正則である場合は逆行列を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 35 & 15 \end{pmatrix}$

(4) $D = \begin{pmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{pmatrix} \quad \ast A \text{ は定数}$

後期 21 [2025/10/29]

締め切り＝無し。提出の必要も無し。中間試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。

全ての問題をやる必要は無い。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 21-01

2×2 の単位行列 E を次式で与える。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これは任意の 2×2 行列 A と可換であることを示せ。

問 21-02

以下の行列 A と行列 B のセットを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

このとき tAB , $A({}^tB)$ および tBA , $B({}^tA)$ を計算せよ。ただし定義不可のものがあつた場合は「不可」と記すこと。ちなみに AB と BA はどちらも定義不可である。

問 21-03

以下の行列 $A \sim F$ の転置行列を求めよ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) C = 2(A + B)$$

$$(4) D = 2(A - B)$$

$$(5) E = BA$$

$$(6) F = {}^t({}^tA)({}^tB)$$

問 21-04

以下の行列が正則かどうかを調べ、正則である場合は逆行列を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 35 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad D = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} \quad ※ k \text{ は定数}$$

訂正：(4) で使っていた角の定数 A でしたが、(1) の行列と同じ記号になっていて大変紛らわしいので、 k に変更しました。失礼しました。

問 21-01

任意の行列 A に対して

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ 0+c & 0+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ AE &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & 0+b \\ c+0 & 0+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

より $EA = AE$ なので可換。

問 21-02

以下の行列 A と行列 B のセットを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

したがって

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

これらの積は以下になる。

$$\begin{aligned} {}^tAB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+2+0 & 2-2-6 \\ 9-1+0 & 6+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \\ {}^tBA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} A {}^tB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ -4 & 3 & -2 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ B {}^tA &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -4 & 9 \\ 2 & 3 & -3 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ちなみに ${}^tBA = {}^t({}^tAB)$ や $B {}^tA = {}^t(A {}^tB)$ の性質を知っていれば計算量を約半分にする。

問 21-03

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tB = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) $C = 2(A + B)$

$$\begin{aligned} {}^tC &= 2({}^tA + {}^tB) = 2 \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -12 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) $D = 2(A - B)$

$$\begin{aligned} {}^tD &= 2({}^tA - {}^tB) = 2 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) $E = BA$

$$\begin{aligned} {}^tE &= {}^t(BA) = {}^tA {}^tB \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -15 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(6) $F = {}^t({}^tA)({}^tB) = {}^t({}^tE) = E$ より ${}^tF = {}^tE$ なので、前問の答えと同じになる。

問 21-04

以下の行列が正則かどうかを調べ、正則である場合は逆行列を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 35 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad D = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} \quad ※ k \text{ は定数}$$

訂正：(4) で使っていた角の定数 A でしたが、(1) の行列と同じ記号になっていて大変紛らわしいので、 k に変更しました。失礼しました。

(1) $\det A = |A| = ad - bc = 4 - 0 = 4 \neq 0$ より正則なので、 A^{-1} が存在する。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) $\det B = |B| = -6 - (-4) = -2 \neq 0$ より正則なので、 B^{-1} が存在する。

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -(-1) & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

(3) $\det C = |C| = 210 - 210 = 0$ より正則ではないので、逆行列は存在しない。

(4) $\det D = |D| = \cos^2 k - (-\sin^2 k) = 1 \neq 0$ より正則なので、 D^{-1} が存在する。

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{pmatrix}$$

後期 22 [2025/11/04]

締め切り＝無し。提出の必要も無し。中間試験前の自主学習用。解答は明日の朝10時までに配布する。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 22-01

(復習) 直線 l の方程式を、媒介変数を t として以下のように与える。

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{-1}$$

この l に垂直で、点 $A(3, 0, -1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

問 22-02

(復習) 点 $A(2, 1, -2)$ と平面 $x + y + 4z + 2 = 0$ の間の距離を求めよ。

問 22-03

(復習) 3本の一次独立なベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を考える。これらが以下の関係式を満たす。

$$2\vec{a} + 7\vec{b} - 4\vec{c} = (k + l - m)\vec{a} + (2k - m)\vec{b} + (l + 2m)\vec{c}$$

このとき k, l, m の値を求めよ。

問 22-04

(復習) 3つの行列 A , B , C を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $AXB = E$ を満たす行列 X を求めよ。

(2) $A^{-1}YA = B + C$ を満たす行列 Y を求めよ。

解答編・後期 22 [2025/11/04]

締め切り＝無し。提出の必要も無し。中間試験前の自主学習用。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問 22-01

