

本日 → 弧度法と三角関数 (p. 146 ~ 152)

弧度法 → 今日で本当に rad (ラジアン) に移行する!

$$360[^\circ] = 2\pi [\text{rad}]$$

$$180[^\circ] = \pi [\text{rad}]$$

$$1[^\circ] = \frac{2\pi}{360} [\text{rad}] = \frac{\pi}{180} [\text{rad}]$$

※以後、[rad]は基本的に省略する。

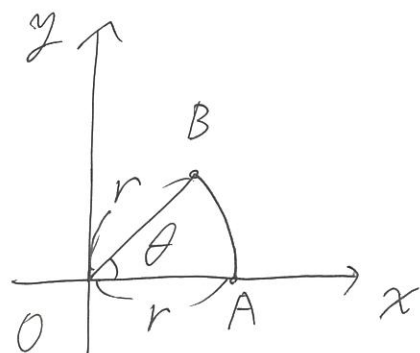
角と弧長

θ が rad で与えられていると、

$$= 2\pi r \frac{\theta [\text{rad}]}{2\pi [\text{rad}]}$$

$$\widehat{AB} = r\theta, \text{ 簡単。}$$

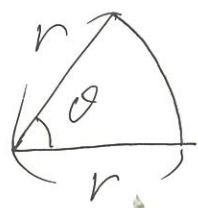
$$\left(\begin{array}{l} \text{ちなみに度数法だと、} \\ \widehat{AB} = 2\pi r \frac{\theta [^\circ]}{360 [^\circ]} \dots \times 2 \text{ 倍。} \end{array} \right)$$



扇形の面積

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta, \text{ 簡単。}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ちなみに度数法だと、} \\ S = \pi r^2 \frac{\theta [^\circ]}{360 [^\circ]} \dots \times 2 \text{ 倍。} \end{array} \right)$$



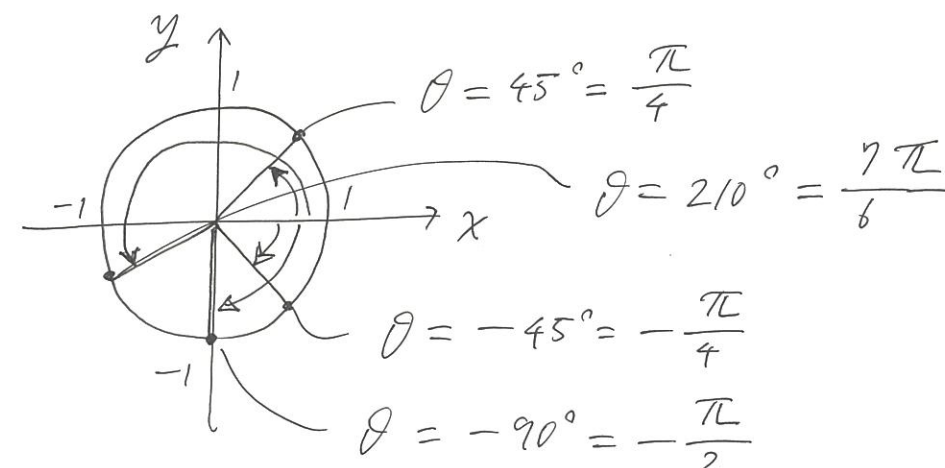
よろずるに、 $360[^\circ] = 2\pi [\text{rad}]$ だと覚えてくれ。

