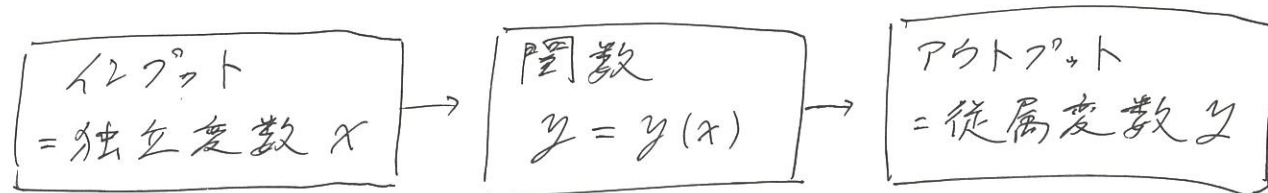


<9/23, 火, 2025> 1-5基礎数学I 17用ノート
R7後期最初

本日 → 関数とグラフの平行移動 (テキスト p. 70 ~ 75)
“関数”の構造 …… あるインプット x に対して、一意のアウト
プット y を対応させる。



※ x, y 以外の文字や記号も好きに使って良い。

関数記号 $f(x)$

$f \leftarrow$ function (フナクショ)

→ $f(x) = \sim$ など。

例 = 例 3.1 (p. 71)

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \\ f(a) = a^2 - 2a \end{cases}$$

$$g(x) = x(x+1) \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 \cdot (1+1) = 2 \\ g(x-1) = (x-1) \cdot (x-1+1) = (x-1)x \end{cases}$$

↑
少しややこしい。

※ $f(x)$ や $g(x)$ 以外の文字、記号も使われる。

例 = 例 3.2, (3) (p. 71)

$$p(x) = \frac{x}{c} + d^2 \text{ のとき、 } p(-cd^2) \text{ は?}$$

$$\rightarrow p(-cd^2) = \frac{-cd^2}{c} + d^2 = -d^2 + d^2 = 0$$

✓ 一次関数 $y = f(x) = ax + b$, $f(x) = ax + b$

→ 2個のインプット $x = A$ & $x = B$ に対するアウトプット
がわかれば、 $f(x) = ax + b$ を完全に決定できる。

例 = 例 3.3, (3) (p. 72)

$y = f(x)$ を x の一次関数とする。

$$\begin{cases} \textcircled{1} f(-cd^2) = 0 \\ \textcircled{2} f(c) = 1 + d^2 \end{cases} \text{ が与えられたとき、 } f(x) \text{ の形を求めよ。}$$

→ $f(x) = ax + b$ は確定。① & ② を代入して、

$$\begin{cases} a \cdot (-cd^2) + b = 0 \quad \text{--- (★1)} \\ a \cdot c + b = 1 + d^2 \quad \text{--- (★2)} \end{cases}$$

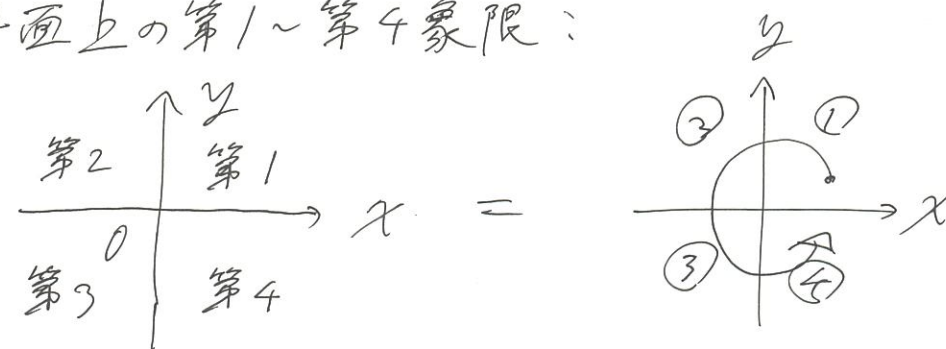
$$\begin{cases} -acd^2 + b = 0 \\ acd^2 + bd^2 = d^2 + d^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b(1+d^2) = d^2 + d^4 \\ b = d^2 \end{cases}, \text{ (★2) より、}$$

$$ac = 1 + d^2 - d^2 = 1, \quad a = \frac{1}{c}$$

$$f(x) = \frac{x}{c} + d^2$$

関数のグラフ (p. 72)

x, y 平面上の第1 ~ 第4象限:



一次関数のグラフ

$$f(x) = ax + b$$

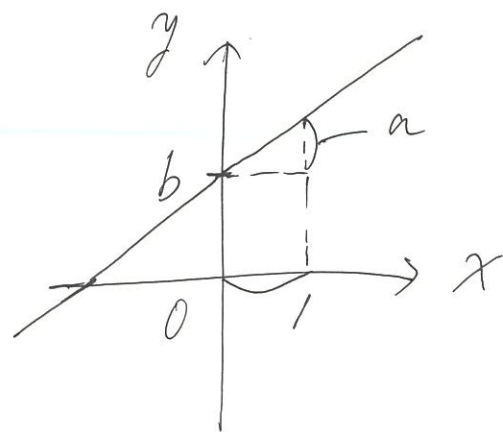
↓

・切片 $f(0) = b$

・傾きは a

や θ

※ x の代わりに t , y の代わりに z など ~~も~~ よく使われる。



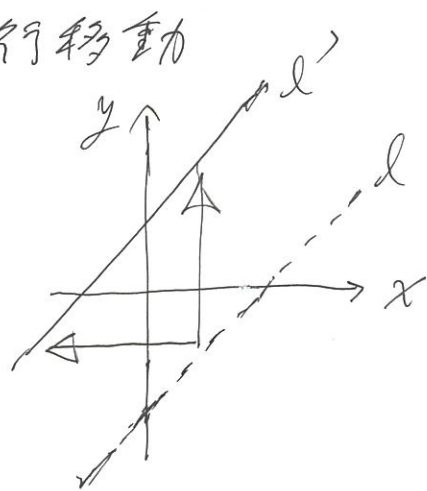
例 = 問 3.4, (4) (p.73)

xy 平面上で傾きが 2, 原点を通る直線の方程式は?

~~$y = 2x$~~ のセット $a = 2$ $f(0) = 0 = b$ $ax + b$
 y と x

$$y = f(x) = \cancel{2x} = 2x, \\ \text{変形して } y - 2x = 0, \textcircled{2}$$

平行移動



ポイント: 傾きは a は変わらない!

$$l(x) = ax + b$$

$$l'(x) = ax + b'$$

平行移動 [I] (p.73)

(グラフは

$y = f(x)$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した

$x \rightarrow x - p, y \rightarrow y - q$ と置き換えた式,

すなわち $y - q = f(x - p)$ となる。(証明は各自読んで)

平行移動 [II] (p.74)

移動後:

逆解き

$$X = x + p$$

$$x = X - p$$

$$Y = y + q$$

$$y = Y - q$$

$(X, Y) \rightarrow (x, y)$ に置換

$$x \rightarrow x - p$$

$$y \rightarrow y - q$$

平行移動の応用 (p.75)

傾き a & 通る点 (p, q) として分かっている。

→ $y = f(x) = ax$ を, x 方向に p , y 方向に q 平行移動したものと考えれば良いので、次式で与えられる。

$$y = ax \Rightarrow (y - q) = a(x - p)$$

例 = 問 3.5 (p.75)

傾き $a = -3$, 点 $(-1, 2)$ を通る直線の方程式は?

→ $a = -3, p = -1, q = 2$ を代入して,

$$(y - 2) = -3(x - (-1)) = -3(x + 1)$$

$$y - 2 = -3x - 3$$

$$y = -3x - 1$$

例 = 問 3.6, (1) (p.75)

$y = -x + 1$ を x 方向に $p = +3$, y 方向に $q = -2$ だけ平行移動すると?

$$\rightarrow y - (-2) = -(x - 3) + 1$$

$$y + 2 = -x + 4$$

$$y = -x + 2$$

本週 → $y = x^2$ と,

$y = \sin x$ を

p, q だけ平行移動した図を描きたい。

残りの (2) ~ (5) → 今回の演習。ただし提出不要。

<9/30, 火, 2025> 1-5 基礎 I 118 ab 月ノート

今週 → 対称移動 & ~~2次関数~~ ~~2+最大値最小値?~~
合成関数、逆関数

前回の復習: 平行移動

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 方向に } +p \\ y \text{ 方向に } +q \end{array} \right\} \text{ 平行移動する} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}$$

例: $y = f(x) = ax + b$ を平行移動すると?
 $y = f(x) \rightarrow y - q = f(x - p)$

$$y = ax + b \rightarrow y - q = a(x - p) + b$$

$$y = ax - ap + b + q$$

例2: $y = f(x) = cx^2 + d$ を平行移動すると?

$$y = cx^2 + d \rightarrow y - q = c(x - p)^2 + d$$

$$y = c(x - p)^2 + d + q$$

$$= cx^2 - 2cp x + p^2 + d + q$$

対称移動 (p. 76)

① x 軸に関して
対称移動
 $(x, y) \rightarrow (x, Y) = (x, -y) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = f(x) \\ y = f(x) \rightarrow -y = f(x) \end{array} \right.$

② y 軸に関して
対称 "
 $(x, y) \rightarrow (X, Y) = (-x, y)$
 $y = f(x) \rightarrow Y = f(-X) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = f(X) \\ y = f(x) \rightarrow Y = f(-x) \end{array} \right.$

③ 原点に関して
対称 "
 $(x, y) \rightarrow (X, Y) = (-x, -y)$
 $y = f(x) \rightarrow -Y = f(-X) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = f(X) \\ y = f(x) \rightarrow -Y = f(-x) \end{array} \right.$

④ 直線 $y = x$ に関して
対称移動

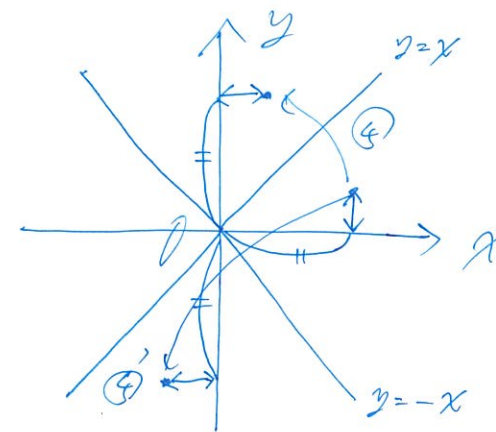
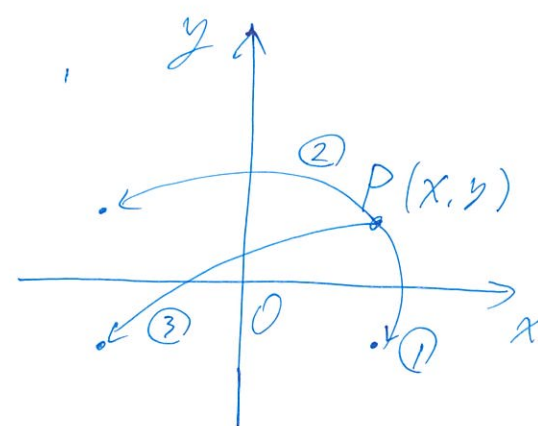
$$(x, y) \rightarrow (X, Y) = \left(\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$y = f(x) \rightarrow X = f(Y)$$

④' 直線 $y = -x$ に関して
対称 "

$$(x, y) \rightarrow (X, Y) = (-y, -x)$$

$$y = f(x) \rightarrow -X = f(-Y)$$



拡大・縮小 (p. 77) * "回転" はとばす。

⑥ x 軸方向に a 倍
($a \neq 0$)
 $(x, y) \rightarrow (X, Y) = (ax, y)$
 $y = f(x) \rightarrow Y = f\left(\frac{X}{a}\right)$

⑦ y 軸方向に b 倍
($b \neq 0$)
 $(x, y) \rightarrow (X, Y) = (x, by)$
 $y = f(x) \rightarrow Y = bf(X)$
 $\frac{Y}{b} = f(X), y = bf(x)$

⑥ & ⑦ の合わせ技
 $(x, y) \rightarrow (X, Y) = (ax, by)$
 $y = f(x) \rightarrow Y = bf\left(\frac{X}{a}\right)$
 $\frac{Y}{b} = f\left(\frac{X}{a}\right), y = bf\left(\frac{x}{a}\right)$

例: $y = \cos x \rightarrow \boxed{\text{⑥ \& ⑦}} \rightarrow Y = \cos X$
 $\frac{Y}{b} = \cos\left(\frac{X}{a}\right), y = b \cos\left(\frac{x}{a}\right)$

1次関数の最大値、最小値 (p.79~81) → とばす!

