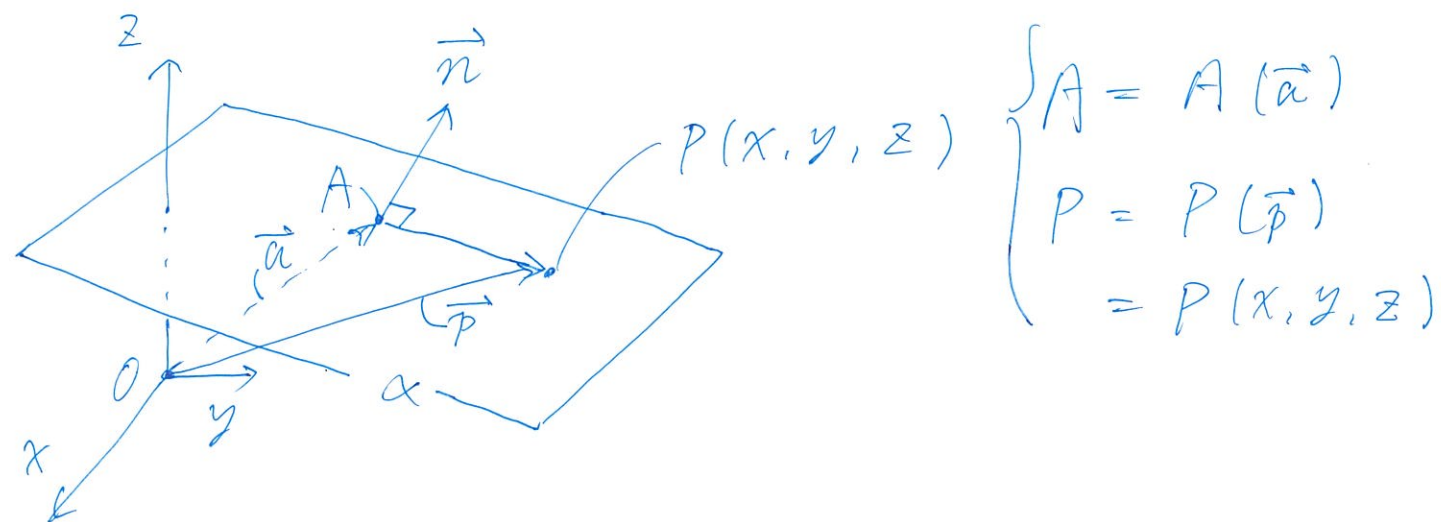


<9/20, 土, 2025> 2-4 代数・幾何 17 用ノート

後期最初 = 第 17 週、空間ベクトルの図形への応用 (4)

本日 → 空間内の平面の方程式 (p. 40 ~ 42)



3次元 (xyz) 空間内の平面 α を考える。

α を決めるためには $\left\{ \begin{array}{l} \text{法線ベクトル } \vec{n} \\ \alpha \text{ 上の 1 点 } A(\vec{a}) \end{array} \right\}$ が決まれば良い。

平面 α 上のある点 $P = P(\vec{p}) = P(x, y, z)$ とする。

$\vec{n} \perp \alpha \rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AP} = (\vec{p} - \vec{a})$ 、内積を使って、

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \quad \dots \text{“平面 } \alpha \text{ のベクトル方程式”}$$

$$\text{つまり } \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = (x, y, z) \\ \vec{a} = (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{n} = (a, b, c) \end{array} \right\} \text{ と成分表すと、}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

平面 α の方程式 (p. 41)

ただし、実際には (x, y, z) のみが変数。

また、 (a, b, c) と (x_0, y_0, z_0) は定数なので、

$$(\text{上式}) \rightarrow ax + by + cz$$

$$ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$d \equiv -ax_0 - by_0 - cz_0 \text{ として、}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

平面 α の方程式 ②

法線ベクトル $\vec{n}$ ← $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 最初から与えられた。} \\ \text{② 直線の方程式から。} \\ \text{③ 別の面の方程式から。} \end{array} \right.$

① の例 → 省略。

② の例 = 例題 1.17 (p. 41) (x_0, y_0, z_0)

$$l: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{5} \text{ に垂直で } A(2, 4, -3) \text{ を通る平面は?}$$

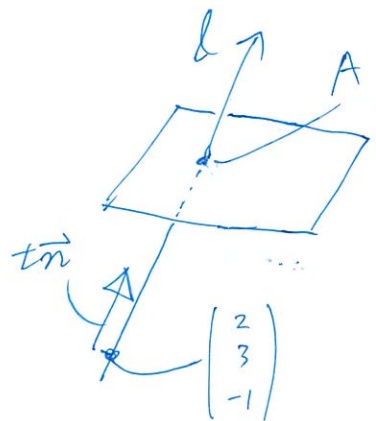
$$l \text{ に垂直} \rightarrow \vec{n} = (2, -3, 5), \text{ 従って、} \quad (=0) \\ \alpha: 2(x-2) + (-3)(y-4) + 5(z-(-3)) = 0 \rightarrow 2x - 3y + 5z + 23 = 0$$

②の例 B = 問 1.51, (4) (p.41)

直線 $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3-t \\ z = -1 \end{cases}$ に垂直で A(-1, 4, 1) を通る平面は?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \vec{n}$$

これが平面に対する法線 $\vec{n}$ となる。



$$\Rightarrow \text{平面: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$3(x - (-1)) + (-1)(y - 4) + 0(z - 1) = 0$$

$$3x + 3 - y + 4 + 0 = 0$$

$$3x - y + 7 = 0$$

③の例 = 問 1.51, (5) (p.41)

平面 $3x - y + 2z + 5 = 0$ と平行で A(3, 0, 2) を

通る平面は?

$$\rightarrow \vec{n} = (3, -1, 2) \text{ といふこと。}$$

$$\& \vec{a} = (3, 0, 2) \text{ より、}$$

$$\text{平面: } \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \text{平面: } 3(x - 3) + (-1)(y - 0) + 2(z - 2) = 0$$

$$3x - y + 2z - 13 = 0$$

要するに、平面の方程式は以下の形式になる。

$$ax + by + cz + d = 0$$

ちなみに、全体を定数倍しても良い。

$$f ax + f by + f cz + f d = 0$$

d 等値 $\llcorner \llcorner$ 2 も良い。

$$(Ax + By + Cz)d + d = 0$$

等価

3点を通る平面 内

$\rightarrow$ xy 空間で3個の点が指定されると、それを通る平面は一意に求まる。

例 = 例題 ^{1.18} ~~1.18~~ (p.42)

A(1, 1, 2), B(-1, 2, 3), C(4, 2, -1) を通る平面?

