

締め切り=[2025/10/07]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

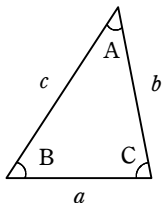
計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

以下の問題では、三角形の角は大文字の
アルファベットで表す。対応する辺は
小文字のアルファベットで表す。それらの
位置関係は右図の通りとする。問題によって
角や辺の値は変わるので注意。また外接円の
半径は R とする。



(解説)

(青字解説文)

問18-01 (復習) $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$ のとき A
- (2) $a=5\sqrt{3}$, 外接円の半径 $R=5$ のとき A
- (3) $a=4$, $b=6$, $C=60^\circ$ のとき c
- (4) $a=1+\sqrt{3}$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$ のとき C

(解説)

- (1) 正弦定理により $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$
よって $\sin A = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
 $B=45^\circ$ より $0^\circ < A < 135^\circ$ であるから $A=30^\circ$
- (2) 正弦定理により $\frac{5\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \cdot 5$
よって $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
ゆえに $A=60^\circ, 120^\circ$
- (3) 余弦定理により $c^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28$
 $c > 0$ であるから $c = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
- (4) 余弦定理により $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot 2} = \frac{1}{2}$
よって $C=60^\circ$

問18-02 次の角を弧度法で表せ。

- (1) 30° (2) 45° (3) -210°
- (4) 72° (5) 420°

(解説)

- (1) $\frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}$ (ラジアン)
- (2) $\frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4}$ (ラジアン)
- (3) $\frac{\pi}{180} \times (-210) = -\frac{7}{6}\pi$ (ラジアン)
- (4) $\frac{\pi}{180} \times 72 = \frac{2}{5}\pi$ (ラジアン)
- (5) $\frac{\pi}{180} \times 420 = \frac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

問18-03 次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。

- (1) 半径が 5, 中心角が $\frac{\pi}{4}$

- (2) 半径が 12, 中心角が $\frac{11}{6}\pi$

(解説)

弧の長さを l , 面積を S とする。

- (1) $l = 5 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$, $S = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{25}{8}\pi$
- (2) $l = 12 \times \frac{11}{6}\pi = 22\pi$, $S = \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{11}{6}\pi = 132\pi$

問18-04 θ が次の値のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。ヒント: 公式を使って、分かりやすい角の三角関数に変換して考えよ。

- (1) $\frac{11}{3}\pi$ (2) $-\frac{31}{6}\pi$ (3) $\frac{19}{4}\pi$

(解説)

- (1) $\sin \frac{11}{3}\pi = \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos \frac{11}{3}\pi = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 $\tan \frac{11}{3}\pi = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$
- (2) $\sin\left(-\frac{31}{6}\pi\right) = -\sin \frac{31}{6}\pi = -\sin\left(\frac{7}{6}\pi + 4\pi\right) = -\sin \frac{7}{6}\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\cos\left(-\frac{31}{6}\pi\right) = \cos \frac{31}{6}\pi = \cos\left(\frac{7}{6}\pi + 4\pi\right) = \cos \frac{7}{6}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\tan\left(-\frac{31}{6}\pi\right) = -\tan \frac{31}{6}\pi = -\tan\left(\frac{7}{6}\pi + 4\pi\right) = -\tan \frac{7}{6}\pi = -\tan\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)$
 $= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (3) $\sin \frac{19}{4}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 4\pi\right) = \sin \frac{3}{4}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\cos \frac{19}{4}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + 4\pi\right) = \cos \frac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\tan \frac{19}{4}\pi = \tan\left(\frac{3}{4}\pi + 4\pi\right) = \tan \frac{3}{4}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

問18-05 以下の問いに答えよ。符号のとり方によって、答えは2通りの可能性もある。

- (1) $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ のとき, $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\tan \theta = -2\sqrt{2}$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

(解説)

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \frac{3}{5}$
 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$
 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ のとき $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$
- (2) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + (-2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9}$
よって $\cos \theta = \pm \frac{1}{3}$
 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = (-2\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = (-2\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

問18-06 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \cos(\theta + \pi) + \cos \left(\theta + \frac{3}{2}\pi \right)$
 (2) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \sin(3\pi - \theta) - \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \theta \right) \cos(\pi - \theta)$

解説

(1) $\cos \left(\theta + \frac{3}{2}\pi \right) = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} + \pi \right) = -\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta$

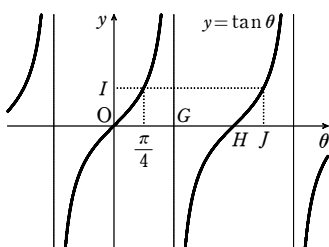
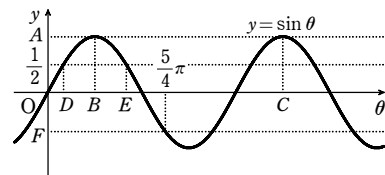
よって 与式 $= \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta = 0$

(2) $\sin(3\pi - \theta) = \sin(2\pi + \pi - \theta) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

また $\sin \left(\frac{3}{2}\pi + \theta \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\cos \theta$

よって 与式 $= (-\sin \theta) \sin \theta - (-\cos \theta)(-\cos \theta) = -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -1$

問18-07 下の図は、関数 $y = \sin \theta$, $y = \tan \theta$ のグラフである。図中の目盛り $A \sim J$ の値を答えよ。



解説

$A = 1, B = \frac{\pi}{2}$

関数 $y = \sin \theta$ の周期は 2π であるから $C = B + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$

$0 \leq \theta < \pi$ の範囲で、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を解くと $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

よって $D = \frac{\pi}{6}, E = \frac{5}{6}\pi$

また $F = \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

さらに $G = \frac{\pi}{2}, H = \pi, I = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

関数 $y = \tan \theta$ の周期は π であるから $J = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$

問18-08 次の関数の周期を求めよ。また、そのグラフを描け。多少カクカクした線で描いても構わない。(3)については y 軸方向の平行移動も考えよ。

(1) $y = \cos \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right)$ (2) $y = \tan \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$

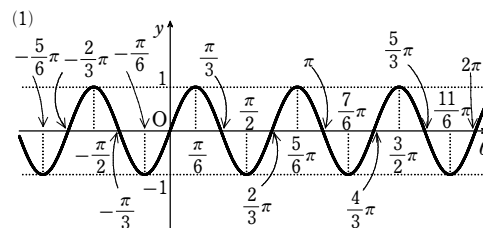
(3) $y = 2\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 1$

解説

(1) $\cos \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \cos 3 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$

したがって、 $y = \cos \left(3\theta - \frac{\pi}{2} \right)$ のグラフは、 $y = \cos 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

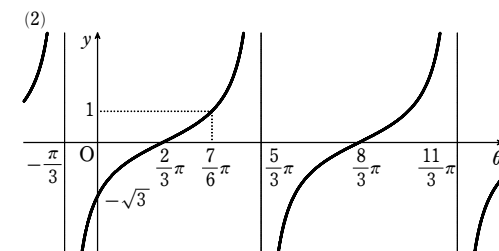
周期は $2\pi \div 3 = \frac{2}{3}\pi$ グラフは[図]



(2) $\tan \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right)$

したがって、 $y = \tan \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$ のグラフは、 $y = \tan \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したものである。

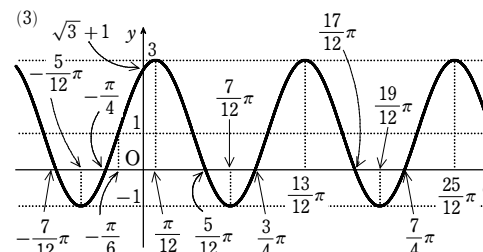
周期は $\pi \div \frac{1}{2} = 2\pi$ グラフは[図]



(3) $2\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 2\sin 2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + 1$

したがって、 $y = 2\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 1$ のグラフは、 $y = 2\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$, y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

周期は $2\pi \div 2 = \pi$ グラフは[図]



締め切り=[2025/10/14]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問19-01 (復習) 以下の問に答えよ。

(1) $\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{5}{9}\pi + \cos \frac{7}{9}\pi$ の値を求めよ。

(2) $\sin \frac{13}{14}\pi + \cos \frac{11}{14}\pi + \sin \frac{5}{7}\pi - \sin \frac{\pi}{14}$ の値を求めよ。

(解説文)

(1) $\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{5}{9}\pi + \cos \frac{7}{9}\pi$

$$= \cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos\left(\pi - \frac{4}{9}\pi\right) + \cos\left(\pi - \frac{2}{9}\pi\right)$$

$$= \cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{2}{9}\pi = 0$$

(2) $\sin \frac{13}{14}\pi + \cos \frac{11}{14}\pi + \sin \frac{5}{7}\pi - \sin \frac{\pi}{14}$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{2}{7}\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\pi - \frac{2}{7}\pi\right) - \sin \frac{\pi}{14}$$

$$= \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{2}{7}\pi - \sin \frac{\pi}{14} = 0$$

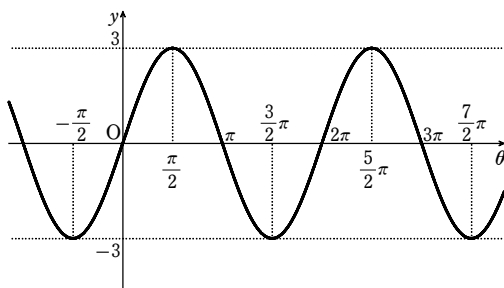
問19-02 (復習) 次の関数のグラフをかけ。多少カクカクした線で描いても構わない。また、その周期を求めよ。

(1) $y = 3\sin \theta$ (2) $y = \frac{1}{3}\cos \theta$ (3) $y = \frac{1}{4}\tan \theta$

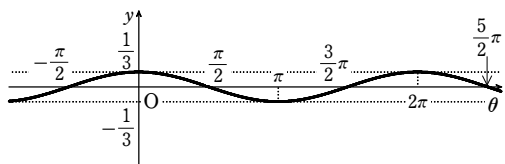
(4) $y = \sin 3\theta$ (5) $y = \cos 4\theta$ (6) $y = \tan \frac{\theta}{3}$

(解説文)

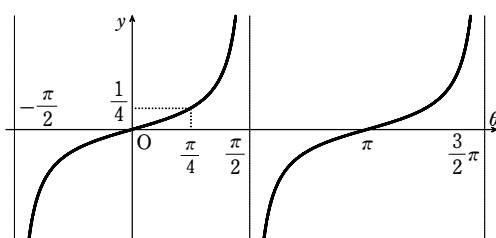
(1) このグラフは、 $y = \sin \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ3倍に拡大したものである。グラフは[図]、周期は 2π である。



