

締め切り=[2025/10/08]、自己採点後に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

問18-01 関数 $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ について、次の値を求めよ。

- (1) $f(0)$ (2) $f(2)$ (3) $f(-1)$ (4) $f(a)$ (5) $f(a+1)$
 (6) $g(0)$ (7) $g(3)$ (8) $g(-2)$ (9) $g(-a)$ (10) $g(a-1)$

問18-02 次の各場合について、 y を x の式で表せ。

(1) 100 L の水が入った水そうがあり、水そうの水がなくなるまで毎分 4 L の割合で水を 出していく。このとき、水を出し始めてから x 分後の水そうの水の量を y L とする。

(2) 周囲の長さが 28 cm である長方形において、1 辺の長さを x cm, 面積を y cm² とする。

問18-03 次の条件を満たすように、定数 a , b の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = ax + b$ が $x = -2$ のとき $y = 5$,
 $x = 1$ のとき $y = 2$ の値をとる。
 (2) 関数 $y = ax + b$ のグラフが 2 点 $(-1, -1)$, $(3, 1)$ を通る。

問18-04 関数 $y = ax + b$ (定義域 $-1 \leq x \leq 2$) の値域が、 $-1 \leq y \leq 5$ となるような定数 a , b の値を求めよ。ただし、 $a < 0$ とする。

問18-05 次の放物線を x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) $y = -x^2$ (2) $y = 2x^2 + 4x$

問18-06 次の各点を、 x 軸, y 軸, 原点に関して、それぞれ対称移動して得られる各点の座標を求めよ。

- (1) $(3, 5)$ (2) $(-2, 3)$ (3) $(4, -3)$ (4) $(-1, -4)$

問18-07 次の関数の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

- (1) $y = f(x) = 3x + 2$ (2) $y = f(x) = 2 - 2x$

問18-08 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = ax + b$ について、 $(g \circ f)(x) = 8x - 3$ が成り立つとき、定数 a , b の値を求めよ。

締め切り=[2025/10/08]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。
計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

解説

(青字解説文)

問18-01 関数 $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ について、次の値を求めよ。

- (1) $f(0)$ (2) $f(2)$ (3) $f(-1)$ (4) $f(a)$ (5) $f(a+1)$
(6) $g(0)$ (7) $g(3)$ (8) $g(-2)$ (9) $g(-a)$ (10) $g(a-1)$

解説

- (1) $f(0) = 3 \cdot 0 - 2 = -2$
(2) $f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
(3) $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$
(4) $f(a) = 3a - 2$
(5) $f(a+1) = 3(a+1) - 2 = 3a + 1$
(6) $g(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$
(7) $g(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 10$
(8) $g(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 15$
(9) $g(-a) = 2(-a)^2 - 3(-a) + 1 = 2a^2 + 3a + 1$
(10) $g(a-1) = 2(a-1)^2 - 3(a-1) + 1 = 2a^2 - 4a + 2 - 3a + 3 + 1 = 2a^2 - 7a + 6$

問18-02 次の各場合について、 y を x の式で表せ。

(1) 100 L の水が入った水そうがあり、水そうの水がなくなるまで毎分 4 L の割合で水を出していく。このとき、水を出し始めてから x 分後の水そうの水の量を y L とする。

(2) 周囲の長さが 28 cm である長方形において、1 辺の長さを x cm、面積を y cm² とする。

解説

(1) 水そうの水は 100 L から毎分 4 L ずつ減るので

$$y = 100 - 4x$$

残っている水の量について $y \geq 0$ であるから

$$100 - 4x \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad x \leq 25$$

また、 $x \geq 0$ であるから、この関数の定義域は

$$0 \leq x \leq 25$$

したがって $y = 100 - 4x$ ($0 \leq x \leq 25$)

(2) 1 辺の長さが x cm のとき、直角をはさむもう 1 辺の長さは $(14 - x)$ cm であるから

$$y = x(14 - x) \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 14x$$

また、辺の長さについて

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 14 - x > 0$$

よって、この関数の定義域は $0 < x < 14$

したがって $y = -x^2 + 14x$ ($0 < x < 14$)

問18-03 次の条件を満たすように、定数 a , b の値を定めよ。

(1) 関数 $y = ax + b$ が $x = -2$ のとき $y = 5$,

$x = 1$ のとき $y = 2$ の値をとる。

(2) 関数 $y = ax + b$ のグラフが 2 点 $(-1, -1)$, $(3, 1)$ を通る。

解説

(1) $x = -2$ のとき $y = 5$ であるから $-2a + b = 5$ …… ①

$x = 1$ のとき $y = 2$ であるから $a + b = 2$ …… ②

①, ② を解くと $a = -1$, $b = 3$

(2) 2 点 $(-1, -1)$, $(3, 1)$ を通るから $\begin{cases} -a + b = -1 & \dots\dots ① \\ 3a + b = 1 & \dots\dots ② \end{cases}$

①, ② を解くと $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

問18-04 関数 $y = ax + b$ (定義域 $-1 \leq x \leq 2$) の値域が、 $-1 \leq y \leq 5$ となるような定数 a , b の値を求めよ。ただし、 $a < 0$ とする。

解説

$a < 0$ より、この関数のグラフは右下がりの直線の一部であるから、 $f(x) = ax + b$ とすると、値域は

$$f(2) \leq y \leq f(-1)$$

すなわち $2a + b \leq y \leq -a + b$

この値域が $-1 \leq y \leq 5$ と一致するから

$$2a + b = -1, \quad -a + b = 5$$

これを解いて $a = -2$, $b = 3$

これは $a < 0$ を満たす。

問18-05 次の放物線を x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) $y = -x^2$ (2) $y = 2x^2 + 4x$

解説

方程式の x , y をそれぞれ $x-1$, $y-(-2)$ で置き換えると、求める方程式が得られる。

(1) 求める放物線の方程式は $y-(-2) = -(x-1)^2$

すなわち $y = -x^2 + 2x - 3$

(2) 求める放物線の方程式は $y-(-2) = 2(x-1)^2 + 4(x-1)$

すなわち $y = 2x^2 - 4$

(3) 求める放物線の方程式は $y-(-2) = 3(x-1)^2 + (x-1) - 4$

すなわち $y = 3x^2 - 5x - 4$

別解 (1) 放物線 $y = -x^2$ の頂点 $(0, 0)$ が移る点は $(0+1, 0-2)$ すなわち $(1, -2)$

よって、求める放物線の方程式は $y = -(x-1)^2 - 2$ ($y = -x^2 + 2x - 3$)

(2) $y = 2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$

この放物線の頂点 $(-1, -2)$ が移る点は $(-1+1, -2-2)$ すなわち $(0, -4)$

よって、求める放物線の方程式は $y = 2x^2 - 4$

問18-06 次の各点を、 x 軸, y 軸, 原点に関して、それぞれ対称移動して得られる各点の座標を求めよ。

- (1) $(3, 5)$ (2) $(-2, 3)$ (3) $(4, -3)$ (4) $(-1, -4)$

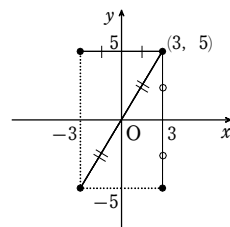
解説

(1) 点 $(3, 5)$ について

x 軸に関して対称移動した点の座標は $(3, -5)$

y 軸に関して対称移動した点の座標は $(-3, 5)$

原点に関して対称移動した点の座標は $(-3, -5)$

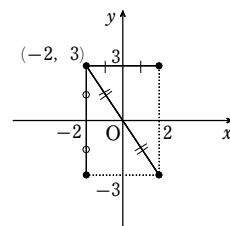


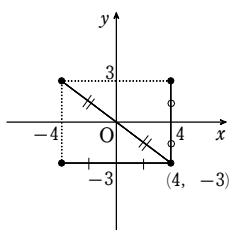
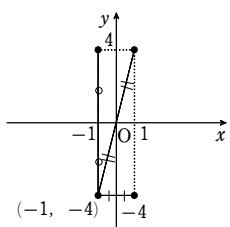
(2) 点 $(-2, 3)$ について

x 軸に関して対称移動した点の座標は $(-2, -3)$

y 軸に関して対称移動した点の座標は $(2, 3)$

原点に関して対称移動した点の座標は $(2, -3)$



(3) 点 $(4, -3)$ について x 軸に関して対称移動した点の座標は $(4, 3)$ y 軸に関して対称移動した点の座標は $(-4, -3)$ 原点に関して対称移動した点の座標は $(-4, 3)$ (4) 点 $(-1, -4)$ について x 軸に関して対称移動した点の座標は $(-1, 4)$ y 軸に関して対称移動した点の座標は $(1, -4)$ 原点に関して対称移動した点の座標は $(1, 4)$ 問18-07 次の関数の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $y = f(x) = 3x + 2$

(2) $y = f(x) = 2 - 2x$

解説

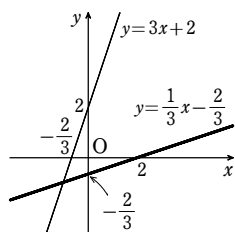
(1) $y = 3x + 2$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

よって、逆関数は、 x と y を入れ替えて

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

グラフは [図]

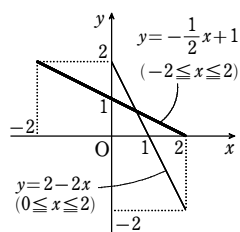
(2) $y = 2 - 2x$ を x について解くと

$$x = -\frac{1}{2}y + 1$$

よって、逆関数は、 x と y を入れ替えて

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

グラフは [図]

問18-08 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = ax + b$ について, $(g \circ f)(x) = 8x - 3$ が成り立つとき, 定数 a , b の値を求めよ。

解説

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a(2x - 1) + b = 2ax - a + b$$

 $(g \circ f)(x) = 8x - 3$ が成り立つから, $2ax - a + b = 8x - 3$ は x についての恒等式である。両辺の係数を比較すると $2a = 8$, $-a + b = -3$ これを解いて $a = 4$, $b = 1$

締め切り=[2025/10/15]、自己採点後に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

※体育大会があったので、先週 (後期18) の課題の締め切りも

[2025/10/15]になります。今回の回答と合冊にして提出も可。

問19-01 (復習) 次の直線や放物線を、 x 軸, y 軸, 原点に関して、それぞれ対称移動して得られる方程式を求めよ。

(1) $y = -x + 1$ (2) $y = 2x - 5$ (3) $y = \frac{1}{2}x - 3$

(4) $y = x^2 - 1$ (5) $y = -2x^2 + x$ (6) $y = x^2 - x - 6$

問19-02 次の2次式を平方完成せよ。

(1) $x^2 - 4x + 7$ (2) $-2x^2 - 4x - 6$ (3) $2x^2 - 3x + 1$

(4) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ (5) $(x+1)(x-3)$ (6) $(2x+1)(3-x)$

[2025/10/08] 基礎数学 I 後期19

1年5組 番 名前

締め切り=[2025/10/15]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

※体育大会があったので、先週(後期18)の課題の締め切りも

[2025/10/15]になります。今回の回答と合冊にして提出も可。

(解説)

(解説文)

問19-01 (復習) 次の直線や放物線を、 x 軸、 y 軸、原点に関して、それぞれ対称移動して得られる方程式を求めよ。

(1) $y = -x + 1$ (2) $y = 2x - 5$ (3) $y = \frac{1}{2}x - 3$

(4) $y = x^2 - 1$ (5) $y = -2x^2 + x$ (6) $y = x^2 - x - 6$

(解説)

(1) x 軸に関して対称移動した直線の方程式は、 x , y をそれぞれ x , $-y$ でおき換えて
 $-y = -x + 1$

すなわち $y = x - 1$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は、 x , y をそれぞれ $-x$, y でおき換えて

$y = -(-x) + 1$

すなわち $y = x + 1$

原点に関して対称移動した直線の方程式は、 x , y をそれぞれ $-x$, $-y$ でおき換えて

$-y = -(-x) + 1$

すなわち $y = -x - 1$

(2) x 軸に関して対称移動した直線の方程式は $-y = 2x - 5$

すなわち $y = -2x + 5$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は $y = 2 \cdot (-x) - 5$

すなわち $y = -2x - 5$

原点に関して対称移動した直線の方程式は $-y = 2 \cdot (-x) - 5$

すなわち $y = 2x + 5$

(3) x 軸に関して対称移動した直線の方程式は $-y = \frac{1}{2}x - 3$

すなわち $y = -\frac{1}{2}x + 3$

y 軸に関して対称移動した直線の方程式は $y = \frac{1}{2} \cdot (-x) - 3$

すなわち $y = -\frac{1}{2}x - 3$

原点に関して対称移動した直線の方程式は $-y = \frac{1}{2} \cdot (-x) - 3$

すなわち $y = \frac{1}{2}x + 3$

(4) x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = x^2 - 1$

すなわち $y = -x^2 + 1$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $y = (-x)^2 - 1$

すなわち $y = x^2 - 1$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = (-x)^2 - 1$

すなわち $y = -x^2 + 1$

(5) x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = -2x^2 + x$

すなわち $y = 2x^2 - x$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $y = -2(-x)^2 + (-x)$

すなわち $y = -2x^2 - x$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = -2(-x)^2 + (-x)$

すなわち $y = 2x^2 + x$

(6) x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = x^2 - x - 6$

すなわち $y = -x^2 + x + 6$

y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は $y = (-x)^2 - (-x) - 6$

すなわち $y = x^2 + x - 6$

原点に関して対称移動した放物線の方程式は $-y = (-x)^2 - (-x) - 6$

すなわち $y = -x^2 - x + 6$

問19-02 次の2次式を平方完成せよ。

(1) $x^2 - 4x + 7$ (2) $-2x^2 - 4x - 6$ (3) $2x^2 - 3x + 1$

(4) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ (5) $(x+1)(x-3)$ (6) $(2x+1)(3-x)$

(解説)

(1) $x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 7 = ((x-2)^2 - 2^2) + 7 = (x-2)^2 + 3$

(2) $-2x^2 - 4x - 6 = -2(x^2 + 2x) - 6 = -2(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2) - 6 = -2((x+1)^2 - 1^2) - 6$
 $= -2(x+1)^2 - 4$

(3) $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 1 = 2\left\{x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} + 1$
 $= 2\left\{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

(4) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x) + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}((x-2)^2 - 2^2) + \frac{7}{3}$
 $= \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$

(5) $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) - 3 = ((x-1)^2 - 1^2) - 3 = (x-1)^2 - 4$

(6) $(2x+1)(3-x) = -2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3$
 $= -2\left\{x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} + 3 = -2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} + 3$
 $= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$

締め切り=[2025/10/22], 自己採点後に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

問20-01 (復習) ある放物線を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動したら放物線 $y=2x^2+x-4$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

問20-02 (復習) 放物線 $y=x^2-4x+4$ は、どのように平行移動すると放物線 $y=x^2+2x-1$ に重なるか。

問20-03 (復習) 次の2次関数について、頂点の座標を答えよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y=x^2-2x+2$ (2) $y=-x^2+2x+3$

(3) $y=-2x^2+6x+3$ (4) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$

問20-04 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=2x^2-x-6$ (2) $y=3x^2-7x-1$

(3) $y=-x^2+6x-9$ (4) $y=-(x+1)^2+4$

問20-05 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2+5x+1=0$ (2) $4x^2-4x+1=0$

(3) $3x^2-5x+3=0$ (4) $9x^2+12x+4=0$

(5) $3x^2+x-1=0$ (6) $-x^2+5x-7=0$

問20-06 次の条件を満たすように、それぞれ定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2次方程式 $x^2+3x+m=0$ が異なる2つの実数解をもつ。

(2) 2次方程式 $x^2-4x-m=0$ が実数解をもたない。

(3) 2次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数解をもつ。

問20-07 次の2次不等式をグラフを利用して解け。 x^2 の係数が正値になるように不等式を書き直してから考えよ。

(1) $-x^2+3x+10<0$ (2) $3x-x^2\geq 0$ (3) $-3x^2+6x-2\geq 0$

締め切り=[2025/10/22], 自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問20-01 (復習) ある放物線を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動したら放物線 $y=2x^2+x-4$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

(解説文)

求める放物線は、放物線 $y=2x^2+x-4$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

よって $y-(-3)=2(x-2)^2+(x-2)-4$

すなわち $y=2x^2-7x-1$

問20-02 (復習) 放物線 $y=x^2-4x+4$ は、どのように平行移動すると放物線 $y=x^2+2x-1$ に重なるか。

(解説文)