(復習) 直線 l の方程式を以下のように与える。

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{-1}$$

この l に垂直で、点 $A(3, 0, -1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

答えは $2x - 3y - z - 7 = 0$ である。法線ベクトル $\vec{n} = (a, b, c) = (2, -3, -1)$ と点 $A(x_0, y_0, z_0) = (3, 0, -1)$ を平面の式 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ に代入すれば求まる。

問 22-02

(復習) 点 $A(2, 1, -2)$ と平面 $x + y + 4z + 2 = 0$ の間の距離を求めよ。

答えは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。平面の式より $\vec{n} = (a, b, c) = (1, 1, 4)$ および $d = 2$ であり、一方で点 $A(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -2)$ である。距離の公式より

$$\begin{aligned} h &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \\ &= \left| \frac{2 + 1 - 8 + 2}{\sqrt{1 + 1 + 16}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{18}} \right| = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

問 22-03

(復習) 3本の一次独立なベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。これらが以下の関係式を満たす。

$$2\vec{a} + 7\vec{b} - 4\vec{c} = (k + l - m)\vec{a} + (2k - m)\vec{b} + (l + 2m)\vec{c}$$

このとき k, l, m の値を求めよ。

答えは $k = 3, l = -2, m = -1$ である。一次独立の条件から、

$$(k + l - m - 2)\vec{a} + (2k - m - 7)\vec{b} + (l + 2m + 4)\vec{c} = \vec{0}$$

これを満たすためには各ベクトルの係数がゼロでなければならない。すなわち

$$\begin{cases} k + l - m - 2 = 0 \\ 2k - m - 7 = 0 \\ l + 2m + 4 = 0 \end{cases}$$

これを解いて求まる。

問 22-04

(復習) 3つの行列 A, B, C を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $AXB = E$ を満たす行列 X を求めよ。

与式から $X = A^{-1}EB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ である。 $|A| = 7, |B| = 1$ より

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \\ X &= A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $A^{-1}YA = B + C$ を満たす行列 Y を求めよ。

与式から $Y = A(B + C)A^{-1}$ である。

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{pmatrix} 2+1 & -1+3 \\ -5+2 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \\ Y &= A(B + C)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ -12 & 42 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 59 & 4 \\ -102 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

後期 25 [2025/12/03]

締め切り = [2025/12/10]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 25-01

行列を用いて次の連立 1 次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases}$$

問 25-02

行列を用いて次の連立 1 次方程式を解け。ただし a は実数である。

$$\begin{cases} ax - y = -2 \\ -x + ay = 2 \end{cases}$$

ヒント： $a^2 \neq 1$ の場合、 $a = 1$ の場合、 $a = -1$ の場合、計 3 通りの場合分けが必要。

問 25-03

行列の基本変形を用いて、次の行列の階数を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

問 25-99

おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

問 25-01 解答

(1) 係数行列を A 、変数ベクトルを $\mathbf{x}$ 、定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とおくと、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

連立方程式は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表せる。まず行列式 $\det(A)$ は

$$\det(A) = 2 \times 1 - (-1) \times 3 = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$\det(A) \neq 0$ より逆行列 A^{-1} が存在するため、 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ より解を求める。

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \\ -3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、 $(x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{17}{5})$ である。

(2) 同様に係数行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式を計算する。

$$\det(A) = 3 \times 4 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0$$

$\det(A) = 0$ であるため逆行列 A^{-1} は存在しない。したがって、方程式を直接整理して解の有無を調べる。第2式 $-6x + 4y = 2$ の両辺を -2 で割ると、

$$3x - 2y = -1$$

これは第1式 $3x - 2y = -2$ と左辺が同じであるが右辺が異なる。同時に成り立つ (x, y) は存在しない。答：解なし。

問 25-02 解答

係数行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ とおく。行列式は、

$$\det(A) = a \cdot a - (-1)(-1) = a^2 - 1$$

逆行列が存在するかどうか ($\det(A) \neq 0$ かどうか) で場合分けを行う。

■(i) $a^2 - 1 \neq 0$ (すなわち $a \neq \pm 1$) の場合 逆行列 A^{-1} が存在するので、 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ で解く。

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(a-1)(a+1)} \begin{pmatrix} -2a+2 \\ -2+2a \end{pmatrix}$$

成分ごとに整理すると、

$$x = \frac{-2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-2}{a+1}, \quad y = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

$$\text{答: } x = \frac{-2}{a+1}, \quad y = \frac{2}{a+1}$$

■(ii) $a = 1$ の場合 $\det(A) = 0$ となり逆行列は使えない。方程式に $a = 1$ を代入する。

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

第2式は第1式の -1 倍であり、実質的に式は $x - y = -2$ の1つのみとなる (不定)。 $x = t$ (任意の実数) とおくと $y = t + 2$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t + 2 \end{pmatrix}$$