逆関数 (p.81)

→ 元の関数 $y=f(x)$ を x について解いたものを

$$x = f^{-1}(y) \text{ と書く。}$$

→ ただし “逆関数” と言われたら、 $x \leftrightarrow y$ として、

$$y = f^{-1}(x) \text{ を指すことが一般的。}$$

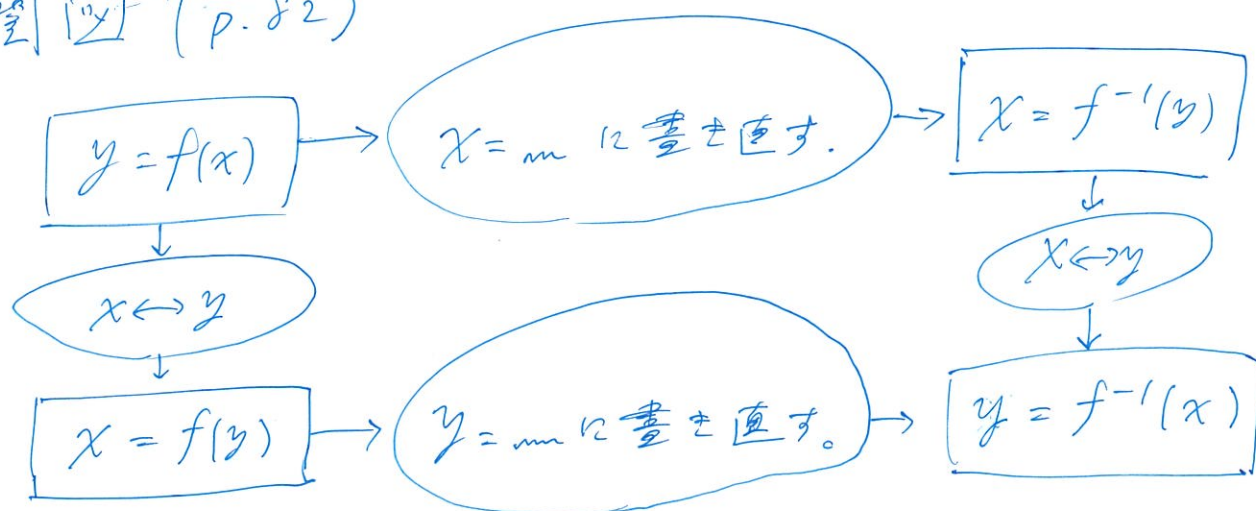
例: $y=f(x)=2x \rightarrow x=\frac{1}{2}y=f^{-1}(y)$,

したがって、 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は、

右辺で $x \leftrightarrow y$ を行ったら、

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \text{ となる。 (p.81)}$$

相互関数 (p.82)



例 = 問 3.9, (3)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ の逆関数 } f^{-1}(x) \text{ は?}$$

① x について解くと $x = 2y - 4$ 。これに $x \leftrightarrow y$ を施すと

$$y = 2x - 4 \text{ より、 } f^{-1}(x) = 2x - 4 \text{ (つづく)}$$

(つづき) ③ $y = \frac{1}{2}x + 2$ に $x \leftrightarrow y$ を施すと $x = \frac{1}{2}y + 2$ 。

これを y について解けば、 $y = 2x - 4$ より、 $f^{-1}(x) = 2x - 4$ 。

合成関数 (p.83)

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がある。^{2のとき、} ~~2通り~~ 2通りの

合成関数が作れる。

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

例 = 例 3.5 (p.83)

$$f(x) = 2x + 1, g(x) = 2x - 1 \text{ のとき、}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(2x - 1) + 1 = 4x - 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(2x + 1) - 1 = 4x + 1$$

* 上でもそうだが、一般に、 $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$ 。

逆関数との関係

$g(x)$ として $g(x) = f^{-1}(x)$ とすると、次式が成り立つ。

$$h(x) \equiv f \circ f^{-1}(x) = x, \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{問 3.7 の答えを} \\ \text{利用して例を?} \end{array} \right.$$

* 時間が余ったら、三角関数の変化ルールでも。

<10/7, 火, 2025> 基礎数学 I [19] 用ノート (1-5)

本回 → 2次関数とそのグラフ (p.84 ~ 89)

2次関数のグラフ after 平行移動 (p.86)

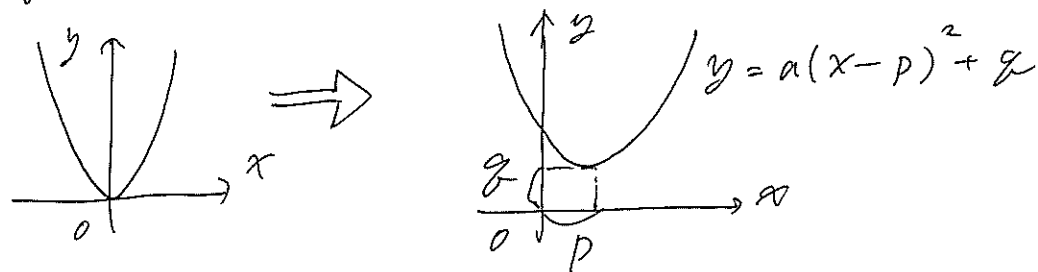
$$y = f(x) = ax^2$$

← x方向に p , y方向に q だけ平行移動

$$y - q = f(x - p) = a(x - p)^2$$

$$y = a(x - p)^2 + q$$

つまりこのグラフは、 ax^2 のグラフを (p, q) だけ平行移動した (もの)。



平方完成 (p.87)

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

例 = 例題 3.6

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) のグラフは、 $y = ax^2$ を、

$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\frac{b^2}{4a} + c}{a}\right)$ だけ平行移動したものであることを示せ。

→ $y = ax^2 + bx + c$ を平方完成する。

$$= a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x \right\} + c$$

...

$$= a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right\} + c$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(\dots\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a(x - p)^2 + q, \text{ where } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

別解 逆に $y = ax^2 + bx + c$ を、 $(-p, -q) = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

だけ平行移動すると、

$$y + q = a(x + p)^2 + b(x + p) + c$$

$$y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x - \frac{b}{2a}\right) + c - q$$

$$\begin{aligned} &= ax^2 - a \cdot \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a} + bx - \frac{b^2}{2a} + c + \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= ax^2 - \cancel{bx} + \frac{\cancel{b^2}}{4a} + \cancel{bx} - \frac{\cancel{b^2}}{2a} + \frac{\cancel{b^2}}{4a} = ax^2 \end{aligned}$$

例 = 例 3.10 (p.87)

$$(3) x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (4) x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

2次関数の標準形 (p.88)

$$y = a(x - p)^2 + q \quad \dots \dots \text{標準形}$$

$$\text{求め方: } y = \underbrace{ax^2 + bx}_{\text{この部分を平方完成する。}} + c$$

$$= a \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad q = c - \frac{b^2}{4a}$$

例 = 例題 3.7 (p. 88) 以下の2次関数のグラフを描け。

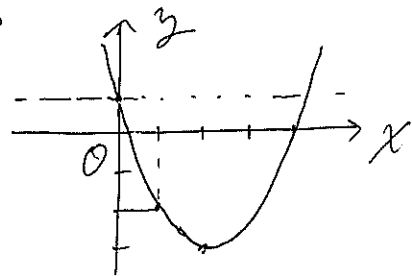
(1)

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$= (x-2)^2 - 4 + 1$$

$$= (x-2)^2 - 3 \rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ 而 } y=-3 \\ x=0 \text{ 而 } y=+1 \end{cases} \rightarrow \text{頂点} = (p, q) = (2, -3)$$

$$= (x-p)^2 + q, \quad p=2, q=-3$$



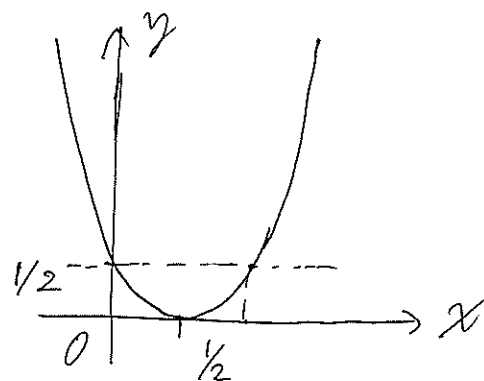
(2)

$$y = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$= 2(x^2 - x) + \frac{1}{2}$$

$$= 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2(x - \frac{1}{2})^2 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ 而 } y = 0 \\ x = 0 \text{ 而 } y = \frac{1}{2} \end{cases}$$



(3)

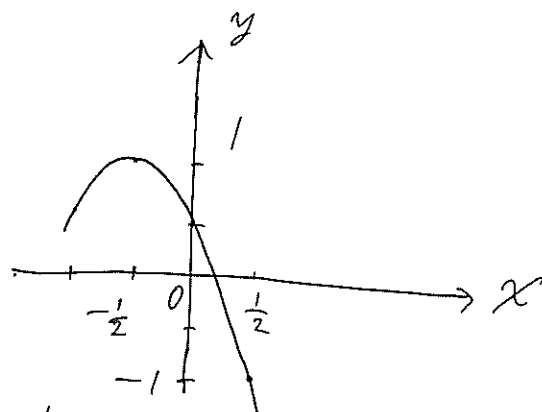
$$y = -2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$= -2(x^2 + x) + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left\{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right\} + \frac{1}{2}$$

$$= -2(x + \frac{1}{2})^2 + 1 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ 而 } y = 1 \\ x = 0 \text{ 而 } y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \text{ 而 } y = -1 \end{cases}$$

$$= a(x-p)^2 + q, \quad \begin{cases} a = -2 \\ p = -\frac{1}{2} \\ q = 1 \end{cases}$$



2次関数のグラフを描くコツ

→ まずは教科書 p. 89 の“注意”を。

→ 追加していくつか ↓

① まずは頂点の座標を打つ。

$$y = a(x-p)^2 + q \rightarrow \text{頂点} = (p, q)$$

② $x=0$ を代入した y の値 = 切片を ~~打~~ 打つ。

③ 頂点をはさんで左右対称になるように曲線を引く。

* なれない内は多少カクカクしても良い!

<10/15, 水, 2025> 1-5 基礎数学 I [20] 用ノート

今週 → 2次方程式と~~2次不等式~~ 2次関数のグラフ (p.89~)

$y=0$ (x軸) と $y=ax^2+bx+c$ の交点 (共有点)

$ax^2+bx+c=0$ の実数解 のx座標

例 = 例題 3.8, 以下の2次関数のグラフとx軸の共有点は?

$$(1) y = x^2 - x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \\ x = 2, -1$$

$$\left(\begin{array}{l} 2 \text{ の } x \text{ 値に対応する } y \text{ 値は, } (=0) \\ y = 2^2 - 2 - 2 = 0, \quad y = (-1)^2 - (-1) - 2 \end{array} \right)$$

$$(2) y = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \\ x = 1 \text{ (重解)}$$

$$(3) y = x^2 + 2x + 2 \rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ = -1 \pm i, \text{ 実数解では } \\ \text{ないので、共有点は存在しない。}$$

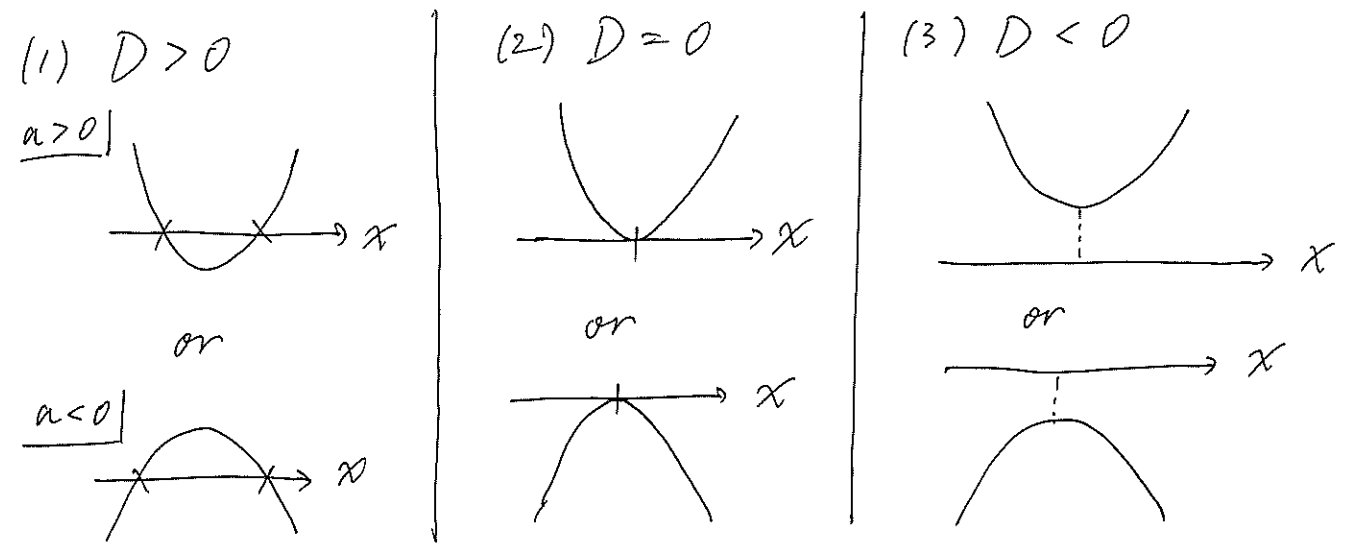
x軸
~~との~~ 交点と判別式 D (p.90)

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac$$

(1) $D > 0 \rightarrow$ 異なる2つの実数解 $\rightarrow$ 共有点は2個。

(2) $D = 0 \rightarrow$ 1つの実数解 $\rightarrow$ " は1個。

(3) $D < 0 \rightarrow$ 異なる2つの虚数解 $\rightarrow$ " はなし。



例 = 問 3.12 (p.92)

$$y = 2x^2 - 3x + 7k + 2 \text{ について}$$

(1) x軸に接するようにkを定めよ。

$y=0$ が重解を持つ。判別式 D は

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (7k + 2) \\ = 9 - 56k - 16 = -56k - 7, \quad D = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

(2) x軸と2点で交わるようにkを

$$D = -56k - 7 > 0$$

$$-56k > 7 \\ k < -\frac{1}{8} \quad \text{← 逆転!}$$

(3) x軸と交わらないようにkを

$$D = -56k - 7 < 0$$

$$-56k < 7 \\ k > -\frac{1}{8} \quad \text{← 逆転!}$$

2次不等式 (p.92)

(復習) x^2 の係数が負の場合、不等式の転
両辺に (-1) をかけて、不等号を反~~転~~させろ。

例: $-6x^2 + 66x - 666 \geq 0$

$$6x^2 - 66x + 666 \leq 0$$

以後、 $ax^2 + bx + c \neq 0$, $\neq \{>, <, \geq, \leq\}$ は常に $a > 0$.