$\rightarrow ax + by + cz + d = 0$ に3個の点を代入して、

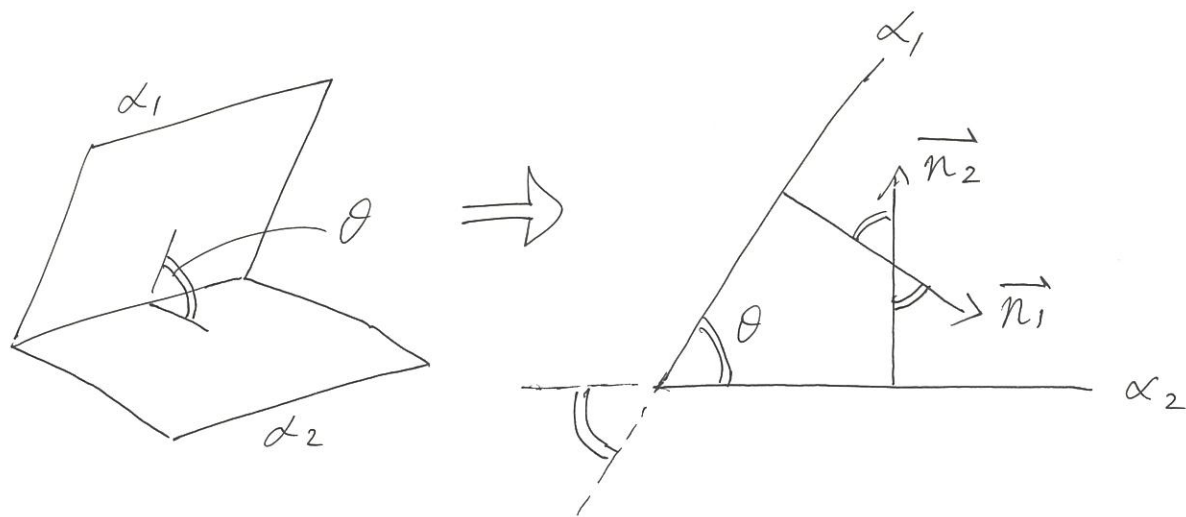
$$\begin{cases} a + b + 2c + d = 0 \\ -a + 2b + 3c + d = 0 \\ 4a + 2b - c + d = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{17}d \\ b = -\frac{3}{17}d \\ c = -\frac{5}{17}d \end{cases} \text{ と求まる。}$$

$$\left(-\frac{4}{17}x - \frac{3}{17}y - \frac{5}{17}z\right)d + d = 0$$

$$+4x + 3y + 5z - 17 = 0$$

本日 → 2つの平面のなす角 & 直線と平面の交点 (p.43)



2つの平面のなす角 (p.42)

α_1 と α_2 の法線ベクトルを $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ とする。2つの平面のなす角 = $\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ のなす角に等しい。よって、