または $y = t$ とおくと $x = t - 2$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2 \\ t \end{pmatrix}$$

■(iii) $a = -1$ の場合 同様に方程式に $a = -1$ を代入する。

$$\begin{cases} -x - y = -2 & \iff x + y = 2 \\ -x - y = 2 & \iff x + y = -2 \end{cases}$$

$x + y$ が2かつ -2 になることはあり得ないため矛盾する。答：解なし。

問 25-03 解答

(1) 基本変形を用いると

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \leftrightarrow 2 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_2 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

非零の成分を含む行数は2であるから、 $\text{rank} A = 2$ 。

(2) 同様に基本変形を用いると

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \leftrightarrow 3 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 + 2r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すべての行に非零の成分残るため、 $\text{rank} B = 3$ である。ちなみにこのような場合、 B は正則行列である。

後期 26 [2025/12/10]

締め切り = [2025/12/17]。

回答はこの用紙または A4 サイズのレポート用紙等に記入すること。計算などで複数ページ使ってもよい。複数ページになる場合は左上をホチキス留めし、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。この用紙を表紙として使ってもよい。

答えだけではなく、途中計算や議論の過程も書き残すこと。

問 26-01

拡大係数行列の掃き出し法を用いて、次の連立 1 次方程式を解け。解けない場合は「解なし」とせよ。ヒント：(3) については、媒介変数が 2 個必要になる。

$$(1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y - 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 3y + 4z = -1 \\ 2x - 6y + 8z = -2 \\ -3x + 9y - 12z = 3 \end{cases}$$

問 26-02

次の同次連立 1 次方程式を解け。ヒント：自明な解 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解が存在する。

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

問 26-03

掃き出し法を用いて、次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問 26-99

おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

解答・後期 26 [2025/12/10]

問 26-01 解答

$$(1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

拡大係数行列を掃き出し法で簡約化する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & -5 \\ 3 & -1 & 3 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 0 & 5 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & 0 & | & 10 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+2R_2 \\ R_3-5R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

答え： $(x, y, z) = (-1, 2, 5)$

$$(2) \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y - 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

拡大係数行列を掃き出し法で簡約化する。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 4 \\ 3 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & -1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & -1 & 5 & | & -9 \\ 0 & -1 & 5 & | & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -5 \\ 0 & 1 & -5 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

第 3 行は $0x + 0y + 0z = -1$ となり、 $0 = -1$ を意味するため矛盾が生じる。

答え：解なし。

$$(3) \begin{cases} x - 3y + 4z = -1 \\ 2x - 6y + 8z = -2 \\ -3x + 9y - 12z = 3 \end{cases}$$

拡大係数行列を掃き出し法で簡約化する。ヒントより、媒介変数が 2 個必要になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & -1 \\ 2 & -6 & 8 & | & -2 \\ -3 & 9 & -12 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

対応する方程式は $x - 3y + 4z = -1$ のみとなる。 $y = s, z = t$ (s, t は任意定数) とおくと、

$$x = -1 + 3s - 4t$$

答え： $(x, y, z) = (-1 + 3s - 4t, s, t)$ (s, t は任意定数)

問 26-02 解答

次の同次連立 1 次方程式を解く。ヒントとして、自明な解 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解が存在する。

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

係数行列を掃き出し法で簡約化する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対応する方程式は $x - \frac{11}{5}z = 0$, $y - \frac{7}{5}z = 0$ となる。 $z = t$ (t は任意定数) とおくと、

$$\begin{cases} x = \frac{11}{5}t \\ y = \frac{7}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

答え： $(x, y, z) = \left(\frac{11}{5}t, \frac{7}{5}t, t \right)$ (t は任意定数)

後期 27 [2025/12/10]

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学习用であり、提出不要。

問 27-01

掃き出し法を用いて、次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問 27-02

サラスの公式を用いて、行列式に関する以下の公式を証明せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ceg$$

問 27-03

以下の行列式を計算せよ。

$$(1) \det A = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(2) \det B = \begin{vmatrix} 4248 & -8627 & -1352 \\ 0 & 0 & 9901 \\ 0 & 0 & 7132 \end{vmatrix}$$

$$(3) \det C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & c+f \end{vmatrix}$$

$$(4) \det D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & f \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

$$(5) \det(CD)$$

後期 27 [2025/12/10]