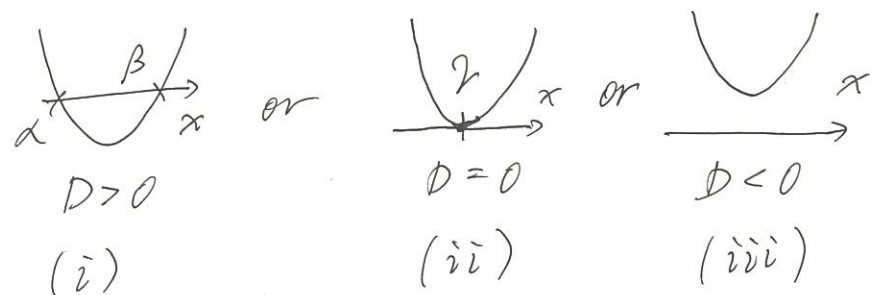
グラフを用いた $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解き方 (p.93)

① 上記のように、 x^2 の係数 ≥ 0 にする。

$\rightarrow a > 0$, 下に凸:  x , 必ず通す!

② 等式: $ax^2 + bx + c = 0$ を解いて x 軸との
共有点を求める。

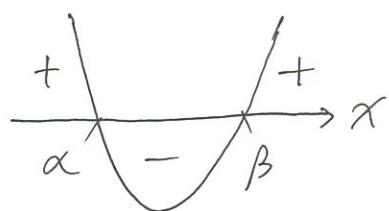
③ グラフを描く。* 頂点はメモーで良い。



④ - (i): 交点 $\times 2$ の場合、それを α, β とすると、

$$f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha, \beta \leq x$$

$$f(x) = \quad \quad \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$$



* $\{\geq \rightarrow >\}$, $\{\leq \rightarrow <\}$
でも同様。

④ - (ii): ひとつの接点だけの場合、それを $x = \gamma$ とすると、

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x \text{ はすべてアリ。}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \neq \gamma.$$

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow x = \gamma \text{ のみ。}$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \text{解なし。}$$

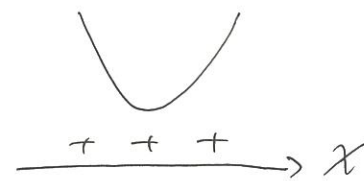


④ - (iii): x 軸との交点がない場合、

$$f(x) \geq 0 \ \& \ f(x) > 0$$

$$\Rightarrow x \text{ はすべてアリ。}$$

$$f(x) \leq 0 \ \& \ f(x) < 0 \Rightarrow \text{解なし。}$$



例 = 問 3.13 (p.93),

$$(1) -x^2 + x + 2 > 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x-2)(x+1) < 0$$

$$\text{Graph} \rightarrow \underline{-1 < x < 2}$$

$$(2) -x^2 + x + 2 \leq 0$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$

$$\underline{x \leq -1, 2 \leq x}$$

$$(5) x^2 - 4x > -4$$

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

$$(x-2)^2 > 0$$

$$\text{Graph} \rightarrow \underline{x \neq 2}$$

$$(6) x^2 + x \geq -1$$

$$x^2 + x + 1 \geq 0,$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0,$$

$$\text{Graph} \rightarrow \underline{x \text{ はすべての実数}}$$

+ "2次関数の最大値・最小値" を終った。

<10/22, 水, 2025> 1-5 基礎数学 I [21] 用ノート

今週 → 無理関数 (p. 98 ~ 101)

→ 22までの中間テストの範囲。

無理関数 (p. 100)

→ 根号を含む関数。一般式は次式。

$$y = f(x) = \pm \sqrt{ax+b} + q = \pm (ax+b)^{\frac{1}{2}} + q$$

$$= \pm \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + q \quad (a \neq 0)$$

もう少し簡単なやつから考える。

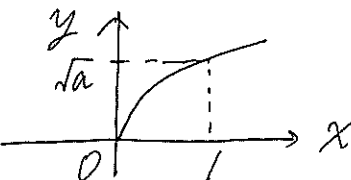
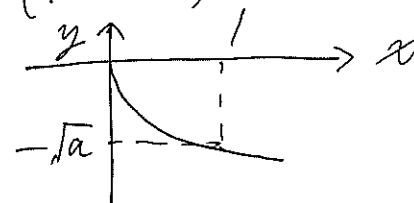
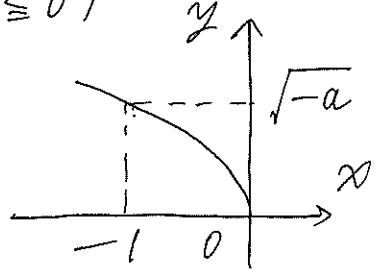
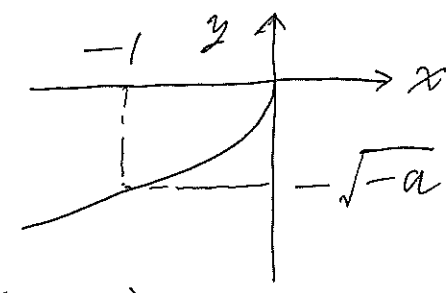
$y = f(x) = \pm \sqrt{ax}$ (p. 98), $a \neq 0$

→ 2のタイプは放物線の逆関数として求められる。

$y = \frac{1}{a}x^2$

$x \leftrightarrow y$ $\begin{cases} ay = x^2 \\ ax = y^2 \end{cases}$

① a の符号が2通り、
② $y = (\pm)\sqrt{ax}$ の符号が2通り、
合計4通りのパターンがある。

(p. 99)	$y = \sqrt{ax}$	$y = -\sqrt{ax}$
$a > 0$	(定義域 $x \geq 0$) 	($x \geq 0$) 
$a < 0$	($x \leq 0$) 	($x \leq 0$) 

* ルートの中身は正値のみ! つまり $ax \geq 0$.

$y = f(x) = \pm \sqrt{ax}$ の平行移動 (p. 100)

x 方向に p , y 方向に q だけ平行移動すると、
 $(x, y) \rightarrow (x-p, y-q)$

$$y = \pm \sqrt{ax}$$

$$y - q = \pm \sqrt{a(x-p)}$$

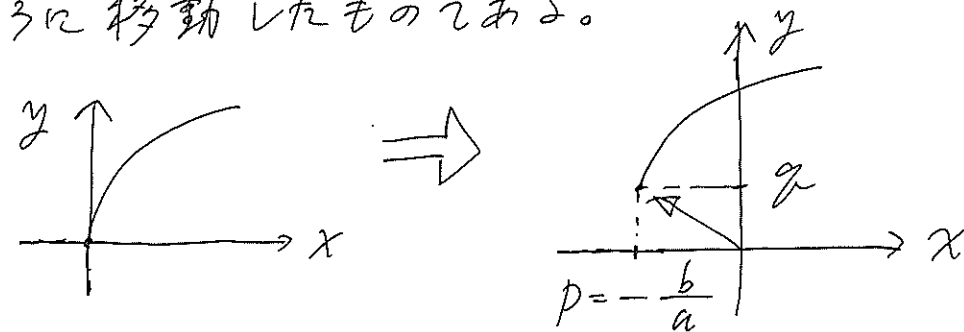
（ y になってる。）

$$y = \pm \sqrt{a(x-p)} + q \rightarrow (x, y) = (p, q) \text{ が頂点}$$

したがって、無理関数の一般形

$$y = \pm \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + q \quad * p = -\frac{b}{a}$$

これは $y = \pm \sqrt{ax}$ のグラフを、頂点が $(0,0)$ から $\left(-\frac{b}{a}, q\right)$ になるように移動したものである。



例 = 問 3.16 (p. 101)

(1) $y = \sqrt{x+1} - 1$... $y = \sqrt{x}$ を $(p, q) = (-1, -1)$ だけ平行移動したもの。

(2) $y = \sqrt{-x-1} + 1$
 $= \sqrt{-(x+1)} + 1$... $y = \sqrt{-x}$ を $(p, q) = (-1, +1)$ だけ平行移動したもの。

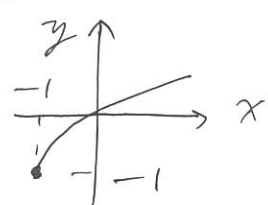
(7>><)

(つづき)

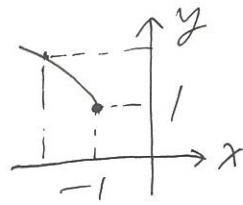
(3) $y = -\sqrt{x+1} + 1 \dots y = -\sqrt{x}$ を $(p, q) = (-1, +1)$ だけ
平行移動したもの

(4) $y = -\sqrt{-x-1} + 1$
 $= -\sqrt{-(x+1)} + 1 \dots y = -\sqrt{-x}$ を $(p, q) = (-1, +1)$ だけ
平行移動したもの。

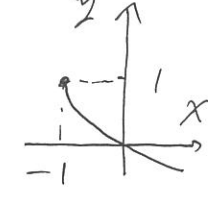
例: (1)



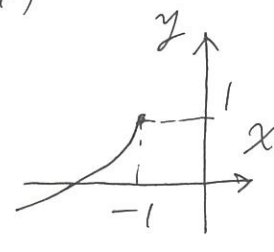
(2)



(3)



(4)

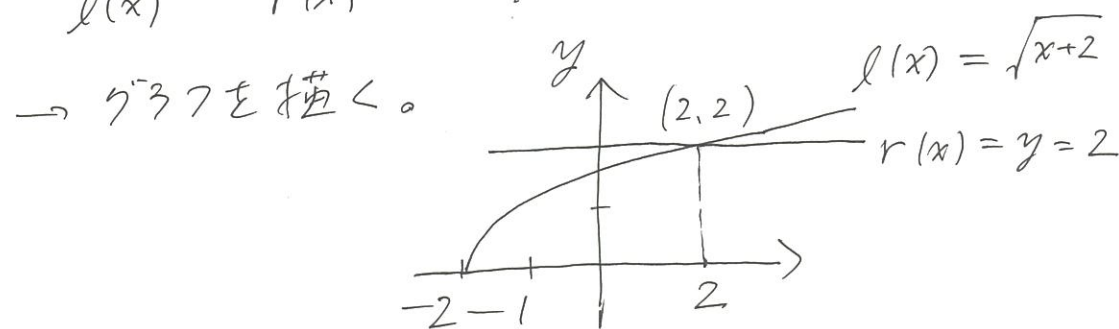


方程式 $l(x) \neq r(x)$ の解法 ($*$ = $>, <, \geq, \leq$)

→ $l(x)$ と $r(x)$ のグラフを描いて、これらの交点を解。
等式の

例 = 問題 21-04 ヒート

(1) $\sqrt{x+2} < 2 \rightarrow$ 先に等式 $\sqrt{x+2} = 2$ を解く。
 $\begin{matrix} l(x) & r(x) \end{matrix}$ $x+2 = 2^2 = 4, x = 2$



→ $l(x) < r(x)$ となるのは、 $-2 \leq x < 2$

(4) $\sqrt{3x+1} > 2x \rightarrow x?$

→ 先に等式 $\sqrt{3x+1} = 2x$ を解く。
($l(x) = r(x)$)

$$3x+1 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$(4x+1)(x-1) = 0$$

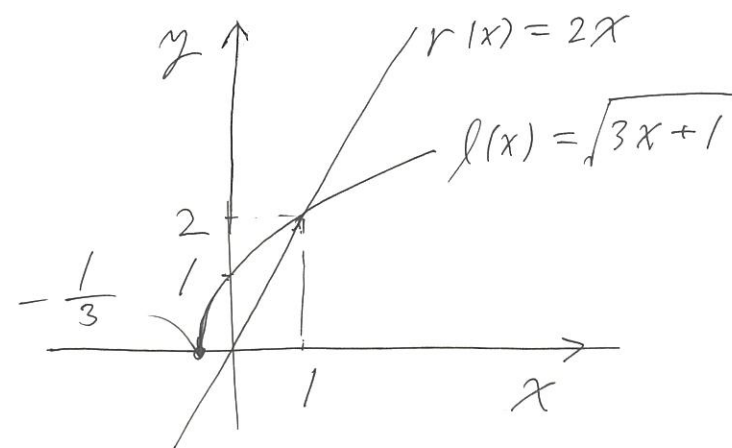
$$x = 1, -\frac{1}{4}$$

ただし $x = -\frac{1}{4}$ は $l(x)$ の定義域に代入すると

$$l(x = -\frac{1}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = r(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$$

となり、実際には不適格である。

→ グラフを描く。 $l(x)$ と $r(x)$ の両方。



→ $l(x) > r(x)$ を満たすのは $-\frac{1}{3} \leq x < 1$

<10/29, 水, 2025> 基礎数学 I [22] 用ノート (1-5)

中間テスト範囲 = p. 70 ~ p. 101, 問 3.16, およびこれに
対応した章末問題 (p. 109 ~ 110)

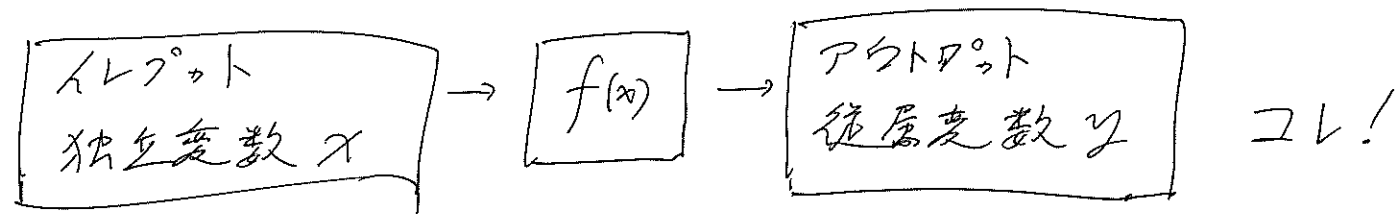
~~今日~~ 今週金曜日 <10/31, 2025> → 自習!