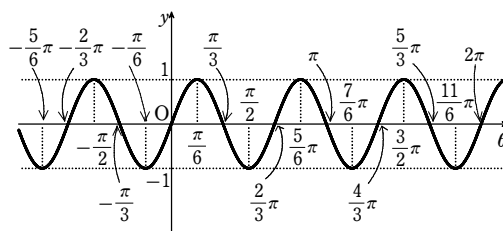
(2) このグラフは、 $y = \cos \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\frac{1}{3}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]、周期は 2π である。



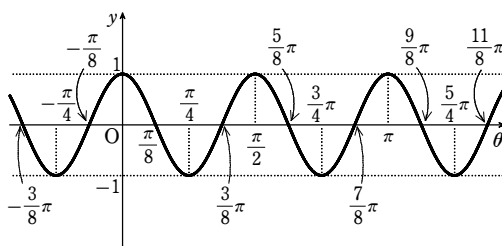
(3) このグラフは、 $y = \tan \theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\frac{1}{4}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]、周期は π である。



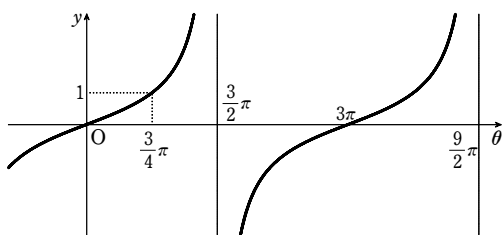
(4) このグラフは、 $y = \sin \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{3}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]、周期は $2\pi \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi$ である。



(5) このグラフは、 $y = \cos \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{4}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]、周期は $2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$ である。



(6) このグラフは、 $y = \tan \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ3倍に拡大したものである。グラフは[図]、周期は $\pi \times 3 = 3\pi$ である。

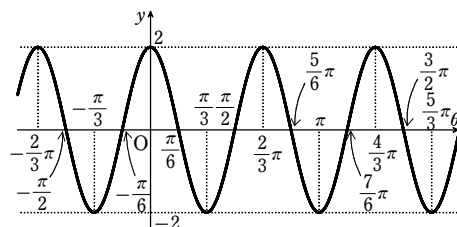


問19-03 (復習) 次の関数のグラフをかけ。多少カクカクした線で描いても構わない。また、その周期を求めよ。

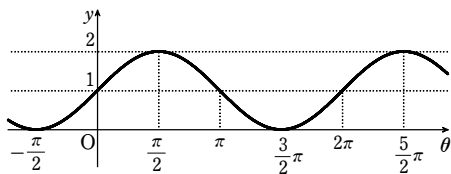
(1) $y = 2\cos 3\theta$ (2) $y = \sin \theta + 1$ (3) $y = -\cos \theta$

(解説文)

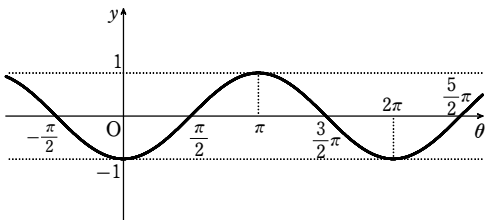
(1) このグラフは、 $y = \cos \theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{3}$ 倍に縮小し、 θ 軸をもとにして y 軸方向へ2倍に拡大したもので、次の図のようになる。
周期は $2\pi \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi$



- (2) このグラフは、 $y=\sin\theta$ のグラフを、 y 軸方向に1だけ平行移動したもので、次の図ようになる。周期は 2π



- (3) このグラフは、 $y=\cos\theta$ のグラフと θ 軸に関して対称で、次の図ようになる。周期は 2π



問19-04 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を θ について解け。

- (1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $2\cos\theta + 1 = 0$

自由課題： 時間に余裕があれば、 θ の範囲に制限がないときの解も考えてみよ。

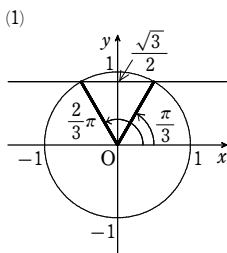
解説

n は整数とする。

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、図から $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

θ の範囲に制限がないとき

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$



- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、図から $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

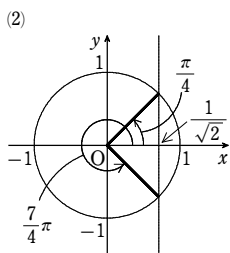
θ の範囲に制限がないとき

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

参考 θ の範囲に制限がないときは

$$\theta = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

と表すこともできる。



- (3) $2\cos\theta + 1 = 0$ から $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき、図から } \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

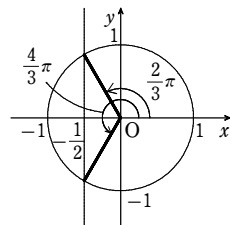
θ の範囲に制限がないとき

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$$

参考 θ の範囲に制限がないときは

$$\theta = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

と表すこともできる。



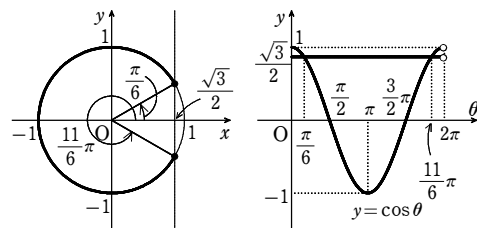
問19-05 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

- (1) $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan\theta < -\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{2}\sin\theta \leq -1$

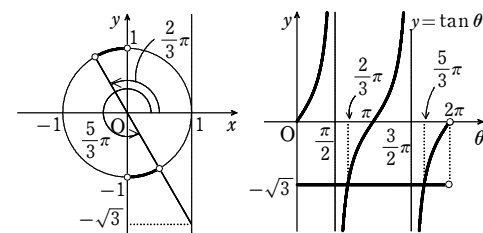
解説

単位円またはグラフを利用する。

- (1) 図から、解は $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$

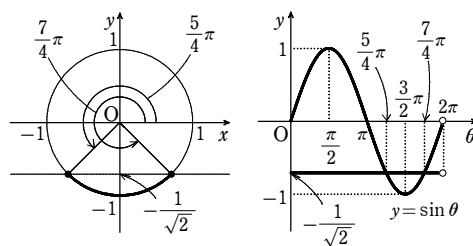


- (2) 図から、解は $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3}$



- (3) $\sqrt{2}\sin\theta \leq -1$ から $\sin\theta \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

図から、解は $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$



問19-06 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

- (1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$ (2) $2\cos^2\theta \leq 3\sin\theta$

解説

- (1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$ から $2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 2 = 0$

整理すると $2\cos^2\theta - \cos\theta = 0$ よって $\cos\theta(2\cos\theta - 1) = 0$

ゆえに $\cos\theta = 0, \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、 $\cos\theta = 0$ より $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

したがって、解は $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

- (2) $2\cos^2\theta \leq 3\sin\theta$ から $2(1 - \sin^2\theta) \leq 3\sin\theta$

整理すると $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 \geq 0$

よって $(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) \geq 0$

$\sin\theta + 2 > 0$ であるから

$$2\sin\theta - 1 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin\theta \geq \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、解は $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

締め切り=[2025/10/21]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説)

(解説文)

問20-01 加法定理を用いて次の値を求めよ。

$$(1) \sin 195^\circ \quad (2) \cos 195^\circ \quad (3) \tan 105^\circ$$

$$(4) \sin \frac{11}{12}\pi \quad (5) \cos \frac{11}{12}\pi \quad (6) \tan \frac{13}{12}\pi$$

(解説)

$$(1) \sin 195^\circ = \sin(150^\circ + 45^\circ) = \sin 150^\circ \cos 45^\circ + \cos 150^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$(2) \cos 195^\circ = \cos(150^\circ + 45^\circ) = \cos 150^\circ \cos 45^\circ - \sin 150^\circ \sin 45^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \cdot 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -2-\sqrt{3}$$

$$(4) \sin \frac{11}{12}\pi = \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{2}{3}\pi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2}{3}\pi \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(5) \cos \frac{11}{12}\pi = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{2}{3}\pi \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{2}{3}\pi \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$(6) \tan \frac{13}{12}\pi = \tan\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{5}{6}\pi + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{5}{6}\pi \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3}$$

(参考) (1), (2) から

$$\tan \frac{13}{12}\pi = \tan 195^\circ = \frac{\sin 195^\circ}{\cos 195^\circ}$$

として計算してもよい。

問20-02 2倍角の公式を用いて次の値を求めよ。

$$(1) \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ のときの } \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$$

$$(2) \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi, \cos \alpha = -\frac{3}{4} \text{ のときの } \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$$

(解説)

$$(1) \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ であるから } \cos \alpha < 0$$

$$\text{よって } \cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{ゆえに } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{また } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$(2) \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

$$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \text{ であるから } \sin \alpha < 0$$

$$\text{よって } \sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{ゆえに } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{また } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 3\sqrt{7}$$

問20-03 半角の公式を用いて次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{12} \quad (2) \cos \frac{\pi}{12} \quad (3) \tan \frac{5}{12}\pi$$

(解説)

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ であるから } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} > 0 \text{ であるから } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \tan^2 \frac{5}{12}\pi = \frac{1-\cos \frac{5}{6}\pi}{1+\cos \frac{5}{6}\pi} = \frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^2$$

$$\tan \frac{5}{12}\pi > 0 \text{ であるから } \tan \frac{5}{12}\pi = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$$

問20-04 加法定理やその他の公式を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta$$

$$(2) \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

(解説)

$$(1) \text{ 左辺 } = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \times (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin \beta \cos \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta = \text{右辺}$$

$$(2) \text{ 第1辺 } = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \times (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1-\cos^2 \alpha)(1-\cos^2 \beta)$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1$$

$$\text{第2辺} = \cos^2 \alpha - (1-\cos^2 \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1$$

$$\text{第3辺} = \cos^2 \beta - (1-\cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1$$

よって 第1辺=第2辺=第3辺

締め切り=[2025/10/28]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。
計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説)

(解説文)

問21-01 (復習: 加法定理) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。

次の値を求めよ。

$$(1) \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{5} \text{ のとき } \sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta)$$

$$(2) \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{5}{13} \text{ のとき } \sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta)$$

(解説)

$$(1) \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ であるから } \cos \alpha < 0$$

$$\text{よって } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \sin \beta > 0$$

$$\text{よって } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{42})}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \\ &= -\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{15} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ であるから } \sin \alpha > 0$$

$$\text{よって } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \cos \beta > 0$$

$$\text{よって } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\text{ゆえに } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$$