$y=x^2-4x+4$ から $y=(x-2)^2$ …… ①

$y=x^2+2x-1$ から $y=(x+1)^2-2$ …… ②

よって、①、②の頂点の座標はそれぞれ $(2, 0)$, $(-1, -2)$

放物線 ① を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したとき、放物線 ② に重なる」と

$$2+p=-1, \quad 0+q=-2$$

ゆえに $p=-3, q=-2$

したがって、 x 軸方向に -3 , y 軸方向に -2 だけ平行移動すればよい。

問20-03 (復習) 次の2次関数について、頂点の座標を答えよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) y=x^2-2x+2$$

$$(2) y=-x^2+2x+3$$

$$(3) y=-2x^2+6x+3$$

$$(4) y=\frac{1}{2}x^2+2x$$

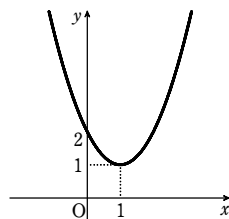
(解説文)

$$(1) y=x^2-2x+2$$

$$=(x^2-2x+1^2-1^2)+2$$

$$=[(x-1)^2-1^2]+2=(x-1)^2+1$$

グラフは[図], 頂点は点 $(1, 1)$

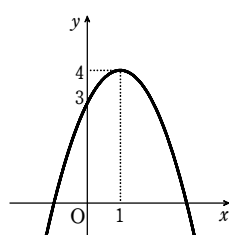


$$(2) y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+3$$

$$=-(x^2-2x+1^2-1^2)+3$$

$$=-[(x-1)^2-1^2]+3=-(x-1)^2+4$$

グラフは[図], 頂点は点 $(1, 4)$



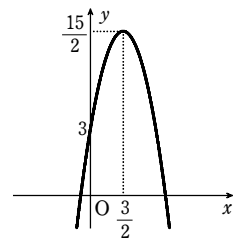
$$(3) y=-2x^2+6x+3=-2(x^2-3x)+3$$

$$=-2\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+3$$

$$=-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+3$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

グラフは[図], 頂点は点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$

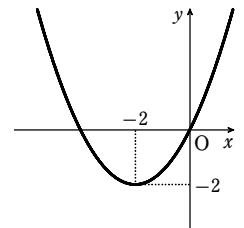


$$(4) y=\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{2}(x^2+4x)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+4x+2^2-2^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$$

グラフは[図], 頂点は点 $(-2, -2)$



問20-04 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

$$(1) y=2x^2-x-6$$

$$(2) y=3x^2-7x-1$$

$$(3) y=-x^2+6x-9$$

$$(4) y=-(x+1)^2+4$$

(解説文)

(1) 共有点の x 座標は、2次方程式 $2x^2-x-6=0$ の実数解である。

左辺を因数分解すると $(x-2)(2x+3)=0$

よって $x=2, -\frac{3}{2}$

ゆえに、求める座標は $(2, 0), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

(2) 共有点の x 座標は、2次方程式 $3x^2-7x-1=0$ の実数解である。

$$\text{これを解くと } x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot (-1)}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{61}}{6}$$

よって、求める座標は $\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}, 0\right), \left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}, 0\right)$

(3) 共有点の x 座標は、2次方程式 $-x^2+6x-9=0$ の実数解である。

$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けると } x^2-6x+9=0$$

左辺を因数分解すると $(x-3)^2=0$

よって $x=3$

ゆえに、求める座標は $(3, 0)$

(4) 共有点の x 座標は、2次方程式 $-(x+1)^2+4=0$ の実数解である。

$$\text{整理すると } x^2+2x-3=0$$

左辺を因数分解すると $(x-1)(x+3)=0$

よって $x=1, -3$

ゆえに、求める座標は $(1, 0), (-3, 0)$

問20-05 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

$$(1) x^2+5x+1=0$$

$$(2) 4x^2-4x+1=0$$

$$(3) 3x^2-5x+3=0$$

$$(4) 9x^2+12x+4=0$$

$$(5) 3x^2+x-1=0$$

$$(6) -x^2+5x-7=0$$

(解説文)

(1) この2次方程式の判別式を D とすると $D=5^2-4\cdot 1\cdot 1=21>0$

よって、実数解の個数は 2 個

(2) この2次方程式の判別式を D とすると $D=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0$

よって、実数解の個数は 1 個

(3) この2次方程式の判別式を D とすると $D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 3=-11<0$

よって、実数解の個数は 0 個

(4) この2次方程式の判別式を D とすると $D=12^2-4\cdot 9\cdot 4=0$

よって、実数解の個数は 1 個

(5) この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot 3\cdot (-1)=13>0$

よって、実数解の個数は 2 個

(6) この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=5^2-4\cdot (-1)\cdot (-7)=-3<0$

よって、実数解の個数は 0 個

問20-06 次の条件を満たすように、それぞれ定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

(2) 2 次方程式 $x^2-4x-m=0$ が実数解をもたない。

(3) 2 次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数解をもつ。

(解説)

(1) この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=3^2-4\cdot 1\cdot m=9-4m$

異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は $D>0$ であるから

$$9-4m>0 \quad \text{よって} \quad m<\frac{9}{4}$$

(2) この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot (-m)=16+4m$

実数解をもたないための必要十分条件は $D<0$ であるから

$$16+4m<0 \quad \text{よって} \quad m<-4$$

(3) この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=6^2-4\cdot 3\cdot (2m-1)=48-24m$

実数解をもつための必要十分条件は $D\geq 0$ であるから

$$48-24m\geq 0 \quad \text{よって} \quad m\leq 2$$

問20-07 次の 2 次不等式をグラフを利用して解け。 x^2 の係数が正値になるように不等式を書き直してから考えよ。

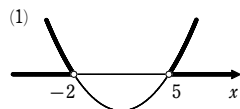
(1) $-x^2+3x+10<0$ (2) $3x-x^2\geq 0$ (3) $-3x^2+6x-2\geq 0$

(解説)

(1) 両辺に -1 を掛けて $x^2-3x-10>0$

すなわち $(x+2)(x-5)>0$

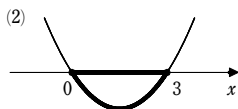
よって $x<-2, 5<x$



(2) 両辺に -1 を掛けて $-3x+x^2\leq 0$

すなわち $x(x-3)\leq 0$

よって $0\leq x\leq 3$

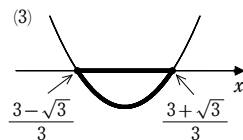


(3) 両辺に -1 を掛けて $3x^2-6x+2\leq 0$

$3x^2-6x+2=0$ を解くと $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

よって、 $3x^2-6x+2\leq 0$ の解は

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$



締め切り=[2025/10/29], 自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

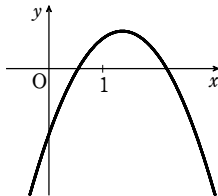
問21-01 (復習) 右の図は、2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフである。次の値の正負を答えよ。

(1) a, b, c

(2) $D=b^2-4ac$

(3) $a+b+c$

(5) $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1$



問21-02 (復習) 次の2次不等式を解け。

(1) $(x-1)^2 \leq 0$

(2) $(x+4)^2 \geq 0$

(3) $x^2+4x+4 < 0$

(4) $x^2-10x+25 \geq 0$

(5) $4x^2-12x+9 > 0$

(6) $-x^2-8x-16 > 0$

問21-03 次の関数のグラフをかけ。また、その関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+2}$

(2) $y=-\sqrt{x+3}$

(3) $y=2\sqrt{3-x}$

(4) $y=-\sqrt{1-\frac{1}{4}x}$

問21-04 グラフを利用して、次の不等式を解け。(4)と(5)は発展的な問題である。

(1) $\sqrt{x+2} < 2$

(2) $\sqrt{3-x} < 1$

(3) $\sqrt{2x+1} \geq 1$

(4) $\sqrt{3x+1} > 2x$

(5) $-\sqrt{x} < x-2$

締め切り=[2025/10/29], 自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

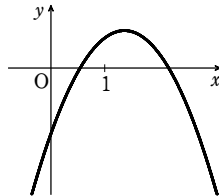
問21-01 (復習) 右の図は、2次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフである。次の値の正負を答えよ。

(1) a, b, c

(2) $D=b^2-4ac$

(3) $a+b+c$

(5) $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1$



(解説文)

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$,

y 軸との交点の座標は $(0, c)$

である。

(1) グラフは上に凸であるから $a < 0$

頂点の x 座標は正であるから $-\frac{b}{2a} > 0$

ここで $a < 0$ であるから $b > 0$

y 軸と負の部分で交わるから $c < 0$

(2) グラフが x 軸と異なる2点で交わっているから $b^2-4ac > 0$

(別解) 頂点の y 座標は正であるから $-\frac{b^2-4ac}{4a} > 0$

$a < 0$ であるから $b^2-4ac > 0$

(3) $x=1$ のとき $y=a+b+c$ であるから、グラフは点 $(1, a+b+c)$ を通る。

この点は x 軸より上側にあるから $a+b+c > 0$

(5) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a < 0$ であるから $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

図より $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > 1$ であるから $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1 > 0$

問21-02 (復習) 次の2次不等式を解け。

(1) $(x-1)^2 \leq 0$

(2) $(x+4)^2 \geq 0$

(3) $x^2+4x+4 < 0$

(4) $x^2-10x+25 \geq 0$

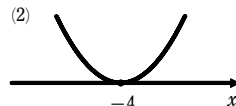
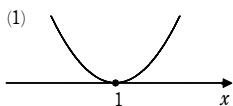
(5) $4x^2-12x+9 > 0$

(6) $-x^2-8x-16 > 0$

(解説文)

(1) $(x-1)^2 \leq 0$ の解は $x=1$

(2) $(x+4)^2 \geq 0$ の解は すべての実数

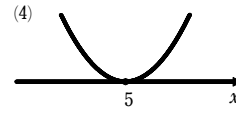
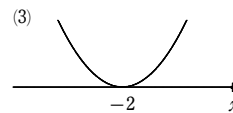


(3) $x^2+4x+4 < 0$ から $(x+2)^2 < 0$

よって、解はない。

(4) $x^2-10x+25 \geq 0$ から $(x-5)^2 \geq 0$

よって、解は すべての実数



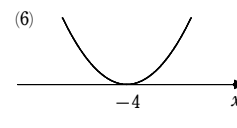
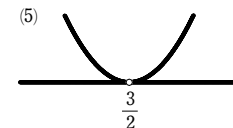
(5) $4x^2-12x+9 > 0$ から $(2x-3)^2 > 0$

よって、解は $\frac{3}{2}$ 以外の実数

(6) 両辺に -1 を掛けて $x^2+8x+16 < 0$

ゆえに $(x+4)^2 < 0$

よって、解はない。



問21-03 次の関数のグラフをかけ。また、その関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+2}$

(2) $y=-\sqrt{x+3}$

(3) $y=2\sqrt{3-x}$

(4) $y=-\sqrt{1-\frac{1}{4}x}$

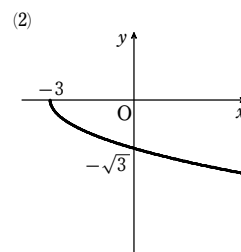
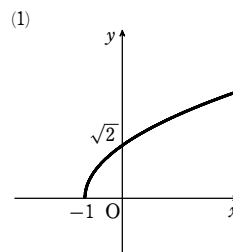
(解説文)

(1) $\sqrt{2x+2}=\sqrt{2(x+1)}$ であるから、求めるグラフは、関数 $y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \geq -1$ 、値域は $y \geq 0$ である。

(2) 求めるグラフは、関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \geq -3$ 、値域は $y \leq 0$ である。



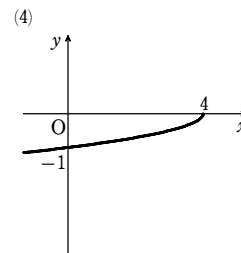
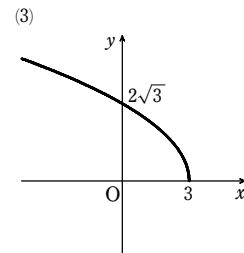
(3) $2\sqrt{3-x}=2\sqrt{-(x-3)}$ であるから、求めるグラフは、関数 $y=2\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \leq 3$ 、値域は $y \geq 0$ である。

(4) $-\sqrt{1-\frac{1}{4}x}=-\frac{1}{2}\sqrt{-(x-4)}$ であるから、求めるグラフは、関数 $y=-\frac{1}{2}\sqrt{-x}$

のグラフを x 軸方向に 4 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \leq 4$ 、値域は $y \leq 0$ である。



問21-04 グラフを利用して、次の不等式を解け。(4)と(5)は発展的な問題である。

(1) $\sqrt{x+2} < 2$

(2) $\sqrt{3-x} < 1$

(3) $\sqrt{2x+1} \geq 1$

(4) $\sqrt{3x+1} > 2x$

(5) $-\sqrt{x} < x-2$

解説

(1) $\sqrt{x+2}=2$ …… ①

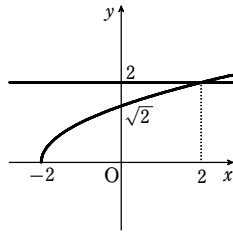
の両辺を 2 乗して整理すると $x=2$

これは ① を満たす。

ゆえに、 $y=\sqrt{x+2}$ 、 $y=2$ のグラフの共有点の座標は $(2, 2)$

求める不等式の解は、 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフが $y=2$ のグラフより下側にある x の値の範囲である。

よって $-2 \leq x < 2$



(2) $\sqrt{3-x}=1$ …… ①

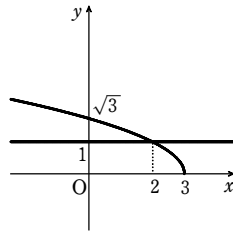
の両辺を 2 乗して整理すると $x=2$

これは ① を満たす。

ゆえに、 $y=\sqrt{3-x}$ 、 $y=1$ のグラフの共有点の座標は $(2, 1)$

求める不等式の解は、 $y=\sqrt{3-x}$ のグラフが $y=1$ のグラフより下側にある x の値の範囲である。

よって $2 < x \leq 3$



(3) $\sqrt{2x+1}=1$ …… ①

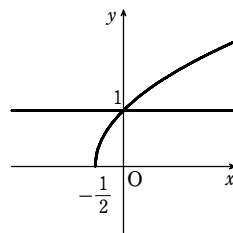
の両辺を 2 乗して整理すると $x=0$

これは ① を満たす。

ゆえに、 $y=\sqrt{2x+1}$ 、 $y=1$ のグラフの共有点の座標は $(0, 1)$

求める不等式の解は、 $y=\sqrt{2x+1}$ のグラフが $y=1$ のグラフより上側にあるか、または共有点をもつような x の値の範囲である。

よって $x \geq 0$



(4) $\sqrt{3x+1}=2x$ …… ①

の両辺を 2 乗して整理すると $4x^2-3x-1=0$

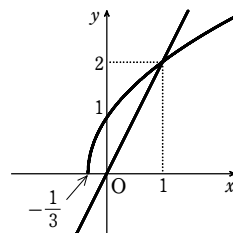
これを解いて $x=-\frac{1}{4}, 1$

このうち、① を満たすのは $x=1$ で、このとき $y=2$

よって、 $y=\sqrt{3x+1}$ 、 $y=2x$ のグラフの共有点の座標は $(1, 2)$

求める不等式の解は、 $y=\sqrt{3x+1}$ のグラフが $y=2x$ のグラフより上側にある x の値の範囲である。

ゆえに $-\frac{1}{3} \leq x < 1$



(5) $-\sqrt{x}=x-2$ …… ①

の両辺を 2 乗して整理すると $x^2-5x+4=0$

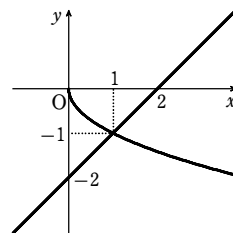
これを解いて $x=1, 4$

このうち、① を満たすのは $x=1$ で、このとき $y=-1$

よって、 $y=-\sqrt{x}$ 、 $y=x-2$ のグラフの共有点の座標は $(1, -1)$

求める不等式の解は、 $y=-\sqrt{x}$ のグラフが $y=x-2$ のグラフより下側にある x の値の範囲である。

ゆえに $x > 1$



【参考】 次の同値関係を用いて不等式の解を求めることもできる。

[1] $\sqrt{A} > B \iff (B \geq 0, A > B^2)$ または $(A \geq 0, B < 0)$

[2] $\sqrt{A} < B \iff A \geq 0, B > 0, A < B^2$

(1) $\sqrt{x+2} < 2 \iff x+2 \geq 0$ かつ $x+2 < 4 \iff -2 \leq x < 2$

(2) $\sqrt{3-x} < 1 \iff 3-x \geq 0$ かつ $3-x < 1 \iff 2 < x \leq 3$

(3) $\sqrt{2x+1} \geq 1 \iff 2x+1 \geq 1 \iff x \geq 0$

(4) $\sqrt{3x+1} > 2x \iff (2x \geq 0$ かつ $3x+1 > 4x^2)$ または $(3x+1 \geq 0$ かつ $2x < 0)$

$\iff (x \geq 0$ かつ $-\frac{1}{4} < x < 1)$ または $-\frac{1}{3} \leq x < 0$

$\iff 0 \leq x < 1$ または $-\frac{1}{3} \leq x < 0$

$\iff -\frac{1}{3} \leq x < 1$

(5) $-\sqrt{x} < x-2$ より $\sqrt{x} > -x+2$

$\sqrt{x} > -x+2$

$\iff (-x+2 \geq 0$ かつ $x > (-x+2)^2)$ または $(x \geq 0$ かつ $-x+2 < 0)$

$\iff (x \leq 2$ かつ $1 < x < 4)$ または $x > 2$

$\iff 1 < x \leq 2$ または $x > 2$

$\iff x > 1$

(6) $\sqrt{x+1} < \frac{1}{3}x+1 \iff x+1 \geq 0$ かつ $\frac{1}{3}x+1 > 0$ かつ $x+1 < (\frac{1}{3}x+1)^2$

$\iff x \geq -1$ かつ $x > -3$ かつ $(x < 0$ または $3 < x)$

$\iff -1 \leq x < 0, 3 < x$

- 締め切り=無し、提出の必要も無し。
- 中間試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。
- 全ての問題をやる必要は無い。そもそも量が多い。
- 教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問22-01 次の無理関数のグラフをかけ。また(2)~(6)については、(1)のグラフとどのような位置関係にあるか答えよ。