来週^水曜日 <11/5, 2025> → ラスト!!

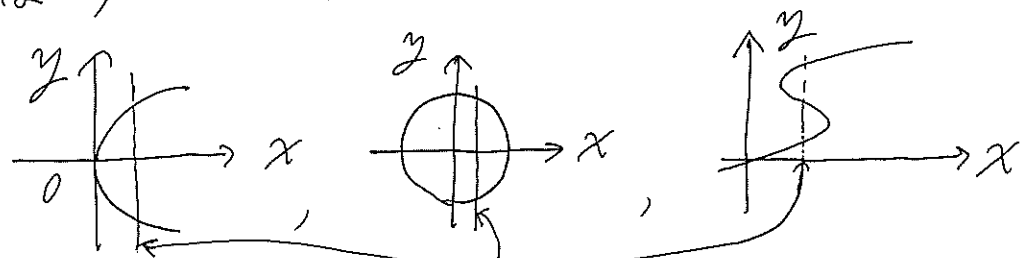
今日 → これまでの復習 ① (p. 70 ~) ※ 特に重要なところ。

※ 取りこぼしもあり得る。各自復習を。

関数 (p. 70) → $y = f(x)$ とは、



※ ただし、 $f(x)$ は “一意” に決まらなければ、関数
とは呼ばない。例えば、



これらはいずれも、 $f(x) = ?$ となる。関数ではない。

グラフの平行移動 (p. 73)

x 方向に $+p$, y 方向に $+q$ だけ平行移動したとは、

$$y = f(x) \Rightarrow y - q = f(x - p)$$

$$y = f(x - p) + q$$

例: $f(x) = ax^2 = y$

$$\Rightarrow \text{~~移~~ } y = f(x - p) + q$$

$$y = a(x - p)^2 + q,$$

$$y = f(x) = \pm \sqrt{ax}$$

$$\Rightarrow y = f(x - p) + q$$

$$y = \pm \sqrt{a(x - p)} + q$$

対称移動 (p. 76) → 各自で。

回転移動と拡大・縮小 → 各自で。

1次関数の最大値・最小値 (p. 79 ~ 80) → 各自で。

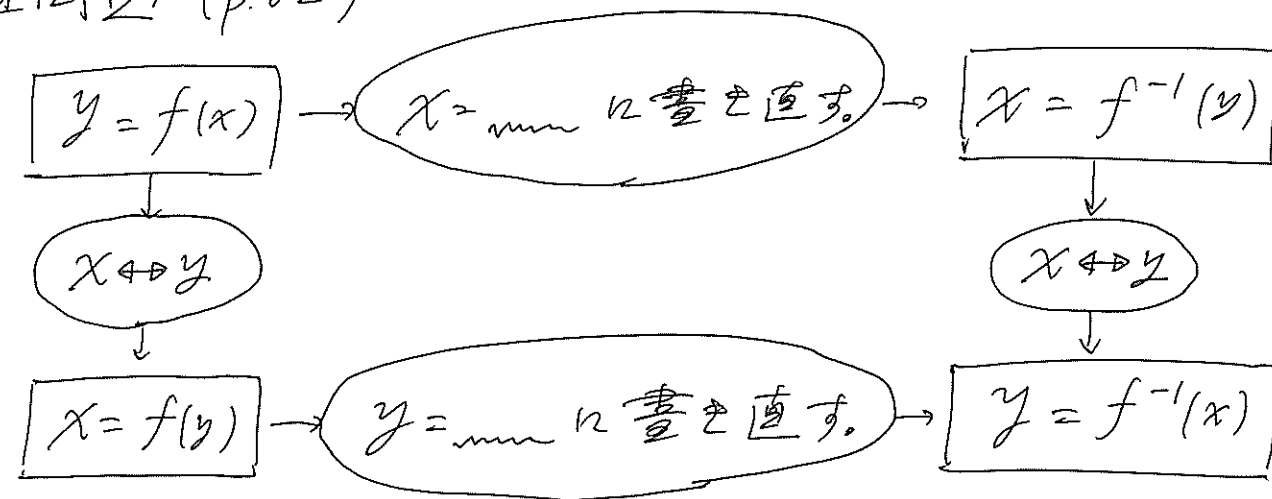
逆関数 (p. 81 ~ 83)

元の関数 $y = f(x)$ を x について解く → $x = f^{-1}(y)$ 。

22でさらに x と y の入れ替えをしたものが “逆関数”。

$$y = f^{-1}(x)$$

相互図 (p. 82)



例: $y = \frac{1}{a}x^2$

$$x^2 = ay$$

$$x = \pm \sqrt{ay}$$

→ x と y を入れ替え、

$$y = \pm \sqrt{ax}$$

ただし関数の一意性より、
 $\pm$ のうち ~~一方~~ を指定する。

$$y = +\sqrt{ax}$$

合成関数 (p.83)

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

※一般に

$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x) !!$$

逆関数との合成

$$g(x) = f^{-1}(x) \text{ とすると、}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x \text{ となる。}$$

$$\text{例: } f(x) = +\sqrt{ax}, \quad g(x) = \frac{1}{a}x^2 = f^{-1}(x) \text{ とすると、}$$

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = f(g(x)) = +\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}x^2} = +\sqrt{x^2} = x, \\ f^{-1} \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{a} (+\sqrt{ax})^2 = \frac{a}{a}x = x. \end{cases}$$

$$\text{※ ちがみに、} f(x) = -\sqrt{ax}, \quad g(x) = \frac{x^2}{a} \text{ とすると、}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{a \cdot \frac{x^2}{a}} = -x \text{ となり、不適。}$$

2次関数のグラフと平行移動

$$y = f(x) = ax^2$$

↓ x 方向に $+p$ 、 y 方向に $+q$ だけ平行移動

$$y - q = a(x - p)^2$$

$$y = a(x - p)^2 + q, \text{ 又はこれは}$$

$$= ax^2 + bx + c \text{ の形に“必ず”直せる。}$$

$$\left\{ p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{b^2}{4a} + c \right\} \text{ とすれば直せる。}$$

原形と標準形 (p.88)

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \dots\dots \textcircled{1}, \text{ 原形}$$

$$= a(x - p)^2 + q \dots\dots \textcircled{2}, \text{ 標準形}$$

✓ ① → ② の求め方:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x\right\} + c, \text{ 平方完成}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a(x - p)^2 + q, \quad \begin{cases} p = -\frac{b}{2a} \\ q = -\frac{b^2}{4a} + c \end{cases}$$

✓ ② → ① の求め方: 単に代入する。

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

$$= a\left\{x^2 + 2x\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= ax^2 + bx + x\left(\frac{b^2}{a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = ax^2 + bx + c$$

<11/5, 水, 2025> 基礎数学 I 23 用ノート

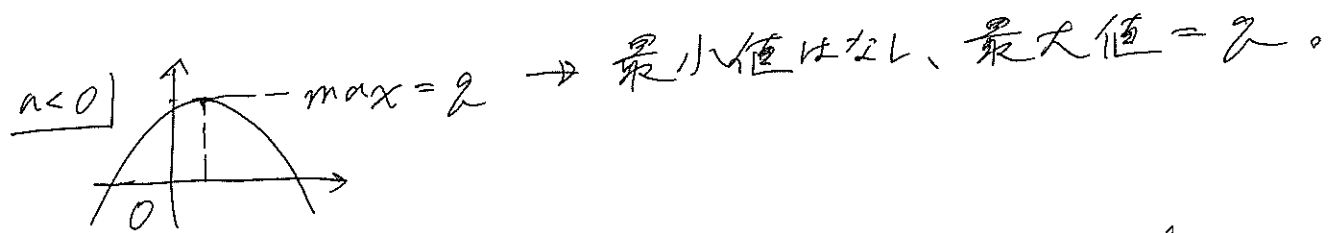
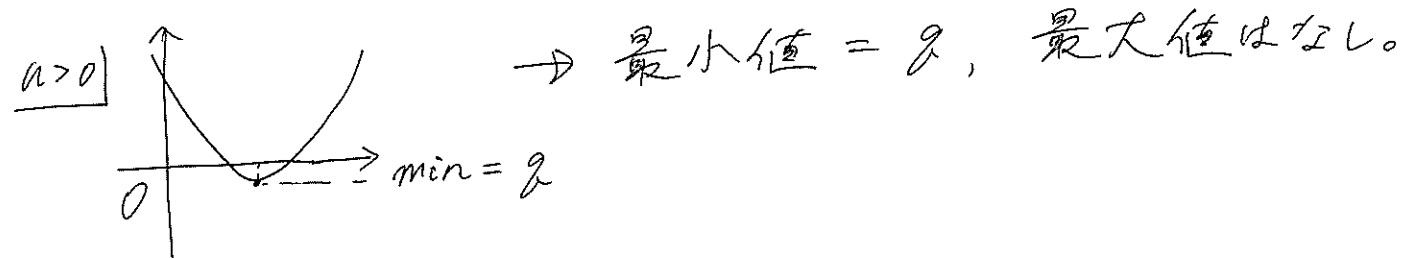
本日 → 2次関数の性質のうち、以下のポイント

- ・最大値・最小値
- ・直線との共有点
- ・グラフの推定・決定

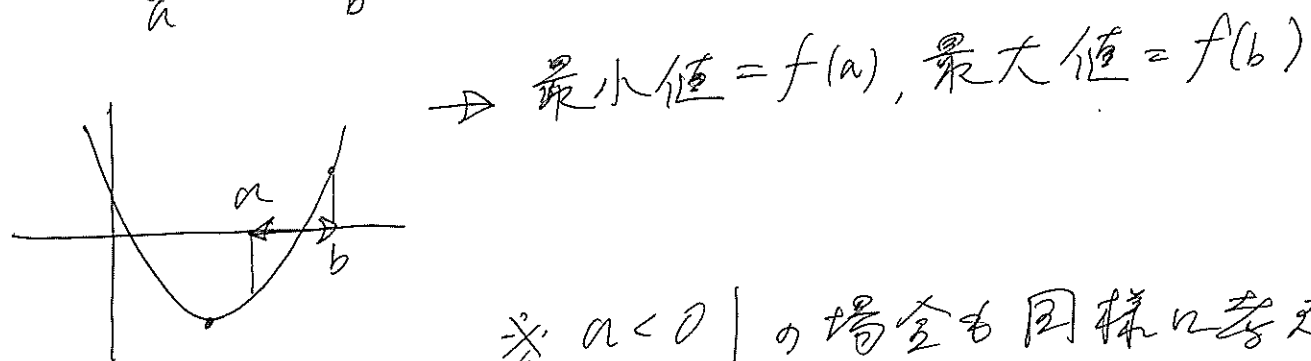
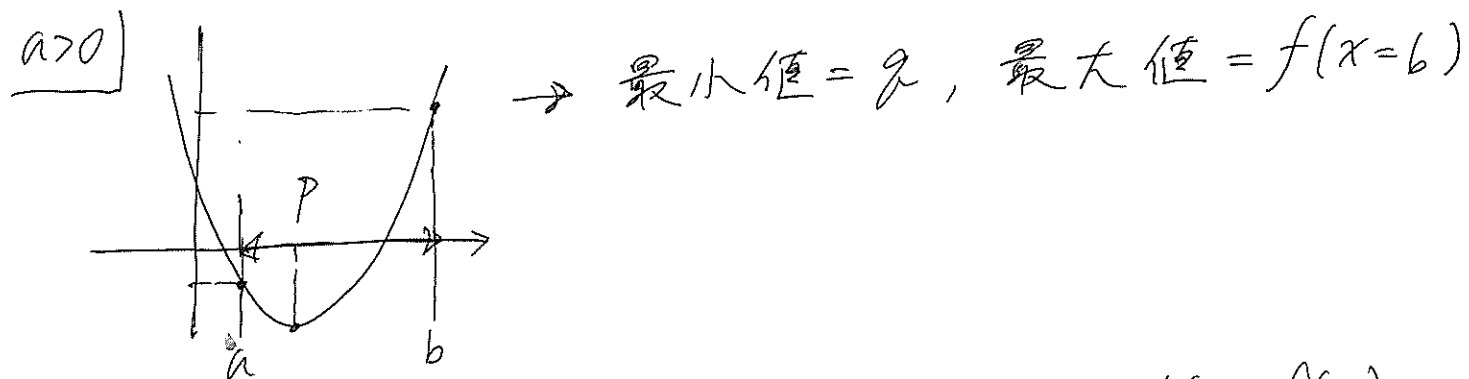
※ いずれも教科書だけだとイマイチなので。