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \quad \text{となる。ただし}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{とする。}$$

~~~~~  
鋭角のみ。

例 = 問 1.53, (1)

$$\begin{cases} \alpha_1: 4x - y - z = 5 \rightarrow \vec{n}_1 = (4, -1, -1) \\ \alpha_2: x - 2y + z = -3 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -2, 1) \end{cases}$$

\* 一般式:  $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \leftrightarrow \vec{n} = (a, b, c)$

$$|\vec{n}_1|^2 = 16 + 1 + 1 = 18, \quad |\vec{n}_2|^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 8 + 2 - 1 = 9, \quad \text{よって、}$$

$$\cos \theta = \frac{9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{ただし } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$\begin{cases} \alpha_1: 3x + ky + 8z = 1 \rightarrow \vec{n}_1 = (3, k, 8) \\ \alpha_2: 2x + 5y - 2z = -5 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, 5, -2) \end{cases}$$

2つが直交するように  $k$  を定めよ。つまり  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 6 + 5k - 16 = -10 + 5k, \quad \text{2つが } \theta = 0 \text{ に}$$

なれば  $\cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  となり,  $k = 2$

直線と平面の交点 (p.43)

ドリル p.59

平面  $\alpha$ :  $ax + by + cz + d = 0$

直線  $l$ :  $\frac{x-p}{h} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n}$

これらが与えられたとき、その交点は次のようにして求める。

① 直線  $l$  を媒介変数  $t$  を使って表す。

$$\frac{x-p}{h} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n} = t$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ht + p \\ y = mt + q \\ z = nt + r \end{cases} \quad \text{--- (*)}$$

② 2の式を平面の方程式に代入する。

$$a(ht+p) + b(mt+q) + c(nt+r) + d = 0$$

(\*\*)

(つづく)

(つづき)

③ (2) 式を  $t$  について解く。

$$a(kt+p) + b(mt+q) + c(nt+r) + d = 0$$

$$t(ak + bm + cn) = -d - ap - bq - cr$$

$$t = \frac{-d - ap - bq - cr}{ak + bm + cn}$$

④ この  $t$  を元の直線  $l$  の方程式に代入して、交点の座標が得られる。

$$\begin{cases} x = p + kt = \text{~~~~~} \\ y = q + mt = \text{~~~~~} \\ z = r + nt = \text{~~~~~} \end{cases} \rightarrow \text{具体値を代入して求める}$$

ドリル p.59

例  $\alpha: 4x + 2y + z = 9$  と  $l: \frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-9}{4}$  の交点は?

① まず  $l$  を媒介変数表示して

$$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = t + 4 \\ z = 4t + 9 \end{cases}$$

② これを  $\alpha$  に代入すると、

$$4(3t+7) + 2(t+4) + 1 \cdot (4t+9) = 9$$

③  $12t + 28 + 2t + 8 + 4t + 9 = 9$   
 $18t + 36 = 0 \rightarrow t = -2$

④  $t = -2$  を  $l$  の式に代入して

$$\begin{cases} x = 3(-2) + 7 = 1 \\ y = (-2) + 4 = 2 \\ z = 4(-2) + 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点} = (1, 2, 1)$$

例 3.2 = p.54 (p.43)

$$\alpha: 2x - y + 3z - 6 = 0$$

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

①  $l: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$

②  $\alpha$  に代入して、 $2(t+2) - 1 \cdot (2t+1) + 3(-t-1) - 6 = 0$

③  $t$  について解くと  $2t+4 - 2t-1 - 3t-3 - 6 = 0$

$$-3t - 6 = 0, t = -2$$

④  $t = -2$  を  $l$  の式に代入して、

$$\begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = -4 + 1 = -3 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点} = (0, -3, 1)$$

余談

2つのベクトル  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  で張られる平面の方程式は?、ただし原点を通るとする。

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$
$$\equiv (c_x, c_y, c_z) \text{ とすれば、}$$

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0 \text{ と求まる。}$$

<10/7, 火, 2025> 2-4 代数・ベクトル 19 用ノート

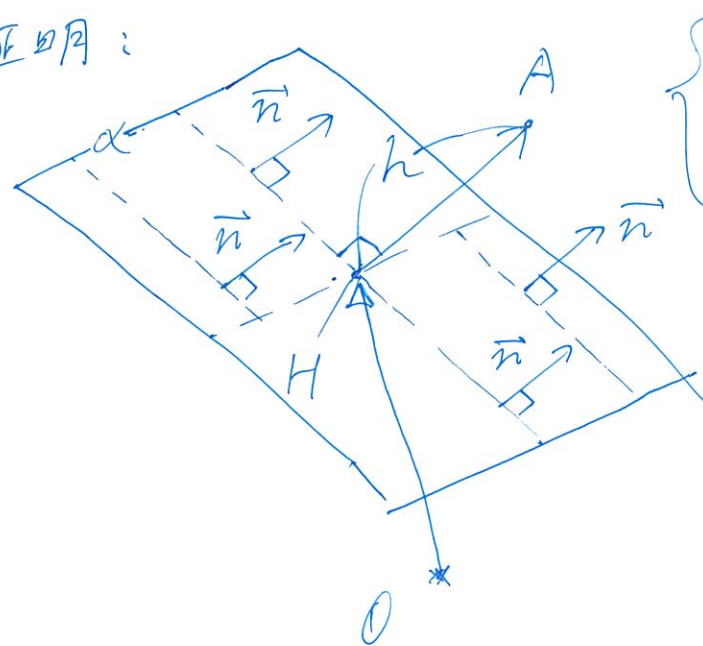
本日 → “点と平面の距離” & “1次独立・1次従属”

点と平面の距離 (p. 44)

点  $A(x_0, y_0, z_0)$  と平面  $\alpha: ax + by + cz + d = 0$  の距離  $h$  は次式で与えられる。

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

証明:



$$\begin{cases} A = A(x_0, y_0, z_0) \\ H = H(x, y, z) \end{cases}$$

$$\rightarrow h = \overline{AH} = |\overline{HA}|$$

$H$  は  $\alpha$  上の点なので  
 $ax + by + cz + d = 0$

ベクトルで表すと、  
 $\overline{OH} = (x, y, z)$   
 $\overline{OA} = (x_0, y_0, z_0)$

平面  $\alpha$  の法線ベクトルは  $\vec{n} = (a, b, c)$

ベクトル  $\overline{HA}$  が  $\alpha$  に垂直なので、 $\overline{HA} = t\vec{n}$  より、  
 $\overline{HA} = t(a, b, c)$

$$\overline{HA} = \overline{OA} - \overline{OH}$$

$$\overline{OH} = \overline{OA} - \overline{HA}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) - t(a, b, c) \quad (\text{★})$$

(★) これを  $ax + by + cz + d = 0$  に代入すると、

$$a(x_0 - ta) + b(y_0 - tb) + c(z_0 - tc) + d = 0$$

$$t(a^2 + b^2 + c^2) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$$

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

また、 $\overline{HA} = t\vec{n}$  より、

$$h = |\overline{HA}| = |t| \cdot |\vec{n}| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{となる。}$$

1 1次独立と1次従属 (p. 44)

$(x, y, z)$  空間内の3つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  に対し、

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = m = n = 0 \\ \text{これ以外の解が無い。} \end{matrix}$$

が成立するとき、これらのベクトルは“1次独立”という。  
 そうでない場合、“1次従属”という。

1次独立 (従属) = 線形独立 (従属)

1次独立の定理 (p. 45)

(1)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が 1次独立  $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は同一平面上にない。

(2) “ が 1次従属  $\Leftrightarrow$  “ は “ にかける。

例 = 問 1.56 (p.45)

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b} + n'\vec{c}$$

$$\rightarrow (l'-l)\vec{a} + (m'-m)\vec{b} + (n'-n)\vec{c} = \vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は}$$

1次独立なのを、 $l'-l = m'-m = n'-n = 0$ , よって、

$$l'=l, m'=m, n'=n$$

来週の予告: 次回から“行列”という数学量を取り扱う。

行:  $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$ , 横に並べた。 } 2の2つはベクトル

列:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 縦に並べた。

行列:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ , 縦横に並べた。  
↓  
ベクトルをさらに拡張したもの、ともみなせる。

行  $\times$  列 と 列  $\times$  行 本で ~~作~~ 作られた行列 =  $m \times n$  行列。

また  $m=n$  のときに限って、 $n$  次正方行列と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \times 4 \text{ 型}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \text{ 次正方 } (3 \times 3 \text{ 型})$$

<10/22 水, 2025> 2-4 代数・キカ [20] 用ノート

本日 → 行列の基本、演算 (p. 49 ~)

(row) 行: (1, 2, 3, 4) ----- ベクトル

(column) 列:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$  ----- ベクトル

行列 (matrix):

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

→ 2 行  
3 列

42  
第 42 成分 = 4 行 2 列目  
の成分。

(4, 2) 成分とも書く。