問21-02 (復習: 加法定理) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、

$(\tan \alpha + 1)(\tan \beta + 1)$ の値を求めよ。ヒント: $\tan(\alpha + \beta) = 1$ である。

(解説)

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \text{ から } \tan(\alpha + \beta) = 1$$

$$\text{よって } \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\text{分母を払って整理すると } \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha + \tan \beta = 1$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } (\tan \alpha + 1)(\tan \beta + 1) &= \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha + \tan \beta + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

問21-03 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

$$(1) \sqrt{2} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$$

$$(2) -\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$(3) \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$(4) \sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$$

(解説)

$$(1) \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left\{ \sin \theta \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos \theta \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} -\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta &= 2 \left(-\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{2}{3} \pi + \cos \theta \sin \frac{2}{3} \pi \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \end{aligned}$$

$$(3) \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta &= \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$(4) \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left\{ \sin \theta \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos \theta \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

問21-04 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin x + \sqrt{3} \cos x = -1$$

$$(2) 2(\sin x - \cos x) = \sqrt{6}$$

(解説)

$$(1) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ であるから、方程式は } 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

$$\text{よって } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \text{ であるから、① より } x + \frac{\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$(2) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ であるから、方程式は } 2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{6}$$

$$\text{よって } \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \text{ であるから、① より } x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

問21-05 次の値を求めよ。

$$(1) \sin 75^\circ \cos 15^\circ$$

$$(2) \cos 75^\circ \sin 15^\circ$$

$$(3) \sin 37.5^\circ \sin 7.5^\circ$$

$$(4) \sin 75^\circ - \sin 15^\circ$$

$$(5) \cos 15^\circ + \cos 105^\circ$$

$$(6) \cos 105^\circ - \cos 15^\circ$$

(解説)

$$(1) \sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \{ \sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ) \} = \frac{1}{2} (\sin 90^\circ + \sin 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \quad \cos 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} (\sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ)) = \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$(3) \quad \sin 37.5^\circ \sin 7.5^\circ = -\frac{1}{2} (\cos(37.5^\circ + 7.5^\circ) - \cos(37.5^\circ - 7.5^\circ)) = -\frac{1}{2} (\cos 45^\circ - \cos 30^\circ)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

$$(4) \quad \sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(5) \quad \cos 15^\circ + \cos 105^\circ = 2 \cos \frac{15^\circ + 105^\circ}{2} \cos \frac{15^\circ - 105^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cos(-45^\circ)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(6) \quad \cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

問21-06 次の式を、2つの三角関数の積の形に変形せよ。

$$(1) \quad \sin 2\theta + \sin 4\theta \quad (2) \quad \cos 4\theta - \cos 2\theta \quad (3) \quad \cos 3\theta + \cos 2\theta$$

解説

$$(1) \quad \sin 2\theta + \sin 4\theta = 2 \sin \frac{2\theta + 4\theta}{2} \cos \frac{2\theta - 4\theta}{2} = 2 \sin 3\theta \cos(-\theta)$$

$$= 2 \sin 3\theta \cos \theta$$

$$(2) \quad \cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin \frac{4\theta + 2\theta}{2} \sin \frac{4\theta - 2\theta}{2}$$

$$= -2 \sin 3\theta \sin \theta$$

$$(3) \quad \cos 3\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{3\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{3\theta - 2\theta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{5}{2}\theta \cos \frac{\theta}{2}$$

問21-07 xy 座標上において、次の2点間の距離を求めよ。

$$(1) \quad (2, 3), (7, 5)$$

$$(2) \quad (1, -2), (-3, 4)$$

$$(3) \quad (0, 0), (-12, -5)$$

$$(4) \quad (-2754, -2753), (-2753, -2754)$$

解説

$$(1) \quad \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$(2) \quad \sqrt{(-3-1)^2 + \{4-(-2)\}^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$(3) \quad \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$(4) \quad \sqrt{(-2754+2753)^2 + (-2753+2754)^2} = \sqrt{2}$$

- 締め切り=無し、提出の必要も無し。
- 中間試験前の自主学習用。解答は来週の火曜日まで配布する。
- 全ての問題をやる必要は無い。そもそも量が多い。
- 教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

(解説文)

(解説文)

問22-01 座標平面上で、 x 軸の正の部分の始線にとる。次の角の動径は、第何象限にあるか。

- (1) 130° (2) -500° (3) 800° (4) -740°

(解説文)

(1) 130° の動径は第2象限にある。

(2) $-500^\circ = -140^\circ - 360^\circ$

よって、 -500° の動径は第3象限にある。

(3) $800^\circ = 80^\circ + 360^\circ \times 2$

よって、 800° の動径は第1象限にある。

(4) $-740^\circ = -20^\circ - 360^\circ \times 2$

よって、 -740° の動径は第4象限にある。

問22-02 座標平面上で、 x 軸の正の部分の始線にとる。次の角の動径は、第何象限にあるか。

- (1) $\frac{8}{3}\pi$ (2) $-\frac{7}{4}\pi$ (3) $\frac{31}{6}\pi$ (4) $-\frac{25}{6}\pi$ (5) 2

(解説文)

(1) $\frac{8}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi$

よって、 $\frac{8}{3}\pi$ の動径は第2象限にある。

(2) $-\frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi$

よって、 $-\frac{7}{4}\pi$ の動径は第1象限にある。

(3) $\frac{31}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi + 4\pi$

よって、 $\frac{31}{6}\pi$ の動径は第3象限にある。

(4) $-\frac{25}{6}\pi = -\frac{\pi}{6} - 4\pi$

よって、 $-\frac{25}{6}\pi$ の動径は第4象限にある。

(5) $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ であるから、2の動径は第2象限にある。

問22-03 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうちの1つが次の値であるとき、残りの2つの三角関数の値を求めよ。[]内は θ の動径が含まれる象限を表す。

(1) $\sin \theta = \frac{12}{13}$ [第1象限]

(2) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ [第3象限]

(3) $\tan \theta = -2\sqrt{6}$ [第4象限]

(解説文)

(1) θ の動径は第1象限にあるから $\cos \theta > 0$

よって、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

(2) θ の動径は第3象限にあるから $\sin \theta < 0$

よって、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(3) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-2\sqrt{6})^2 = 25$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{25}$$

θ の動径は第4象限にあるから $\cos \theta > 0$

$$\text{ゆえに } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

問22-04 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(解説文)

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗すると $\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$

$$\text{よって } 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \text{したがって } \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

(別解) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

問22-05 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

(2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$ (難しい)

(解説文)

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \text{の両辺を平方して } \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{よって } 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \text{ゆえに } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{に代入して } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{9}{4}$$

$$(2) \tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta} = \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^3 - 3\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)$$

$$= \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^3 - 3\left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)$$

$$= \left(-\frac{9}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{297}{64}$$

問22-06 次の値を、鋭角 $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ の三角関数に直して求めよ。

(1) $\sin \frac{7}{3}\pi$

(2) $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(解説文)

$$(1) \sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos \frac{9}{4}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

問22-07 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を θ について解け。

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

(解説)

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

よって、方程式 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$

ゆえに $\theta = 0, \frac{5}{3}\pi$

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

よって、方程式 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ から $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$

ゆえに $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{19}{12}\pi$

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

よって、方程式 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ から $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$

ゆえに $\theta = \frac{11}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$

(4) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

よって、方程式 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ から $\theta - \frac{\pi}{6} = \pi$

ゆえに $\theta = \frac{7}{6}\pi$

問22-08 次の関数のグラフをかけ。また、それぞれ [] 内のグラフからどのように変更されたものかを答えよ。

(1) $y = 2\sin\theta - 1$ [$y = \sin\theta$] (2) $y = -3\cos 2\theta$ [$y = \cos\theta$]

(3) $y = \tan\frac{\theta}{3} + 1$ [$y = \tan\theta$]

(解説)

(1) グラフは [図]

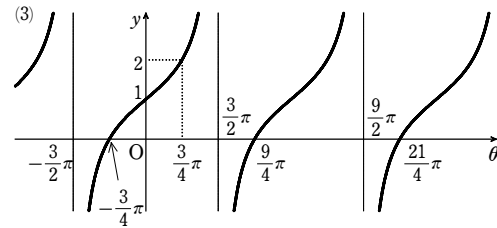
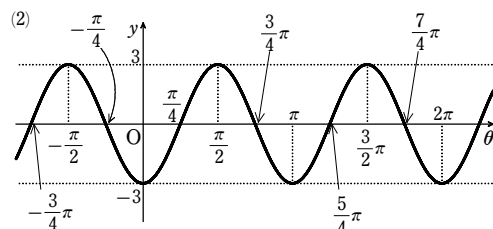
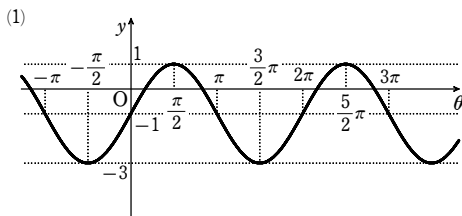
このグラフは、 $y = \sin\theta$ のグラフを、 θ 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍に拡大し、 y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

(2) グラフは [図]

このグラフは、 $y = \cos\theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小し、 θ 軸をもとにして y 軸方向に 3 倍に拡大し、 θ 軸に関して対称移動したものである。

(3) グラフは [図]

このグラフは、 $y = \tan\theta$ のグラフを、 y 軸をもとにして θ 軸方向に 3 倍に拡大し、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。



問22-09 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$

(3) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$

(解説)

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

よって、不等式 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

ゆえに $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi \leq \theta < 2\pi$

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

よって、不等式 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1$ から $\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi$

ゆえに $\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi, \frac{17}{12}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

よって、不等式 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\frac{5}{6}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{7}{6}\pi$

ゆえに $\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

(4) $0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

よって、不等式 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$ から

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi \leq \theta < 2\pi$

問22-10 次の式を簡単にせよ。

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(-\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos(\pi + \theta)$

(2) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta + \pi) + \sin(\theta - \pi)$

(解説)

(1) (与式) $= \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta = 0$

(2) (与式) $= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin(\theta + \pi) - \sin(\pi - \theta)$
 $= \cos\theta - \cos\theta - \sin\theta - \sin\theta = -2\sin\theta$

問22-11 α の動径が第 1 象限、 β の動径が第 3 象限にあり、 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

$\cos\beta = -\frac{12}{13}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha - \beta)$

(2) $\cos(\alpha + \beta)$

(解説)