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学習用であり、提出不要。

解答・問 27-01

掃き出し法を用いて、次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

掃き出し法による逆行列の計算では、対象の行列 M と単位行列 E を並べた $(M|E)$ という形式の行列に対して行基本変形を行い、左側を単位行列に変形することで、右側に逆行列 M^{-1} を導き出す。

(1) $(A|E)$ は次式で与えられる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第2行から（第1行 $\times 6$ ）を引く、第3行から（第1行 $\times 7$ ）を引く。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第2行を $1/2$ 倍する。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第3行に第2行を加える。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -10 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

第3行を $1/3$ 倍する。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10/3 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right)$$

したがって、求める逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -18 & 3 & 0 \\ -20 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $(B|E)$ は次式で与えられる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第1行と第3行を入れ替える。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

第1行を -1 倍し、第3行に $(-2) \times$ 新しい第1行を加える。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

第3行から第2行 $\times 2$ を引く。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

第3行を $1/5$ 倍する。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \end{array} \right)$$

第1行に（第3行 $\times 3$ ）を加え、第2行から（第3行 $\times 3$ ）を引く。

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 11/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \end{array} \right)$$

したがって、求める逆行列 B^{-1} は

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -3 & 11 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

解答・問 27-02

サラスの公式を用いて、行列式に関する以下の公式を証明せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ceg$$

(1) 次式の通り。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = aec + dbc + abf - cea - fba - cbd = 0$$

(2) 次式の通り。

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = ae0 + dh0 + gb0 - 0eg - 0ha - 0bd = 0$$

(3) 次式の通り。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} = ae0 + d0c + gb0 - ceg - 00a - 0bd = -ceg$$

解答・問 27-03

以下の行列式を計算せよ。

(1) 次式の通り。

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 7^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7^3(3-3) = 0$$

あるいは、同じ行を含む行列の行列式はゼロであることを使ってもよい。

(2) 次式の通り。これは上三角行列の行列式であるから、その値は対角線分の積だけになる。

$$\det B = \begin{vmatrix} 4248 & -8627 & -1352 \\ 0 & 0 & 9901 \\ 0 & 0 & 7132 \end{vmatrix} = 4248 \cdot 0 \cdot 7132 = 0$$

(3) 次式の通り。ここで同じ行を含む行列の行列式はゼロであることを使った。

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & c+f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

(4) 次式の通り。サラスの公式から。

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & f \\ 1 & b & c \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot c + 0 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot f - 1 \cdot 1 \cdot 1 - f \cdot b \cdot 0 - c \cdot 0 \cdot 0 = -1 \end{aligned}$$

あるいは、第1行と第3行を入れ換えたものが上三角行列式になることを使ってもよい。符号反転を忘れずに。

(5) 次式の通り。

$$\det(CD) = \det C \cdot \det D = 0 \cdot (-1) = 0$$

後期 28 [2025/12/23] 演習課題

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学習用であり、提出不要。

問 28-01

（復習）次の行列式をサラスの公式を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

ヒント：行または列に関する基本変形を用いて、行列式中身にできるだけ多くのゼロを作ってから計算した方が、簡単なことが多い。また (2) については、行ごとの共通因子をくり出すと簡単になる。

問 28-02

前問と同じ行列式を、今度は余因子展開を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。ヒント：前問と共通。

蛇足・余因子展開の要点

二年生のうちは 3×3 行列までしか取り扱わないが、三年生以降の代数・幾何の学習のために、特に重要なポイントを先にまとめておく（教科書 p.112～116）。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- 行列式の定義 → 教科書 p.97 を参照。ただし順列や転倒数などの新しい概念を使うため、それらを先に学習する必要がある。
- 十字切除行列。行列 A の第 i 行 j 列を切除して決まる $(n-1) \times (n-1)$ の行列を、十字切除行列 $D_{ij}(A)$ とする。図 1 を参照。

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{除外}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

図 1 十字切除行列 $D_{ij}(A)$ の模式図

- 余因子。行列 A の第 ij 番目の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ij}(A)| \quad (1)$$

と定義される。つまり十字切除行列の行列式と符号係数 $(-1)^{i+j}$ から決まる。

- 定理。第 i 行に関する余因子展開。

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}. \quad (3)$$

ここで例えば $\tilde{a}_{i2}$ は行列 A の第 i 行と第 2 列を十字切除して決まる余因子である。

- 定理。第 j 列に関する余因子展開。

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}. \quad (5)$$

ここで例えば $\tilde{a}_{2j}$ は行列 A の第 2 行と第 j 列を十字切除して決まる余因子である。

- 余因子行列。 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を次式で定義する。

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

転置をとっていることに注意せよ。

後期 28 [2025/12/23] 演習課題

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。自主学習用であり、提出不要。

問 28-01

（復習）次の行列式をサラスの公式を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

ヒント：行または列に関する基本変形を用いて、行列式の中身にできるだけ多くのゼロを作ってから計算した方が、簡単なことが多い。また(2)については、行ごとの共通因子をくり出すと簡単になる。