最大値・最小値 (p.96~97)

定義域がない場合, $f(x) = a(x-p)^2 + q \rightarrow f(p) = q$

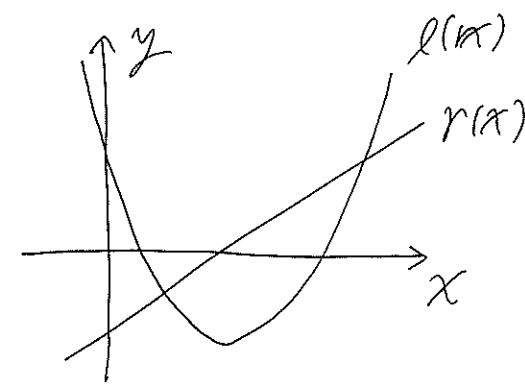


定義域がある場合, $f(x) = a(x-p)^2 + q, (a \leq x \leq b)$



※ $a < 0$ の場合も同様に考え。

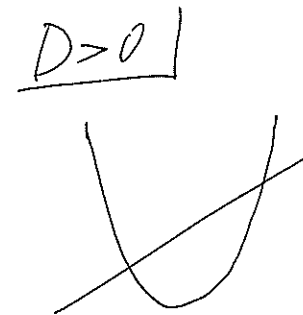
直線との共有点 (p.110, 章末問題)



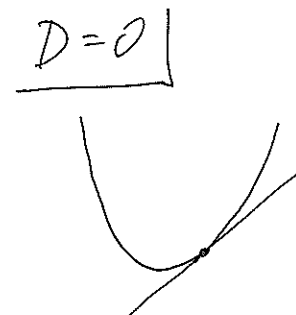
$$\begin{cases} l(x) = ax^2 + bx + c, \\ r(x) = dx + e \end{cases}$$

両者の交点は、 $l(x) = r(x)$ の解に対応している。

$$\begin{aligned} l(x) = r(x) &\rightarrow l(x) - r(x) = 0 \\ ax^2 + (b-d)x + (c-e) &= 0 \\ ax^2 + Bx + C &= 0, \\ \rightarrow x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4aC}}{2a}, \quad D = B^2 - 4aC \end{aligned}$$



解 = 交点は2個



解 = 交点は1個



解 + 交点0個

① $l(x) = r(x) \rightarrow ax^2 + Bx + C = 0$ を解く。

② 求めた x の値を $r(x)$ に代入する。 $l(x)$ でも良いが...

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{交点は} & \begin{cases} (x_1, r(x_1)), (x_2, r(x_2)) & (D > 0) \\ (x, r(x)) & (D = 0) \\ \text{なし} & (D < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

グラフの整理、決点 (p, 109年~110)

$y = f(x) = a(x-p)^2 + q$ a, p, q の3つのパラメーター
に対応した情報を正しく
読みとる。

例えば、-----

1 最大値(または最小値) = $\sqrt{666} \rightarrow q = -666$

1 $x = 777$ で頂点をとる。 $\rightarrow p = 777$

1 $x = 777$ を軸に持つ。

1 点 (20, 25) を通る。 $\rightarrow a(20-p)^2 + q = 25$
20 25

例 = 問 23-03 ヒント

(1) $x=1$ で最大値 5 とし、 $x=3$ のとき $y=7$ とする。

$p=1, q=5$ とす。

$$7 = a(x-p)^2 + q \\ = a(3-1)^2 + 5 \rightarrow a = \text{~~~~~}$$

問 23-04 ヒント

(1) 軸が $x = -2$ で、2点 (0, 3) & (-1, 0) を通る。

$p = -2$ とす。

$$\begin{cases} 3 = a(0-p)^2 + q = a(+2)^2 + q \\ 0 = a(-1-p)^2 + q = a(+1)^2 + q \end{cases}$$

$\rightarrow a = \text{~~~~~}, q = \text{~~~~~}$

問 23-05 ヒント

(1) 頂点が (1, -2) で、点 (2, -3) を通る。

$p=1, q=-2$ とす。

$$-3 = a(x-p)^2 + q \\ = a(2-1)^2 + (-2) \rightarrow a = \text{~~~~~}$$

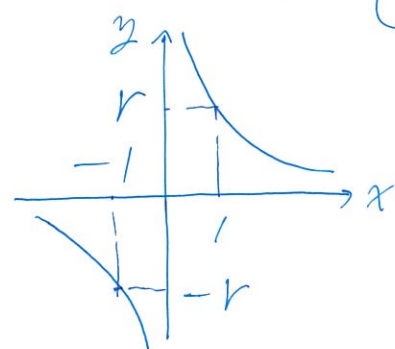
本日 → 分数関数 (p. 101 ~ 106)

$\frac{A(x)}{B(x)}$... 一般の分数関数

以下では $f(x)$ & $g(x)$ が 1 次関数のみとする。

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$y = \frac{r}{x}$ のグラフ (中学でやったはず)
 双曲線と呼ばれる。



ここで 2つの直線
 $x=0$ (y軸)
 $y=0$ (x軸)

※ 定義域 $x \neq 0$

をグラフの漸近線と呼ぶ。

漸近線 グラフが限りなく近づく直線。

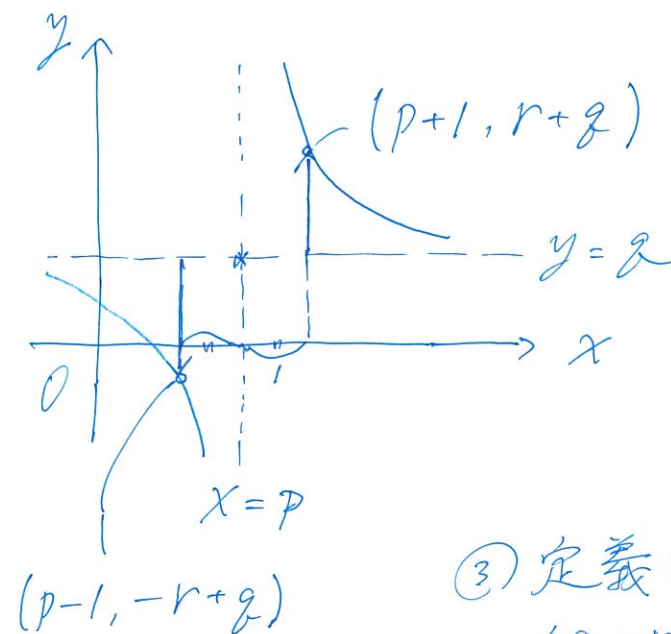
$y = \frac{r}{x}$ の平行移動 (p. 102)

$y = f(x) = \frac{r}{x}$, これを x 軸方向に $+p$,
 y 方向に $+q$ だけ
 平行移動すると、

$$y - q = f(x - p) = \frac{r}{x - p}$$

$$\rightarrow y = \frac{r}{x - p} + q$$

このグラフは、



$$y = \frac{r}{x-p} + q$$

① 点 (p, q) に対して対称

② 漸近線は $x=p$ と $y=q$

③ 定義域は $x=p$ を除く実数全体,
 値域は $y=q$ を除く実数全体。

$y = \frac{r}{x-p} + q$ 型のグラフの描き方

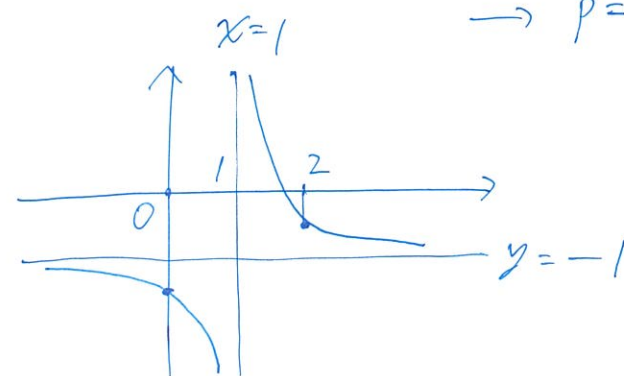
① 式変形して p, q, r を求める。

② 漸近線 $x=p$ と $y=q$ を引く。

③ 点 $(x, y) = (p+1, r+q)$ と $(p-1, -r+q)$ を必ず
 通るので、この 2 点を打つ。

④ 上で求めた 2 点を通り、漸近線に近づいていく
 ように、曲線を引く。

例 = 例題 3.15, (2) $y = \frac{1}{2x-2} - 1 = \frac{1}{2(x-1)} - 1 = \frac{(\frac{1}{2})}{x-1} - 1$,
 $\rightarrow p=1, q=-1, r=\frac{1}{2}$



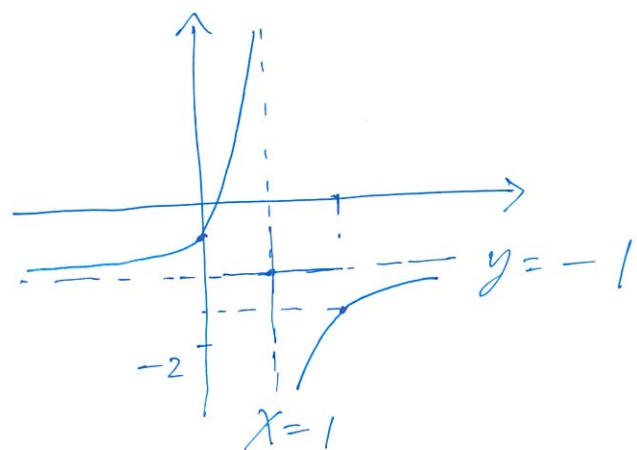
$$(2, -\frac{1}{2}) \text{ \& } (0, -\frac{3}{2})$$

$$(p+1, r+q) \text{ \& } (p-1, -r+q)$$

もし $r < 0$ の場合、2本なすろつに →

例: $y = \frac{-1/2}{x-1} - 1$

→ $p=1, q=-1, r=-\frac{1}{2}$



$$\begin{cases} (0, -\frac{1}{2}) = (p-1, -r+q) \\ (2, -\frac{3}{2}) = (p+1, r+q) \end{cases}$$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ (p. 104)

実は、 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{r}{x-p} + q$ である。ただし

$p = -\frac{d}{c}, q = \frac{a}{c}, r = -\frac{ad-bc}{c^2}$ である。

導出:

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{cx+d} &= \frac{(\frac{a}{c})x + (\frac{b}{c})}{x + (\frac{d}{c})} = \frac{(\frac{a}{c}) \left\{ x + \frac{(\frac{b}{c})}{(\frac{a}{c})} \right\}}{x + (\frac{d}{c})} \\ &= \frac{(\frac{a}{c}) \left\{ x + (\frac{d}{c}) - (\frac{d}{c}) + (\frac{b}{c}) \right\}}{x + (\frac{d}{c})} = \frac{(\frac{a}{c}) \left\{ x + (\frac{d}{c}) \right\} - (\frac{a}{c})(\frac{d}{c}) + (\frac{b}{c})}{x + (\frac{d}{c})} \\ &= \frac{(\frac{-ad+bc}{c^2})}{x - (-\frac{d}{c})} + \frac{(\frac{a}{c})}{1} \\ &= \frac{r}{x-p} + q \end{aligned}$$

なので原則的には、

$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \text{min} = \frac{r}{x-p} + q$ に必ず帰着できる。

手順: ① $y = \frac{ax+b}{cx+d} = q \cdot \frac{x + (\frac{b}{a})}{x + (\frac{d}{c})}$, $q = (\frac{a}{c})$ とおく。

② $\frac{x+\alpha}{x+\beta} = \frac{x+\beta+\alpha-\beta}{x+\beta} = 1 + \frac{\alpha-\beta}{x+\beta}$ と利用。

$y = q \left\{ 1 + \frac{\alpha-\beta}{x+\beta} \right\} = q + \frac{q(\alpha-\beta)}{x-(-\beta)}$

したがって $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ の漸近線は $x = -\frac{d}{c}$ と $y = \frac{a}{c}$ である。

例 = 問 25-02, (6) とし

$y = \frac{-x+2}{3x-2} = \frac{-1 \cdot (x-2)}{3 \cdot (x-\frac{2}{3})} = \left(\frac{-1}{3}\right) \frac{x-2}{x-\frac{2}{3}}$

$= \left(\frac{-1}{3}\right) \frac{x-\frac{2}{3}-2+\frac{2}{3}}{x-\frac{2}{3}} = \left(\frac{-1}{3}\right) \left\{ 1 + \frac{-2+\frac{2}{3}}{x-\frac{2}{3}} \right\} = \left(\frac{-1}{3}\right) \left\{ 1 + \frac{-\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}} \right\}$

$= \frac{(\frac{4}{9})}{x - (\frac{2}{3})} + \left(\frac{-1}{3}\right) \rightarrow p = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{3}, r = \frac{4}{9}$

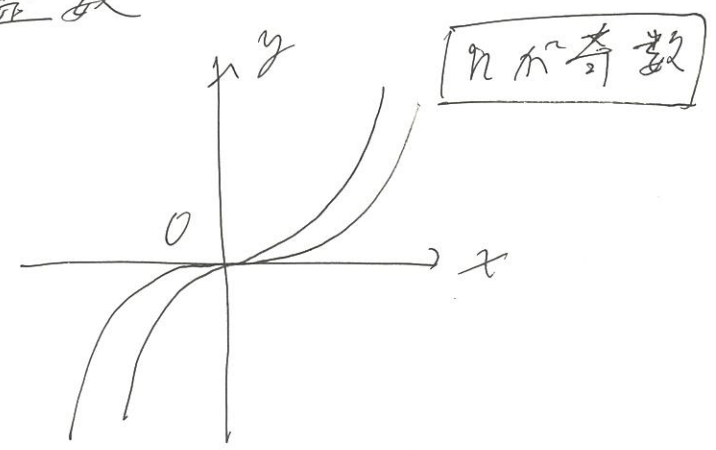
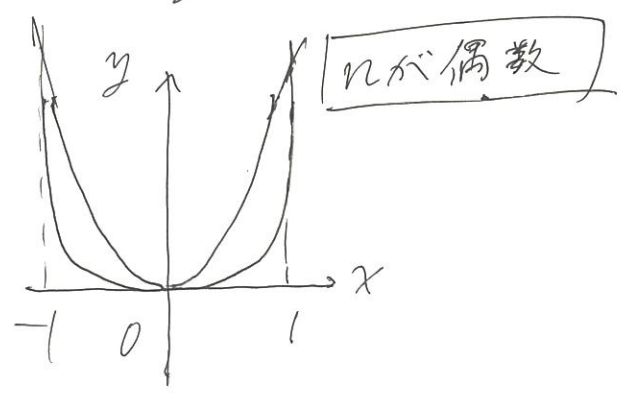
$= \frac{r}{x-p} + q$

※先週はイレフルにつき学級閉鎖。

今週 → ベキ関数、累乗根、指数の拡張 (p.106~115)
 又 指数関数 (p.116~118, ?)