- (1) $y = \sqrt{3x}$ (2) $y = -\sqrt{3x}$
 (3) $y = \sqrt{-3x}$ (4) $y = -\sqrt{-3x}$
 (5) $y = \sqrt{3(x-2)}$ (6) $y = -\sqrt{3(x+1)}$

問22-02 次の関数の値域を求めよ。

- (1) $y = \sqrt{x+3}$ ($-1 \leq x \leq 3$) (2) $y = -\sqrt{5-x}$ ($0 \leq x < 5$)

問22-03 次の2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

- (1) $y = \sqrt{1-x}$, $y = 1$ (2) $y = \sqrt{x}$, $y = x$
 (3) $y = \sqrt{x+3}$, $y = 2x$ (4) $y = -\sqrt{x+3}$, $y = -(x+1)$

問22-04 次の条件に適するように、定数 a の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = \sqrt{2x-6}$ ($3 \leq x \leq a$) の値域が $0 \leq y \leq 2$
 (2) 関数 $y = \sqrt{a-2x}$ の定義域が $x \leq 2$
 (3) 関数 $y = \sqrt{x+a}$ のグラフが点 $(-2, 2)$ を通る。

問22-05 以下の問いに答えよ。

- (1) 無理関数 $y = \sqrt{-x+2}$ のグラフと直線 $y = x+4$ との共有点の座標を求めよ。
 (2) 不等式 $\sqrt{-x+2} \leq x+4$ を解け。

問22-06 (平方完成) 次の2次式を平方完成せよ。

- (1) $x^2 + 4x$ (2) $2x^2 - 8x + 1$ (3) $-3x^2 - 6x + 3$
 (4) $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$ (5) $x^2 + 3x - 2$ (6) $-2x^2 + 6x - 1$

問22-07 (放物線の平行移動) 放物線 $y = 3x^2$ …… ① について、次の問いに答えよ。

- (1) ① を x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動した方程式を求めよ。
 (2) 次の放物線をどのように平行移動すると、① に重なるか。
 (ア) $y = 3(x+1)^2 - 2$ (イ) $y = 3x^2 + x - 1$

問22-08 次の2次方程式が[]内の解をもつとき、定数 m の値と他の解を求めよ。場合分けが必要な可能性もある。

- (1) $2x^2 + (m+1)x + 5m = 0$ [$x = -2$]
 (2) $x^2 - mx - m^2 - 9 = 0$ [$x = 3$]

問22-09 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y = 2x^2 - x - 6$ (2) $y = 3x^2 - 7x - 1$
 (3) $y = -x^2 + 6x - 9$ (4) $y = -(x+1)^2 + 4$

問22-10 次の2次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。つまり、2個の x 軸交点間の長さを求めよ。

- (1) $y = x^2 - 2x - 8$ (2) $y = x^2 + 6x + 7$

問22-11 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

- (1) $y = x^2$, $y = x+2$ (2) $y = -x^2 + 1$, $y = 5-4x$
 (3) $y = x^2 - x + 4$, $y = 2x+2$ (4) $y = 4x^2 - 6x + 1$, $y = 2x-4$

問22-12 (2次不等式詰め合わせ) 次の2次不等式を解け。

- (1) $3x^2 - 7x + 2 < 0$ (2) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$
 (3) $6x^2 - 7x - 3 > 0$ (4) $x^2 - 4x + 2 > 0$
 (5) $x^2 + 5x + 1 < 0$ (6) $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$
 (7) $x^2 < 4$ (8) $x^2 - 18 > 0$ (9) $2x^2 - 9 \geq 0$

- 締め切り=無し、提出の必要も無し。
- 中間試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。
- 全ての問題をやる必要は無い。そもそも量が多い。
- 教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

(解説)

(解説文)

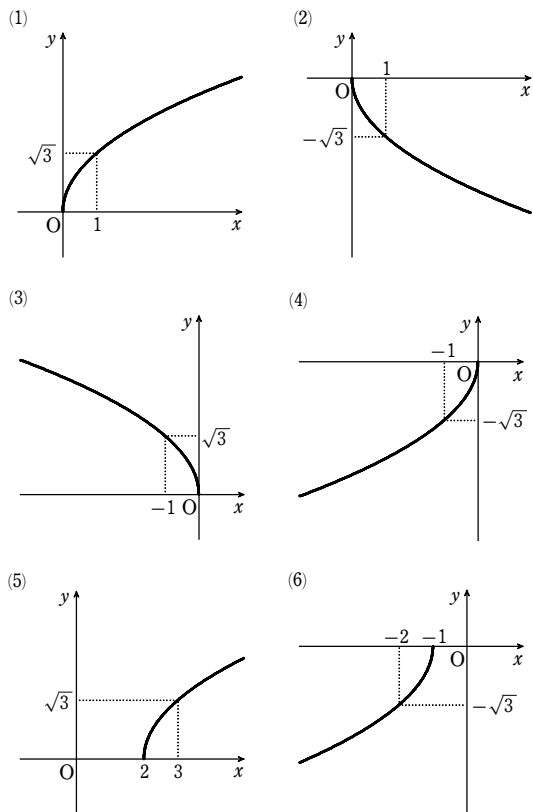
問22-01 次の無理関数のグラフをかけ。また(2)~(6)については、

(1) のグラフとどのような位置関係にあるか答えよ。

- (1) $y = \sqrt{3x}$ (2) $y = -\sqrt{3x}$
 (3) $y = \sqrt{-3x}$ (4) $y = -\sqrt{-3x}$
 (5) $y = \sqrt{3(x-2)}$ (6) $y = -\sqrt{-3(x+1)}$

(解説)

- (1) グラフは [図]
 (2) グラフは [図] (1) と x 軸に関して対称
 (3) グラフは [図] (1) と y 軸に関して対称
 (4) グラフは [図] (1) と原点に関して対称
 (5) グラフは [図] (1) を x 軸方向に 2 だけ平行移動したもの。
 (6) グラフは [図] (1) を原点に関して対称移動したのち、 x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

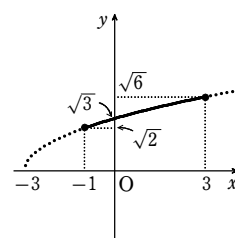


問22-02 次の関数の値域を求めよ。

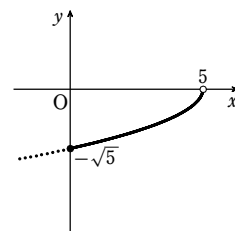
- (1) $y = \sqrt{x+3}$ ($-1 \leq x \leq 3$) (2) $y = -\sqrt{5-x}$ ($0 \leq x < 5$)

(解説)

- (1) $y = \sqrt{x+3}$ のグラフは $y = \sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。
 また $x = -1$ のとき $y = \sqrt{2}$
 $x = 3$ のとき $y = \sqrt{6}$
 よって、この関数のグラフは図のようになる。
 ゆえに、求める値域は $\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{6}$



- (2) $y = -\sqrt{5-x} = -\sqrt{-(x-5)}$
 よって、 $y = -\sqrt{5-x}$ のグラフは $y = -\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。
 また $x = 0$ のとき $y = -\sqrt{5}$
 $x = 5$ のとき $y = 0$
 よって、この関数のグラフは図のようになる。
 ゆえに、求める値域は $-\sqrt{5} \leq y < 0$

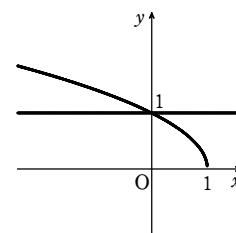


問22-03 次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

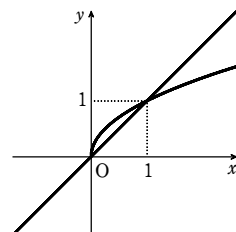
- (1) $y = \sqrt{1-x}$, $y = 1$ (2) $y = \sqrt{x}$, $y = x$
 (3) $y = \sqrt{x+3}$, $y = 2x$ (4) $y = -\sqrt{x+3}$, $y = -(x+1)$

(解説)

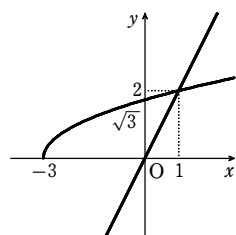
- (1) 方程式 $\sqrt{1-x} = 1$ …… ① の解が共有点の x 座標である。
 ① の両辺を 2 乗すると $1-x=1$
 よって $x=0$
 これは ① を満たす。
 ゆえに、共有点の座標は $(0, 1)$



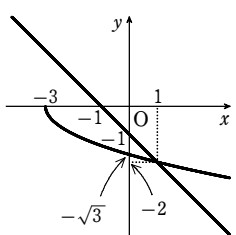
- (2) 方程式 $\sqrt{x} = x$ …… ① の解が共有点の x 座標である。
 ① の両辺を 2 乗すると $x = x^2$
 これを解いて $x=0, 1$
 $x=0, 1$ のいずれも ① を満たし
 $x=0$ のとき $y=0$, $x=1$ のとき $y=1$
 よって、共有点の座標は $(0, 0), (1, 1)$



- (3) 方程式 $\sqrt{x+3} = 2x$ …… ① の解が共有点の x 座標である。
 ① の両辺を 2 乗すると $x+3=4x^2$
 整理すると $4x^2-x-3=0$
 これを解いて $x = -\frac{3}{4}, 1$
 このうち、① を満たすのは $x=1$ で、このとき $y=2$
 よって、共有点の座標は $(1, 2)$



- (4) 方程式 $-\sqrt{x+3} = -(x+1)$ …… ① の解が共有点の x 座標である。
 ① の両辺を 2 乗すると $x+3=(x+1)^2$
 整理すると $x^2+x-2=0$
 これを解いて $x=-2, 1$
 このうち、① を満たすのは $x=1$ で、このとき $y=-2$
 よって、共有点の座標は $(1, -2)$



問22-04 次の条件に適するように、定数 a の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = \sqrt{2x-6}$ ($3 \leq x \leq a$) の値域が $0 \leq y \leq 2$
 (2) 関数 $y = \sqrt{a-2x}$ の定義域が $x \leq 2$
 (3) 関数 $y = \sqrt{x+a}$ のグラフが点 $(-2, 2)$ を通る。

解説

(1) $\sqrt{2x-6}=\sqrt{2(x-3)}$

よって、 $y=\sqrt{2x-6}$ のグラフは、 $y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、図のようになる。

ゆえに、 $3 \leq x \leq a$ のとき、値域は

$$0 \leq y \leq \sqrt{2a-6}$$

これが $0 \leq y \leq 2$ と一致するから

$$\sqrt{2a-6}=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

両辺を 2 乗して $2a-6=4$

よって $a=5$

これは $\textcircled{1}$ を満たす。

(2) $a-2x \geq 0$ であるから、定義域は $x \leq \frac{a}{2}$

$$\text{これが } x \leq 2 \text{ と一致するから } \frac{a}{2}=2$$

よって $a=4$

(3) グラフが点 $(-2, 2)$ を通るから $2=\sqrt{-2+a} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

両辺を 2 乗して $4=-2+a$ よって $a=6$

これは $\textcircled{1}$ を満たす。

問22-05 以下の問いに答えよ。

(1) 無理関数 $y=\sqrt{-x+2}$ のグラフと直線 $y=x+4$ との共有点の座標を求めよ。

(2) 不等式 $\sqrt{-x+2} \leq x+4$ を解け。

解説

(1) $\sqrt{-x+2}=x+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2+9x+14=0$$

これを解くと

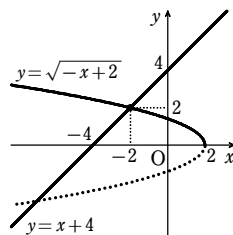
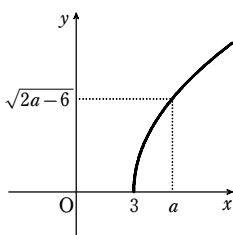
$$x=-7, -2$$

このうち、 $\textcircled{1}$ を満たすのは $x=-2$ で、このとき

$\textcircled{1}$ の両辺の値は 2 である。

よって、求める共有点の座標は $(-2, 2)$

(2) (1) の結果とグラフから $-2 \leq x \leq 2$



問22-06 (平方完成) 次の 2 次式を平方完成せよ。

(1) x^2+4x (2) $2x^2-8x+1$ (3) $-3x^2-6x+3$

(4) $\frac{1}{2}x^2-x+3$ (5) x^2+3x-2 (6) $-2x^2+6x-1$

解説

(1) $x^2+4x=x^2+4x+2^2-2^2=(x+2)^2-4$

(2) $2x^2-8x+1=2(x^2-4x)+1$

$$=2(x^2-2 \cdot 2x+2^2-2^2)+1$$

$$=2[(x-2)^2-4]+1=2(x-2)^2-7$$

(3) $-3x^2-6x+3=-3(x^2+2x)+3$

$$=-3(x^2+2x+1^2-1^2)+3$$

$$=-3[(x+1)^2-1]+3=-3(x+1)^2+6$$

(4) $\frac{1}{2}x^2-x+3=\frac{1}{2}(x^2-2x)+3$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x+1^2-1^2)+3$$

$$=\frac{1}{2}[(x-1)^2-1]+3=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$$

(5) $x^2+3x-2=\left[x^2+2 \cdot \frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-2$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$

(6) $-2x^2+6x-1=-2(x^2-3x)-1$

$$=-2\left[x^2-2 \cdot \frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-1$$

$$=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-1$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

問22-07 (放物線の平行移動) 放物線 $y=3x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\textcircled{1}$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動した方程式を求めよ。

(2) 次の放物線をどのように平行移動すると、 $\textcircled{1}$ に重なるか。

(ア) $y=3(x+1)^2-2$

(イ) $y=3x^2+x-1$

解説

(1) $y-3=3(x-2)^2$

$$\text{よって } y=3(x-2)^2+3 \quad (y=3x^2-12x+15 \text{ でもよい})$$

(2) (ア) $y=3(x+1)^2-2$ から $y-(-2)=3\{x-(-1)\}^2$

これは、放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

よって、放物線 $y=3(x+1)^2-2$ を x 軸方向に 1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、 $\textcircled{1}$ に重なる。

$$\begin{aligned} \text{(イ)} \quad y=3x^2+x-1 &= 3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)-1=3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]-1 \\ &= 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{12} \end{aligned}$$

$$\text{したがって、} y=3x^2+x-1 \text{ から } y-\left(-\frac{13}{12}\right)=3\left\{x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}^2$$

これは、放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に $-\frac{1}{6}$, y 軸方向に $-\frac{13}{12}$ だけ平行移動したものである。

よって、放物線 $y=3x^2+x-1$ を x 軸方向に $\frac{1}{6}$, y 軸方向に $\frac{13}{12}$ だけ平行移動すると、 $\textcircled{1}$ に重なる。

問22-08 次の 2 次方程式が [] 内の解をもつとき、定数 m の値と他の解を求めよ。場合分けが必要な可能性もある。

(1) $2x^2+(m+1)x+5m=0$ [$x=-2$]

(2) $x^2-mx-m^2-9=0$ [$x=3$]

解説

(1) $x=-2$ を方程式に代入すると $8-2(m+1)+5m=0$

すなわち $3m+6=0$

よって $m=-2$

このとき、方程式は $2x^2-x-10=0$

すなわち $(x+2)(2x-5)=0$

これを解いて $x=-2, \frac{5}{2}$

したがって、他の解は $\frac{5}{2}$

(2) $x=3$ を方程式に代入すると $9-3m-m^2-9=0$

すなわち $m^2+3m=0$

よって $m(m+3)=0$

ゆえに $m=0, -3$

$m=0$ のとき、方程式は $x^2-9=0$

これを解いて $x=\pm 3$

したがって、他の解は -3

$m=-3$ のとき、方程式は $x^2+3x-18=0$

すなわち $(x-3)(x+6)=0$

これを解いて $x=3, -6$ したがって、他の解は -6 問22-09 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=2x^2-x-6$

(2) $y=3x^2-7x-1$

(3) $y=-x^2+6x-9$

(4) $y=-(x+1)^2+4$

解説

(1) 共有点の x 座標は、2次方程式 $2x^2-x-6=0$ の実数解である。左辺を因数分解すると $(x-2)(2x+3)=0$ よって $x=2, -\frac{3}{2}$ ゆえに、求める座標は $(2, 0), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ (2) 共有点の x 座標は、2次方程式 $3x^2-7x-1=0$ の実数解である。これを解くと $x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot (-1)}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{61}}{6}$ よって、求める座標は $\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}, 0\right), \left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}, 0\right)$ (3) 共有点の x 座標は、2次方程式 $-x^2+6x-9=0$ の実数解である。両辺に -1 を掛けると $x^2-6x+9=0$ 左辺を因数分解すると $(x-3)^2=0$ よって $x=3$ ゆえに、求める座標は $(3, 0)$ (4) 共有点の x 座標は、2次方程式 $-(x+1)^2+4=0$ の実数解である。整理すると $x^2+2x-3=0$ 左辺を因数分解すると $(x-1)(x+3)=0$ よって $x=1, -3$ ゆえに、求める座標は $(1, 0), (-3, 0)$ 問22-10 次の2次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。つまり、2個の x 軸交点間の長さを求めよ。