行列の成分 (p. 49)

第  $i$  行かつ第  $j$  列の成分を  $(i, j)$  成分と書き、

$A_{ij}$  や  $a_{ij}$  と表記することが多い。

行列の ~~相等~~ (p. 50)

型

48

→ 行ベクトルと列ベクトルの本数で決まる。行  $\times$   $m$  本と  
列  $\times$   $n$  本なら  $m \times n$  型。

→  $m = n$  なら  $n$  次正方行列と呼ぶ。

行列の相等 (p. 50)

2 つの行列  $A$  &  $B$  について、等

$A = B \Leftrightarrow A$  と  $B$  が同じ型、かつ、 $\checkmark$   $(i, j)$  成分がすべて  
の  $(i, j)$  について等しい。

零行列 (p. 50) → すべての成分 = 0。

対角行列 (p. 51) → 正方で、 $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 、つまり、  
 $i \neq j$  の成分がすべて = 0。

三角行列 (p. 51) → 正方で、以下のような行列

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  ----- “上三角行列”

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  ----- “下三角行列”

単位行列 (p. 51)

→ 対角行列のうち、~~対角~~  $(i=j)$  の成分 = 1 のもの。

特に  $E$  や  $I$  と書くことが多い。

$$E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

行列の和&差と定数倍 (p. 52)

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\checkmark A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\checkmark kA = (ka_{ij}) = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \text{ と定義する。}$$

行列の積 (かけ算) (p. ~~52~~<sup>53</sup>)

$$AB \neq BA$$

→ 条件: Aの列数 ~~=~~ Bの行数が成り立っている。

例: Aが  $l \times m$  型, Bが  $m \times n$  型なら OK。

→ 2のとき、 $C = AB$  は存在する。ただし、順序を入れ替えた  $BA$  は存在するとは限らないので注意!

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}}_{l \times n \text{ 型}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}}_{l \times m \text{ 型}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n \text{ 型}}$$

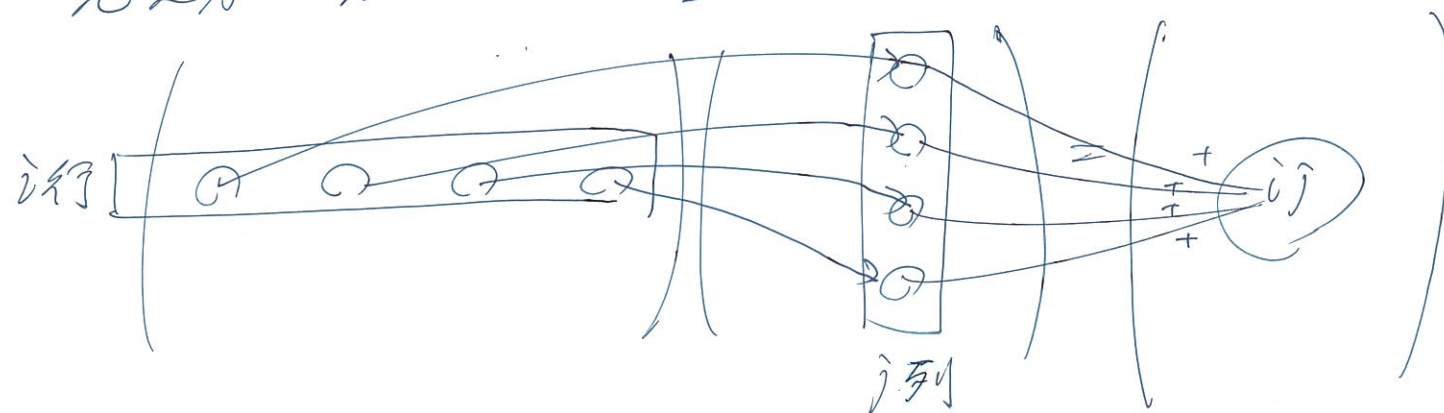
$$\text{例: } (3 \times 1 \text{ 型}) \cdot (1 \times 3 \text{ 型}) = (3 \times 3 \text{ 型}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Cの  $(i, j)$  成分 =  $c_{ij}$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \\ = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ik} \ \cdots \ a_{im}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & \boxed{b_{kj}} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \boxed{b_{mj}} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

覚え方: 左の  $2 \times 1 \times$  右の  $1 \times 2 \times$  !



もう一度、 $AB$  が存在する  $\Leftrightarrow$  Aの列数 = Bの行数

たとえば、 $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}$  のとき、

$$AB = \begin{pmatrix} ap + bs & aq + bt \end{pmatrix}, \text{ OK. } \text{しかし一方で、}$$

$$BA = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ x & x \end{pmatrix}, \text{ これは定義されない! (p. 54)}$$

行列の積 (p.54)

$$, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bs & aq+bt \\ cp+ds & cq+dt \end{pmatrix}, \quad (2 \times 2)(2 \times 2) = (2 \times 2) \text{ 型}$$

$$, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bs \\ cp+ds \end{pmatrix}, \quad (2 \times 2)(2 \times 1) = (2 \times 1) \text{ 型}$$

$$, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (p \ q) = \times \text{ 定義不可}$$

$$, (a \ b) \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = (ap+bs \ aq+bt), \quad (1 \times 2)(2 \times 2) = (1 \times 2) \text{ 型}$$

$$, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = \times \text{ 定義不可}$$

$$, (a \ b) \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = ap+bs, \quad (1 \times 2)(2 \times 1) = (1 \times 1) \text{ 型}, \text{ スカラー}$$

$$, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} (p \ q) = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix}, \quad (2 \times 1)(1 \times 2) = (2 \times 2) \text{ 型}$$

例 =  $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  (p.54)

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 5-6 & 0-4 \\ 12+1 & 15+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 13 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & -8+1 \\ 5+9 & -10+3 \\ 0+6 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & -7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

一方、順序をひっくり返すと定義不可。

$$(7)' \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \times$$

<10/29, 水, 2025> 2-4 代数・幾何 [2] 用 1-ト

※ 前回 1-ト の 問 2.4 (p.54) の (6), (6)', (7), (7)' の復習  
から 入った方が良さそう。

$$AB \neq BA$$

今日 → 行列の演算 &  $2 \times 2$  行列の逆行列 (p.55~)

行列の演算 (p.55)

→ 各自で読んで! すべて直観的に理解できるはず。

可換 (p.56)

$AB = BA$  が成り立つ (レアケ-2) ととき、 $A$  と  $B$  は可換。

例 = ~~例題 2.2~~ 問 2.6 (p.56)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  に対し、 $A$  と可換な行列  $X$  を求めよ。

$$AX = XA, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ と置くと、}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - z & 2y - w \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -x + 2y \\ 2z & -z + 2w \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - z = 2x \\ 2y - w = -x + 2y \\ 2z = 2z \\ 2w = -z + 2w \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{とやあえず } z = 0 \dots \textcircled{1} \\ \text{2本目から } x = w \dots \textcircled{2} \end{array}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

零因子 (p.56) →  $A \neq 0$  &  $B \neq 0$  でも  $AB = 0$  となる  
2 ともある。行列ならでは。

転置行列 (p.57)

行と列を入れ替えた行列。  $A \rightarrow {}^tA$

$$\begin{cases} m \times n \text{ 型} \rightarrow n \times m \text{ 型} \dots\dots \text{ここは要注意!} \\ (a_{ij}) \rightarrow {}^tA = (a_{ji}) \end{cases}$$

~~転置行列~~ 例:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow {}^tB = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

転置行列の性質 (p.57)

$$(1) {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$(2) {}^t(kA) = k {}^tA, \quad k = \text{定数}$$

$$(3) {}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \dots\dots \text{2! 重要!}$$

$$(4) {}^t({}^tA) = A$$

(for  $2 \times 2$  行列)

例 = 問 2.9 (p.57), 上記のうち (3) 式の確認

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ と置く。}$$

$${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

2行12 に対し、

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow {}^t(AB) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

各成分が  
等しい。

見23!

対称行列 (p.58) ...  $tA = A$  である行列  $A$ .

交代行列 (p.58) ...  $tA = -A$  " "

対称と交代行列の作り方 (p.58)

ある正方向行列  $A$  から,

$$(1) B = A + tA \rightarrow B \text{ は対称: } tB = B$$

$$(2) C = A - tA \rightarrow C \text{ は交代: } tC = -C$$

\* 証明は各自で。× かなり簡単。

2次正方向行列の逆行列 (p.59)

$$\rightarrow XA = AX = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (単位行列) とした}$$