ベキ関数 (p.106)

$y = x^n$, n は正整数



グラフを描くコツ... $x = \pm 1$ と $x = \pm \frac{1}{2}$ での
 $y = x^n$ はいくつか? を図安に。
 $\rightarrow x^2 < x^4 < x^6$, とかとか。

平行移動すると、

$y = x^n \rightarrow y = (x-p)^n + q$

奇関数・偶関数 (p.107)

- ・ $f(-x) = f(x)$... 偶関数
- ・ $f(-x) = -f(x)$... 奇関数

偶関数の例:

$f(x) = x^2, x^4, x^6, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, x^{\frac{1}{2}}$ だけの関数、
 $\cos x$

奇関数の例:

$f(x) = x, x^3, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \sin x$

~~関数~~ 関数の種の偶奇

奇 $\times$ 奇 = 偶関数, 奇 $\times$ 偶 = 奇関数
 偶 $\times$ 偶 =

指数と累乗の拡張 (p.111)

a^n ... n ... 指数, a ... 底, 次の指数法則が) (成り立つ。)

- ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- ② $(a^m)^n = a^{mn}$
- ③ $(ab)^n = a^n b^n$

これから先は、 n は 整 正の整数とは限らない。

指数が 0 や負整数のとき (p.112)

$a \neq 0$ で、 n が自然数 $(1, 2, 3, \dots)$ のとき、

- ① $a^0 = 1$
- ② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

理由: ① については、 $a^k = a^{k+0} = a^k \cdot a^0$ より、 $a^0 = 1$ 。

② については、 $a^0 = 1 = a^{k-k} = a^k \cdot a^{-k}$
 より、 $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ 。

指数法則の拡張 (p. 112) : $a \neq 0$ & $b \neq 0$ について。

$$\textcircled{1} a^m a^n = a^{m+n} \quad \textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\textcircled{3} (ab)^n = a^n b^n \quad \textcircled{4} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}, \quad \text{ただし } m, n \text{ は正または負の整数。}$$

累乗根 (p. 113)

$$x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a} \dots \dots n \text{ 乗根}$$

$$* n=2 \text{ (または)} x = \sqrt{a}, \text{ 平方根。}$$

n = 偶数 $\dots \dots x^n = a$ を満たす x は

$$x = \pm \sqrt[n]{a} \quad \text{の 2 つ。}$$

また、 $a \geq 0$ という条件が付く。

* 虚数解は考えない。

n = 奇数 $\dots \dots x^n = a$ を満たす x は

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{だけ、ただひとつに決まる。}$$

n が奇数の場合、 $a < 0$ でも解ける。

$$(\sqrt[3]{-1} = -1, \sqrt[5]{-1} = -1, \dots \text{ などが。})$$

例 = 例 4.2, (1)

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5. \quad \text{ちなみに、} \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-1)^3 \cdot 5^3} = -5.$$

(2)

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

(3)

$$\sqrt[4]{0.0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \sqrt[4]{\frac{1}{10^4}} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$$

補足 : $\sqrt[4]{0.0001} = \pm 0.1$ ではないか?

$\rightarrow$ 平方根のときと同じく、 $(\pm x)^4 = 0.0001$ の解は、

$$\left\{ \begin{array}{l} (+) \sqrt[4]{0.0001} = +0.1 \\ (-) \sqrt[4]{0.0001} = -0.1 \end{array} \right\} \quad \text{2 のように 区別 する。}$$

$$x^4 = 0.0001 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{0.0001} = \begin{cases} \sqrt[4]{0.0001} = 0.1, \\ -\sqrt[4]{0.0001} = -0.1 \end{cases}$$

累乗根の性質 (p. 114)

$a > 0, b > 0$, 正整数 m, n について、

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \textcircled{4} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

例 = 例 4.3, (3)

$$(\sqrt[6]{169})^3 = (\sqrt[2 \cdot 3]{169})^3 = (\sqrt[2 \cdot 3]{13^2})^3 = (\sqrt[3 \cdot 2]{13^2})^3 = (\sqrt[3]{13})^3 = 13$$

$$\textcircled{4} \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^3} = \sqrt{5}$$

指数 ~~非整数~~ の場合への拡張 (p. 114)

$a > 0$ について、 $a^{\frac{1}{n}}$ とは何か? (n は正整数)

$$\rightarrow (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a, \quad \text{といふことは、}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{と定めると都合が良い。}$$

$a > 0$ で、 m, n が正整数、 $r = \frac{m}{n}$ とすると、

$$\textcircled{1} a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\textcircled{2} a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\textcircled{3} a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\textcircled{4} a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

以上で、有理数 $r = \frac{m}{n}$ に対する指数としての乗
累乗が定義された。

一般の指数法則 (p. 115)

x, y を定数 (有理数 & 無理数) とする。

$$\textcircled{1} a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\textcircled{2} (a^x)^y = a^{yx}$$

$$\textcircled{3} (ab)^x = a^x b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x b^{-x}$$

$$\textcircled{4} \boxed{\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x}}$$

$$\textcircled{5} a^0 = 1, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

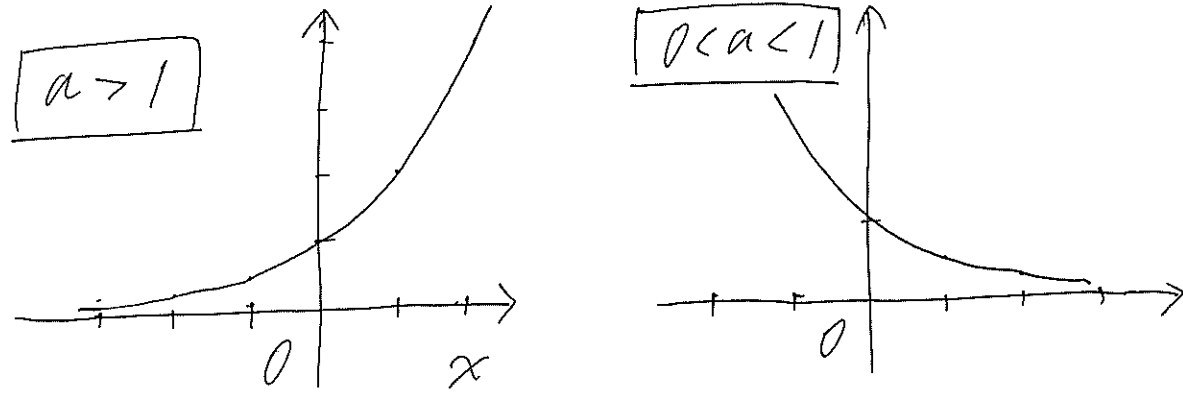
指数が無理数でも累乗は ~~一般~~ 定まる。

例: $a^{\sqrt{2}}, a^{\pi}, \text{etc.}$

<12/10, 水, 2025> 1-5 基礎数学 I 26 用ノート

今週 → 指数関数 (p. 116)

$$y = a^x, \quad a \neq 1 \text{ かつ } a > 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ (実数)}$$



指数関数の性質 (p. 116)

$$y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

(1) 定義域は実数全体 ($x \in \mathbb{R}$), 値域は正の実数全体である。

$$(2) x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

$$(3) \begin{cases} a > 1 \text{ のとき, } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \text{ (単調増)} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき, } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \text{ (単調減)} \end{cases}$$

(4) 漸近線は x 軸、 $(x, y) = (0, 1)$ と $(1, a)$ を通る。

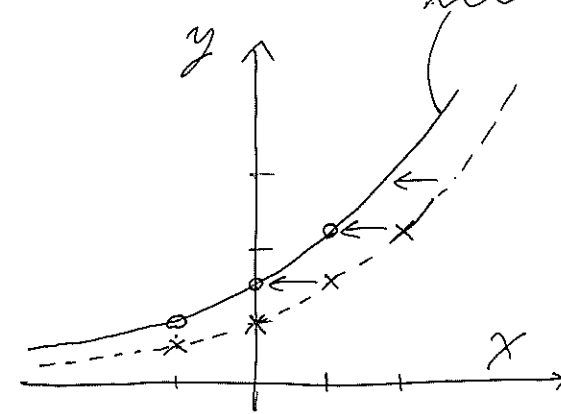
平行移動 (p. 117)

$$x \text{ 軸方向に } +1: y = a^x \rightarrow y = a^{(x-1)} = \frac{a^x}{a}$$

$$y \text{ 軸方向に } +1: y = a^x \rightarrow y = a^x + 1$$

例 = 2) 4, 5, (3)

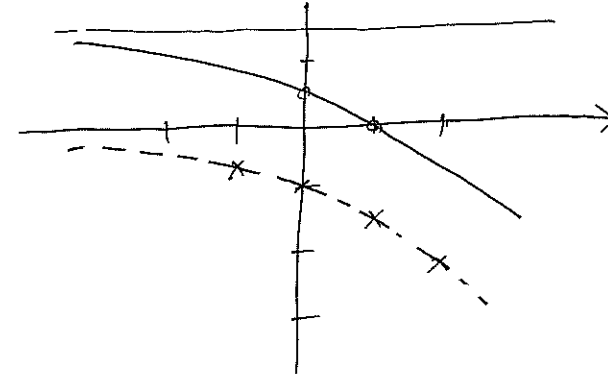
$$y = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \dots y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ を } x \text{ 方向に } -1 \text{ ずらしたもの。}$$



$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \begin{cases} \frac{3}{2} & x=0 \\ \frac{9}{4} & x=1 \\ 1 & x=-1 \end{cases}$$

(4)

$$y = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^x = -\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{3}{2} \dots y = -\left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ を } y \text{ 方向に } +\frac{3}{2} \text{ リフトアップした。}$$

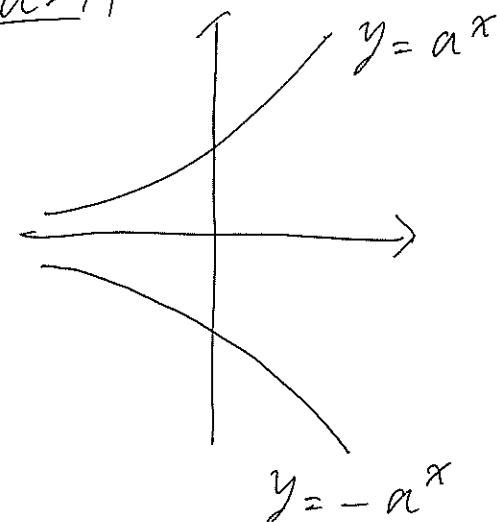


$$y = -\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{3}{2} = \begin{cases} 0 & (x=1) \\ +\frac{1}{2} & (x=0) \\ +\frac{3}{2} & (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

グラフを描くコツ

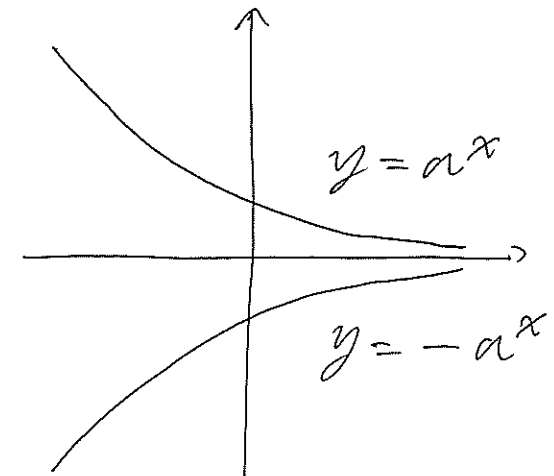
以下の4つのパターンを必ず覚えろ。

$a > 1$



$a < 1$

$0 < a$



曲を描くのは a の値によります。その後、平行移動。

大小関係 (p. 118)