(1) $y=x^2-2x-8$

(2) $y=x^2+6x+7$

解説

(1) グラフと x 軸の共有点の x 座標は $x^2-2x-8=0$ の実数解である。左辺を因数分解すると $(x+2)(x-4)=0$ よって $x=-2, 4$ ゆえに、求める線分の長さは $4-(-2)=6$ (2) グラフと x 軸の共有点の x 座標は $x^2+6x+7=0$ の実数解である。解の公式により $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot 7}}{1}=-3\pm\sqrt{2}$ よって、求める線分の長さは $-3+\sqrt{2}-(-3-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

問22-11 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

(1) $y=x^2, y=x+2$

(2) $y=-x^2+1, y=5-4x$

(3) $y=x^2-x+4, y=2x+2$

(4) $y=4x^2-6x+1, y=2x-4$

解説

(1)
$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots \cdots ① \\ y=x+2 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①, ② から y を消去すると $x^2=x+2$ よって $x^2-x-2=0 \cdots \cdots ③$ ③ の判別式を D とすると $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot (-2)=9>0$

したがって、① と ② は異なる2点で交わる。

③ から $(x+1)(x-2)=0$ ゆえに $x=-1, 2$ ② から $x=-1$ のとき $y=1$, $x=2$ のとき $y=4$ よって、共有点の座標は $(-1, 1), (2, 4)$

(2)
$$\begin{cases} y=-x^2+1 & \cdots \cdots ① \\ y=5-4x & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①, ② から y を消去すると $-x^2+1=5-4x$ よって $x^2-4x+4=0 \cdots \cdots ③$ ③ の判別式を D とすると $D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$

したがって、① と ② は接する。

③ から $(x-2)^2=0$ ゆえに $x=2$ このとき、② から $y=-3$ よって、共有点の座標は $(2, -3)$

(3)
$$\begin{cases} y=x^2-x+4 & \cdots \cdots ① \\ y=2x+2 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①, ② から y を消去すると $x^2-x+4=2x+2$ よって $x^2-3x+2=0 \cdots \cdots ③$ ③ の判別式を D とすると $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$

したがって、① と ② は異なる2点で交わる。

③ から $(x-1)(x-2)=0$ ゆえに $x=1, 2$ ② から $x=1$ のとき $y=4$, $x=2$ のとき $y=6$ よって、共有点の座標は $(1, 4), (2, 6)$

(4)
$$\begin{cases} y=4x^2-6x+1 & \cdots \cdots ① \\ y=2x-4 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①, ② から y を消去すると $4x^2-6x+1=2x-4$ よって $4x^2-8x+5=0 \cdots \cdots ③$ ③ の判別式を D とすると $D=(-8)^2-4\cdot 4\cdot 5=-16<0$

したがって、① と ② は共有点をもたない。

問22-12 (2次不等式詰め合わせ) 次の2次不等式を解け。

(1) $3x^2-7x+2<0$

(2) $2x^2-7x-4\leq 0$

(3) $6x^2-7x-3>0$

(4) $x^2-4x+2>0$

(5) $x^2+5x+1<0$

(6) $2x^2+5x-1\geq 0$

(7) $x^2<4$

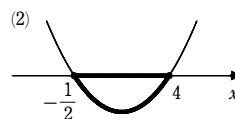
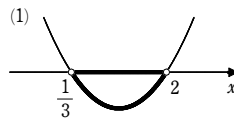
(8) $x^2-18>0$ (9) $2x^2-9\geq 0$

解説

(1) $3x^2-7x+2<0$ から $(x-2)(3x-1)<0$

よって $\frac{1}{3}<x<2$

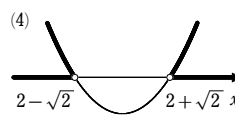
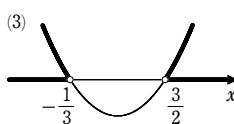
(2) $2x^2-7x-4\leq 0$ から $(x-4)(2x+1)\leq 0$

よって $-\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ 

(3) $6x^2-7x-3>0$ から $(2x-3)(3x+1)>0$

よって $x<-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}<x$

(4) $x^2-4x+2=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{2}$

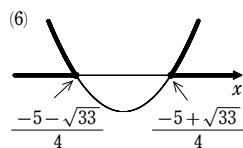
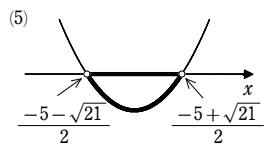
よって、 $x^2-4x+2>0$ の解は $x<2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}<x$ 

(5) $x^2+5x+1=0$ を解くと $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

よって、 $x^2+5x+1<0$ の解は $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$

(6) $2x^2+5x-1=0$ を解くと $x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

よって、 $2x^2+5x-1\geq 0$ の解は $x\leq\frac{-5-\sqrt{33}}{4}, \frac{-5+\sqrt{33}}{4}\leq x$



(7) 移項すると $x^2 - 4 < 0$

よって $(x+2)(x-2) < 0$

ゆえに $-2 < x < 2$

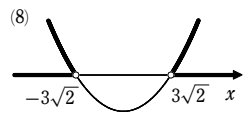
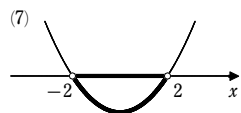
(8) $x^2 - 18 = 0$ から $x^2 = 18$

これを解くと $x = \pm 3\sqrt{2}$

よって, $x^2 - 18 > 0$ の解は $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$

別解 $x^2 - 18 > 0$ から $(x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) > 0$

よって $x < -3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} < x$



(9) $2x^2 - 9 = 0$ から $x^2 = \frac{9}{2}$

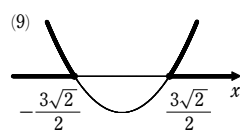
これを解くと $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって, $2x^2 - 9 \geq 0$ の解は

$x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$

別解 $2x^2 - 9 \geq 0$ から $2\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$

よって $x \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x$



- 締め切り=無し、提出の必要も無し。
- 中間試験前の自主学習用。解答は今週の金曜日までに配布する。
- 後期の中間試験の範囲内のうち、教科書での解説が少ない内容をフォローする問題になっています。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問23-01 次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。
今回は定義域がとくに決まっていないので、最大値または最小値がない可能性もある。

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| (1) $y = 3x^2 + 2$ | (2) $y = -(x-1)^2 + 5$ |
| (3) $y = x^2 - 4x - 4$ | (4) $y = -x^2 + 6x + 1$ |
| (5) $y = x^2 + 5x + 4$ | (6) $y = -2x^2 + 3x - 1$ |

問23-02 次の関数の最大値、最小値を求めよ。今回は定義域が決まっている。したがって最大値と最小値のどちらも定まる。

- | | |
|---|--|
| (1) $y = 3x^2 \quad (1 \leq x \leq 3)$ | (2) $y = -\frac{1}{2}x^2 \quad (-2 \leq x \leq 1)$ |
| (3) $y = x^2 - 2x - 3 \quad (-2 \leq x \leq 5)$ | |
| (4) $y = -2x^2 - 4x + 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$ | |
| (5) $y = 2x^2 - 3x + 4 \quad (-1 \leq x \leq 2)$ | (6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \quad (3 \leq x \leq 6)$ |

問23-03 (2次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) $x=1$ で最小値 5 をとり, $x=3$ のとき $y=7$ となる。
- (2) $x=2$ で最大値 4 をとり, 点 (1, 2) を通る。

問23-04 (2次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 軸が直線 $x=-2$ で, 2点 (0, 3), (-1, 0) を通る。
- (2) 軸が直線 $x=1$ で, 点 (3, -1) を通り, y 軸と点 (0, 2) で交わる。

問23-05 (2次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点 (1, -2) で, 点 (2, -3) を通る。
- (2) 頂点が点 (-1, 3) で, 点 (1, 11) を通る。

問23-06 (2次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たすように, 定数 a, b の値を定めよ。

- (1) 放物線 $y = a(x-2)^2 + 4$ が点 (1, 2) を通る。
- (2) 放物線 $y = x^2 + bx + 2$ が点 (2, 0) を通る。

問23-07 (2次関数と直線の共有点) 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは, その座標を求めよ。

- (1) $y = x^2, y = -x + 6$
- (2) $y = x^2 - 2x, y = 2x - 4$
- (3) $y = -x^2, y = x + 1$

問23-08 (2次関数と直線の共有点)

放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ について

- (1) 放物線と直線 $y = x + 5$ の共有点の座標を求めよ。
- (2) 放物線と直線 $y = -x + k$ が接するとき, 定数 k の値を求めよ。また, そのときの接点の座標を求めよ。
- (3) 放物線と直線 $y = -3x + 2k - 1$ が共有点をもつとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

- 締め切り=無し、提出の必要も無し。
- 中間試験前の自主学習用。解答は今週の金曜日までに配布する。
- 後期の中間試験の範囲内のうち、教科書での解説が少ない内容をフォローする問題になっています。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

(解説)

(解説文)

問23-01 次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。
今回は定義域がとくに決まっていないので、最大値または最小値がない可能性もある。

- (1) $y = 3x^2 + 2$ (2) $y = -(x-1)^2 + 5$
 (3) $y = x^2 - 4x - 4$ (4) $y = -x^2 + 6x + 1$
 (5) $y = x^2 + 5x + 4$ (6) $y = -2x^2 + 3x - 1$

(解説)

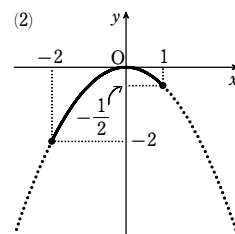
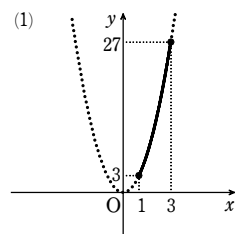
- (1) $x=0$ で最小値 2 をとる。最大値はない。
 (2) $x=1$ で最大値 5 をとる。最小値はない。
 (3) $x^2 - 4x - 4 = (x-2)^2 - 2^2 - 4 = (x-2)^2 - 8$
 よって、 $x=2$ で最小値 -8 をとる。最大値はない。
 (4) $-x^2 + 6x + 1 = -(x^2 - 6x) + 1 = -[(x-3)^2 - 3^2] + 1$
 $= -(x-3)^2 + 10$
 よって、 $x=3$ で最大値 10 をとる。最小値はない。
 (5) $x^2 + 5x + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
 よって、 $x = -\frac{5}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。最大値はない。
 (6) $-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 1 = -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 1$
 $= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$
 よって、 $x = \frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。最小値はない。

問23-02 次の関数の最大値、最小値を求めよ。今回は定義域が決まっている。したがって最大値と最小値のどちらも定まる。

- (1) $y = 3x^2$ ($1 \leq x \leq 3$) (2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ ($-2 \leq x \leq 1$)
 (3) $y = x^2 - 2x - 3$ ($-2 \leq x \leq 5$)
 (4) $y = -2x^2 - 4x + 1$ ($-1 \leq x \leq 1$)
 (5) $y = 2x^2 - 3x + 4$ ($-1 \leq x \leq 2$) (6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ ($3 \leq x \leq 6$)

(解説)

- (1) 関数 $y = 3x^2$ の $1 \leq x \leq 3$ でのグラフは、[図] の実線部分である。
 よって、 y は
 $x=3$ で最大値 27, $x=1$ で最小値 3
 をとる。
 (2) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ の $-2 \leq x \leq 1$ でのグラフは、[図] の実線部分である。
 よって、 y は
 $x=0$ で最大値 0, $x=-2$ で最小値 -2
 をとる。



- (3) $y = x^2 - 2x - 3$ を変形すると $y = (x-1)^2 - 4$
 $-2 \leq x \leq 5$ でのグラフは [図] の実線部分である。

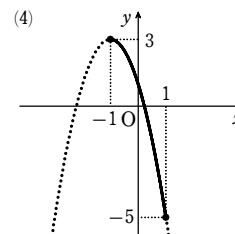
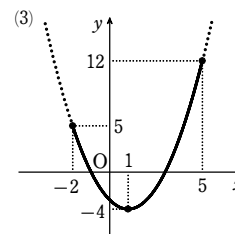
よって、 y は $x=5$ で最大値 12, $x=1$ で最小値 -4

をとる。

- (4) $y = -2x^2 - 4x + 1$ を変形すると $y = -2(x+1)^2 + 3$
 $-1 \leq x \leq 1$ でのグラフは [図] の実線部分である。

よって、 y は $x=-1$ で最大値 3, $x=1$ で最小値 -5

をとる。



- (5) $y = 2x^2 - 3x + 4$ を変形すると $y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$
 $-1 \leq x \leq 2$ でのグラフは [図] の実線部分である。

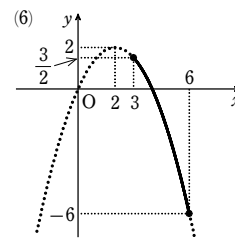
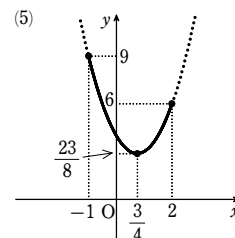
よって、 y は $x=-1$ で最大値 9, $x = \frac{3}{4}$ で最小値 $\frac{23}{8}$

をとる。

- (6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ を変形すると $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

 $3 \leq x \leq 6$ でのグラフは [図] の実線部分である。よって、 y は $x=3$ で最大値 $\frac{3}{2}$, $x=6$ で最小値 -6

をとる。



問23-03 (2次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) $x=1$ で最小値 5 をとり、 $x=3$ のとき $y=7$ となる。
 (2) $x=2$ で最大値 4 をとり、点 (1, 2) を通る。

(解説)

- (1) $x=1$ で最小値 5 をとるから、求める2次関数は $y = a(x-1)^2 + 5$ ($a > 0$) と表される。

$x=3$ のとき $y=7$ であるから $7 = 4a + 5$ よって $a = \frac{1}{2}$

これは $a > 0$ を満たす。

ゆえに、求める2次関数は $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 5$ ($y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{11}{2}$)

- (2) $x=2$ で最大値 4 をとるから、求める 2 次関数は $y=a(x-2)^2+4$ ($a<0$) と表される。
 グラフが点 (1, 2) を通るから $2=a+4$ よって $a=-2$
 これは $a<0$ を満たす。
 ゆえに、求める 2 次関数は $y=-2(x-2)^2+4$ ($y=-2x^2+8x-4$)

問23-04 (2 次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

- (1) 軸が直線 $x=-2$ で、2 点 (0, 3), (-1, 0) を通る。
 (2) 軸が直線 $x=1$ で、点 (3, -1) を通り、 y 軸と点 (0, 2) で交わる。

(解説)

- (1) 軸が直線 $x=-2$ であるから、求める 2 次関数は $y=a(x+2)^2+q$ と表される。
 グラフが 2 点 (0, 3), (-1, 0) を通るから $3=4a+q$, $0=a+q$
 これを解くと $a=1$, $q=-1$
 よって、求める 2 次関数は $y=(x+2)^2-1$ ($y=x^2+4x+3$)
 (2) 軸が直線 $x=1$ であるから、求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2+q$ と表される。
 グラフが 2 点 (3, -1), (0, 2) を通るから $-1=4a+q$, $2=a+q$
 これを解くと $a=-1$, $q=3$
 よって、求める 2 次関数は $y=-(x-1)^2+3$ ($y=-x^2+2x+2$)

問23-05 (2 次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点 (1, -2) で、点 (2, -3) を通る。
 (2) 頂点が点 (-1, 3) で、点 (1, 11) を通る。

(解説)

- (1) 頂点が点 (1, -2) であるから、求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2-2$ と表される。
 グラフが点 (2, -3) を通るから $-3=a-2$ よって $a=-1$
 ゆえに、求める 2 次関数は $y=-(x-1)^2-2$ ($y=-x^2+2x-3$)
 (2) 頂点が点 (-1, 3) であるから、求める 2 次関数は $y=a(x+1)^2+3$ と表される。
 グラフが点 (1, 11) を通るから $11=4a+3$ よって $a=2$
 ゆえに、求める 2 次関数は $y=2(x+1)^2+3$ ($y=2x^2+4x+5$)

問23-06 (2 次関数のグラフの推理・決定) 次の条件を満たすように、定数 a , b の値を定めよ。

- (1) 放物線 $y=a(x-2)^2+4$ が点 (1, 2) を通る。
 (2) 放物線 $y=x^2+bx+2$ が点 (2, 0) を通る。

(解説)

- (1) 条件から $2=a(1-2)^2+4$
 すなわち $2=a+4$
 よって $a=-2$
 (2) 条件から $0=2^2+b\cdot 2+2$
 すなわち $0=4+2b+2$
 よって $b=-3$

問23-07 (2 次関数と直線の共有点) 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

- (1) $y=x^2$, $y=-x+6$
 (2) $y=x^2-2x$, $y=2x-4$
 (3) $y=-x^2$, $y=x+1$

(解説)

- (1) 共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。
 $x^2=-x+6$

- 式を整理すると $x^2+x-6=0$
 これを解くと $x=2, -3$
 $y=-x+6$ に代入すると
 $x=-3$ のとき $y=9$,
 $x=2$ のとき $y=4$
 よって、共有点の座標は $(-3, 9), (2, 4)$
 (2) 共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。
 $x^2-2x=2x-4$
 式を整理すると $x^2-4x+4=0$
 これを解くと $x=2$
 $y=2x-4$ に代入すると $y=0$
 よって、共有点の座標は $(2, 0)$
 (3) 共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。
 $-x^2=x+1$
 式を整理すると $x^2+x+1=0$
 この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$
 よって、この放物線と直線は共有点をもたない。