行列  $X$  を,  $X = A^{-1}$  と書き、 $A$  に対する逆行列と呼ぶ。\*  $A^{-1}$  が ~~定義~~ 存在しないケースもある。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の  $A^{-1}$  の公式 (p.59 ~ p.60)

$$(1) \det A = ad - bc = |A| \neq 0 \text{ のとき、} \textcircled{\text{正則}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad * \text{証明は例題 2.3 を。}$$

\*  $\det A = |A|$  と書くが、 $|A| \leq 0$  にもなり得る!  
マズいのでやめよう。

$$(2) \det A = ad - bc = |A| = 0 \text{ のとき、}$$

$A^{-1}$  は存在しない。  $\textcircled{\text{非正則}}$

例 = 例 2.11 (p.60)

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \det A = 20 - 6 = 14, A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & +3 \\ +2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \det B = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}; \det C = 6 - 6 = 0, \text{非正則, } C^{-1} \text{ は存在しない。}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0.3 & 1.0 \\ 1.2 & 6.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{6}{5} & 6 \end{pmatrix}, \det D = \frac{18}{10} - \frac{6}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$D^{-1} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{5}{3} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 60 & -10 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質 (p.62)

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A$$

(可能。)

$$(2) (tA)^{-1} = t(A^{-1}) \dots \text{転置と逆元の順序は交換}$$

$$(3) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \dots \text{下記。}$$

$$X = AB \text{ と置く、} Y = B^{-1}A^{-1} \text{ と置くと、}$$

$$XY = AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

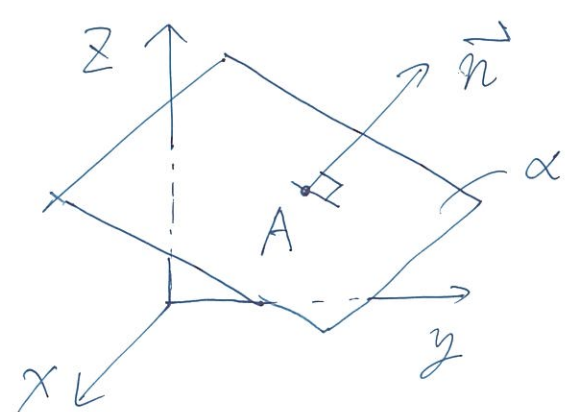
$$YX = B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

よって、 $X = AB$  の逆行列は  $B^{-1}A^{-1}$  である。

<11/5, 水, 2025> 2-4 代数・幾何 [22] 用ノート

本日 → 中間直前の復習

✓ 平面の方程式 (p. 40 ~ ~~42~~)



$$\begin{cases} A = A(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{n} = (a, b, c) \end{cases}$$

とすると、この平面  $\alpha$  は、

$$\alpha: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

または、 $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ ,

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

直線と法線ベクトル

$l: \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$  に垂直な平面の  $\vec{n}$  は、  
 $\vec{n} = (a, b, c)$

媒介変数表示 されている場合は、

$$l: \begin{cases} x = \alpha + t \cdot k \\ y = \beta + t \cdot l \\ z = \gamma + t \cdot m \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + t \vec{n}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$  と点  $A(x_0, y_0, z_0)$  が与えられれば、平面  $\alpha$  は解ける。

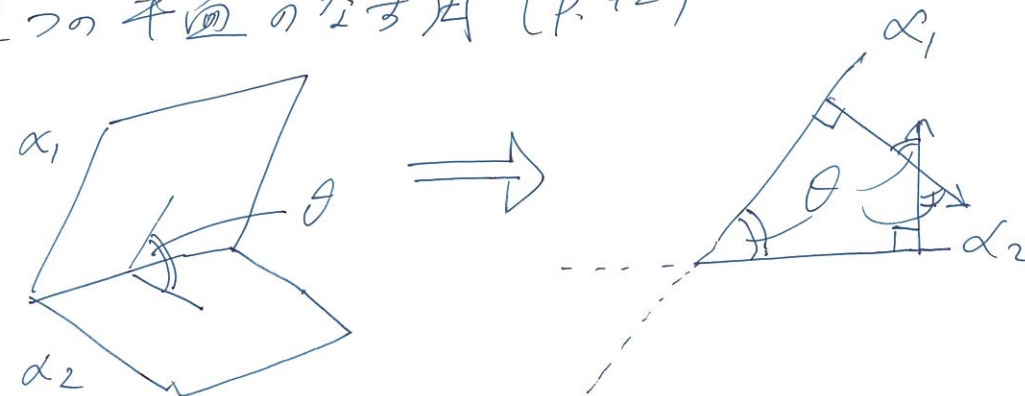
3点を通る平面

→  $x, y, z$  空間内の3点  $A, B, C$  を指定すると、それを通る平面は一意に定まる。

$$\begin{cases} A(x_A, y_A, z_A) \\ B(x_B, y_B, z_B) \\ C(x_C, y_C, z_C) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \text{に代入して、3元連立} \\ \text{方程式 for } \{a, b, c, d\} \\ \text{を解いて求める。} \end{cases}$$

$$\rightarrow a = fd, b = gd, c = hd \text{ など}$$

2つの平面のなす角 (p. 42)



$\alpha_1$  と  $\alpha_2$  のなす角 =  $\vec{n}_1$  と  $\vec{n}_2$  のなす角 =  $\theta$ 、よって

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}, \quad \text{ただし } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とする。}$$

鋭角のみ

直線と平面の交点 (p. 43)

$$\text{平面 } \alpha: ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{直線 } l: \frac{x-p}{k} = \frac{y-q}{l} = \frac{z-r}{m}$$

これらが与えられたとき、その交点は

$$\begin{cases} x = p + kt = \text{---} \leftarrow \\ y = q + mt = \text{---} \leftarrow \\ z = r + nt = \text{---} \leftarrow \end{cases} \quad t = \frac{-d - ap - bq - cr}{ak + bm + cn}$$

を代入して求める。

手順: ①  $\alpha$  を媒介変数表示する。

$$\frac{x-p}{k} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n} = t$$

$$\rightarrow x = kt + p, y = mt + q, z = nt + r$$

② この  $x, y, z(t)$  を  $\alpha$  の式に代入する。

$$a(kt+p) + b(mt+q) + c(nt+r) + d = 0$$

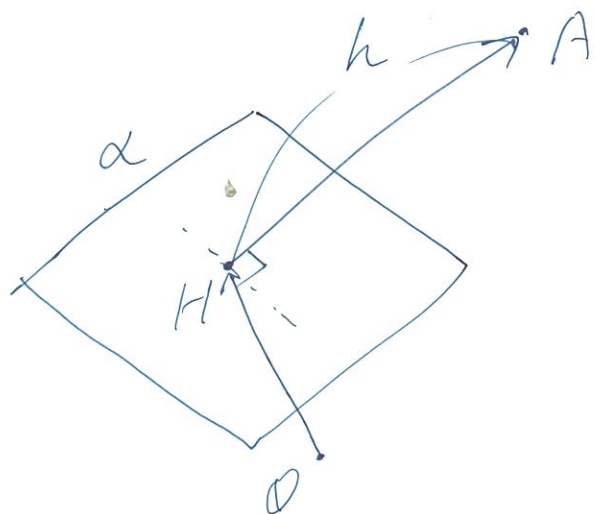
③ 上の式を  $t$  について解く。

$$t = \frac{-d - ap - bq - cr}{ak + bm + cn} = \text{---} \quad (\text{具体値})$$

④  $\alpha$  の方程式に代入すれば交点が求まる。

点と平面の距離 (p. 44)

$A(x_0, y_0, z_0)$  と  $\alpha: ax + by + cz + d = 0$   
の距離  $h$  は次式で表す。



$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

→ 証明は教科書に! 覚えておけ! OK!

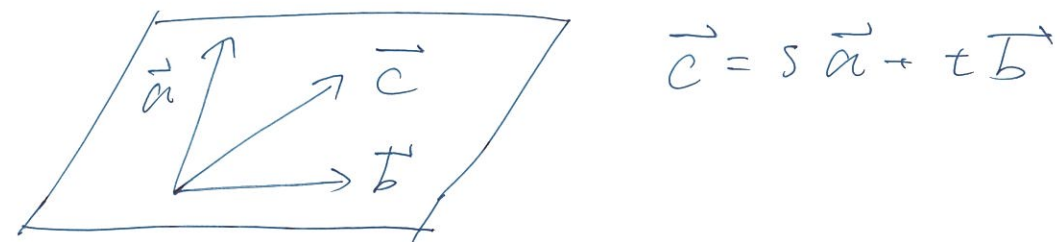
1次独立と1次従属 (p. 44)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が1次独立であるとは、

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0} \rightarrow l = m = n = 0 \text{ しか解がない、ということ。}$$

1次独立でないのなら、1次従属と呼び、

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は同じ平面上に置ける。



行列  $\rightarrow m \times n$  型行列とは  ~~$m \times n$  型~~  
行 ( $\rightarrow$ )  $\times m$  本と  
列 ( $\downarrow$ )  $\times n$  本の配置で数を並べたもの。

例:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$  ... 3(行)  $\times$  5(列) 型,

$$A_{11} = 1, A_{13} = 7, A_{31} = 3, A_{25} = 14, A_{34} = 12$$

行列の ~~計算~~ 和と差・定数倍 (p. 52)  $\rightarrow$  各自で!

行列かけ算 (p. 53)  $\rightarrow$  各自で!

$$AB \neq BA$$

## 転置行列

${}^tA$  ...  $A$  の行と列を入れ替えたもの。  
 $m \times n$  型  $\rightarrow n \times m$  型  $\wedge$ 。

$$, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$, {}^t(kA) = k {}^tA$$

$$, {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

$$, {}^t({}^tA) = A$$

## 逆行列

$$A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{となるような } A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

重要!

## 対称行列

$$A^{-1} = {}^tA$$

本日 --- 逆行列の応用 (p. 62~64) &  
行列の基本変形 (p. 65~68)

25

逆行列 (復習)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対して } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

①  $|A| = \det A = ad - bc \neq 0 \Rightarrow A$  は正則

②  $|A| = ad - bc = 0 \Rightarrow A^{-1}$  は存在しない。

2つの正則行列  $A$  &  $B$  について、

③  $(A^{-1})^{-1} = A$

④  $(tA)^{-1} = t(A^{-1})$

⑤  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,  
順番が入れかわる。

逆行列を用いた2元連立1次方程式の解法  
(p. 62~64)

例:  $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

結果、

$A\vec{x} = \vec{b}$ ,  $A$  は正則より  $A^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  より、

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\underbrace{E\vec{x}}_{=\vec{x}} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

よって  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  と解ける。