問 4.6, (1)

$$\{\sqrt[7]{81}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{3}\} = \{\sqrt[7]{3^4}, \sqrt[3]{3^2}, \sqrt{3}\} = \{3^{\frac{4}{7}}, 3^{\frac{2}{3}}, 3^{\frac{1}{2}}\},$$

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{2}{3} \text{ より, } \underline{\sqrt{3} < \sqrt[7]{81} < \sqrt[3]{9}} //$$

(2)

$$\{\sqrt[3]{0.5}, \frac{1}{2}, \sqrt[4]{0.25}\} = \{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \sqrt[4]{(\frac{1}{2})^2}\} = \{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{2})^1, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}\}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1, \text{ したがって } (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < 1 \text{ に注意して、}$$

$$(\frac{1}{2})^1 < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \underline{\frac{1}{2} < \sqrt[4]{0.25} < \sqrt[3]{0.5}} //$$

指数方程式 (p. 118)

問 26-03 ヒルト

$$(2) 27^x = \frac{1}{9}, \quad 27 = 3^3, \quad 9 = 3^2 \text{ より、}$$

$$(3^3)^x = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

$$3^{3x} = 3^{-2} \rightarrow \underline{x = -\frac{2}{3}} //$$

$$(3) \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}, \quad 64 = 4^{\overset{3}{3}} \text{ より、}$$

$$\frac{1}{4^x} = \frac{1}{4^3} \rightarrow \underline{x = 3} //$$

指数不等式 (p. 118)

問 26-03 ヒルト の続き

$$(5) 2^x > 64, \quad 64 = 2^6 \text{ より、}$$

$$2^x > 2^6, \quad (2) > 1 \text{ に注意して、} \underline{x > 6} //$$

$$(6) 27^x \leq \frac{1}{81}, \quad 27 = 3^3, \quad 81 = 3^4 \text{ より、}$$

$$(3^3)^x \leq \frac{1}{3^4}$$

$$3x \leq -4$$

$$3^{3x} \leq 3^{-4}, \quad (3) > 1 \text{ に注意して、} \underline{x \leq -\frac{4}{3}} //$$

$$(7) \left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{64}, \quad \text{両辺の逆数をとる。} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ のとき、} a > b \text{ (} a, b > 0 \text{) となる、}$$

$$4^x > 64 = 4^3 \rightarrow \underline{x > 3} //$$

対数の定義 (p. 119)

$$a^r = M \Leftrightarrow r = \log_a M$$

$$\text{ただし } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

例 = 問 26-04 ヒルト

$$(1) 2^5 = 32 \Leftrightarrow 5 = \log_2 32$$

$$(2) 3^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_3 1$$

$$(3) 16^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \log_{16} 2$$

特に次式が便利 (p. 120)

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

対数の求め方

$r = \log_a M$, 基本的には $M = a^x$ の形に
直して、 $r = x$ と解く。

例 = 問 26-05 と 21

$$(1) \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$(2) \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

$$(3) \log_{100} 1 = 0$$

$$(4) \log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

⋮

$$(7) \log_{0.2} 25 = \log \left(\frac{1}{5}\right) 5^2 = \log \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2$$

+ 対数の性質 (p. 120) まではやった。

特に (3) ~ (5) の証明はやった方が
良さそう。

$$a^x > a^y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a > 1) & x > y \\ (a < 1) & x < y \end{cases}$$

$$0.2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \approx \frac{1.4}{3.2} \approx 0.44$$

$$0.2^{\frac{1}{2}} = 0.2$$

$$\frac{1}{2} < 1 \rightarrow 0.2^{\frac{1}{2}} > 0.2^1$$

$$(0.2)^2, (0.2)^3, (0.2)^4$$

<12/17, 水, 2025> 1-5 基礎数学 I [27] 用ノート

対数の性質 (p. 120) の補足

$$(3) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

導出: $M = a^p, N = a^q$ のとき、

$$MN = a^{p+q}$$

$$\log_a MN = \log_a a^{p+q} = p+q = \log_a M + \log_a N$$

$$(4) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

導出: $\frac{1}{N} = N^{-1}$ より、 $\frac{1}{N} = \frac{1}{a^q} = a^{-q}$ 、

$$\frac{M}{N} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

$$(5) \log_a M^p = p \log_a M$$

導出: $M = a^r$ だとすると、 $\log_a M = r$ であり、

$$M^p = a^{r \cdot p}$$

$$\log_a M^p = \log_a a^{r \cdot p} = r \cdot p = p \log_a M$$

底の変換公式

$a > 0$ & $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ & $c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{特に } \log_a a = \frac{1}{\log_a a}$$

$$\text{または、} \log_c \boxed{a} \log_a b = \log_c b$$

証明:

$$\log_c a \log_a b = (\log_a b) \log_c a = \log_c a^{(\log_a b)} = \log_c b$$

問 4.12, (1)

(2)

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2 \quad \log_{\sqrt[3]{4}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt[3]{4}} = \frac{3}{(\frac{2}{3})} = \frac{9}{2}$$

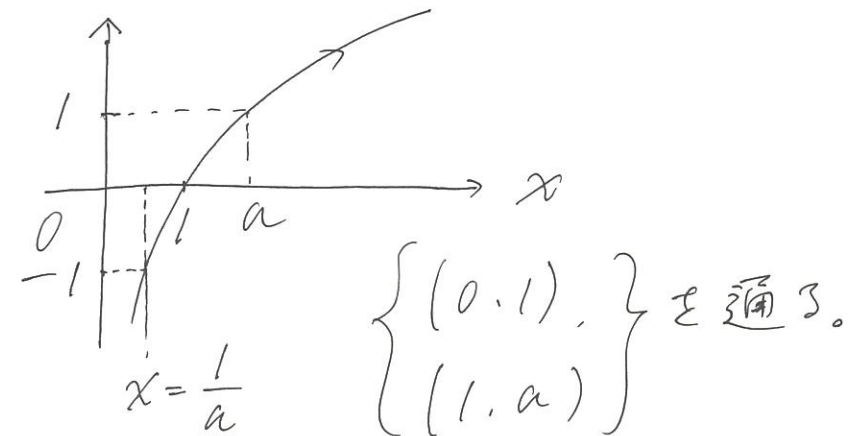
(3)

$$\frac{\log_4 27}{\log_2 3} = \frac{3 \log_4 3}{\log_2 3} = \frac{3 \log_4 2 \cdot \log_2 3}{\log_2 3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

対数関数 (p. 123)

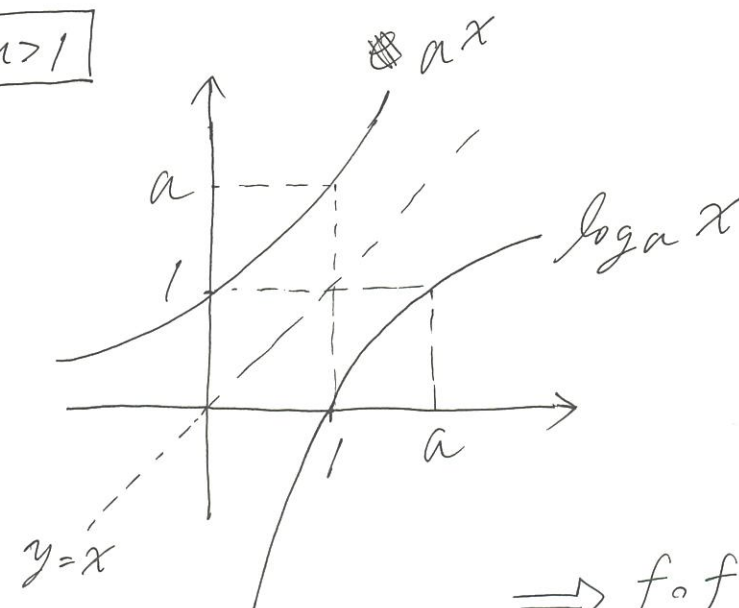
$a \neq 1$ & $a > 0$ とおくとする。このとき、

$$y = \log_a x \quad (x > 0)$$



指数関数との対応

$a > 1$



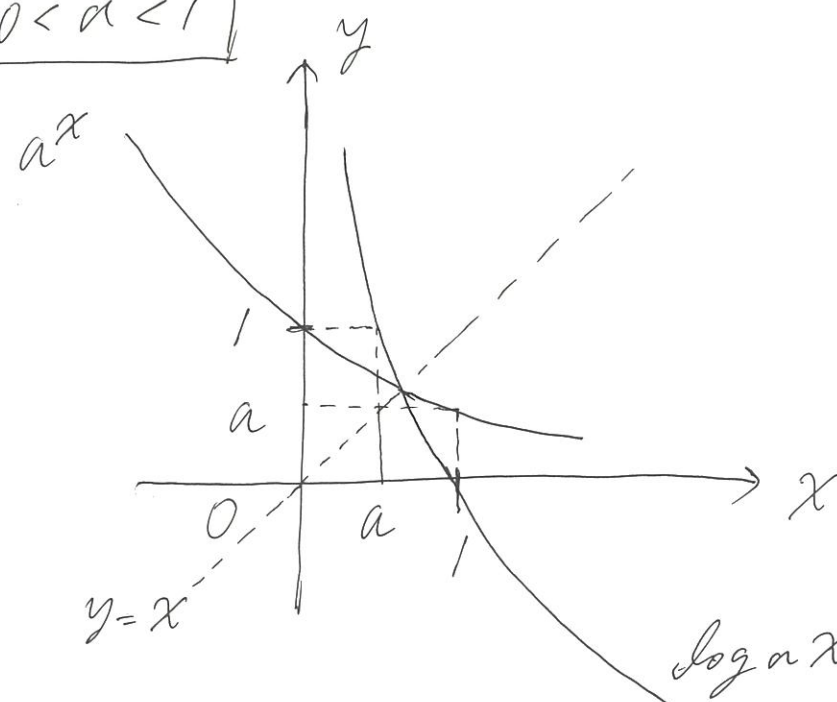
つまり、

$f(x) = a^x$ の逆

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$\Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = a^{\log_a x} = x$$

$$0 < a < 1$$



$$y = a^x \rightarrow \text{必ず } y > 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = \log_a x \rightarrow \text{必ず } x > 0$$

$\log_a x$ $\left\{ \begin{array}{l} (-x) \text{ を変数に} \\ \text{とすると、} \end{array} \right.$

対数関数の性質 (p. 123)

(1) 定義域は正実数 ($x > 0$), 値域は全実数。

$$(2) x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

$$(3) \begin{cases} a > 1 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \text{ with } x_1 < x_2 \\ a < 1 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \text{ with } x_1 < x_2 \end{cases}$$

(4) グラフは y 軸が漸近線、2点 $(1, 0)$ & $(a, 1)$ を通る。* $a < 1$ or $a > 1$ に注意。

平行移動

→ これまでと同様。

$$y = \log_a x \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \text{ 方向に } +p, \\ y \text{ 方向に } +q, \\ \text{平行移動} \end{pmatrix}} y = \log_a (x-p) + q$$

大小関係 (p. 125)

$p = \log_a x, q = \log_a y$, 2の両者の大小は,

$$\begin{cases} (a > 1) \rightarrow x < y \text{ ならば } p < q \\ (a < 1) \rightarrow x < y \text{ " } p > q \end{cases}$$

問 4.14, (1)

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2}{3}, \log_2 3, \log_4 7 \right\} &= \left\{ \frac{2}{3} \log_2 2, \log_2 3, \underbrace{\log_4 2 \cdot \log_2 7}_{(1/2)} \right\} \\ &= \left\{ \log_2 2^{2/3}, \log_2 3, \log_2 7^{1/2} \right\}, \quad 2^{2/3} < 2, \text{ かつ,} \\ &\quad (17)^2 = 7 < 3^2 = 9 \text{ より,} \\ &\quad 2^{2/3} < \log_2 \sqrt{7} < \log_2 3, \text{ よって,} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} < \log_4 7 < \log_2 3 //$$

(2)

$$\begin{aligned} \left\{ \log_3 2, \log_9 5, \frac{1}{2} \right\} &= \left\{ \log_3 9 \cdot \log_9 2, \log_9 5, \log_9 9^{1/2} \right\} \\ &= \left\{ \log_9 2^2, \log_9 5, \log_9 3 \right\} = \log_9 \{ 4, 5, 3 \}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_9 5 //$$

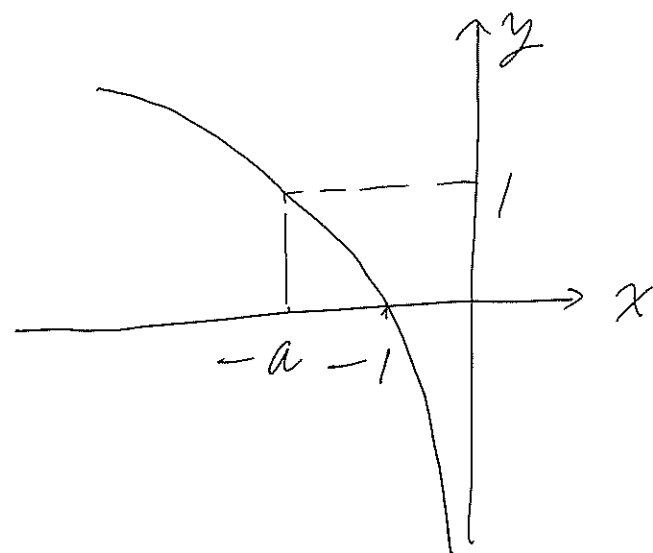
$$2^x = n^{ax} \leftrightarrow a = \log_n 2$$

(次ページへ)

対数関数のグラフについての補足

$(-x)$ を変数にとっている場合:

$$y = \log_a(-x) \quad \leftarrow \begin{array}{l} -x > 0 \text{ つまり} \\ x < 0, \end{array}$$



対数を含む方程式・不等式 (p. 125)

その①: $\log_a \frac{(bx-c)}{d}$ のタイプ? (☆は =, <, >, etc.)
※ 真数条件に注意!