α の動径が第 1 象限にあるから $\cos\alpha > 0$

β の動径が第 3 象限にあるから $\sin\beta < 0$

よって $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

$$(1) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$$

$$(2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}$$

問22-12 α が鋭角, β が鈍角であるとき, 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ のとき } \sin(\alpha + \beta), \tan(\alpha + \beta)$$

$$(2) \tan \alpha = 1, \tan \beta = -2 \text{ のとき } \tan(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta)$$

(解説)

$$(1) \alpha \text{ は鋭角であるから } \cos \alpha > 0$$

$$\text{よって } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta \text{ は鈍角であるから } \sin \beta > 0$$

$$\text{よって } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ゆえに } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}}{-\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{-3 - 4\sqrt{3}} \\ &= -\frac{4 - 3\sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{39} \end{aligned}$$

$$(2) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + (-2)}{1 - 1 \cdot (-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 - (-2)}{1 + 1 \cdot (-2)} = -3$$

$$\text{よって } \cos^2(\alpha - \beta) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha - \beta)} = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ であるから } -\pi < \alpha - \beta < 0$$

$$\text{さらに, } \tan(\alpha - \beta) = -3 < 0 \text{ であるから } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0$$

$$\text{ゆえに } \cos(\alpha - \beta) > 0 \quad \text{したがって } \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

問22-13 $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。

$$(1) \cos 2x = \cos x$$

$$(2) \sin 2x = \cos x$$

$$(3) 2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$$

$$(4) \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x(1 + \cos x) = 0$$

(解説)

$$(1) \cos 2x = \cos x \text{ から } 2\cos^2 x - 1 = \cos x$$

$$\text{よって } 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\text{したがって } \cos x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ であるから}$$

$$\cos x = 1 \text{ のとき } x = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{したがって, 解は } x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$(2) \sin 2x = \cos x \text{ から } 2\sin x \cos x = \cos x$$

$$\text{よって } \cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\text{ゆえに } \cos x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ であるから}$$

$$\cos x = 0 \text{ のとき } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{したがって, 解は } x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$(3) 2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0 \text{ から } 2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x - 1 = 0$$

$$\text{よって } 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$

$$\text{ゆえに } (2\cos x - 1)(2\cos x + 3) = 0$$

$$2\cos x + 3 \neq 0 \text{ であるから } 2\cos x - 1 = 0 \quad \text{よって } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ であるから } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$$(4) \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x(1 + \cos x) = 0 \text{ から}$$

$$\sin x[1 + (2\cos^2 x - 1)] + 2\sin x \cos x(1 + \cos x) = 0$$

$$\text{整理して } \sin x \cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\text{ゆえに } \sin x = 0 \text{ または } \cos x = 0 \text{ または } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ であるから}$$

$$\sin x = 0 \text{ のとき } x = 0, \pi$$

$$\cos x = 0 \text{ のとき } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{したがって, 解は } x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

問22-14 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) \sin(\gamma - \alpha)$$

$$(2) \cos \alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \sin(\alpha - \beta)$$

(解説)

$$(1) \text{ 与式} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\gamma) + \frac{1}{2}(\sin 2\gamma - \sin 2\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 与式} &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha - \beta + \gamma)] + \frac{1}{2}[\sin(\beta + \gamma - \alpha) - \sin(\beta - \gamma + \alpha)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\gamma - \alpha + \beta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

問22-15 半角の公式を用いて, 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{12}$$

$$(2) \cos \frac{5}{8}\pi$$

$$(3) \tan \frac{5}{12}\pi$$

(解説)

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{12} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ であるから } \sin \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$(2) \cos^2 \frac{5}{8}\pi = \cos^2 \frac{5}{4}\pi = \frac{1 + \cos \frac{5}{4}\pi}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{5}{8}\pi < 0 \text{ であるから } \cos \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan^2 \frac{5}{12}\pi &= \tan^2 \frac{5}{6}\pi = \frac{1 - \cos \frac{5}{6}\pi}{1 + \cos \frac{5}{6}\pi} = \frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = (2 + \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

$$\tan \frac{5}{12}\pi > 0 \text{ であるから } \tan \frac{5}{12}\pi = 2 + \sqrt{3}$$

問22-16 (三角関数の合成) 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$

(2) $\sin \frac{5}{12} \pi - \cos \frac{5}{12} \pi$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sin \frac{5}{12} \pi - \cos \frac{5}{12} \pi &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{5}{12} \pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{5}{12} \pi \right) \\
 &= \sqrt{2} \left\{ \sin \frac{5}{12} \pi \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{5}{12} \pi \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} \\
 &= \sqrt{2} \sin \left(\frac{5}{12} \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

問22-17 次の式を、2つの三角関数の和または差の形に変形せよ。

(1) $\sin 2\theta \cos 3\theta$

(2) $\cos 4\theta \cos \theta$

(3) $\sin 3\theta \sin 5\theta$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin 2\theta \cos 3\theta &= \frac{1}{2} \{ \sin(2\theta + 3\theta) + \sin(2\theta - 3\theta) \} = \frac{1}{2} \{ \sin 5\theta + \sin(-\theta) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sin 5\theta - \sin \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \cos 4\theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \{ \cos(4\theta + \theta) + \cos(4\theta - \theta) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 5\theta + \cos 3\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sin 3\theta \sin 5\theta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(3\theta + 5\theta) - \cos(3\theta - 5\theta) \} = -\frac{1}{2} \{ \cos 8\theta - \cos(-2\theta) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta - \cos 8\theta)
 \end{aligned}$$

問22-18 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y = \sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

(2) $y = \sin x \sin \left(x + \frac{2}{3} \pi \right)$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= \sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ から } \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

すなわち $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6} \pi \quad \dots\dots ①$

よって $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$

したがって、 y は

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \text{ のとき最大値 } \sqrt{3}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \text{ のとき最小値 } -\sqrt{3} \text{ をとる。}$$

① から $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ のとき $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $x = \frac{\pi}{3}$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \text{ のとき } x + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \pi \text{ すなわち } x = \frac{4}{3} \pi$$

したがって $x = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\sqrt{3}$

$$x = \frac{4}{3} \pi \text{ のとき最小値 } -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= \sin x \sin \left(x + \frac{2}{3} \pi \right) = -\frac{1}{2} \left\{ \cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) - \cos \frac{2}{3} \pi \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ から } \frac{2}{3} \pi \leq 2x + \frac{2}{3} \pi < 2 \times 2\pi + \frac{2}{3} \pi$$

すなわち $\frac{2}{3} \pi \leq 2x + \frac{2}{3} \pi < \frac{14}{3} \pi \quad \dots\dots ①$

よって $-1 \leq \cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) \leq 1$

したがって、 y は

$$\cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) = -1 \text{ のとき最大値 } -\frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) = 1 \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \text{ をとる。}$$

① から、 $\cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) = -1$ のとき

$$2x + \frac{2}{3} \pi = \pi, 3\pi \quad \text{よって} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6} \pi$$

$$\cos \left(2x + \frac{2}{3} \pi \right) = 1 \text{ のとき}$$

$$2x + \frac{2}{3} \pi = 2\pi, 4\pi \quad \text{よって} \quad x = \frac{2}{3} \pi, \frac{5}{3} \pi$$

したがって $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6} \pi$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$

$$x = \frac{2}{3} \pi, \frac{5}{3} \pi \text{ のとき最小値 } -\frac{3}{4}$$

[2025/12/02] 基礎数学Ⅱ 後期25

1 年 2 組 番 氏名

締め切り=[2025/12/09]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問25-01 次の2点 A, B について、線分 AB を 1:3 に内分、外分する点の座標を求めよ。

(1) A(-1, 4), B(2, -2)

(2) A(-2, 5), B(8, 1)

(解説文)

(1) 1:3 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{1+3}, \frac{3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{1+3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2} \right)$$

1:3 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{1-3}, \frac{-3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{1-3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{5}{2}, 7 \right)$$

(2) 1:3 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 8}{1+3}, \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot 1}{1+3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{2}, 4 \right)$$

1:3 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-3 \cdot (-2) + 1 \cdot 8}{1-3}, \frac{-3 \cdot 5 + 1 \cdot 1}{1-3} \right) \quad \text{すなわち} \quad (-7, 7)$$

問25-02 次の3点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

(1) (-1, 0), (1, 2√3), (2, √3)

(2) (-1, -1), (1, 1), (-1, 3)

(解説文)

$$(1) \left(\frac{-1+1+2}{3}, \frac{0+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{2}{3}, \sqrt{3} \right)$$

$$(2) \left(\frac{-1+1+(-1)}{3}, \frac{-1+1+3}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{1}{3}, 1 \right)$$

問25-03 次のような直線の方程式を求めよ。

(1) 点(-2, 3)を通り、傾きが2

(2) 点(5, -4)を通り、傾きが $-\frac{3}{4}$

(3) A(3, -4), B(-1, 0) を通る。

(4) A(-2, 4), B(-2, -1) を通る。

(解説文)

$$(1) y-3=2\{x-(-2)\} \quad \text{すなわち} \quad y=2x+7$$

$$(2) y-(-4)=-\frac{3}{4}\{x-5\} \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

$$(3) y-(-4)=\frac{0-(-4)}{-1-3}\{x-3\} \quad \text{すなわち} \quad y=-x-1$$

$$(4) 2 \text{ 点の } x \text{ 座標がともに } -2 \text{ であるから、求める直線の方程式は } x=-2$$

問25-04 A(1, -4), B(3, 2)とする。次の直線の方程式を求めよ。

(1) 2点 A, B を通る直線

(2) 点 A を通り、直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線と垂直な直線

(解説文)

$$(1) y-(-4)=\frac{2-(-4)}{3-1}\{x-1\} \quad \text{よって} \quad y=3x-7$$

$$(2) \text{ 直線 } 3x+2y+1=0 \text{ の傾きは } -\frac{3}{2}$$

[1] 平行な直線の方程式は

$$y-(-4)=-\frac{3}{2}\{x-1\} \quad \text{すなわち} \quad 3x+2y+5=0$$

[2] 垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2} \times m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = \frac{2}{3}$$

よって、垂直な直線の方程式は

$$y-(-4)=\frac{2}{3}\{x-1\} \quad \text{すなわち} \quad 2x-3y-14=0$$

問25-05 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が原点、半径が5

(2) 中心が点(3, -2), 半径が4

(解説文)

$$(1) x^2+y^2=25$$

$$(2) (x-3)^2+(y+2)^2=16$$

問25-06 次の方程式はどのような図形を表すか答えよ。

$$(1) x^2+y^2+4x-6y=0$$

$$(2) 3x^2+3y^2-6x+12y+5=0$$

$$(4) x^2+y^2+6x-2y+15=0$$

(解説文)

$$(1) \text{ 方程式を変形すると } (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=4+9$$

$$\text{すなわち } (x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{13})^2$$

これは、点(-2, 3)を中心とし、半径が $\sqrt{13}$ の円を表す。

$$(2) \text{ 方程式の両辺を } 3 \text{ で割ると } x^2+y^2-2x+4y+\frac{5}{3}=0$$

$$\text{これを变形すると } (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=-\frac{5}{3}+1+4$$

$$\text{すなわち } (x-1)^2+(y+2)^2=\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2$$