$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$  の係数行列  $A$  が正則のとき、  
その解は、

$$\Downarrow \\ A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と与えられる。

\*  $A$  が非正則  $\rightarrow$  ①  $x=t$  &  $y=y(t)$  の解、  
② 解なし、の2つのパターン。

例=例題 2.6 (p. 63)

(1)

$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$   
 $A^{-1}$  は存在して、

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, |A| = -12 - (-12) = 0,$   
よって  $A$  は非正則。

元の式より、どちらからでも  $y = \frac{3x-1}{2}$ 。よって  $x=t$  と

おくと、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{3t-1}{2} \end{pmatrix}$  \*  $t$  は任意実数。

(3) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 12 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, |A| = -12 - (-12) = 0,$$
  
よって  $A$  は非正則。  
第1式  $\times 2$  - 第2式  $\Rightarrow 0 = -10$ , 矛盾。解なし。

行列の基本変形とその応用 (p. 65)

次の3つの操作を基本変形という。

- ① 2つの行 (または列) を入れ替える。
- ② ある行 (または列) に 0 でない定数をかけた。
- ③ ある行 (または列) に 別の行 (または列) の定数倍を加える。

行列の階数:  $\text{rank } A = r$  (p. 65)

$A \rightarrow (\text{基本変形} \times N \text{回}) \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & * & \dots & * \\ 0 & & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & * \\ 0 & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & a_{rj_r} & * & \dots \\ 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1つゼロ成分が  $r$  段残る。  
↑  
含む行  
||  
 $r$  段の階段行列。

このような変形ができるとき、元の行列  $A$  の階数 (rank) は  $r$ , という。  $\text{rank } A = r$

例 = 例題 2.7

\*以下では  $\begin{cases} R_n \cdots \text{第 } n \text{ 行 (row)} \\ C_n \cdots \text{第 } n \text{ 列 (column)} \end{cases}$  とする。

(1) 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} R_2 \oplus R_1 \cdot 4 \\ R_3 \oplus R_1 \cdot (-3) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow //$$

$$\rightarrow (R_3 \oplus R_2 \cdot (2)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \text{よって } \text{rank } A = 3 //$$

(2) 
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (R_1 \leftrightarrow R_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow //$$

$$\rightarrow (R_3 \oplus R_1 \cdot (-2)) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (R_3 \oplus R_2 \cdot (-2)) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  
よって  $\text{rank } B = 2 //$

転置行列の階数 (p. 67)

$m \times n$  型行列  $A$  について,  $\text{rank } A = \text{rank } ({}^t A)$ ,  
つまり  $A$  と  ${}^t A$  の階数は同じ。

階段行列の作り方 (p. 68)

→ 各自で!

問 25-03

行列の基本変形を用いて、次の行列の階数を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R_1 \otimes (\frac{1}{3}) \\ R_2 \otimes (\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\text{rank } A = 2}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{R_1 \leftrightarrow R_3\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \underline{\text{rank } B = 3}$$

$R_m$  ... 第  $m$  <sup>行</sup> ~~行~~ (row)

$C_n$  ... 第  $n$  列 (column)

$R_1 \leftrightarrow R_2$  ... 第1行と第2行の交換

$R_1 \oplus R_2 \cdot (-3)$  ... 第1行に第2行の  $(-3)$  倍を加える。

$R_1 \otimes (-4)$  ... 第1行を  $(-4)$  倍する。

\*  $C_n$  についても同様。

<12/10, 水, 2025> 2-4 代数・キカ 26 用ノート

本日 → 前回のつづき = 行列の基本変形 (p. 69 ~)

(先出し) 階数と正則行列 (p. 77)

$n \times n$  行列  $A$  が  $\text{rank } A = n \iff A$  は正則  
 $\iff A^{-1}$  が存在する。

掃き出し法① (p. 69)

拡大係数行列  $(A|\vec{b})$  from  $A\vec{x} = \vec{b}$  :

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{のときは、}$$

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \text{ が拡大係数行列となる。}$$

掃き出し法 =  $(A|\vec{b})$  を行基本変形によって

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{array} \right) \text{ の形にすると。これができると、}$$

元の方程式の解  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  と求まる。  
正確には、階段行列でもほぼ解ける。

掃き出し法② (p. 71)

~~連立~~ 拡大係数行列  $(A|\vec{b})$  をより簡単な  
階段行列  $(A'|\vec{b}')$  へ変形して、解を求めた。

例 = 例題 2.8 (p. 70)

$$(1) \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 3x + y - z = 4 \\ 2x - 2y + z = 7 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

各自で。

$$\iff (A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{m} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \underline{x = 2, y = -1, z = 1}$$

$$(2) \text{ 5式 } \iff (A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{m}$$

$$\xrightarrow{m} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -y + 2z \text{ のみ！}$$

$\iff y = s, z = t$  と媒介変数変換すると、

$$\underline{x = -s + 2t, y = s, z = t}$$

例題 2.8 (p.70~71) のつづき:

(3) & (4) → 左辺が同じなので、

$$(A | \vec{b}_{(3)}, \vec{b}_{(4)}) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 11 \end{array} \right) \text{ と置いて}$$

一気に解けた。

$$\rightarrow m \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right),$$

$\vec{b}'_{(3)} \quad \vec{b}'_{(4)}$

$$\vec{b}'_{(3)} \text{ より、(3) の最終形は } \begin{cases} x - 2z = -2 & z = t \text{ とおくと、} \\ y + z = 4 \end{cases}$$

$$(3): x = 2t - 2, y = -t + 4, z = t$$

$$\vec{b}'_{(4)} \text{ より、(4) の最終形は } \begin{cases} x - 2z = -2 \\ y + z = 4 \\ 0 = 5 \end{cases} \rightarrow \text{よって、(4) 解なし!}$$

解の自由度 (p.72)

連立方程式の解に媒介変数が  $d$  個必要。

⇔ 解の自由度が  $d$ 。

連立方程式が  $A\vec{x} = \vec{b}$  ( $A$  は  $m$  行  $n$  列、 $\vec{b}$  と  $\vec{x}$  は  $n$  成分ベクトル) のとき、

$$d = n - \text{rank } A$$

階数と連立一次方程式 (p.73)

連  
 $m$  行  $n$  列の係数行列  $A$  を含む連立方程式:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \dots (*)$$

拡大係数行列を  $(A | \vec{b})$  とする。

(I)  $\text{rank } A = \text{rank } (A | \vec{b}) = n \Leftrightarrow (*)$  はただ一組の ~

(II)  $\text{rank } A = \text{rank } (A | \vec{b}) < n \Leftrightarrow (*)$  の解の自由度は  $n - \text{rank } A$

(III)  $\text{rank } A \neq \text{rank } (A | \vec{b}) \Leftrightarrow (*)$  は解なし。

(II) の例 = 例題 2.8, (4):

$$(A | \vec{b}_{(4)}) \rightarrow m \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$\text{rank } A = 2$ , に対して、 $\text{rank } (A | \vec{b}_{(4)}) = 3$ 。

実際、解なしであった。

## 同次連立一次方程式 (p.74)

→  $\vec{b} = \vec{0}$  である連立一方。

例: 
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

~~$x=1, y=2, z=5$~~

→  $x = \frac{11}{5}t, y = \frac{7}{5}t, z = t$

## 階数と同次連立一次方程式 (p.75)

変数が  $n$  個の同次  $m$  の係数行列を  $A$  とするとき、

(I)  $\text{rank } A < n \Leftrightarrow$  自明でない解を持ち、  
 自由度  $d = n - \text{rank } A$   
 →  $d$  個の媒介変数が必要。

(II)  $\text{rank } A = n \Leftrightarrow$  自明な解:  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$  のみを持つ。