問23-08 (2 次関数と直線の共有点)

放物線 $y=x^2+3x+2$ について

- (1) 放物線と直線 $y=x+5$ の共有点の座標を求めよ。
 (2) 放物線と直線 $y=-x+k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。
 また、そのときの接点の座標を求めよ。
 (3) 放物線と直線 $y=-3x+2k-1$ が共有点をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

(解説)

- (1) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2+3x+2=x+5$ の実数解である。
 式を整理すると $x^2+2x-3=0$
 よって $(x-1)(x+3)=0$
 ゆえに $x=1, -3$
 $y=x+5$ に代入すると、 $x=1$ のとき $y=6$
 $x=-3$ のとき $y=2$
 よって、求める共有点の座標は $(1, 6), (-3, 2)$
 (2) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2+3x+2=-x+k$ の実数解である。
 式を整理すると $x^2+4x+2-k=0$ …… ①
 この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D=4^2-4\cdot 1\cdot (2-k)=4(k+2)$
 放物線と直線が接するのは、 $D=0$ のときであるから
 $k+2=0$ よって $k=-2$
 このとき、接点の x 座標は、①の重解であり $x=-\frac{4}{2\cdot 1}=-2$
 $y=-x+k$ すなわち $y=-x-2$ に、 $x=-2$ を代入すると $y=0$
 したがって、接点の座標は $(-2, 0)$
 (3) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2+3x+2=-3x+2k-1$ の実数解である。
 式を整理すると $x^2+6x+3-2k=0$
 この 2 次方程式の判別式を D とすると
 $D=6^2-4\cdot 1\cdot (3-2k)=8(k+3)$
 放物線と直線が共有点をもつのは、 $D\geq 0$ のときであるから
 $k+3\geq 0$ したがって $k\geq -3$

締め切り=[2025/11/26], 自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

問25-01 関数 $y = \frac{3x-2}{x-1}$ …… ① について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 ① を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形せよ。また、① のグラフをかけ。

(2) ① のグラフの漸近線、定義域、値域を求めよ。

問25-02 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域と値域を求めよ。

(1) $y = -\frac{1}{3x}$ (2) $y = \frac{2}{x} - 1$ (3) $y = \frac{1}{x-2}$

(4) $y = 2 - \frac{1}{x+1}$ (5) $y = \frac{2x-3}{3-x}$ (6) $y = \frac{2-x}{3x-2}$

問25-03 次のような曲線をグラフとする関数を $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ の形で表せ。

(1) 2 直線 $x=2$, $y=1$ を漸近線として、点 $(1, 0)$ を通る。

(2) 2 直線 $x=-1$, $y=2$ を漸近線として、原点 $(0, 0)$ を通る。

問25-04 次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \frac{3-x}{x-1}$, $y=0$ (2) $y = \frac{2}{1-x}$, $y=x+2$

(3) $y = \frac{8x}{2x-1}$, $y=2x+3$

締め切り=[2025/11/26], 自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問25-01 関数 $y = \frac{3x-2}{x-1}$ …… ① について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 ① を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形せよ。また、① のグラフをかけ。

(2) ① のグラフの漸近線、定義域、値域を求めよ。

(解説文)

$$(1) \frac{3x-2}{x-1} = \frac{3(x-1)+1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{x-1} + 3$$

グラフは右の図のようになる。

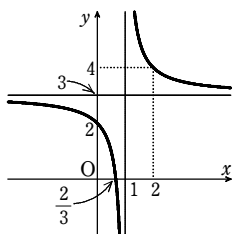
(2) $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 だけ

平行移動したものである。

漸近線の方程式は $x=1, y=3$

定義域は $x-1 \neq 0$ より、 $x \neq 1$ であり、

値域は $y \neq 3$ である。



問25-02 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域と値域を求めよ。

$$(1) y = -\frac{1}{3x} \quad (2) y = \frac{2}{x} - 1 \quad (3) y = \frac{1}{x-2}$$

$$(4) y = 2 - \frac{1}{x+1} \quad (5) y = \frac{2x-3}{3-x} \quad (6) y = \frac{2-x}{3x-2}$$

(解説文)

(1) $y = -\frac{1}{3x}$ のグラフは、第 2, 第 4 象限にある双曲線で、[図] のようになる。

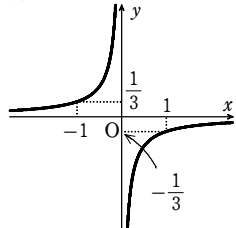
また、定義域は $x \neq 0$ 、値域は $y \neq 0$ である。

(2) $y = \frac{2}{x} - 1$ のグラフは、 $y = \frac{2}{x}$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、

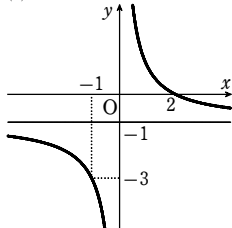
[図] のようになる。

また、定義域は $x \neq 0$ 、値域は $y \neq -1$ である。

(1)



(2)



(3) $y = \frac{1}{x-2}$ のグラフは、 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、

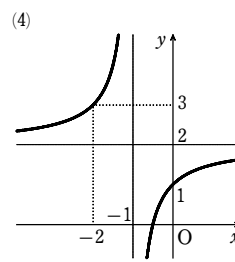
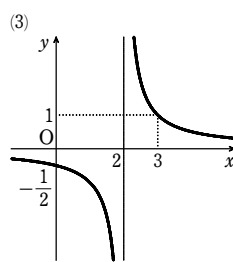
[図] のようになる。

また、定義域は $x \neq 2$ 、値域は $y \neq 0$ である。

(4) $y = 2 - \frac{1}{x+1}$ のグラフは、 $y = -\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ

平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \neq -1$ 、値域は $y \neq 2$ である。



$$(5) \frac{2x-3}{3-x} = \frac{-2x+3}{x-3} = \frac{-2(x-3)-3}{x-3} = -\frac{3}{x-3} - 2$$

よって、 $y = \frac{2x-3}{3-x}$ のグラフは、 $y = -\frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に -2

だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

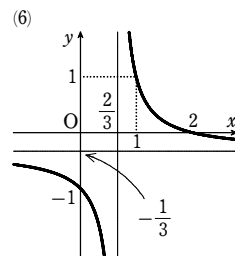
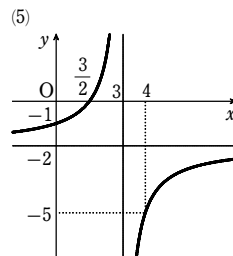
また、定義域は $x \neq 3$ 、値域は $y \neq -2$ である。

$$(6) \frac{2-x}{3x-2} = \frac{-\frac{1}{3}(3x-2)+\frac{4}{3}}{3x-2} = \frac{\frac{4}{3}}{3x-2} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9(x-\frac{2}{3})} - \frac{1}{3}$$

よって、 $y = \frac{2-x}{3x-2}$ のグラフは、 $y = \frac{4}{9x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{2}{3}$, y 軸方向に $-\frac{1}{3}$

だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

また、定義域は $x \neq \frac{2}{3}$ 、値域は $y \neq -\frac{1}{3}$ である。



問25-03 次のような曲線をグラフとする関数を $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ の形で

表せ。

(1) 2 直線 $x=2, y=1$ を漸近線として、点 $(1, 0)$ を通る。

(2) 2 直線 $x=-1, y=2$ を漸近線として、原点 $(0, 0)$ を通る。

(解説文)

(1) 2 直線 $x=2, y=1$ が漸近線であるから、求める関数は $y = \frac{k}{x-2} + 1$ ($k \neq 0$) とおける。

このグラフが点 $(1, 0)$ を通るから $0 = \frac{k}{1-2} + 1$

ゆえに $k=1$

これは $k \neq 0$ を満たす。

よって、求める関数は $y = \frac{1}{x-2} + 1$

すなわち $y = \frac{x-1}{x-2}$

(2) 2 直線 $x=-1, y=2$ が漸近線であるから、求める関数は $y = \frac{k}{x+1} + 2$ ($k \neq 0$) とおける。

このグラフが原点 $(0, 0)$ を通るから $0 = \frac{k}{0+1} + 2$

ゆえに $k=-2$

これは $k \neq 0$ を満たす。

よって、求める関数は $y = \frac{-2}{x+1} + 2$

すなわち $y = \frac{2x}{x+1}$

問25-04 次の2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \frac{3-x}{x-1}, y=0$ (2) $y = \frac{2}{1-x}, y=x+2$

(3) $y = \frac{8x}{2x-1}, y=2x+3$

解説

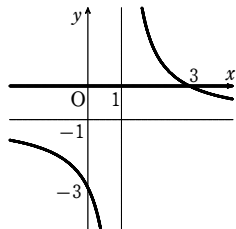
(1) 方程式 $\frac{3-x}{x-1}=0$ …… ① の解が共有点の x 座

標である。

① の両辺に $x-1$ を掛けると $3-x=0$

よって $x=3$

これは、① の左辺の分母を 0 にしないから、① の解である。

よって、共有点の座標は $(3, 0)$ 

(2) 方程式 $\frac{2}{1-x}=x+2$ …… ① の解が共有点の x 座

標である。

① の両辺に $1-x$ を掛けると $2=(x+2)(1-x)$

整理すると $x^2+x=0$

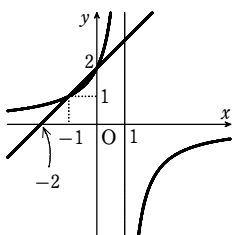
よって $x(x+1)=0$

これを解いて $x=0, -1$

これらは、① の左辺の分母を 0 にしないから、① の解である。

共有点は直線 $y=x+2$ 上にあるから

$x=0$ のとき $y=2$, $x=-1$ のとき $y=1$

よって、共有点の座標は $(0, 2), (-1, 1)$ 

(3) 方程式 $\frac{8x}{2x-1}=2x+3$ …… ① の解が共有点の

 x 座標である。

① の両辺に $2x-1$ を掛けると $8x=(2x+3)(2x-1)$

整理すると $4x^2-4x-3=0$

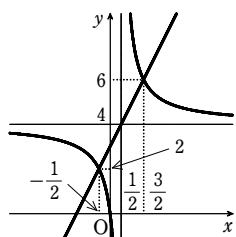
よって $(2x+1)(2x-3)=0$

これを解いて $x=-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

これらは、① の左辺の分母を 0 にしないから、① の解である。

共有点は直線 $y=2x+3$ 上にあるから

$x=-\frac{1}{2}$ のとき $y=2$, $x=\frac{3}{2}$ のとき $y=6$

よって、共有点の座標は $(-\frac{1}{2}, 2), (\frac{3}{2}, 6)$ 

締め切り=[2025/12/10]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

問25-01 次の関数の中から、奇関数と偶関数を、それぞれ選び出せ。
どちらでもないものも含まれている。

ヒント：関数のうち、そのグラフが y 軸に関して対称なものが偶関数、
原点に関して対称なものが奇関数である。

- (1) $y = x^4$ (2) $y = x^3 - 4x$ (3) $y = x^3 + 1$
(4) $y = 2\sin x$ (5) $y = -\cos x$ (6) $y = \tan 2x$

問25-02 次の式を計算せよ。ただし、 $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

- (1) $a^5 a^{-3}$ (2) $(a^{-1})^{-2}$ (3) $(a^2 b^{-1})^3$
(4) $(a^{-3} b)^{-2}$ (5) $a^{-2} \div a^3$ (6) $a^{-3} \div a^{-3}$

問25-03 次の式を計算せよ。

- (1) $(\sqrt[4]{5})^8$ (2) $\sqrt[4]{4^8}$ (3) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{10}$
(4) $\sqrt[4]{3} \sqrt[4]{27}$ (5) $\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$ (6) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$
(7) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

問25-04 次の式を計算せよ。

- (1) $\sqrt[3]{-216}$ (2) $\sqrt[5]{-32}$
(3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$ (4) $\sqrt[3]{54} \times 2\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{16}$
(5) $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-3}$

問25-05 次の式を計算せよ。

- (1) $9^{\frac{3}{2}}$ (2) $8^{-\frac{4}{3}}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

問25-06 条件式 $2^x - 2^{-x} = 3$ が与えられている。このとき、
 $2^x + 2^{-x}$ の値を求めよ。

問25-07 条件式 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ が与えられている。このとき、
次の値を求めよ。

- (1) $x + x^{-1}$ (2) $x^2 + x^{-2}$

問25-99 おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問して
みよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。

(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

締め切り=[2025/12/10]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

(解説)

(解説文)

問25-01 次の関数の中から、奇関数と偶関数を、それぞれ選び出せ。
どちらでもないものも含まれている。

ヒント：関数のうち、そのグラフが y 軸に関して対称なものが偶関数、
原点に関して対称なものが奇関数である。

- (1) $y = x^4$ (2) $y = x^3 - 4x$ (3) $y = x^3 + 1$
(4) $y = 2\sin x$ (5) $y = -\cos x$ (6) $y = \tan 2x$

(解説)

(1) $f(x) = x^4$ とおくと $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$

よって、偶関数である。

(2) $f(x) = x^3 - 4x$ とおくと $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$

よって、奇関数である。

(3) $f(x) = x^3 + 1$ とおくと $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$

よって、奇関数でも偶関数でもない。

(4) $f(x) = 2\sin x$ とおくと $f(-\theta) = 2\sin(-\theta) = -2\sin \theta = -f(\theta)$

よって、奇関数である。

(5) $f(x) = -\cos x$ とおくと $f(-\theta) = -\cos(-\theta) = -\cos \theta = f(\theta)$

よって、偶関数である。

(6) $f(x) = \tan 2x$ とおくと $f(-\theta) = \tan 2(-\theta) = -\tan 2\theta = -f(\theta)$

よって、奇関数である。

以上から、奇関数は (2), (4), (6)

偶関数は (1), (5)

問25-02 次の式を計算せよ。ただし、 $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

- (1) $a^5 a^{-3}$ (2) $(a^{-1})^{-2}$ (3) $(a^2 b^{-1})^3$
(4) $(a^{-3} b)^{-2}$ (5) $a^{-2} \div a^3$ (6) $a^{-3} \div a^{-3}$

(解説)

(1) $a^5 a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^2$

(2) $(a^{-1})^{-2} = a^{(-1) \cdot (-2)} = a^2$

(3) $(a^2 b^{-1})^3 = (a^2)^3 (b^{-1})^3 = a^6 b^{-3}$

(4) $(a^{-3} b)^{-2} = (a^{-3})^{-2} b^{-2} = a^6 b^{-2}$

(5) $a^{-2} \div a^3 = a^{-2-3} = a^{-5}$

(6) $a^{-3} \div a^{-3} = a^{-3-(-3)} = a^0 = 1$

問25-03 次の式を計算せよ。

- (1) $(\sqrt[4]{5})^8$ (2) $\sqrt[4]{4^8}$ (3) $\sqrt[3]{4 \sqrt[3]{10}}$
(4) $\sqrt[4]{3 \sqrt[4]{27}}$ (5) $\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$ (6) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$

(7) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

(解説)

(1) $(\sqrt[4]{5})^8 = ((\sqrt[4]{5})^4)^2 = 5^2 = 25$

(2) $\sqrt[4]{4^8} = \sqrt[4]{(4^2)^4} = 4^2 = 16$

(3) $\sqrt[3]{4 \sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{4 \cdot 10} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{5} = 2 \sqrt[3]{5}$

(4) $\sqrt[4]{3 \sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(5) $\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(6) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{48}{3}} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2 \sqrt[3]{2}$

(7) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2$

問25-04 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{-216}$ (2) $\sqrt[5]{-32}$

(3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$

(4) $\sqrt[3]{54} \times 2 \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{16}$

(5) $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-3}$

(解説)

(1) $\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

(別解) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -\sqrt[3]{6^3} = -6$

(2) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

(別解) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$

(3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} = -\frac{1}{4}$

(別解) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = -\frac{1}{4}$

(4) $\sqrt[3]{54} \times 2 \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} \times 2 \left(-\sqrt[3]{2}\right) \times \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 3 \sqrt[3]{2} \times (-2 \sqrt[3]{2}) \times 2 \sqrt[3]{2}$
 $= -12 (\sqrt[3]{2})^3 = -12 \cdot 2 = -24$

(5) $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3}$
 $= -2 \sqrt[3]{3} + 3 \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 0$

(参考) n が奇数のとき $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

問25-05 次の式を計算せよ。

(1) $9^{\frac{3}{2}}$ (2) $8^{-\frac{4}{3}}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(解説)

(1) $9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

(2) $8^{-\frac{4}{3}} = (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{25}$

問25-06 条件式 $2^x - 2^{-x} = 3$ が与えられている。このとき、
 $2^x + 2^{-x}$ の値を求めよ。

(解説)

$(2^x + 2^{-x})^2 = (2^x - 2^{-x})^2 + 4 \cdot 2^x 2^{-x} = (2^x - 2^{-x})^2 + 4 = 3^2 + 4 = 13$

$2^x + 2^{-x} > 0$ であるから $2^x + 2^{-x} = \sqrt{13}$

問25-07 条件式 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ が与えられている。このとき、
次の値を求めよ。

(1) $x + x^{-1}$ (2) $x^2 + x^{-2}$

(解説)