これは、点(1, -2)を中心とし、半径が $\frac{\sqrt{30}}{3}$ の円を表す。

$$(4) \text{ 方程式を変形すると } (x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=-15+9+1$$

$$\text{すなわち } (x+3)^2+(y-1)^2=-5$$

この方程式を満たす実数 x, y は存在しない。

よって、この方程式が表す図形はない。

問25-07 次のような円の方程式を求めよ。

(2) 2点(0, 1), (2, 3)を直径の両端とする

(3) 3点(2, 5), (6, -3), (9, 6)を通る

(解説文)

(2) 円の中心は、2点(0, 1), (2, 3)を結ぶ線分の中点であるから、その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (1, 2)$$

$$\text{また、半径は } \sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

$$\text{よって、求める円の方程式は } (x-1)^2+(y-2)^2=2$$

(3) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

$$\text{点}(2, 5) \text{ を通るから } 2^2+5^2+2l+5m+n=0$$

$$\text{点}(6, -3) \text{ を通るから } 6^2+(-3)^2+6l-3m+n=0$$

$$\text{点}(9, 6) \text{ を通るから } 9^2+6^2+9l+6m+n=0$$

$$\text{整理すると } 2l+5m+n+29=0$$

$$6l-3m+n+45=0$$

$$9l+6m+n+117=0$$

$$\text{これを解くと } l=-12, m=-4, n=15$$

$$\text{よって、求める円の方程式は } x^2+y^2-12x-4y+15=0$$

締め切り=[2025/12/16]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。

計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説)

(解説文)

問26-01 次のような楕円の方程式を求めよ。

(1) 2点(4, 0), (-4, 0)を焦点とし、焦点からの距離の和が10

(2) 2点(0, 2), (0, -2)を焦点とし、焦点からの距離の和が6

(解説)

(1) 2点(4, 0), (-4, 0)が焦点であるから、求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

とおける。

2つの焦点からの距離の和が10であるから

$$2a = 10 \quad \text{よって} \quad a = 5$$

焦点の座標が(4, 0), (-4, 0)であるから

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 4$$

$$a = 5 \text{ を代入して } \sqrt{25 - b^2} = 4$$

$$\text{ゆえに } b^2 = 9$$

$$\text{よって、求める方程式は } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(2) 2点(0, 2), (0, -2)が焦点であるから、求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$$

とおける。

2つの焦点からの距離の和が6であるから

$$2b = 6 \quad \text{よって} \quad b = 3$$

焦点の座標が(0, 2), (0, -2)であるから

$$\sqrt{b^2 - a^2} = 2$$

$$b = 3 \text{ を代入して } \sqrt{9 - a^2} = 2$$

$$\text{ゆえに } a^2 = 5$$

$$\text{よって、求める方程式は } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

問26-02 次の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、焦点、頂点、楕円上の任意の点から2つの焦点までの距離の和を求めよ。

$$(1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(2) 4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$(3) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$(4) 4x^2 + y^2 = 4$$

(解説)

$$(1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ から } \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

よって、長軸の長さは $2 \cdot 4 = 8$,

短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$

$\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ であるから、焦点は

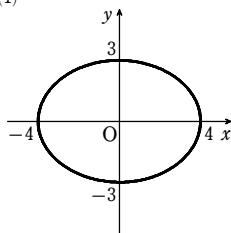
2点($\sqrt{7}$, 0), ($-\sqrt{7}$, 0)

頂点は 4点(4, 0), (-4, 0), (0, 3), (0, -3)

距離の和は $2 \cdot 4 = 8$

楕円の概形は [図]

(1)



$$(2) 4x^2 + 25y^2 = 100 \text{ から } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

よって、長軸の長さは $2 \cdot 5 = 10$,

短軸の長さは $2 \cdot 2 = 4$

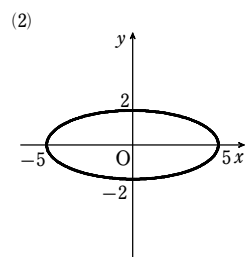
$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ であるから、焦点は

2点($\sqrt{21}$, 0), ($-\sqrt{21}$, 0)

頂点は 4点(5, 0), (-5, 0), (0, 2), (0, -2)

距離の和は $2 \cdot 5 = 10$

楕円の概形は [図]



$$(3) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ から } \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

よって、長軸の長さは $2 \cdot 5 = 10$,

短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$

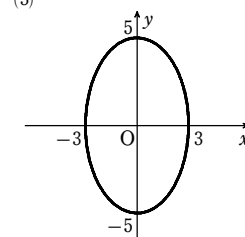
$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ であるから、焦点は

2点(0, 4), (0, -4)

頂点は 4点(3, 0), (-3, 0), (0, 5), (0, -5)

距離の和は $2 \cdot 5 = 10$

楕円の概形は [図]



$$(4) 4x^2 + y^2 = 4 \text{ から } \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

よって、長軸の長さは $2 \cdot 2 = 4$,

短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$

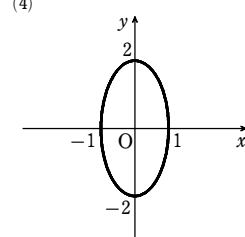
$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ であるから、焦点は

2点(0, $\sqrt{3}$), (0, $-\sqrt{3}$)

頂点は 4点(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)

距離の和は $2 \cdot 2 = 4$

楕円の概形は [図]



問26-03 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上の点 P と点 (2, 0) の距離 l の最小値、および最大値を求めよ。

(解説)

$$\text{点 P の座標を } (x, y) \text{ とすると } l^2 = (x-2)^2 + y^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{P は楕円上にあるから } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\text{よって } y^2 = 4 \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$y^2 \geq 0 \text{ であるから } 4 \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) \geq 0 \quad \text{これを解くと } -3 \leq x \leq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②を①に代入して

$$l^2 = (x-2)^2 + 4 \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) = \frac{5}{9}x^2 - 4x + 8 = \frac{5}{9} \left(x - \frac{18}{5} \right)^2 + \frac{4}{5}$$

$l > 0$ であるから、 l^2 が最小のとき l も最小、 l^2 が最大のとき l も最大となる。

③より、 l^2 は $x = 3$ で最小値 1、 $x = -3$ で最大値 25 をとる。

よって、距離 l の最小値は $\sqrt{1} = 1$ 、最大値は $\sqrt{25} = 5$

問26-04 次のような双曲線の方程式を求めよ。

(1) 2点(4, 0), (-4, 0)を焦点とし、焦点からの距離の差が4である

(2) 2点(0, 3), (0, -3)を焦点とし、点(4, 5)を通る

(3) 中心が原点、漸近線の傾きが ± 2 で、点 $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ を通る

(4) 中心が原点で、漸近線が直交し、焦点の1つが点 $(0, \sqrt{6})$ である

(解説)

(1) 2点(4, 0), (-4, 0)が焦点であるから、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ とおける。}$$

2つの焦点からの距離の差が4であるから $2a = 4$ よって $a = 2$

焦点の座標が(4, 0), (-4, 0)であるから $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$

$$\text{ゆえに } b^2 = 16 - a^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\text{よって、求める方程式は } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

(2) 2 点 $(0, 3)$, $(0, -3)$ が焦点であるから、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ とおける。}$$

点 $(4, 5)$ から 2 つの焦点 $(0, -3)$, $(0, 3)$ までの距離の差は

$$\sqrt{4^2 + (5+3)^2} - \sqrt{4^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

よって $2b = 2\sqrt{5}$ ゆえに $b = \sqrt{5}$

焦点の座標が $(0, 3)$, $(0, -3)$ であるから $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

よって $a^2 = 9 - b^2 = 9 - 5 = 4$

ゆえに、求める方程式は $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$

別解 求める双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$ とおける。

点 $(4, 5)$ を通るから $\frac{16}{a^2} - \frac{25}{b^2} = -1$

分母を払って整理すると $25a^2 - 16b^2 = a^2b^2$ …… ①

焦点の座標が $(0, 3)$, $(0, -3)$ であるから $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

よって $b^2 = 9 - a^2$ …… ②

$b^2 > 0$ であるから $9 - a^2 > 0$

$a^2 > 0$ と合わせて $0 < a^2 < 9$

② を ① に代入して $25a^2 - 16(9 - a^2) = a^2(9 - a^2)$

整理して $a^4 + 32a^2 - 144 = 0$ よって $(a^2 - 4)(a^2 + 36) = 0$

$0 < a^2 < 9$ から $a^2 = 4$ ② に代入して $b^2 = 5$

よって、求める方程式は $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$

(3) 中心が原点、漸近線の傾きが ± 2 で、点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を通るから、双曲線の焦点は x 軸上にある。

よって、求める双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ とおける。

点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を通るから $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{4} = 1$ よって $a^2 = \frac{1}{4}$ …… ①

漸近線の傾きが ± 2 であるから $\frac{b}{a} = 2$ ゆえに $b^2 = 4a^2$ …… ②

① を ② に代入して $b^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

よって、求める方程式は $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$ すなわち $4x^2 - y^2 = 1$

(4) 中心が原点で、漸近線が直交し、焦点が y 軸上にあるから、求める双曲線の方程式

は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \quad (a > 0)$ とおける。

焦点の 1 つが点 $(0, \sqrt{6})$ であるから $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6}$ よって $a^2 = 3$

ゆえに、求める方程式は $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$ すなわち $x^2 - y^2 = -3$

問26-05 次の双曲線の頂点、焦点、および漸近線を求めよ。また、その双曲線の概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $3x^2 - 2y^2 = 6$ (3) $x^2 - y^2 = -2$

解説

(1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ から $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

よって、頂点は 2 点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

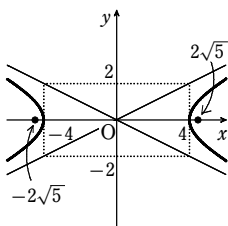
$\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ であるから、焦点は 2 点

$(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$

漸近線は 2 直線 $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 0$

すなわち $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$

双曲線の概形は [図]。



(2) $3x^2 - 2y^2 = 6$ から $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

よって、頂点は 2 点 $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}$ であるから、焦点は 2 点