例 = 上記の例:  $(A|\vec{b}) = (A|\vec{0}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{R}$

→  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , rank  $A = 2$   
 ↓  
 $d = 3 - 2 = 1$   
 省略!

## 掃き出し法による逆行列の求め方 (p.76)

$A$  を  $n \times n$  の正則行列とすると  $A^{-1}$  は存在が保障されている。このとき、 $E =$  単位行列として、

$(A|E) \rightarrow m \rightarrow (E|X)$  と変形できたと

すると、 $X = A^{-1}$  である。→  $(E|A^{-1})$

理由:  $A^{-1}$  を求めることは、 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$  について、

$A \vec{x}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を一気に解くことに  
 等価である。

実際、~~右辺 =  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$~~  と置けば、

$(A|\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \left( A \mid \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (A|E) \rightarrow \mathcal{R}$

→  $(E|X)$  と変形できたのなら、解として

$E \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = X$  が得られた  
 ことになった。

元々、 $A \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = E$  を解こうとしていたのだから、

$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = A^{-1}$ , よって  $X = A^{-1}$  に等しい。

※ 前回の残り = 掃き出し法による逆行列 (p.76) を先に。

行列式 (p.80~)

→ (英) determinant,  $\det A = |A|$  (いつ? )  
行列  $A$  ( $n \times n$  の正方行列とす) の固有性質の)

$A = "2 \times 2" = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$

$A = "3 \times 3" = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\rightarrow A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &+ a_{31}a_{12}a_{23} \end{aligned} \right\}$   
 $- \left\{ \begin{aligned} &a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} \\ &+ a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned} \right\}$   
「サラスの公式」

※  $A$  が “ $4 \times 4$ ” 以上だと、便利な公式は無い。

一般の  $n \times n$  行列の行列式は 3 年生でやる。

問 3.2.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow$   
(1)  $|A| = "4 \times 2" = -18$   
(2)  $|B| = "4 \times 2" = 2$

(3)  ~~$|^t A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$~~  ← 元々  $^t A = A$  だから!  
しかし、これは誤解を招く。

(3)'  
 $|^t B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot 9$   
 $= 48 + 18 + 16 - 12 - 36 - 32 = 34 - 32 = 2, \text{ だね。}$

(4)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 70 \\ 6 & 17 & 51 \\ 6 & 17 & 53 \end{pmatrix}$

$|AB| = 6 \{ 17 \cdot 53 + 17 \cdot 70 + 20 \cdot 51 \} - 6 \{ 17 \cdot 51 + 20 \cdot 53 + 17 \cdot 70 \}$   
 $= 6 \{ 17 \cdot 123 + 20 \cdot 51 \} - 6 \{ 17 \cdot 121 + 20 \cdot 53 \}$   
 $= 6 \{ 17 \cdot 2 + 20 \cdot (-2) \} = 6 \{ 34 - 40 \} = -36,$

実は  $|AB| = |A| \cdot |B|$  であらう。

行列式の性質 (p.82)

(1) 対角 & 三角行列の  $\det$  は対角成分積のみ。

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & a_{22} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ * & a_{22} \\ * & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$

(2)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} = 0$

$$(3) \begin{vmatrix} \boxed{a \ b \ c} \\ d \ e \ f \\ \boxed{a \ b \ c} \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad \text{つまり、}$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha b & c \\ d & \alpha e & f \\ g & \alpha h & i \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{が成り立つ。}$$

$$(5) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(6) ある行の実数倍を他の行に加えても、行列式の値は変わらない。(行の基本変形③)

(7) 2つの行を入れ替えると符号が変わる。

$$(8) |{}^t A| = |A|$$

$$(9) |AB| = |A| \cdot |B|$$

特に(8)より、性質(2)~(7)は列に関する成り立ち。

<12/24, 水, 2025> 2-4 代数・幾何 [28] 用ノート

行列式の余因子展開 (p.85)

2×2 の場合 (簡単)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  の  $(i, j)$  余因子を  $\tilde{a}_{ij}$  とすると、

$$\tilde{a}_{11} = a_{22}, \tilde{a}_{12} = -a_{21}, \tilde{a}_{21} = -a_{12}, \tilde{a}_{22} = a_{11}$$

行列式は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} \quad (i=1, 2) \quad \text{"第 } i \text{ 行に } \sim \text{展開"} \\ &= a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} \quad (j=1, 2) \quad \text{"第 } j \text{ 列に } \sim \text{展開"} \end{aligned}$$

3×3 の場合 (p.85~86)

まず余因子  $\tilde{a}_{ij}$  は、p.85 のように定める。

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

つまり、十字切除行列  $D_{ij}(A)$  を用いると、

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |D_{ij}(A)| \text{ と表される。}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow D_{22}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$|A|$  を余因子展開すると、

$$|A| = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + a_{i3} \tilde{a}_{i3} \quad \text{"第 } i \text{ 行に } \sim \text{展開"}$$

$$= a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + a_{3j} \tilde{a}_{3j} \quad \text{"第 } j \text{ 列に } \sim \text{展開"}$$

計算より……余因子展開の前に、基本変形で  $|A|$  の中身にゼロを多く作りおくこと。

例① = [2] 3.4, (3) (p.87)

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1+a & 2+b & 2+c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{第2行に余因子展開} \\ &= 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= (-1)(1 \cdot b - 2 \cdot a) = \underline{2a - b} \end{aligned}$$

例② = [2] 3.5, (3)

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} z & z & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 1 & x & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} \quad \text{第1行に余因子展開} \\ &= (z-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & y \\ z & z \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} \\ &= (z-1) \cdot z \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{(z-1)z(x-y)} \end{aligned}$$

<1/14, 水, 2026> 2-4 代数・幾何 ~~30~~ 29 用ノート

本日 → 先に前回 (昨年) 出した課題の解説でも。  
その後に復習。

(復) 逆行列と連立方程式 (p. 59 ~ 64)

逆行列:  $AX = XA = E \rightarrow X = A^{-1}$

、 $2 \times 2$  の場合、  
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , ただし  $|A| = ad - bc$

、 $3 \times 3$  以上の場合、公式は無し。掃き出し法  
などのツツツツツを使っで求める。 (しない。)

、 $\det A = |A|$  がゼロの場合、逆行列  $A^{-1}$  は存在)

主な性質: (1)  $(A^{-1})^{-1} = A$

(p. 62)

(2)  $(tA)^{-1} = t(A^{-1})$

(3)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2元連立1次方程式 (p. 63)

$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$  の係数行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が

正則のとき、その解は次式。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

一方  $A$  が正則ではない ( $|A| = 0$ ) のとき、その解は  
無数にあるか、存在しない。  
~~~~~  
↳ p. 64 の "注意" を参考に。