(1) $x + x^{-1} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$

(2) $x^2 + x^{-2} = x^2 + (x^{-1})^2 = (x + x^{-1})^2 - 2xx^{-1} = 14^2 - 2 \cdot 1 = 194$

問25－99 おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。
（おまけ課題につき回答は必須ではない。）

解説

（解説文）

締め切り=[2025/12/17]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

問26-01 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=4^x$

(2) $y=-4^x$

(3) $y=4^{-x}$

(4) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$

問26-02 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{512}$

(2) 1 , $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

問26-03 次の方程式、不等式を解け。

(2) $27^x = \frac{1}{9}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$

(5) $2^x > 64$

(6) $27^x \leq \frac{1}{81}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$

問26-04 【対数】 次の (1) ~ (5) を $p = \log_a M$ の形に書け。

(1) $2^5 = 32$

(2) $3^0 = 1$

(3) $16^{\frac{1}{4}} = 2$

(4) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(5) $10^{-2} = 0.01$

問26-05 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_3 9$

(2) $\log_2 \frac{1}{4}$

(3) $\log_{100} 1$

(4) $\log_2 \sqrt{8}$

(5) $\log_{\sqrt{3}} 3$

(6) $\log_{64} 4$

(7) $\log_{0.2} 25$

問26-99 おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。

(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

締め切り=[2025/12/17]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 表紙を付け、右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

(2) 左上をホチキス等で留めること。

※必要であればこの用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問26-01 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=4^x$

(2) $y=-4^x$

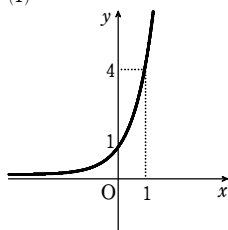
(3) $y=4^{-x}$

(4) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(解説文)

(1) グラフは [図]

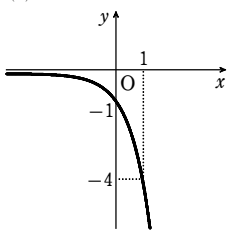
(1)



(2) グラフは [図]

このグラフは、(1)のグラフと x 軸に関して対称である。

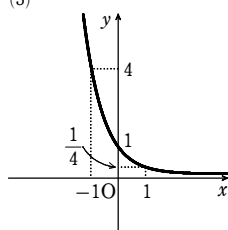
(2)



(3) グラフは [図]

このグラフは、(1)のグラフと y 軸に関して対称である。

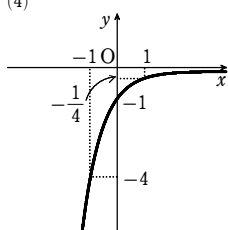
(3)



(4) グラフは [図]

このグラフは、(1)のグラフと原点に関して対称である。

(4)



問26-02 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[7]{512}$

(2) 1 , $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

(解説文)

(1) $\sqrt[4]{64} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{128} = 2^{\frac{7}{3}}$, $\sqrt[7]{512} = 2^{\frac{9}{7}}$

底 2 は 1 より大きく, $\frac{9}{7} < \frac{3}{2} < \frac{7}{3}$ であるから $2^{\frac{9}{7}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{7}{3}}$

すなわち $\sqrt[7]{512} < \sqrt[4]{64} < \sqrt[3]{128}$

(2) $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さく, $-3 < 0 < 2 < 4$ であるから

$\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

すなわち $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

問26-03 次の方程式、不等式を解け。

(2) $27^x = \frac{1}{9}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$

(5) $2^x > 64$

(6) $27^x \leq \frac{1}{81}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$

(解説文)

(2) $27^x = \frac{1}{9}$ から $3^{3x} = 3^{-2}$

よって $3x = -2$ ゆえに $x = -\frac{2}{3}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

よって $x = 3$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

よって $3x = -4$ ゆえに $x = -\frac{4}{3}$

(別解) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$ から $2^{-3x} = 2^4$

よって $-3x = 4$ ゆえに $x = -\frac{4}{3}$

(5) $2^x > 64$ から $2^x > 2^6$

底 2 は 1 より大きいから $x > 6$

(6) $27^x \leq \frac{1}{81}$ から $3^{3x} \leq 3^{-4}$

底 3 は 1 より大きいから $3x \leq -4$

よって $x \leq -\frac{4}{3}$

(7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}$ から $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^3$

底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいから $x > 3$

問26-04 【対数】 次の (1) ~ (5) を $p = \log_a M$ の形に書け。

(1) $2^5 = 32$

(2) $3^0 = 1$

(3) $16^{\frac{1}{4}} = 2$

(4) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(5) $10^{-2} = 0.01$

(解説文)

(1) $5 = \log_2 32$

(2) $0 = \log_3 1$

(3) $\frac{1}{4} = \log_{16} 2$

(4) $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$

(5) $-2 = \log_{10} 0.01$

問26-05 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_3 9$

(2) $\log_2 \frac{1}{4}$

(3) $\log_{100} 1$

(4) $\log_2 \sqrt{8}$

(5) $\log_{\sqrt{3}} 3$

(6) $\log_{64} 4$

(7) $\log_{0.2} 25$

(解説)

(1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

(2) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

(3) $\log_{100} 1 = 0$

(4) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

(5) $\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$

(6) $\log_{64} 4 = \log_{64} (4^3)^{\frac{1}{3}} = \log_{64} 64^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(7) $\log_{0.2} 25 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2$

(8) $\log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}} = \log_{25} 5^{-\frac{1}{2}} = \log_{25} 25^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$

問26-99 おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。

(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

(解説)

(解説文)

締め切り=なし (冬休み課題があるため)。提出不要。

解答は後日、電子メールで配布する。期末テスト前の自主学習などに活用すること。

問27-01 底の変換公式を用いて、次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_8 32$ (2) $\log_9 \frac{1}{3}$ (3) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{125}$
 (4) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ (5) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$ (6) $\log_4 5 \cdot \log_5 8$

問27-02 $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$ とするとき、次の式を a , b で表せ。

- (1) $\log_2 15$ (2) $\log_2 75$
 (3) $\log_2 10$ (4) $\log_4 45$

問27-03 次の関数のグラフをかけ。

- (1) $y = \log_2(x-2)$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$
 (3) $y = \log_{10}(-x)$

問27-04 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 8$ のとき, $\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ。

問27-05 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

- (1) $\log_5 8$, $\log_{25} 30$, 2 (2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}} 2$, $\log_{\frac{1}{8}} 1$
 (3) $\log_4 3$, $\log_3 4$, 0.5 (4) $\log_4 9$, $\log_9 25$, 1.5

締め切り＝なし（冬休み課題があるため）。提出不要。

解答は後日、電子メールで配布する。期末テスト前の自主学習などに活用すること。

(解説)

(解説文)

問27-01 底の変換公式を用いて、次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_8 32$ (2) $\log_9 \frac{1}{3}$ (3) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{125}$
 (4) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ (5) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$ (6) $\log_4 5 \cdot \log_5 8$

(解説)

$$(1) \log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$$

$$(2) \log_9 \frac{1}{3} = \frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-1}}{\log_3 3^2} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{125} = \frac{\log_5 \sqrt[5]{125}}{\log_5 \frac{1}{5}} = \frac{\log_5 5^{\frac{3}{5}}}{\log_5 5^{-1}} = -\frac{3}{5}$$

$$(4) \log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1$$

$$(5) \log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 5} = 2$$

$$(6) \log_4 5 \cdot \log_5 8 = \frac{\log_2 5}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5} = \frac{3}{2}$$

問27-02 $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$ とするとき、次の式を a , b で表せ。

- (1) $\log_2 15$ (2) $\log_2 75$
 (3) $\log_2 10$ (4) $\log_4 45$

(解説)

$$(1) \log_2 15 = \log_2 (3 \times 5) = \log_2 3 + \log_2 5 = a + b$$

$$(2) \log_2 75 = \log_2 (3 \times 5^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 = a + 2b$$

$$(3) \log_2 10 = \log_2 (5 \times 2) = \log_2 5 + 1 = b + 1$$

$$(4) \log_4 45 = \frac{\log_2 (3^2 \times 5)}{\log_2 4} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{2} = \frac{2a + b}{2} = a + \frac{b}{2}$$

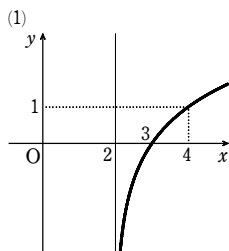
問27-03 次の関数のグラフをかけ。

- (1) $y = \log_2 (x-2)$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$
 (3) $y = \log_{10} (-x)$

(解説)

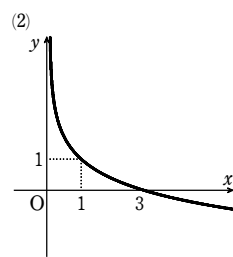
(1) 求めるグラフは、 $y = \log_2 x$ の

グラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。



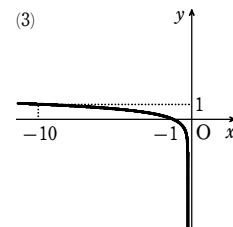
(2) 求めるグラフは、 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ の

グラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。



(3) 求めるグラフは、 $y = \log_{10} x$ の

グラフを y 軸に関して対称移動したもので、[図] のようになる。



問27-04 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 8$ のとき、 $\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ。

(解説)

$$x + 2y = 8 \text{ から } x = 8 - 2y \quad \dots\dots ①$$

$$x > 0 \text{ から } 8 - 2y > 0 \quad \text{よって } y < 4$$

$$y > 0 \text{ と合わせて } 0 < y < 4 \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \log_{10} x + \log_{10} y &= \log_{10} xy = \log_{10} (8 - 2y)y \\ &= \log_{10} (-2y^2 + 8y) = \log_{10} \{-2(y-2)^2 + 8\} \end{aligned}$$

$-2(y-2)^2 + 8$ は、② の範囲で

$y = 2$ で最大値 8

をとる。

底 10 は 1 より大きいから、このとき

$\log_{10} \{-2(y-2)^2 + 8\}$ も最大で、

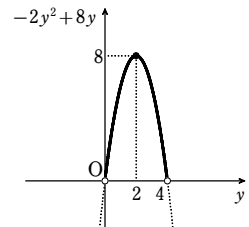
その最大値は

$$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2$$

また、① から、 $y = 2$ のとき $x = 4$

よって、 $\log_{10} x + \log_{10} y$ は

$x = 4$, $y = 2$ で最大値 $3\log_{10} 2$ ととる。



問27-05 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

- (1) $\log_5 8$, $\log_{25} 30$, 2 (2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}} 2$, $\log_{\frac{1}{8}} 1$
 (3) $\log_4 3$, $\log_3 4$, 0.5 (4) $\log_4 9$, $\log_9 25$, 1.5

(解説)

$$(1) \log_{25} 30 = \frac{\log_5 30}{\log_5 5^2} = \frac{1}{2} \log_5 30 = \log_5 \sqrt{30},$$

$$2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$$

底 5 は 1 より大きく、 $\sqrt{30} < 8 < 25$ であるから

$$\log_5 \sqrt{30} < \log_5 8 < \log_5 25$$

すなわち

$$\log_{25} 30 < \log_5 8 < 2$$

$$(2) \log_{\frac{1}{4}} 2 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 2}{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} 1 = 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さく, $3 > \sqrt{2} > 1$ であるから

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} < \log_{\frac{1}{2}} 1$$

すなわち

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 2 < \log_{\frac{1}{8}} 1$$

$$(3) 0.5 = \log_4 4^{0.5} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$$

底 4 は 1 より大きく, $2 < 3 < 4$ であるから

$$\log_4 2 < \log_4 3 < \log_4 4 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, 底 3 は 1 より大きく, $3 < 4$ であるから

$$1 = \log_3 3 < \log_3 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から $\log_4 2 < \log_4 3 < 1 < \log_3 4$

したがって $0.5 < \log_4 3 < \log_3 4$

$$(4) 1.5 = \log_4 4^{1.5} = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \log_4 8$$

底 4 は 1 より大きく, $8 < 9$ であるから

$$\log_4 8 < \log_4 9$$

ゆえに $1.5 < \log_4 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\text{また } 1.5 = \log_9 9^{1.5} = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \log_9 27$$

底 9 は 1 より大きく, $25 < 27$ であるから

$$\log_9 25 < \log_9 27$$

ゆえに $\log_9 25 < 1.5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ② から $\log_9 25 < 1.5 < \log_4 9$

締め切り=なし (冬休み課題があるため)。提出も不要。
 解答は後日、電子メールで配布する。期末テスト前の自主学習などに活用すること。

問28-01 次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $\log_2 x = -5$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$
- (3) $\log_4(x-3) = \frac{1}{2}$ (4) $\log_3(3x-1) = 2.5$
- (5) $\log_{10} x < 3$ (6) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$
- (7) $\log_{0.5} x \leq -2$ (8) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$
- (9) $\log_3(1-2x) \leq 0$

問28-02 次の方程式を解け。

- (1) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$
- (2) $\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$
- (3) $\log_2(3-x) = \log_4(2x+18)$

問28-03 次の不等式を解け。

- (1) $2\log_{0.1}(x-1) < \log_{0.1}(7-x)$
- (2) $\log_{10}(x-3) + \log_{10} x \leq 1$
- (3) $\log_2(1-x) + \log_2(3-x) < 1 + \log_2 3$

問28-04 次の方程式を解け。

- (1) $2^x = 3^{2x-1}$ (2) $5^{2x} = 3^{x+2}$

問28-05 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として, 次の値を求めよ。(3), (4) は小数第 5 位を四捨五入して, 小数第 4 位まで求めよ。

- (1) $\log_{10} 0.2$ (2) $\log_{10} 240$ (3) $\log_{10} \sqrt[3]{54}$
- (4) $\log_{\sqrt{3}} 24$

問28-06 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。次の数を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを答えよ。

- (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ (2) $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$ (3) $\sqrt[3]{(0.06)^{10}}$

締め切り=なし (冬休み課題があるため)。提出も不要。
解答は後日、電子メールで配布する。期末テスト前の自主学習などに活用すること。

(解説)

(解説文)

問28-01 次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $\log_2 x = -5$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$
 (3) $\log_4(x-3) = \frac{1}{2}$ (4) $\log_3(3x-1) = 2.5$
 (5) $\log_{10} x < 3$ (6) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$
 (7) $\log_{0.5} x \leq -2$ (8) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$
 (9) $\log_3(1-2x) \leq 0$

(解説)

- (1) 対数の定義から, 解は $x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$
 (2) 対数の定義から, 解は $x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
 (3) 対数の定義から $x-3 = 4^{\frac{1}{2}}$ よって $x = 5$
 (4) 対数の定義から $3x-1 = 3^{2.5}$ …… ①
 ここで $3^{2.5} = 3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3}$
 よって, ① から $3x-1 = 9\sqrt{3}$ これを解いて $x = 3\sqrt{3} + \frac{1}{3}$
 (5) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①
 与えられた不等式は $\log_{10} x < \log_{10} 10^3$
 すなわち $\log_{10} x < \log_{10} 1000$
 底 10 は 1 より大きいから $x < 1000$ …… ②
 ①, ② から, 解は $0 < x < 1000$
 (6) まず真数は正であるから $x > 0$ …… ①
 与えられた不等式は $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 すなわち $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$
 底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $x < \frac{1}{9}$ …… ②
 ①, ② から, 解は $0 < x < \frac{1}{9}$
 (7) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①
 与えられた不等式は $\log_{0.5} x \leq \log_{0.5} 0.5^{-2}$
 すなわち $\log_{0.5} x \leq \log_{0.5} 4$
 底 0.5 は 1 より小さいから $x \geq 4$ …… ②
 ①, ② から, 解は $x \geq 4$
 (8) 真数は正であるから $x-1 > 0$ ゆえに $x > 1$ …… ①
 与えられた不等式は $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$
 底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $x-1 < \frac{1}{3}$
 よって $x < \frac{4}{3}$ …… ②
 ①, ② から, 解は $1 < x < \frac{4}{3}$

- (9) 真数は正であるから $1-2x > 0$ つまり $x < \frac{1}{2}$ …… ①

与えられた不等式は $\log_3(1-2x) \leq \log_3 3^0$ すなわち $\log_3(1-2x) \leq \log_3 1$ 底 3 は 1 より大きいから $1-2x \leq 1$ よって $x \geq 0$ …… ②①, ② から, 解は $0 \leq x < \frac{1}{2}$

問28-02 次の方程式を解け。

- (1) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$
 (2) $\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$
 (3) $\log_2(3-x) = \log_4(2x+18)$

(解説)

- (1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x+3 > 0$
 よって $x > 0$ …… ①
 方程式を変形すると $\log_2 x(x+3) = 2$
 ゆえに $x(x+3) = 2^2$
 整理して $x^2 + 3x - 4 = 0$ すなわち $(x-1)(x+4) = 0$
 ① から, 解は $x = 1$
 (2) 真数は正であるから $2x+3 > 0$ かつ $4x+1 > 0$
 よって $x > -\frac{1}{4}$ …… ①
 方程式を変形すると $\log_4(2x+3)(4x+1) = \log_4 5^2$
 すなわち $\log_4(2x+3)(4x+1) = \log_4 25$
 ゆえに $(2x+3)(4x+1) = 25$
 整理して $4x^2 + 7x - 11 = 0$ すなわち $(x-1)(4x+11) = 0$
 ① から, 解は $x = 1$
 (3) 真数は正であるから $3-x > 0$ かつ $2x+18 > 0$
 よって $-9 < x < 3$ …… ①
 方程式を変形すると $\log_2(3-x) = \frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}$
 すなわち $\log_2(3-x) = \frac{\log_2(2x+18)}{2}$
 両辺に 2 を掛けて $2\log_2(3-x) = \log_2(2x+18)$
 すなわち $\log_2(3-x)^2 = \log_2(2x+18)$
 ゆえに $(3-x)^2 = 2x+18$
 整理して $x^2 - 8x - 9 = 0$ すなわち $(x+1)(x-9) = 0$
 ① から, 解は $x = -1$