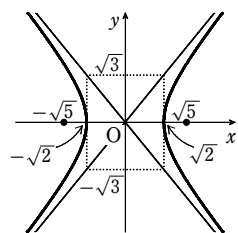
$(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

漸近線は

$$2 \text{ 直線 } \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

すなわち $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0$, $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 0$

双曲線の概形は [図]。



(3) $x^2 - y^2 = -2$ から $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = -1$

よって、頂点は 2 点 $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$

$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ であるから、焦点は 2 点

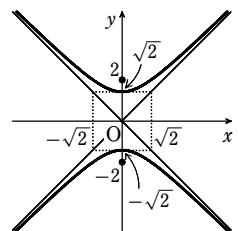
$(0, 2)$, $(0, -2)$

漸近線は

$$2 \text{ 直線 } \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$$

すなわち $x - y = 0$, $x + y = 0$

双曲線の概形は [図]。



問26-99 おまけ。今回学習した内容をふまえて、自分で問題を作問してみよ。良問は期末試験で採用される可能性がある。

(おまけ課題につき回答は必須ではない。)

解説

(解説文)

締め切り＝なし (冬休み課題があるため)。

解答は電子メールで配布予定。期末テスト前の自主学習などに。

(解説)

(解説文)

問27-01 次のような放物線の方程式を求めよ。

- (1) 焦点 (5, 0), 準線 $x = -5$ (2) 焦点 (0, -2), 準線 $y = 2$

(解説)

- (1) $y^2 = 4 \cdot 5x$ よって $y^2 = 20x$
 (2) $x^2 = 4 \cdot (-2)y$ よって $x^2 = -8y$

問27-02 次のような放物線の方程式を求めよ。

- (1) 軸が x 軸, 頂点が原点で, 点 (8, 4) を通る放物線
 (2) 頂点が原点で, 焦点が x 軸上にあり, 点 (-3, 3) を通る放物線

(解説)

- (1) 軸が x 軸, 頂点が原点であるから, 求める放物線の方程式は $y^2 = 4px$ とおける。
 点 (8, 4) を通るから $4^2 = 4p \cdot 8$
 よって $p = \frac{1}{2}$
 ゆえに, 求める方程式は $y^2 = 2x$
 (2) 頂点が原点で, 焦点が x 軸上にあるから, 求める放物線の方程式は $y^2 = 4px$ とおける。
 点 (-3, 3) を通るから $3^2 = 4p \cdot (-3)$
 よって $p = -\frac{3}{4}$
 ゆえに, 求める方程式は $y^2 = -3x$

問27-03 次の2次曲線を, () 内のように平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ。また, その焦点を求めよ。ただし, (a, b) は x 軸方向に a , y 軸方向に b だけの平行移動を表す。

- (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2, 3)
 (2) $x^2 - y^2 = 1$ (-1, 5)
 (3) $y^2 = x$ (3, -2)

(解説)

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ …… ① を, x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる楕円の方程式は
 $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ …… ②
 楕円 ① の焦点は 2 点 $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$ であるから, 楕円 ② の焦点は
 2 点 $(\sqrt{7}+2, 3)$, $(-\sqrt{7}+2, 3)$
 (2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ …… ① を, x 軸方向に -1, y 軸方向に 5 だけ平行移動して得られる双曲線の方程式は
 $(x+1)^2 - (y-5)^2 = 1$ …… ②
 双曲線 ① の焦点は 2 点 $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ であるから,
 双曲線 ② の焦点は
 2 点 $(\sqrt{2}-1, 5)$, $(-\sqrt{2}-1, 5)$
 (3) 放物線 $y^2 = x$ …… ① を, x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は
 $(y+2)^2 = x-3$ …… ②
 放物線 ① の焦点は点 $(\frac{1}{4}, 0)$ であるから, 放物線 ② の焦点は

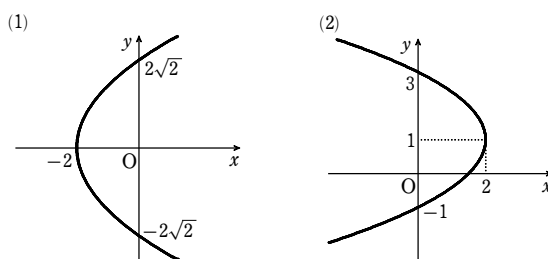
$$\text{点 } \left(\frac{13}{4}, -2\right)$$

問27-04 次の方程式で表される図形の概形をかけ。

- (1) $y^2 = 4x + 8$ (2) $y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$
 (3) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ (4) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$
 (5) $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$ (6) $4y^2 - 9x^2 - 18x - 24y - 9 = 0$

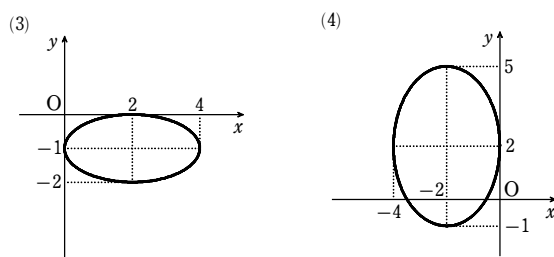
(解説)

- (1) 方程式を変形すると $y^2 = 4(x+2)$
 この曲線は, 放物線 $y^2 = 4x$ を x 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線である。
 また, その概形は [図] のようになる。
 (2) 方程式を変形すると $(y-1)^2 + 2(x-2) = 0$
 よって $(y-1)^2 = -2(x-2)$
 この曲線は, 放物線 $y^2 = -2x$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線である。
 また, その概形は [図] のようになる。



- (3) 方程式を変形すると $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 4$
 よって $\frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$
 この曲線は, 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円である。
 また, その概形は [図] のようになる。

- (4) 方程式を変形すると $9(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 36$
 よって $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
 この曲線は, 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円である。
 また, その概形は [図] のようになる。



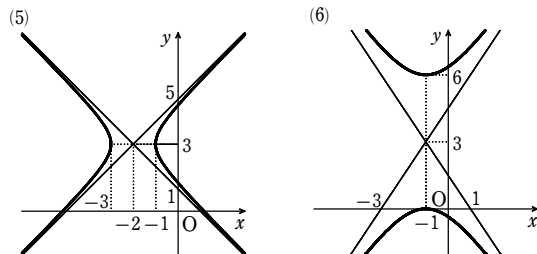
- (5) 方程式を変形すると $(x+2)^2 - (y-3)^2 = 1$
 この曲線は, 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 3 だけ平行移動した双曲線である。
 また, その概形は [図] のようになる。

(6) 方程式を変形すると $-9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$

$$\text{よって } \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = -1$$

この曲線は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 3 だけ平行移動した双曲線である。

また、その概形は [図] のようになる。



問27-05 k は定数とする。次の曲線と直線の共有点の個数を調べよ。

k の値によって場合分けすること。

(1) $y^2 = -4x$, $y = 2x + k$ (2) $4x^2 - 25y^2 = 100$, $x + y = k$

(解法)

$$(1) \begin{cases} y^2 = -4x & \cdots \cdots ① \\ y = 2x + k & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入すると $(2x + k)^2 = -4x$

整理すると $4x^2 + 4(k+1)x + k^2 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = [2(k+1)]^2 - 4k^2 = 8k + 4$$

① と ② の共有点の個数は

$$D > 0 \text{ すなわち } k > -\frac{1}{2} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \text{ すなわち } k = -\frac{1}{2} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \text{ すなわち } k < -\frac{1}{2} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$(2) \begin{cases} 4x^2 - 25y^2 = 100 & \cdots \cdots ① \\ x + y = k & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

② から $y = k - x$ $\cdots \cdots ②'$

②' を ① に代入すると $4x^2 - 25(k - x)^2 = 100$

整理すると $21x^2 - 50kx + 25(k^2 + 4) = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-25k)^2 - 21 \cdot 25(k^2 + 4) = 100(k^2 - 21) = 100(k + \sqrt{21})(k - \sqrt{21})$$

① と ② の共有点の個数は

$$D > 0 \text{ すなわち } k < -\sqrt{21}, \sqrt{21} < k \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \text{ すなわち } k = \pm\sqrt{21} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \text{ すなわち } -\sqrt{21} < k < \sqrt{21} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

締め切り=なし (冬休み課題があるため)。提出も不要。

解答は後日、電子メールで配布予定。期末テスト前の自主学習などに活用すること。

(解説)

(解説文)

問28-01 次のような点 P の軌跡を求めよ。※(2)は削除済み。

(1) 2 点 A(-1, 5), B(7, -1) から等距離にある点 P

(3) 2 点 A(-3, 0), B(1, 0) からの距離の比が 1:3 である点 P

(解説)

点 P の座標を (x, y) とする。

(1) $AP=BP$ であるから $AP^2=BP^2$

$$\text{よって } (x+1)^2+(y-5)^2=(x-7)^2+(y+1)^2$$

$$\text{整理すると } 4x-3y-6=0$$

よって、点 P は、直線 $4x-3y-6=0$ 上にある。

逆に、この直線上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は 直線 $4x-3y-6=0$

(3) $AP:BP=1:3$ から $3AP=BP$

$$\text{よって } 9AP^2=BP^2$$

$$\text{ゆえに } 9[(x+3)^2+y^2]=(x-1)^2+y^2$$

$$\text{整理すると } x^2+y^2+7x+10=0$$

$$\text{すなわち } \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

よって、点 P は、円 $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ 上にある。

逆に、この円上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、中心が点 $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$,

半径が $\frac{3}{2}$ の円である。

問28-02 次の不等式の表す領域を図示せよ。※(1)&(2)は削除済み。

(3) $x-2y-4 \geq 0$

(4) $2x+3y-3 < 0$

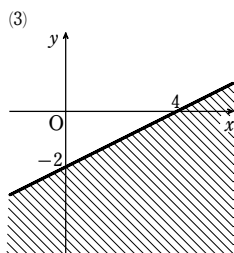
(5) $3x-9 \geq 0$

(解説)

(3) $x-2y-4 \geq 0$ から $y \leq \frac{1}{2}x-2$

よって、求める領域は直線 $y=\frac{1}{2}x-2$

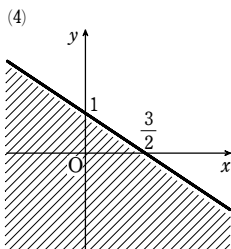
およびその下側の部分で、[図]の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