→ 右辺を $\log_a y$ の形に直して、 $(bx-c)$ ☆ y を解く。

例 = 例 4.15 (p. 125)

(4) $\log_3 3x = 4$
 $= \log_3 3^4$
↓
 $3x = 3^4$
 $x = 3^3 = 27$ //

(5) $\log_3 (x+2) < 2$ まず $x > -2$
 $< \log_3 3^2$
↓
 $(x+2) < 3^2$, 22で底が $a=3 > 1$ である2を使った。
 $x+2 < 9$,
 ~~$x < 7$~~ $\Rightarrow -2 < x < 7$ //

(6) $\log_{1/2} (x-2) < 2$ まず $x > 2$
 $< \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\log_a a = \frac{1}{2} < 1$ なので、
↓
 $(x-2) > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 $x > \frac{9}{4}$, $\Rightarrow$ 満たすので、 $x > \frac{9}{4}$ //

その②: $\log_a f(x) = 0$ や $\log_a f(x) \geq 0$ のタイプ?
→ この形に直して、 $f(x) = \frac{1}{a}$ や $f(x) \geq \frac{1}{a}$ を解く。
※ 真数条件に注意!

例 = 例 4.16 (p. 125)

(3) $2 \log_2 (x-2) < \log_2 (2x-1)$, (☆)
↳ とりあえず $x > 2$,

(10) $\log_2 (x-2)^2 - \log_2 (2x-1) < 0$
↳ とりあえず $x > \frac{1}{2}$
 $\log_2 \frac{(x-2)^2}{2x-1} < 0$, よって、 $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2x-1}$ とすると、

$\log_2 f(x) < \log_2 1$
 $f(x) < 1$ を解けば良い。

$\frac{(x-2)^2}{2x-1} < 1$, $x > \frac{1}{2}$ より分母 > 0 なので、
 $(x-2)^2 < 2x-1$
 $x^2 - 4x + 4 < 2x - 1$
 $x^2 - 6x + 5 < 0$
 $(x-1)(x-5) < 0$
xより、
 $1 < x < 5$,
真数条件とあわせて、
 $2 < x < 5$ //

常用対数 (p. 126)

10を底にとった $\log_{10} x$ を特にこう呼ぶ。
一般にすべての正の数は
 $x = a \times 10^n$, $n = \dots, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

と表せるので、
 $\log_{10} x = \log_{10} a + n$

有効数字3桁までの範囲なら、 $a = 1.00 \sim 9.99$ 。
この範囲の $\log_{10} a$ の表 (常用対数表) が

あれば、任意の正数 ~~も有効~~ の常用対数も計算できる。

常用対数の目的 = 概算、近似計算で特に便利。

例: ある数 x について、次式が分かっているとする。

$$-4 < \log_{10} x < -3$$

$$10^{-4} < x < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow 0.0001 < x < 0.001, \text{ すなわち、}$$

$$x = 0.00 \times 10^{-4} \text{ が分かる。}$$

例② = 例題 4.8

5^{20} の桁数は? ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\log_{10} 5^{20} = 20 \log_{10} 5 = 20 \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= 20 \{ \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \} = 20 \{ 1.0000 - 0.3010 \}$$

$$= 20 \times 0.6990 = 13.98, \text{ よって、}$$

$$5^{20} = 10^{13.98} < 10^{14} \rightarrow 14 \text{ 桁の数である。}$$

よって 15 桁。

例 4.17

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ を小数表記したとき、小数第何位に ~~はじめて~~ はじめて $\neq 0$ でない数字が出てくるか?

ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。 (A)

$$\begin{aligned} (17) \quad x &= 0.000 \times 10^{-N} \\ &= 0.00 \dots 0 \boxed{0000} \dots \text{小数第 } N \text{ 位が} \\ &\quad \text{ゼロが } N \text{ 個} \end{aligned}$$

これを踏まえて、

$$\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = \log_{10} 3^{-20} = -20 \log_{10} 3 = -20 \times 0.4771$$

$$= -9.542, \text{ したがって、}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 10^{-9.542} < 10^{-9}$$

$$= 10^{+0.458} \cdot 10^{-10} = 0.00 \times 10^{-10},$$

1.00 ~ 9.99 の範囲内

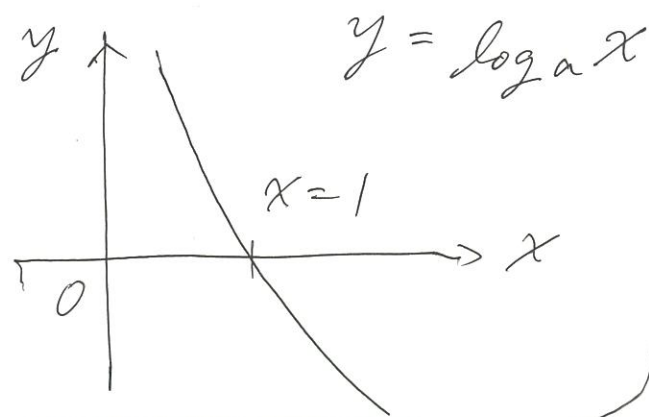
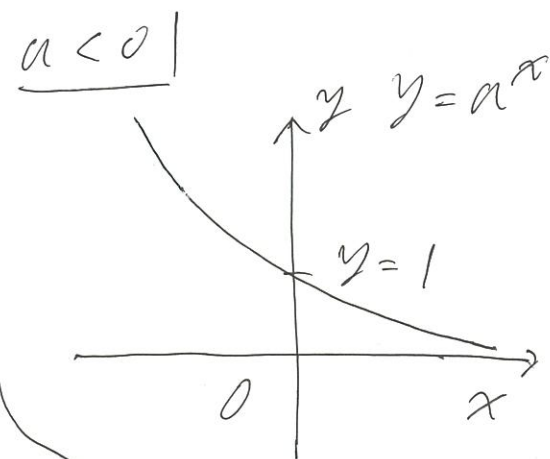
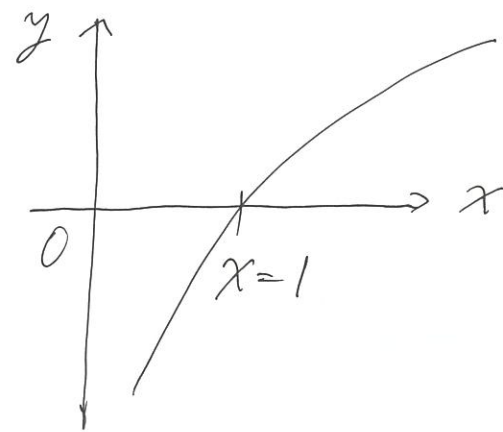
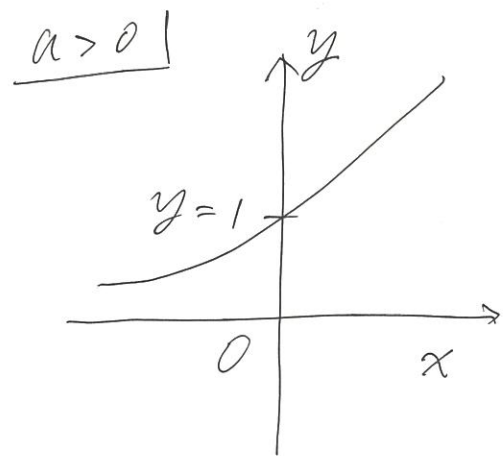
よって $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ を小数表記すると、第10位に出てくる。

<1/14, 水, 2026> 1-5 基礎数学 I [30] 用ノート

方針……分数関数 & べき関数は来週 = 試験直前に
回す。今週は対数関数の復習。

* 指数関数の復習は先週の <1/7, 2026> にやった。

$$y = a^x \xrightarrow{\text{(逆関数)}} y = \log_a x$$



対数の定義 (p. 119)

$$a^r = M \iff r = \log_a M$$

対数の性質 (p. 120)

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ のとき、

$$(1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a a^r = r, \quad \cancel{\log} a^{\log_a M} = M$$

$$(3) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(4) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \quad \text{特に } \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

$$(5) \log_a M^p = p \log_a M, \quad \text{特に } \log_a \sqrt[p]{M} = \log_a (M)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log_a M$$

底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{特に } \log_a a = \frac{1}{\log_a a}$$

$$\text{あるいは } \log_c a \log_a b = \log_c b$$

対数関数とそのグラフ

常用対数 (p. 126)

10 を底とした対数。 $x = a \times 10^n$ ならば、

$$\log_{10} x = \log_{10} a + n, \quad \text{よって } a = \frac{x}{10^n} \sim 9.999$$

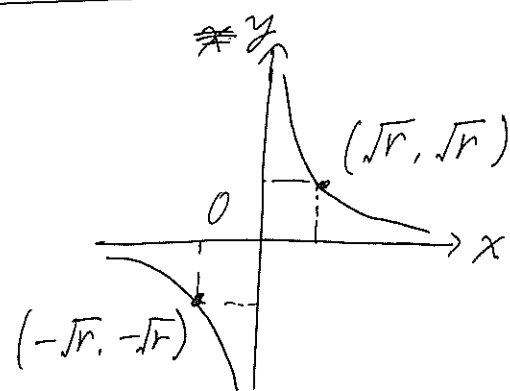
よって $\log_{10} a$ の表があれば、色々な実数の
常用対数もわかる。

残りはプリントの解説で実践を!

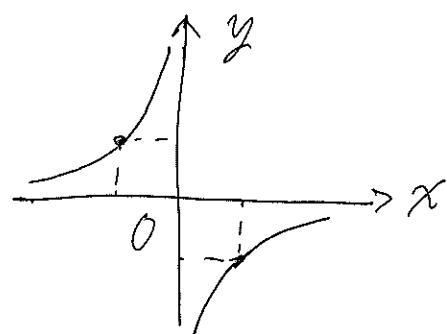
分数関数 & 奇・偶関数の復習 & 小テスト

分数関数

$$y = \frac{r}{x} \quad (r > 0):$$

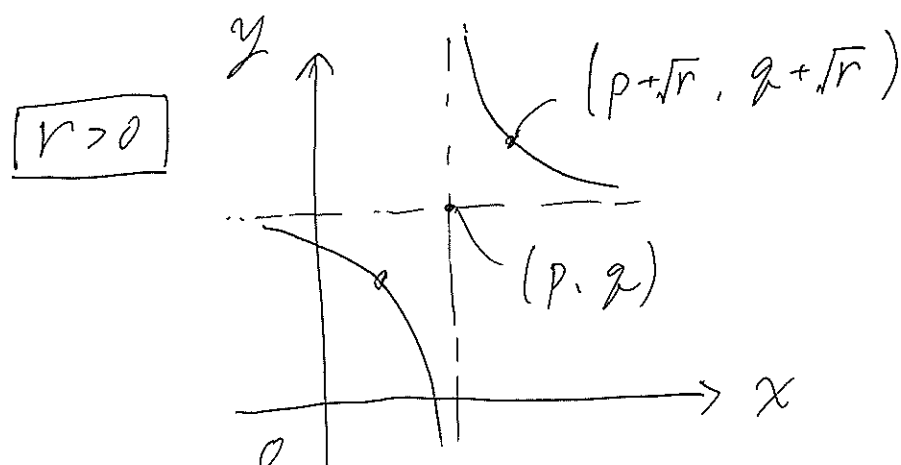


$$y = -\frac{r}{x} \quad (r > 0):$$



$$y = \frac{r}{x} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ 方向 } r + p, \\ y \text{ 方向 } r + q \end{array} \right\} \text{ だけ平行移動 } \rightarrow \parallel$$

$$\mapsto y = \frac{r}{x-p} + q$$



$$y = \frac{cx+d}{ax+b}, \quad \text{分子 & 分母を } a \text{ で割る!}$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{d}{a}\right)}{x + \left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{Cx+D}{x+B}, \quad \text{次に分子を変形!}$$

$$= \frac{C(x+B) - CB + D}{x+B} = \frac{D-CB}{x+B} + C$$

$$= \frac{R}{x+B} + C, \quad \begin{cases} B = \frac{b}{a}, \\ C = \frac{c}{a}, \\ D = \frac{d}{a} \end{cases}$$

奇関数と偶関数

$f(x)$ に対し $x \rightarrow -x$ (符号反転) を行ったとき,

① $f(-x) = f(x)$ なら 偶関数 (even),

② $f(-x) = -f(x)$ なら 奇関数 (odd),

③ その他なら, 何でもない (mixed).

2/2, 2026

✓ 答案返し

✓ 再試について

✓ 授業アレケート

✓ これまでのレポート返却

✓ シラバスチェック

✓ 春休み宿題