問28-03 次の不等式を解け。

- (1) $2\log_{0.1}(x-1) < \log_{0.1}(7-x)$
 (2) $\log_{10}(x-3) + \log_{10} x \leq 1$
 (3) $\log_2(1-x) + \log_2(3-x) < 1 + \log_2 3$

(解説)

- (1) 真数は正であるから $x-1 > 0$ かつ $7-x > 0$
 よって $1 < x < 7$ …… ①
 与えられた不等式は $\log_{0.1}(x-1)^2 < \log_{0.1}(7-x)$
 底 0.1 は 1 より小さいから $(x-1)^2 > 7-x$
 整理して $x^2 - x - 6 > 0$ すなわち $(x+2)(x-3) > 0$
 これを解いて $x < -2, 3 < x$ …… ②
 ①, ② から, 解は $3 < x < 7$

(2) 真数は正であるから $x-3>0$ かつ $x>0$ よって $x>3$ …… ①不等式を変形すると $\log_{10}(x-3)x \leq \log_{10}10$ 底 10 は 1 より大きいから $(x-3)x \leq 10$ 整理して $x^2-3x-10 \leq 0$ すなわち $(x+2)(x-5) \leq 0$ これを解いて $-2 \leq x \leq 5$ …… ②①, ② から, 解は $3 < x \leq 5$ (3) 真数は正であるから $1-x>0$ かつ $3-x>0$ よって $x<1$ …… ① $1+\log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$ であるから, 与えられた不等式は

$$\log_2(1-x)(3-x) < \log_2 6$$

底 2 は 1 より大きいから $(1-x)(3-x) < 6$ 整理して $x^2-4x-3 < 0$ これを解いて $2-\sqrt{7} < x < 2+\sqrt{7}$ …… ②①, ② から, 解は $2-\sqrt{7} < x < 1$

問28-04 次の方程式を解け。

(1) $2^x = 3^{2x-1}$

(2) $5^{2x} = 3^{x+2}$

解説

(1) 方程式の両辺は正であるから, 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x = \log_2 3^{2x-1}$$

よって $x = (2x-1)\log_2 3$ ゆえに $(2\log_2 3 - 1)x = \log_2 3$

$$2\log_2 3 - 1 \neq 0 \text{ であるから } x = \frac{\log_2 3}{2\log_2 3 - 1}$$

【参考】方程式の両辺の 3 を底とする対数をとると,

$$\text{解は } x = \frac{1}{2 - \log_3 2} \text{ となる。}$$

(2) 方程式の両辺は正であるから, 5 を底とする対数をとると

$$\log_5 5^{2x} = \log_5 3^{x+2}$$

よって $2x = (x+2)\log_5 3$ ゆえに $(2 - \log_5 3)x = 2\log_5 3$

$$2 - \log_5 3 \neq 0 \text{ であるから } x = \frac{2\log_5 3}{2 - \log_5 3}$$

【参考】方程式の両辺の 3 を底とする対数をとると,

$$\text{解は } x = \frac{2}{2\log_3 5 - 1} \text{ となる。}$$

問28-05 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として, 次の値を求めよ。(

3), (4) は小数第 5 位を四捨五入して, 小数第 4 位まで求めよ。

(1) $\log_{10} 0.2$

(2) $\log_{10} 240$

(3) $\log_{10} \sqrt[3]{54}$

(4) $\log_{\sqrt{3}} 24$

解説

(1) $\log_{10} 0.2 = \log_{10}(2 \times 10^{-1}) = \log_{10} 2 - 1$

$$= 0.3010 - 1 = -0.6990$$

(2) $\log_{10} 240 = \log_{10}(2^3 \times 3 \times 10) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 1$

$$= 3 \times 0.3010 + 0.4771 + 1 = 2.3801$$

(3) $\log_{10} \sqrt[3]{54} = \frac{1}{3} \log_{10}(2 \times 3^3) = \frac{1}{3} \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$$= \frac{1}{3} \times 0.3010 + 0.4771 = \frac{0.3010 + 1.4313}{3} = 0.57743 \dots$$

$$\approx 0.5774$$

$$\begin{aligned} (4) \log_{\sqrt{3}} 24 &= \frac{\log_{10} 24}{\log_{10} \sqrt{3}} = \frac{\log_{10}(2^3 \times 3)}{\frac{1}{2} \log_{10} 3} = \frac{2(3\log_{10} 2 + \log_{10} 3)}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{2(3 \times 0.3010 + 0.4771)}{0.4771} = 5.78536 \dots \\ &\approx 5.7854 \end{aligned}$$

問28-06 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。次の数を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを答えよ。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

(2) $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$

(3) $\sqrt[3]{(0.06)^{10}}$

解説

(1) $\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = -100 \log_{10} 2 = -100 \times 0.3010 = -30.10$

$$\text{よって } -31 < \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} < -30$$

$$\text{ゆえに } 10^{-31} < \left(\frac{1}{2}\right)^{100} < 10^{-30}$$

したがって, $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ は小数第 31 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(2) $\log_{10} \frac{1}{(\sqrt{2})^{25}} = -\frac{25}{2} \log_{10} 2 = -\frac{25}{2} \times 0.3010 = -3.7625$

$$\text{よって } -4 < \log_{10} \frac{1}{(\sqrt{2})^{25}} < -3$$

$$\text{ゆえに } 10^{-4} < \frac{1}{(\sqrt{2})^{25}} < 10^{-3}$$

したがって, $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$ は小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$$\begin{aligned} (3) \log_{10} \sqrt[3]{(0.06)^{10}} &= \frac{10}{3} \log_{10}(2 \times 3 \times 10^{-2}) = \frac{10}{3} (\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 2) \\ &= \frac{10}{3} (0.3010 + 0.4771 - 2) = -4.073 \end{aligned}$$

$$\text{よって } -5 < \log_{10} \sqrt[3]{(0.06)^{10}} < -4$$

$$\text{ゆえに } 10^{-5} < \sqrt[3]{(0.06)^{10}} < 10^{-4}$$

したがって, $\sqrt[3]{(0.06)^{10}}$ は小数第 5 位に初めて 0 でない数字が現れる。

締め切り＝無し。提出の必要も無し（試験直前のため）。期末試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。

定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ないので、まずは教科書の内容をしっかりと復習すること。

すべての問題をやる必要は無い。そもそも量が多い（配布しておいてなんだが）。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

問30-01 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域、漸近線を求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) y = \frac{3}{x} - 2 & (2) y = -\frac{1}{x+2} + 3 \\ (3) y = \frac{x-2}{x-3} & (4) y = \frac{-3x+6}{x-1} \\ (5) y = \frac{2x+4}{x+3} & (6) y = \frac{6x+3}{2x-1} \end{array}$$

問30-02 次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) y = \frac{1}{x-1}, y = x-1 & (2) y = \frac{2}{x+2}, y = x \\ (3) y = \frac{4x}{2x-1}, y = 2x \end{array}$$

問30-03 グラフを利用して、次の不等式を解け。

$$(1) \frac{2x-1}{x+1} \geq -1 \quad (2) \frac{1}{x-1} > x+1$$

問30-04 次の関数の中から、偶関数、奇関数を選べ。

$$\textcircled{1} 4x \quad \textcircled{2} -x^2 \quad \textcircled{3} \sin 2x \quad \textcircled{4} -\cos 3x$$

問30-05 次の式を簡単にせよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \sqrt[3]{125} & (2) \sqrt[5]{0.00001} & (3) (\sqrt[4]{5})^8 \\ (4) \frac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[3]{7}} & (5) \sqrt{\sqrt[4]{256}} \end{array}$$

問30-06 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7} \quad (2) 2^{30}, 3^{20}, 10^{10}$$

問30-07 次の方程式、不等式を解け。

$$\begin{array}{lll} (1) 2^{3x-2} = 128 & (2) 125^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-6} & (3) 3^{x-2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ (4) 243^x < 3^{2x+3} & (5) \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x & (6) (0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \end{array}$$

問30-08 次の関数の最大値、最小値があれば、それを求めよ。また、

そのときの x の値を求めよ。

$$(1) y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 \quad (2) y = -4^x + 2^x + 2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

問30-09 次の式を簡単にせよ。

$$\begin{array}{l} (1) \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 \\ (2) (\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4) \\ (3) \log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8 \\ (4) \log_2 10 \cdot \log_5 10 - (\log_2 5 + \log_5 2) \end{array}$$

問30-10 $p = \log_a x$, $q = \log_a y$, $r = \log_a z$ であるとき、次の各式を p , q , r で表せ。ただし、 a, x, y, z は正の数とし、 $a \neq 1$ とする。

$$\begin{array}{lll} (1) \log_a xyz & (2) \log_a x^2 y^3 z^4 & (3) \log_a \frac{x}{(yz)^2} \\ (4) \log_a \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} \end{array}$$

問30-11 $x \geq 0$ で定義された関数 $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。

問30-12 連立方程式 $3^{x-2y} = 9$, $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を解け。

問30-13 $\log_{11} 2$ の小数第1位の数を求めよ。

問30-14 常用対数表を用いて、次の数の常用対数を求めよ。

$$(1) 4.23 \quad (2) 37200 \quad (3) 0.0158$$

問30-15 年利率 5%, 1 年ごとの複利で 10 万円を預金したとき、 x 年後の元利合計は $10 \times (1.05)^x$ 万円となる。元利合計が初めて 15 万円を超えるのは何年後か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

問30-16 1 枚で 70% の花粉を除去できるフィルターがある。99.99% より多くの花粉を一度に除去するには、このフィルターは最低何枚必要か。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

締め切り=無し。提出の必要も無し（試験直前のため）。期末試験前の自主学習用。解答は来週の水曜日までに配布する。

定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ないので、まずは教科書の内容をしっかりと復習すること。

すべての問題をやる必要は無い。そもそも量が多い（配布しておいてなんだが）。教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。

試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

解説

(解説文)

問30-01 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域、漸近線を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \frac{3}{x} - 2 & (2) \quad y &= -\frac{1}{x+2} + 3 \\ (3) \quad y &= \frac{x-2}{x-3} & (4) \quad y &= \frac{-3x+6}{x-1} \\ (5) \quad y &= \frac{2x+4}{x+3} & (6) \quad y &= \frac{6x+3}{2x-1} \end{aligned}$$

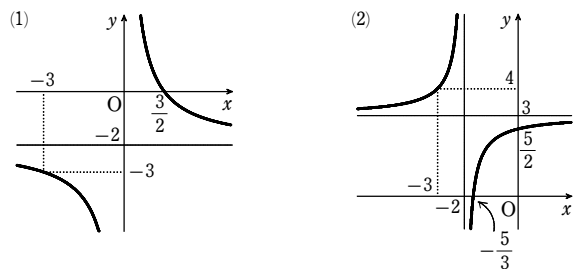
解説

(1) $y = \frac{3}{x}$ のグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

定義域は $x \neq 0$,値域は $y \neq -2$,漸近線は 2 直線 $x=0$, $y=-2$

(2) $y = -\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、[図] の

ようになる。

定義域は $x \neq -2$,値域は $y \neq 3$,漸近線は 2 直線 $x=-2$, $y=3$ 

$$(3) \quad \frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 1$$

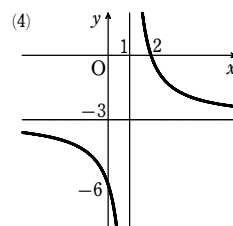
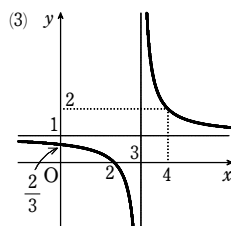
よって、 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

定義域は $x \neq 3$,値域は $y \neq 1$,漸近線は 2 直線 $x=3$, $y=1$

$$(4) \quad \frac{-3x+6}{x-1} = \frac{-3(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} - 3$$

よって、 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 , y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので、

[図] のようになる。

定義域は $x \neq 1$,値域は $y \neq -3$,漸近線は 2 直線 $x=1$, $y=-3$ 

$$(5) \quad \frac{2x+4}{x+3} = \frac{2(x+3)-2}{x+3} = -\frac{2}{x+3} + 2$$

よって、 $y = -\frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行

移動したもので、

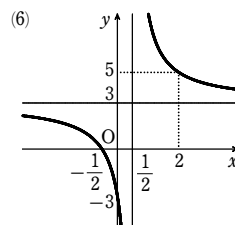
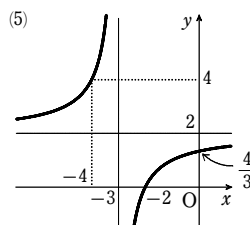
[図] のようになる。

定義域は $x \neq -3$,値域は $y \neq 2$,漸近線は 2 直線 $x=-3$, $y=2$

$$(6) \quad \frac{6x+3}{2x-1} = \frac{3(2x-1)+6}{2x-1} = \frac{6}{2x-1} + 3 = \frac{3}{x-\frac{1}{2}} + 3$$

よって、 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$, y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

[図] のようになる。

定義域は $x \neq \frac{1}{2}$,値域は $y \neq 3$,漸近線は 2 直線 $x=\frac{1}{2}$, $y=3$ 

問30-02 次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{x-1}, \quad y = x-1 \quad (2) \quad y = \frac{2}{x+2}, \quad y = x$$

$$(3) \quad y = \frac{4x}{2x-1}, \quad y = 2x$$

解説

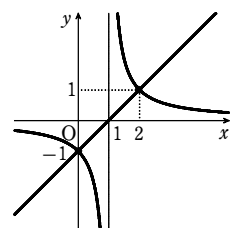
(1) 2つの関数のグラフの共有点の x 座標は、次の等式を満たす。

$$\frac{1}{x-1} = x-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① の両辺に $x-1$ を掛けて $1 = (x-1)^2$

整理すると $x^2 - 2x = 0$ これを解いて $x = 0, 2$ これらは、① の左辺の分母を 0 に

しないから、① の解である。

共有点は直線 $y = x-1$ 上にあるから $x=0$ のとき $y=-1$, $x=2$ のとき $y=1$ よって、共有点の座標は $(0, -1), (2, 1)$ 

- (2) 2つの関数のグラフの共有点の x 座標は、次の等式を満たす。

$$\frac{2}{x+2} = x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺に $x+2$ を掛けて

$$2 = x(x+2)$$

整理すると $x^2 + 2x - 2 = 0$

これを解いて $x = -1 \pm \sqrt{3}$

これらは、①の左辺の分母を 0 にしないから、

①の解である。

共有点は直線 $y = x$ 上にあるから、求める共有点の座標は

$$(-1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}), (-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$$

- (3) 2つの関数のグラフの共有点の x 座標は、次の等式を満たす。

$$\frac{4x}{2x-1} = 2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺に $2x-1$ を掛けて

$$4x = 2x(2x-1)$$

整理すると $2x^2 - 3x = 0$

これを解いて $x = 0, \frac{3}{2}$

これらは、①の左辺の分母を 0 にしないから、

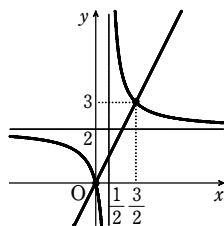
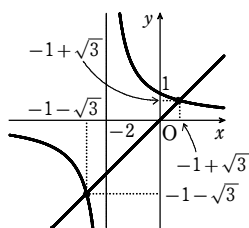
①の解である。

共有点は直線 $y = 2x$ 上にあるから

$x = 0$ のとき $y = 0$,

$x = \frac{3}{2}$ のとき $y = 3$

よって、共有点の座標は $(0, 0), \left(\frac{3}{2}, 3\right)$



問30-03 グラフを利用して、次の不等式を解け。

(1) $\frac{2x-1}{x+1} \geq -1$

(2) $\frac{1}{x-1} > x+1$

(解説)

- (1) 求める解は、関数 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ のグラフが直線

$y = -1$ より上側にあるか、

または共有点をもつ

ような x の値の範囲である。

方程式 $\frac{2x-1}{x+1} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

の解が共有点の x 座標である。

①より $2x-1 = -(x+1)$

これを解くと $x = 0$

よって、右の図より $x < -1, 0 \leq x$

- (2) 求める解は、関数 $y = \frac{1}{x-1}$ のグラフ

が直線 $y = x+1$ より上側にある

ような x の値の範囲である。

方程式 $\frac{1}{x-1} = x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

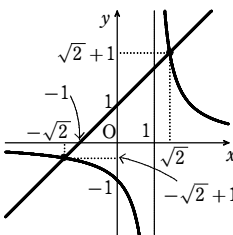
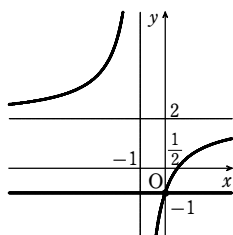
の解が共有点の x 座標である。