(4) $2x+3y-3 < 0$ から $y < -\frac{2}{3}x+1$

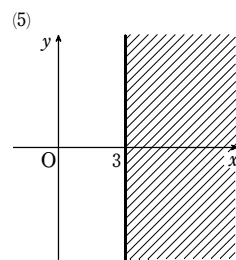
よって、求める領域は直線 $y=-\frac{2}{3}x+1$

の下側の部分で、[図]の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



(5) $3x-9 \geq 0$ から $x \geq 3$

よって、求める領域は直線 $x=3$ およびその右側の部分で、[図]の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



問28-03 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2+y^2 > 9$

(2) $x^2+2x+y^2 \geq 0$

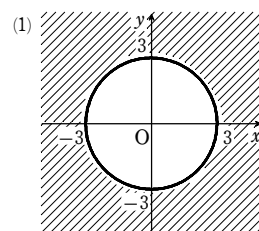
(3) $x^2+y^2-6x-4y-3 < 0$

(解説)

(1) 求める領域は、円 $x^2+y^2=9$ の

外部で、[図]の斜線部分である。

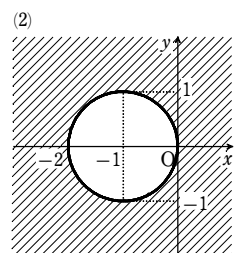
ただし、境界線を含まない。



(2) $x^2+2x+y^2 \geq 0$ から $(x+1)^2+y^2 \geq 1$

よって、求める領域は、円 $(x+1)^2+y^2=1$ およびその外部で、[図]の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



(3) $x^2+y^2-6x-4y-3 < 0$ から

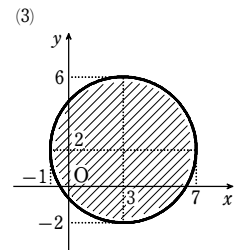
$$(x-3)^2+(y-2)^2 < 16$$

よって、求める領域は、

$$\text{円 } (x-3)^2+(y-2)^2=16$$

の内部で、[図]の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。



問28-04 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y \leq -x^2+4$

(2) $y > -2x^2+4x$

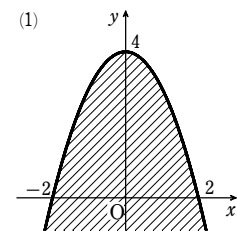
(3) $y \leq 2x^2-4x+3$

(解説)

(1) 求める領域は放物線 $y=-x^2+4$ および

その下側の部分で、[図]の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



(2) $y > -2x^2 + 4x$ から

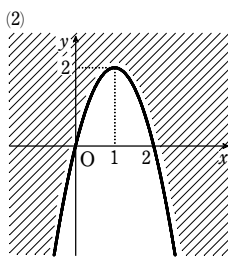
$$y > -2(x-1)^2 + 2$$

よって、求める領域は放物線

$$y = -2(x-1)^2 + 2 \text{ の上側の部分で、}$$

[図]の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。



(3) $y \leq 2x^2 - 4x + 3$ から

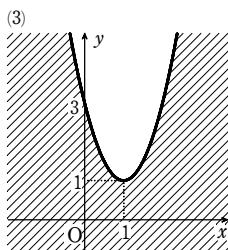
$$y \leq 2(x-1)^2 + 1$$

よって、求める領域は

$$\text{放物線 } y = 2(x-1)^2 + 1$$

およびその下側の部分で、[図]の斜線

部分である。ただし、境界線を含む。



問28-05 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

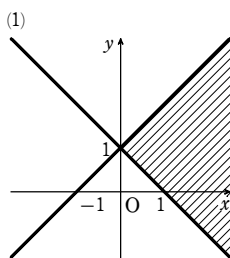
(1) $\begin{cases} y \leq x+1 \\ y \geq -x+1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3y > 6 \\ x-3y < 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2y-3x > 6 \\ x^2+y^2 < 9 \end{cases}$

解説

(1) 求める領域は、直線 $y = x+1$ および
その下側と、直線 $y = -x+1$ および
その上側の共通部分で、[図]の斜線部分
である。ただし、境界線を含む。



(2) $2x+3y > 6$ から $y > -\frac{2}{3}x+2$

$$x-3y < 9 \text{ から } y > \frac{1}{3}x-3$$

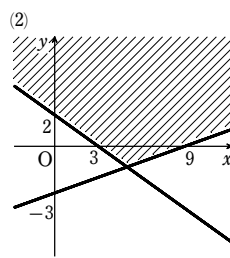
よって、求める領域は、

$$\text{直線 } y = -\frac{2}{3}x+2 \text{ の上側と}$$

$$\text{直線 } y = \frac{1}{3}x-3 \text{ の上側の共通}$$

部分で、[図]の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。



(3) $2y-3x > 6$ から

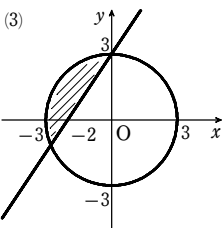
$$y > \frac{3}{2}x+3$$

よって、求める領域は、

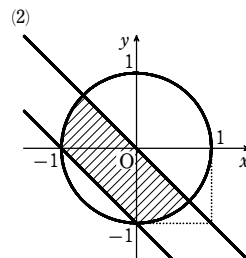
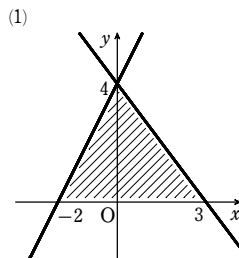
$$\text{直線 } y = \frac{3}{2}x+3 \text{ の上側と}$$

円 $x^2+y^2=9$ の内部の共通部分で、

[図]の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



だし、(1)は境界線を含まず、(2)は境界線を含むものとする。



解説

(1) 2点 $(-2, 0)$, $(0, 4)$ を通る直線の方程式は $y = 2x+4$

2点 $(3, 0)$, $(0, 4)$ を通る直線の方程式は $y = -\frac{4}{3}x+4$

図から、求める連立不等式は

$$\begin{cases} y < 2x+4 \\ y < -\frac{4}{3}x+4 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2x-y+4 > 0 \\ 4x+3y-12 < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

(2) 2点 $(0, 0)$, $(1, -1)$ を通る直線の方程式は $y = -x$

2点 $(-1, 0)$, $(0, -1)$ を通る直線の方程式は $y = -x-1$

図から、求める連立不等式は

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \leq -x \\ y \geq -x-1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \leq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}$$

問28-07 【線形計画法】

2種類の薬品 P, Q がある。それぞれの

1 g 中に含まれる A 成分, B 成分の量と、

1 g あたりの価格は、右の表の通りである。

	A 成分	B 成分	価格
P	2 mg	1 mg	4 円
Q	1 mg	2 mg	6 円

A を 12 mg 以上, B を 15 mg 以上摂取する必要があるとき、その費用を最小にするには、P, Q をそれぞれ何 g とればよいか答えよ。

ヒント: P, Q をそれぞれ x g, y g 摂取すると想定して、線形計画法を用いよ。

解説

P, Q をそれぞれ x g, y g とすると

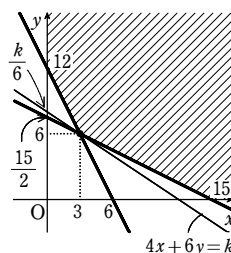
$$x \geq 0, y \geq 0$$

A 成分について $2x+y \geq 12$

B 成分について $x+2y \geq 15$

以上の 4 つの不等式を満たす点

(x, y) の存在する領域は、右図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



ここで、費用は $4x+6y$ 円であり、

$$4x+6y = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、①は、傾きが $-\frac{2}{3}$, y 切片が $\frac{k}{6}$ の直線を表す。

図から、直線 ① が点 $(3, 6)$ を通るとき、 k の値は最小となる。

よって、P を 3 g, Q を 6 g とればよい。

問28-06 下図の斜線部分は、どのような連立不等式の表す領域か。た

締め切り=[2026/01/15]、自己採点后に提出。

回答はこの用紙、またはA4サイズのレポート用紙等に記入すること。
計算などで複数枚使ってもよい。提出の際、複数ページになる場合は、

(1) 左上をホチキス留めし、

(2) 右上に番号と氏名を忘れずに書くこと。

※この用紙を表紙にしても良い。

(解説文)

(解説文)

問29-01 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 5 項までを求めて書き並べよ。尚、単純な等差数列や等比数列ではないものも含まれている。

(1) $a_n = 4n - 2$ (2) $a_n = 3 \cdot 2^n$ (3) $a_n = n^2 + 1$

(4) $a_n = (-2)^n$ (5) $a_n = (-1)^n \cdot 3^{n+1}$

(解説文)

(1) $a_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$, $a_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$, $a_3 = 4 \cdot 3 - 2 = 10$,

$a_4 = 4 \cdot 4 - 2 = 14$, $a_5 = 4 \cdot 5 - 2 = 18$

(2) $a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$, $a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$, $a_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$,

$a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$, $a_5 = 3 \cdot 2^5 = 96$

(3) $a_1 = 1^2 + 1 = 2$, $a_2 = 2^2 + 1 = 5$, $a_3 = 3^2 + 1 = 10$,

$a_4 = 4^2 + 1 = 17$, $a_5 = 5^2 + 1 = 26$

(4) $a_1 = (-2)^1 = -2$, $a_2 = (-2)^2 = 4$, $a_3 = (-2)^3 = -8$,

$a_4 = (-2)^4 = 16$, $a_5 = (-2)^5 = -32$

(5) $a_1 = (-1)^1 \cdot 3^{1+1} = -9$, $a_2 = (-1)^2 \cdot 3^{2+1} = 27$,

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3^{3+1} = -81$, $a_4 = (-1)^4 \cdot 3^{4+1} = 243$,

$a_5 = (-1)^5 \cdot 3^{5+1} = -729$

問29-02 次のような等差数列の一般項を求めよ。また、その第 10 項を求めよ。

(1) 初項 3, 公差 2 (2) 初項 13, 公差 -3

(3) 初項 1, 公差 1 (4) 初項 $\frac{1}{2}$, 公差 $-\frac{1}{2}$

(解説文)

条件を満たす等差数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 一般項は $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$

第 10 項は $a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

(2) 一般項は $a_n = 13 + (n-1)(-3) = -3n + 16$

第 10 項は $a_{10} = -3 \cdot 10 + 16 = -14$

(3) 一般項は $a_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

第 10 項は $a_{10} = 10$

(4) 一般項は $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + 1$

第 10 項は $a_{10} = -\frac{1}{2} \cdot 10 + 1 = -4$

問29-03 以下の問いに答えよ。

(1) 公差が 3, 第 8 項が 12 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

(2) 初項が 10, 第 10 項が 28 である等差数列 $\{a_n\}$ の公差と一般項を求めよ。

(3) 初項が 1, 公差が 5 である等差数列 $\{a_n\}$ において、第 l 項が 76 であるとき、 l の値を求めよ。

(解説文)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a , 公差を d とすると $a_n = a + (n-1)d$