行列の基本変形 (p. 65 ~)

※ 第 n 行を R_n , 第 m 列を C_m などと略記する。

(1) $R_n \leftrightarrow R_m$ & $C_n \leftrightarrow C_m$ (入れ替え)

(2) $R_n \rightarrow kR_n$ ($k \neq 0$) (ある行 or 列の定数倍)

(3) $R_n \rightarrow R_n + kR_m$ (別の行 or 列の定数倍を
加算)

以上の3通りの操作を基本変形と呼ぶ。

階数 (rank)

$$A \rightarrow (\text{基本変形}) \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & * & \cdots & \cdots & * & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ルゼロを含む行が r 段

だけ残っている。このとき、 $\text{rank} A = r$ とする。

$\text{rank}(A) = \text{rank}(tA)$ --- 転置をとっても不変 (p. 67)。

階数と正則性 (p. 77)

$n \times n$ 行列 A に対し、

$$\text{rank } A = n \iff A \text{ は正則} \iff A^{-1} \text{ が存在する。}$$

掃き出し法と連立方程式 (p. 69 ~ 75)

$\Rightarrow$ 時間が無い! 復習は各自で!

掃き出し法と逆行列 (p. 75 ~ 77)

A^{-1} を求める方法として、拡大行列

$$(A|E) \rightarrow (\text{基本変形}) \rightarrow (E|X)$$

と変形できたなら、 $X = A^{-1}$ である。

例 = 問 2.17, (3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$(A|E) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow (R_1 - R_3) \rightarrow \text{??}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_1 - \frac{5}{3}R_2) \rightarrow \text{??}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{22}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (R_1 \times (-\frac{3}{22}), R_2 \times (\frac{1}{3})) \rightarrow \text{??}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{22} & (\frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 22}) & -\frac{2}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{22} & -\frac{15}{22} & +\frac{13}{22} \end{array} \right)$$

$$\parallel \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{22} & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{22} & \frac{4}{22} & \frac{-2}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{22} & \frac{-15}{22} & \frac{13}{22} \end{array} \right), \text{ よって、}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 9 & -15 & 13 \end{pmatrix}$$

次回 $\rightarrow$ 行列式の復習!

テフニク: 検算のズズ

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ ですか?}$$

<1/21, 水, 2026> 2-4 代数. #カ [31]

行列式の復習 → 過去ノート & テキストで!

問 3.5, (1) (p. 87)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= m(\text{例題 3.2 の答より}) = \underline{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

(2)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (R_1 \oplus R_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (3-\lambda) \{ (4-\lambda)(-2-\lambda) + 8 \}$$

$$= (3-\lambda) \{ (\lambda+2)(\lambda-4) + 8 \} = (3-\lambda) \left\{ \lambda^2 - \frac{2}{\cancel{2}}\lambda \right\}$$

$$= (3-\lambda) \cdot \lambda(\lambda-2) = \underline{-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)}$$

$$(3) \quad z(z-1)(x-y)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} z & z & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & y-1 \\ 0 & z-1 & z-1 \end{vmatrix} = z(z-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & y-1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= z(z-1) \left\{ 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 \right\}$$

$$= z(z-1) \{ (x-1) - (y-1) \} = \underline{z(z-1)(x-y)}$$

第3章 演習問題 A (p. 119)

[1], (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 123 & 124 \\ 124 & 125 \end{vmatrix} = ?$$

$$\rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 123 & 124 \\ 123+1 & 124+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 123 & 124 \\ 123 & 124 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 124 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (123 - 124) = \underline{-1}$$

(2)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 4 = \underline{\underline{-1}}$$

3/17(火) まいにちへ2修正

→ 相互チェック

3/27(金) まいにち今回の修正

を含めたすべてのチェック完了。

〈3/16, 月, 2026〉, 10:00~ 道徳認定
②大教室' 会議

〈3/12, 2026〉

2/2, 2026

✓ 答案返し

✓ 再試について

✓ 授業アレケート

✓ これまでのレポート返却

✓ シラバスチェック

✓ 春休み宿題