①より $1 = (x+1)(x-1)$

すなわち $x^2 = 2$

これを解くと $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

よって、右の図より $x < -\sqrt{2}, 1 < x < \sqrt{2}$



問30-04 次の関数の中から、偶関数、奇関数を選べ。

- ① $4x$ ② $-x^2$ ③ $\sin 2x$ ④ $-\cos 3x$

(解説)

① $f(x) = 4x$ とすると $f(-x) = 4(-x) = -4x = -f(x)$

② $f(x) = -x^2$ とすると $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$

③ $f(x) = \sin 2x$ とすると $f(-x) = \sin\{2(-x)\} = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$

④ $f(x) = -\cos 3x$ とすると $f(-x) = -\cos\{3(-x)\} = -\cos(-3x) = -\cos 3x = f(x)$

よって 偶関数は ②, ④; 奇関数は ①, ③

問30-05 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$

(2) $\sqrt[5]{0.00001}$

(3) $(\sqrt[4]{5})^8$

(4) $\frac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}$

(5) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{256}}$

(解説)

(1) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

(2) $\sqrt[5]{0.00001} = \sqrt[5]{0.1^5} = 0.1$

(3) $(\sqrt[4]{5})^8 = \sqrt[4]{5^8} = \sqrt[4]{(5^2)^4} = 5^2 = 25$

(4) $\frac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[4]{\frac{567}{7}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(5) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

問30-06 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}$

(2) $2^{30}, 3^{20}, 10^{10}$

(解説)

- (1) 3つの数を、それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9, \quad (\sqrt[5]{7})^6 = 7$$

$$7 < 8 < 9 \text{ であるから } (\sqrt[5]{7})^6 < (\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6$$

$$\text{ゆえに } \sqrt[5]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

(別解) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}, \quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}, \quad \sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$

$$7 < 8 < 9 \text{ であるから } 7^{\frac{1}{5}} < 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{すなわち } \sqrt[5]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

(2) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}, \quad 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$

$$8 < 9 < 10 \text{ であるから } 8^{10} < 9^{10} < 10^{10}$$

$$\text{すなわち } 2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$$

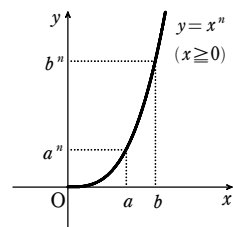
注意 解答では、次の事柄を使っている。

- [1] $a > 0, b > 0$ で、 n が自然数のとき

$$a < b \iff a^n < b^n$$

- [2] $a > 0, b > 0$ で、 n が自然数のとき

$$a < b \iff a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$$



問30-07 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^{3x-2} = 128$

(2) $125^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$

(3) $3^{x-2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

解説

(1) $2^{3x-2}=128$ から $2^{3x-2}=2^7$

よって $3x-2=7$

これを解いて $x=3$

(2) $125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$ から $5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$

よって $3(x-1)=-2(x-6)$

これを解いて $x=3$

(3) $3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ から $3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$

よって $x-2=-\frac{3}{2}$

これを解いて $x=\frac{1}{2}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$ から $3^{5x} < 3^{2x+3}$

底 3 は 1 より大きいから $5x < 2x+3$

これを解いて $x < 1$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $5x+4 < 3x$

これを解いて $x < -2$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

よって $5^{-(2x-1)} \geq 5^{-\frac{2}{3}}$

底 5 は 1 より大きいから $-(2x-1) \geq -\frac{2}{3}$

これを解いて $x \leq \frac{5}{6}$

問30-08 次の関数の最大値, 最小値があれば, それを求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=2^{2x}-4 \cdot 2^x+1$

(2) $y=-4^x+2^x+2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

解説

(1) $y=(2^x)^2-4 \cdot 2^x+1$

$2^x=t$ とおくと, $t>0$ であり, 関数は $y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$
 $t>0$ であるから, y は $t=2$ で最小値 -3 をとる。

$t=2$ のとき $2^x=2$ ゆえに $x=1$

よって, y は $x=1$ で最小値 -3 をとる。また, 最大値はない。

(2) $y=-(2^x)^2+2^x+2$ ($-1 \leq x \leq 2$)

$2^x=t$ とおく。

$-1 \leq x \leq 2$ から $2^{-1} \leq 2^x \leq 2^2$

よって $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ …… ①

また $y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

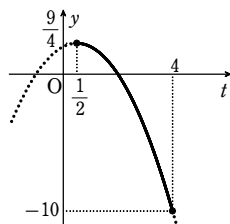
① の範囲で y は

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$,

$t=4$ で最小値 -10

をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき $2^x=\frac{1}{2}$ ゆえに $x=-1$



$t=4$ のとき $2^x=4$ ゆえに $x=2$

よって, y は

$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$, $x=2$ で最小値 -10

をとる。

問30-09 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$

(2) $(\log_2 9 + \log_3 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$

(3) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8$

(4) $\log_2 10 \cdot \log_5 10 - (\log_2 5 + \log_5 2)$

解説

(1) 与式 $= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = 3$

(2) 与式 $= \left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4}{\log_2 9} \right)$
 $= \left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{2}{2\log_2 3} \right)$
 $= \frac{7}{3} \log_2 3 \cdot \frac{2}{\log_2 3} = \frac{14}{3}$

(3) 与式 $= \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2\log_2 5}{2\log_2 3} \cdot \frac{3}{\log_2 5} = \frac{3}{2}$

(4) 与式 $= \log_2 10 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 5} - \left(\log_2 5 + \frac{1}{\log_2 5} \right)$
 $= (\log_2 2 + \log_2 5) \cdot \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 5} - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5}$
 $= (1 + \log_2 5) \left(\frac{1}{\log_2 5} + 1 \right) - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5}$
 $= \frac{1}{\log_2 5} + 1 + 1 + \log_2 5 - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5}$
 $= 2$

問30-10 $p=\log_a x$, $q=\log_a y$, $r=\log_a z$ であるとき, 次の各式を p , q , r で表せ。ただし, a, x, y, z は正の数とし, $a \neq 1$ とする。

(1) $\log_a x y z$ (2) $\log_a x^2 y^3 z^4$ (3) $\log_a \frac{x}{(y z)^2}$

(4) $\log_a \frac{x \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

解説

(1) $\log_a x y z = \log_a x + \log_a y + \log_a z = p + q + r$

(2) $\log_a x^2 y^3 z^4 = \log_a x^2 + \log_a y^3 + \log_a z^4$
 $= 2\log_a x + 3\log_a y + 4\log_a z = 2p + 3q + 4r$

(3) $\log_a \frac{x}{(y z)^2} = \log_a x - \log_a y^2 z^2 = \log_a x - (\log_a y^2 + \log_a z^2)$
 $= \log_a x - (2\log_a y + 2\log_a z)$
 $= p - 2q - 2r$

(4) $\log_a \frac{x \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a x + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$
 $= \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - \frac{1}{3} \log_a z = p + \frac{q}{2} - \frac{r}{3}$

問30-11 $x \geq 0$ で定義された関数 $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。

(解説)

$3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$y \geq 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 1$$

よって $y \geq 1$

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} \text{ から } 2y = 3^x + 3^{-x}$$

両辺に 3^x を掛けて整理すると $(3^x)^2 - 2y \cdot 3^x + 1 = 0$

$$3^x = X \text{ とおくと } X^2 - 2yX + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ の判別式を } D \text{ とすると } \frac{D}{4} = y^2 - 1$$

$y \geq 1$ より, $D \geq 0$ であるから, 2 次方程式 $\textcircled{1}$ は実数解をもつ。

$$\textcircled{1} \text{ を解くと } X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\text{ここで, } x \geq 0 \text{ から } X \geq 3^0 = 1$$

$$\text{また } y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1 \quad (y > 1)$$

$y = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ は重解 $X = 1$ をもつ。

$$\text{よって } X = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\text{ゆえに } 3^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\text{したがって } x = \log_3(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad (y \geq 1)$$

$$\text{よって, 求める逆関数は } y = \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

問30-12 連立方程式 $3^{x-2y} = 9$, $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を解け。

(解説)

$$3^{x-2y} = 9 \text{ から } 3^{x-2y} = 3^2 \quad \text{よって } x - 2y = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 x + \log_2 y = 2 \text{ において真数は正であるから } x > 0, y > 0$$

$$\text{また } \log_2 xy = 2$$

$$\text{よって } xy = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x > 0, y > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } x = 2y + 2$$

$$\text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入すると } (2y + 2)y = 4$$

$$\text{整理して } y^2 + y - 2 = 0 \quad \text{すなわち } (y - 1)(y + 2) = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ より } y > 0 \text{ であるから } y = 1$$

$$\text{このとき, } \textcircled{1} \text{ から } x = 4 \quad \text{これは } \textcircled{3} \text{ を満たす。}$$

$$\text{ゆえに } x = 4, y = 1$$

問30-13 $\log_{11} 2$ の小数第 1 位の数を求めよ。

(解説)

$$\log_{11} 2 = a \text{ とすると } 11^a = 2$$

$$\text{したがって } 11^{10a} = (11^a)^{10} = 2^{10} = 1024$$

$$\text{ここで, } 11^2 = 121, 11^3 = 1331 \text{ であるから } 11^2 < 11^{10a} < 11^3$$

$$\text{底 } 11 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } 2 < 10a < 3$$

$$\text{すなわち } 0.2 < a < 0.3$$

$$\text{よって, } \log_{11} 2 \text{ の小数第 1 位の数は } 2$$

問30-14 常用対数表を用いて, 次の数の常用対数を求めよ。

$$(1) \quad 4.23 \quad (2) \quad 37200 \quad (3) \quad 0.0158$$

(解説)

$$(1) \quad \log_{10} 4.23 = 0.6263$$

$$(2) \quad \log_{10} 37200 = \log_{10} (3.72 \times 10^4) = 0.5705 + 4 = 4.5705$$

$$(3) \quad \log_{10} 0.0158 = \log_{10} (1.58 \times 10^{-2}) = 0.1987 - 2 = -1.8013$$

問30-15 年利率 5 %, 1 年ごとの複利で 10 万円を預金したとき, x 年後の元利合計は $10 \times (1.05)^x$ 万円となる。元利合計が初めて 15 万円を超えるのは何年後か。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

(解説)

$10(1.05)^x > 15$ を満たす最小の整数 x を求める。

$$10(1.05)^x > 15 \text{ の両辺の常用対数をとると } \log_{10} 10(1.05)^x > \log_{10} 15$$

$$\log_{10} 10 + \log_{10} (1.05)^x > \log_{10} (1.5 \times 10)$$

$$1 + x \log_{10} 1.05 > \log_{10} 1.5 + 1$$

$$x \log_{10} 1.05 > \log_{10} 1.5$$

$$\text{ここで } \log_{10} 1.05 = \log_{10} \frac{105}{100} = \log_{10} \frac{21}{20} = \log_{10} \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10}$$

$$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 1$$

$$= 0.4771 + 0.8451 - 0.3010 - 1$$

$$= 0.0212$$

$$\log_{10} 1.5 = \log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

$$= 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$$

$$\text{よって } 0.0212x > 0.1761 \quad \text{ゆえに } x > \frac{0.1761}{0.0212} = 8.3 \cdots \cdots$$

これを満たす最小の整数 x は 9

したがって, 元利合計が初めて 15 万円を超えるのは 9 年後

問30-16 1 枚で 70 % の花粉を除去できるフィルターがある。99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには, このフィルターは最低何枚必要か。ただし, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(解説)

1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから, n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る。

$$\text{よって, 求める条件は } 0.3^n < 1 - 0.9999$$

$$\text{すなわち } 0.3^n < 0.0001$$

$$\text{この両辺の常用対数をとると } n \log_{10} 0.3 < \log_{10} 0.0001$$

$$\text{この不等式を変形して } n \log_{10} (3 \times 10^{-1}) < \log_{10} 10^{-4}$$

$$n(\log_{10} 3 - 1) < -4$$

$$-0.5229n < -4$$

$$\text{よって } n > \frac{4}{0.5229} = 7.6 \cdots \cdots$$

したがって, フィルターは最低 8 枚必要である。

成績には無関係。回答時間の後、答え合わせ&解説を行う。

この小テストでは取り扱わないが、後期期末テストには「指数関数」「対数関数」の範囲も含まれる。各自で復習すること。

問30-01 次の分数関数の漸近線を求めよ。

$$(4) \quad y = \frac{-3x+6}{x-1}$$

$$(6) \quad y = \frac{6x+3}{2x-1}$$

問31-02 関数 $y = \frac{7-3x}{x-2}$ のグラフを平行移動すると，

関数 $y = \frac{2x+3}{x+1}$ のグラフに重なる。どのように平行移動すればよいか答えよ。

問30-03 次の二つの関数

$$y = f(x) = \frac{4x}{2x-1}, \quad y = g(x) = 2x$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) これらの交点の座標を求めよ。

(2) 不等式 $\frac{4x}{2x-1} > 2x$ を解け。グラフを描いて利用してもよい。

問31-04 以下の関数について，変数 x に関して奇関数であれば**Odd**，偶関数であれば**Even**，どちらでもなければ**Mixed**と答えよ。

$$(1) \quad a(x) = x^{2026}$$

$$(2) \quad b(x) = x^7 - x^6$$

$$(3) \quad c(x) = x^4 + 7x^2 + 8$$

(4) 変数 x に関して， $f(x)$ は奇関数， $g(x)$ は偶関数であるときの $d(x) = \{f(x)g(x)\}^3$

成績には無関係。回答時間の後、答え合わせ&解説を行う。

この小テストでは取り扱わないが、後期期末テストには「指数関数」「対数関数」の範囲も含まれる。各自で復習すること。

(解説)

(解説文)

問30-01 次の分数関数の漸近線を求めよ。

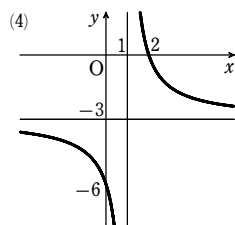
$$(4) \quad y = \frac{-3x+6}{x-1}$$

$$(6) \quad y = \frac{6x+3}{2x-1}$$

(解説)

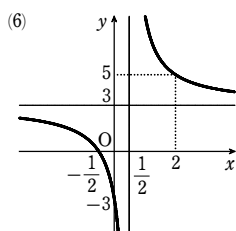
$$(4) \quad \frac{-3x+6}{x-1} = \frac{-3(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} - 3$$

よって、 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので、
[図] のようになる。

定義域は $x \neq 1$,値域は $y \neq -3$,漸近線は 2 直線 $x=1, y=-3$ 

$$(6) \quad \frac{6x+3}{2x-1} = \frac{3(2x-1)+6}{2x-1} = \frac{6}{2x-1} + 3 = \frac{3}{x-\frac{1}{2}} + 3$$

よって、 $y = \frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$,
 y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、[図]
のようになる。

定義域は $x \neq \frac{1}{2}$,値域は $y \neq 3$,漸近線は 2 直線 $x = \frac{1}{2}, y = 3$ 

問31-02 関数 $y = \frac{7-3x}{x-2}$ のグラフを平行移動すると、
関数 $y = \frac{2x+3}{x+1}$ のグラフに重なる。どのように平行移動すればよいか答えよ。

(解説)

$$y = \frac{7-3x}{x-2} \text{ から } y = \frac{1}{x-2} - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{2x+3}{x+1} \text{ から } y = \frac{1}{x+1} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① と ② のグラフは、ともに $y = \frac{1}{x}$ のグラフを平行移動したものである。

また、① の漸近線は 2 直線 $x=2, y=-3$,

② の漸近線は 2 直線 $x=-1, y=2$ である。

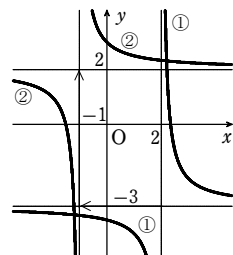
よって、① のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると、② のグラフに重なるすると

$$2+p=-1, -3+q=2$$

ゆえに

$$p=-3, q=5$$

したがって、 x 軸方向に -3 , y 軸方向に 5 だけ平行移動すればよい。



問30-03 次の二つの関数

$$y = f(x) = \frac{4x}{2x-1}, \quad y = g(x) = 2x$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) これらの交点の座標を求めよ。

(2) 不等式 $\frac{4x}{2x-1} > 2x$ を解け。グラフを描いて利用してもよい。

(解説)

(2) 2つの関数のグラフの共有点の x 座標は，次の等式を満たす。

$$\frac{4x}{2x-1} = 2x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① の両辺に $2x-1$ を掛けて

$$4x = 2x(2x-1)$$

整理すると $2x^2 - 3x = 0$ これを解いて $x = 0, \frac{3}{2}$

これらは，① の左辺の分母を 0 にしないから，

① の解である。

共有点は直線 $y = 2x$ 上にあるから $x = 0$ のとき $y = 0$, $x = \frac{3}{2}$ のとき $y = 3$ よって，共有点の座標は $(0, 0), \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

(2) 不等式 $\frac{4x}{2x-1} > 2x$ を解く。グラフより

$$x < 0, \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

問31-04 以下の関数について，変数 x に関して奇関数であればOdd，偶関数であればEven，どちらでもなければMixedと答えよ。

(1) $a(x) = x^{2026}$

(2) $b(x) = x^7 - x^6$

(3) $c(x) = x^4 + 7x^2 + 8$

(4) 変数 x に関して， $f(x)$ は奇関数， $g(x)$ は偶関数であるときの $d(x) = \{f(x)g(x)\}^3$

(解説)