(1) 第 8 項が 12 であるから $a + 7 \cdot 3 = 12$

よって $a = -9$

また $a_n = -9 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 12$

ゆえに、初項は -9, 一般項は $a_n = 3n - 12$

(2) 第 10 項が 28 であるから $10 + 9d = 28$

よって $d = 2$

また $a_n = 10 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 8$

ゆえに、公差は 2, 一般項は $a_n = 2n + 8$

(3) 第 l 項が 76 であるから $1 + (l-1) \cdot 5 = 76$

よって $l = 16$

問29-04 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 2, 公差 3, 項数 10 (2) 初項 20, 公差 -5, 項数 13

(解説文)

(1) 求める和は $\frac{1}{2} \cdot 10 \{2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3\} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 31 = 155$

(2) 求める和は $\frac{1}{2} \cdot 13 \{2 \cdot 20 + (13-1)(-5)\} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (-20) = -130$

問29-05 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 3, 末項 21, 項数 10 (2) 初項 50, 末項 0, 項数 26

(解説文)

(1) 求める和は $\frac{1}{2} \cdot 10 \{3 + 21\} = 120$

(2) 求める和は $\frac{1}{2} \cdot 26 \{50 + 0\} = 650$

問29-06 次の等差数列の和を求めよ。

(1) 2, 6, 10, 14, ..., 90

(2) 62, 55, 48, 41, ..., -8

(解説文)

(1) この等差数列の初項は 2, 公差は 4 であるから、末項 90 が第 n 項であるとする

$2 + (n-1) \cdot 4 = 90$ よって $n = 23$

ゆえに、求める和は $\frac{1}{2} \cdot 23 \{2 + 90\} = 1058$

(2) この等差数列の初項は 62, 公差は -7 であるから、末項 -8 が第 n 項であるとする

と $62 + (n-1)(-7) = -8$ よって $n = 11$

ゆえに、求める和は $\frac{1}{2} \cdot 11 \{62 + (-8)\} = 297$

- 締め切り=無し、提出の必要も無し（試験直前のため）。
- 期末試験前の自主学習用。解答は来週の火曜日までに配布する。
- 教科書の内容&問題をこなせるようになった後で、自分なりに重要または面白そうだと思う問題から取り組んでいけば良い。定期試験では教科書の範囲から逸脱するような問題は出ない。
- 試験本番では「解ける問題から解く」ことを忘れずに。

(解説)

(解説文)

問30-01 次の数列が等比数列であるとき、その公比を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

- (1) 1, 3, 9, □, □, …… (2) 27, 9, □, □, □, ……
 (3) 3, □, 48, -192, □, ……
 (4) $-\sqrt{2}$, 2, $-2\sqrt{2}$, □, □, ……

(解説)

(1) 公比は $\frac{3}{1}=3$

よって 1, 3, 9, 27, 81, ……

(2) 公比は $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

よって 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ……

(3) 公比は $\frac{-192}{48}=-4$

よって 3, -12, 48, -192, 768, ……

(4) 公比は $\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

よって $-\sqrt{2}$, 2, $-2\sqrt{2}$, 4, $-4\sqrt{2}$, ……

問30-02 次の等比数列の一般項を求めよ。また、第5項を求めよ。

- (1) 1, 2, 4, …… (2) 6, $2\sqrt{3}$, 2, ……
 (3) 8, -12, 18, …… (4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

(解説)

与えられた等比数列を $\{a_n\}$ とする。

- (1) 初項が 1, 公比が 2 であるから、一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \text{また、第5項は} \quad a_5 = 2^{5-1} = 16$$

- (2) 初項が 6, 公比が $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、一般項は

$$a_n = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} \quad \text{また、第5項は} \quad a_5 = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{5-1} = \frac{2}{3}$$

- (3) 初項が 8, 公比が $\frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ であるから、一般項は

$$a_n = 8 \left(-\frac{3}{2} \right)^{n-1} \quad \text{また、第5項は} \quad a_5 = 8 \left(-\frac{3}{2} \right)^{5-1} = \frac{81}{2}$$

- (4) 初項が 1, 公比が $-\frac{1}{2}$ であるから、一般項は

$$a_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

また、第5項は $a_5 = \left(-\frac{1}{2} \right)^{5-1} = \frac{1}{16}$

問30-03 次のような等比数列の一般項を求めよ。ただし、公比は実数とする。

- (1) 第5項が -48, 第7項が -192 (答えは二通りある。)

- (2) 第2項が 14, 第5項が 112

(解説)

初項を a , 公比を r とすると、第 n 項は ar^{n-1}

- (1) 第5項が -48 であるから $ar^4 = -48$ …… ①

第7項が -192 であるから $ar^6 = -192$

すなわち $ar^4 \cdot r^2 = -192$

これに ① を代入して $-48r^2 = -192$

よって $r^2 = 4$ ゆえに $r = \pm 2$

① から $a = -3$

よって、一般項は $-3 \cdot 2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

- (2) 第2項が 14 であるから $ar = 14$ …… ①

第5項が 112 であるから $ar^4 = 112$

すなわち $ar \cdot r^3 = 112$

これに ① を代入して $14r^3 = 112$

よって $r^3 = 8$

r は実数であるから $r = 2$

① から $a = 7$

よって、一般項は $7 \cdot 2^{n-1}$

問30-04 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

- (1) 初項 2, 公比 2 (2) 初項 7, 公比 -4

- (3) 初項 -2, 公比 $\frac{1}{2}$

(解説)

求める和を S_n とする。

(1) $S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$

(2) $S_n = \frac{7[1 - (-4)^n]}{1 - (-4)} = \frac{7}{5}[1 - (-4)^n]$

(3) $S_n = \frac{-2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = -4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

問30-05 次のような等比数列の和を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 2, 末項 64 (2) 初項 162, 公比 $-\frac{1}{3}$, 末項 2

(解説)

- (1) 項数を n とする。

$1 \cdot 2^{n-1} = 64$ から $2^{n-1} = 2^6$

よって $n - 1 = 6$ ゆえに $n = 7$

したがって、求める和は $\frac{1 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 127$

- (2) 項数を n とする。

$162 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = 2$ から $\left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{81}$

すなわち $\left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3} \right)^4$

よって $n - 1 = 4$ ゆえに $n = 5$

したがって、求める和は $\frac{162 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^5 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = 122$

(別解) 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和 S は

$$S = \frac{a - rl}{1 - r} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

$$(1) \frac{2 \cdot 64 - 1}{2 - 1} = 127$$

$$(2) \frac{162 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 122$$

問30-06 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 5, 10, 20, …… (2) -1, 5, -25, ……

(3) $\sqrt{2} - 1, 1, \dots$ (ヒント: 公比が少し複雑)

解説

公比を r , 求める和を S_n とする。

$$(1) r = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{よって } S_n = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} = 5(2^n - 1)$$

$$(2) r = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\text{よって } S_n = \frac{(-1)\{1 - (-5)^n\}}{1 - (-5)} = -\frac{1}{6}\{1 - (-5)^n\}$$

$$(3) r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{よって } S_n = \frac{(\sqrt{2} - 1)\{(\sqrt{2} + 1)^n - 1\}}{(\sqrt{2} + 1) - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{n-1} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

問30-07 数列 8, a , b が等差数列で, 数列 a , b , 36 が等比数列であるとき, a , b の値を求めよ。

解説

数列 8, a , b が等差数列であるから $2a = 8 + b$ …… ①

また, 数列 a , b , 36 が等比数列であるから $b^2 = 36a$ …… ②

① を ② に代入して $b^2 = 18(8 + b)$

展開して整理すると $b^2 - 18b - 144 = 0$

よって $(b + 6)(b - 24) = 0$ ゆえに $b = -6, 24$

① から a を求めて $a = 1, b = -6$ または $a = 16, b = 24$

問30-08 数列 $\{\log_2 a_n\}$ が初項 2, 公差 -1 である等差数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ は等比数列であることを示せ。また, 初項と公比を求めよ。

解説

数列 $\{\log_2 a_n\}$ は初項 2, 公差 -1 の等差数列であるから

$$\log_2 a_n = 2 + (n - 1)(-1) = 3 - n$$

よって $a_n = 2^{3-n}$

$$\text{ゆえに } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{3-(n+1)}}{2^{3-n}} = \frac{2^{2-n}}{2^{3-n}} = \frac{1}{2}$$

すべての自然数 n について $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ が $\frac{1}{2}$ で一定であるから,

数列 $\{a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

また $a_1 = 2^{3-1} = 4$

したがって, 初項は 4, 公比は $\frac{1}{2}$ である。

問30-09 等比数列をなす 3 つの実数があつて, それらの和が 19, 積が 216 であるという。これら 3 つの実数を求めよ。

解説

3 つの実数を a, b, c とし, この順に等比数列をなすとする

$$b^2 = ac \quad \dots\dots ①$$

また $a + b + c = 19 \quad \dots\dots ②$

$$abc = 216 \quad \dots\dots ③$$

①, ③ から $b^3 = 216 = 6^3$

b は実数であるから $b = 6$

これを ①, ② に代入して $ac = 36, a + c = 13$

$c = 13 - a$ から $a(13 - a) = 36$

よって $a^2 - 13a + 36 = 0$

左辺を因数分解すると $(a - 4)(a - 9) = 0$

ゆえに $a = 4, 9$

$a = 4$ のとき $c = 9, a = 9$ のとき $c = 4$

よって, 求める 3 つの実数は 4, 6, 9

成績とは無関係。回答時間の後、答え合わせ&解説を行う。

問31-01 ふたつの点 $A(-1, 4)$, $B(2, -2)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を $1:3$ に内分する点の座標を求めよ。

(2) 線分 AB を $1:3$ に外分する点の座標を求めよ。

(3) 線分 AB の長さを求めよ。

問31-02 ふたつの点 $A(1, -4)$, $B(3, 2)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 2点 A , B を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 点 A を通り、直線 $3x + 2y + 1 = 0$ と直交する直線の方程式を求めよ。

問31-03 方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ はどのような図形を表すか答えよ。

問31-04 以下の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、焦点（2個）の座標を求めよ。

(1) $4x^2 + 25y^2 = 100$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

問31-05 以下の双曲線の焦点（2個）の座標および漸近線の方程式を求めよ。

(1) $3x^2 - 2y^2 = 6$

(2) $x^2 - y^2 = -2$