問 28-02

前問と同じ行列式を、今度は余因子展開を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。ヒント：前問と共通。

解答・問 28-01

（復習）次の行列式をサラスの公式を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(1) 列による基本変形を利用したあと、サラスの公式を使う。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12 - 12 = 0$$

(2) 共通因子をくり出したあと、(1) と同様に基本変形を行って簡単化する。

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \{ (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a) \}$$

$$= abc \{ (b-a)(c-a)(c+a) - (b-a)(b+a)(c-a) \}$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c-b) = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

解答・問 28-02

前問と同じ行列式を、今度は余因子展開を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。ヒント：前問と共通。

(1) 列による基本変形を利用したあと、余因子展開を行う。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2(3 \cdot 2 - 1 \cdot 6) = 0$$

(2) 前問と同じように簡単化したあと、余因子展開を行う。

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= abc \{ (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a) \}$$

$$= \dots = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

蛇足・余因子展開の要点

二年生のうちは 3×3 行列までしか取り扱わないが、三年生以降の代数・幾何の学習のために、特に重要なポイントを先にまとめておく（教科書 p.112~116）。 $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A| = \det A$ に関して、以下の性質が成り立っている。

- 行列式の定義 → 教科書 p.97 を参照。ただし順列や転倒数などの新しい概念を使うため、それらを先に学習する必要がある。
- 十字切除行列。行列 A の第 i 行 j 列を切除して決まる $(n-1) \times (n-1)$ の行列を、十字切除行列 $D_{ij}(A)$ とする。図 1 を参照。
- 余因子。行列 A の第 ij 番目の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ij}(A)| \quad (1)$$

と定義される。つまり十字切除行列の行列式と符号係数 $(-1)^{i+j}$ から決まる。

- 定理。第 i 行に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (2) \\ &= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}. \quad (3) \end{aligned}$$

ここで例えば $\tilde{a}_{i2}$ は行列 A の第 i 行と第 2 列を十字切除して決まる余因子である。

- 定理。第 j 列に関する余因子展開。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \quad (4) \\ &= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad + \begin{vmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}. \quad (5) \end{aligned}$$

ここで例えば $\tilde{a}_{2j}$ は行列 A の第 2 行と第 j 列を十字切除して決まる余因子である。

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{除外}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

図 1 十字切除行列 $D_{ij}(A)$ の模式図

- 余因子行列。 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を次式で定義する。

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

転置をとっていることに注意せよ。

後期 29 [2026/01/14] 演習課題

締め切り＝なし（試験直前のため）。自主学習用であり、提出不要。

問 29-01

（復習） 3×3 型行列 A の行列式を考える。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

以下ではサラスの公式は既知として使って良い。

(1) 転置行列 tA について

$$|{}^tA| = |A|$$

を証明せよ。即ち、行列式では「行から列」あるいは「列から行」への置き換えを行っても、値は変わらない。したがって以下で証明するすべての操作について、行から列に置き換えた場合も同様に成立する。

(2) 以下では第 i 行を R_i と略記する。次式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k|A|$$

尚、 R_2 や R_3 を k 倍した場合でも同様である。

(3) 行の入れ換え $R_1 \longleftrightarrow R_2$ に対して、

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)|A|$$

を証明せよ。尚、 $R_1 \longleftrightarrow R_3$ や $R_2 \longleftrightarrow R_3$ に対しても、同様に符号が反転する。入れ換え操作を二回行えば元に戻る。

(4) 次式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

(5) 次式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(6) 次式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = |A|$$

尚、 R_2 や R_3 を定数倍して別の行に加えても、同様に行列式の値は不変である。

問 29-02

（復習） 3×3 型行列 A の行列式について、サラスの公式などを利用して、次式を証明せよ（第 1 行についての余因子展開）。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1) \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

尚、前問で証明した事項と組み合わせることで、任意の行または列についての余因子展開の公式も導ける。

解答・問 29-01

(復習) 次の行列式をサラスの公式を用いて計算せよ。(2) については因数分解した形で答えよ。

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) |B| = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(1) 列による基本変形を利用したあと、サラスの公式を使う。

$$\begin{aligned} (1) |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12 - 12 = 0 \end{aligned}$$