似たような例 → $l_{\text{yd}} = 0.9144 [\text{m}]$, 長さ

$l_{\text{cal}} = 4.186 [\text{J}]$, エネルギー

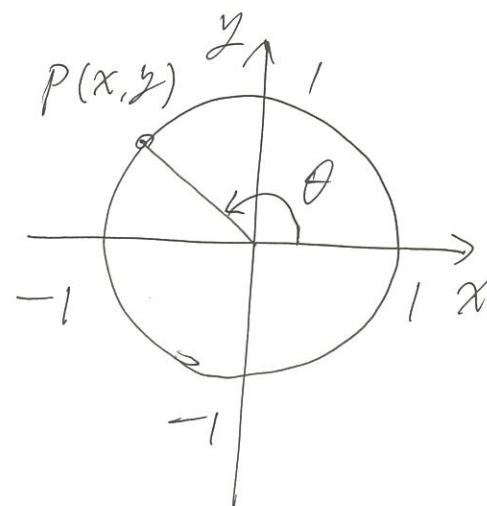
$l_{\text{€}} = 174.5 [\text{¥}]$, 通貨

一般角 θ → ~~2x2~~ 平面上の単位円を回す。



覚えておくといく良値 → $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

三角関数 → 単位円上の一般角 θ に対して、



$P(x, y)$ が決まる。このとき、

$$\cos \theta = x$$

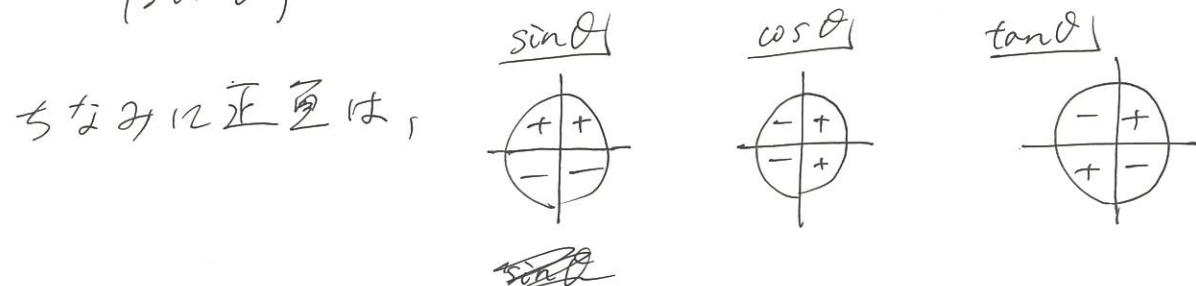
$$\sin \theta = y$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \text{ と定める。}$$

※単位円なので $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ である。

三角関数の値域 (p.149)

$$-1 \leq \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} \leq 1, \quad -\infty \leq \tan \theta \leq \infty$$



三角関数の相互関係 (p.149) ← 前期と同じ。

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

例 = 問 5.24 → 各自で。提出は不要。

例 = 問 5.25 (p.150)

θ が第3象限の角で、 $\tan \theta = 3$ のとき、

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ を求めよ。

$\sin \theta$ は負、 $\cos \theta$ は負

また $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より、

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{10}$$

$\cos \theta \leq 0$ より、 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

よって $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{9}{10}, \quad \sin \theta \leq 0 \text{ より、} \sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

例 = 例題 5.9

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、(1) $\sin \theta \cos \theta$ と (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ は?

(1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{9}$, 左辺 = $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta, \text{ より } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$(1) \quad 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{9} \right) = -\frac{4}{9}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = a^3 + b^3$ とおくと、

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad \text{また } a^2 + b^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より、}$$

$$= (a+b)(1 - ab), \quad \text{前問より } ab = \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \text{ より、}$$

$$= (a+b) \left(\frac{9+4}{9} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

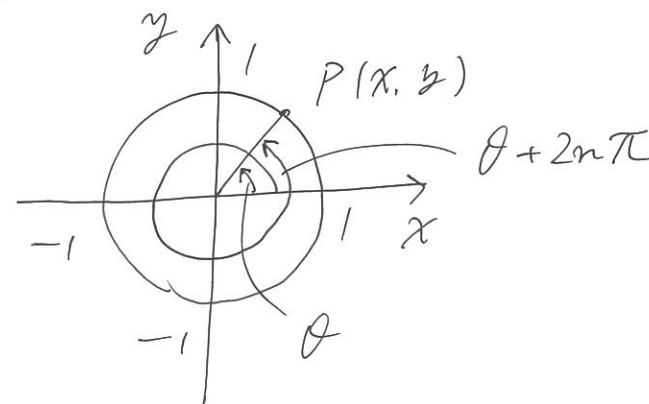
例 = 問 5.26 → 各自で。提出は不要。

三角関数の性質 (p.152)

変化則

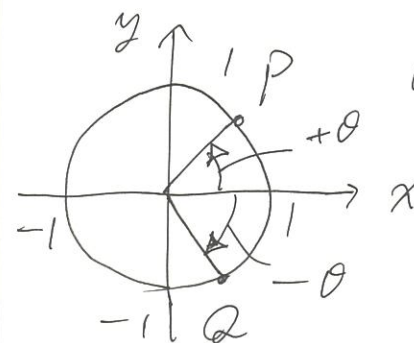
① $\theta \rightarrow \theta + 2n\pi$ での変化 ... 実は変化しない。

$2n\pi$ は単に1周年分に
に③すだけなので。



$$\begin{cases} \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta \end{cases}$$

② $\theta \rightarrow -\theta$ での変化:



$\theta: P = P(x, y)$ に対して、 $-\theta$ は $Q = Q(x, -y)$.

→ $\cos \theta = x$ は不変。 (-1) だけ
 $\sin \theta = y$ & $\tan \theta = y/x$ は変化した。

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

131 = 29 5, 28 (p. 152)

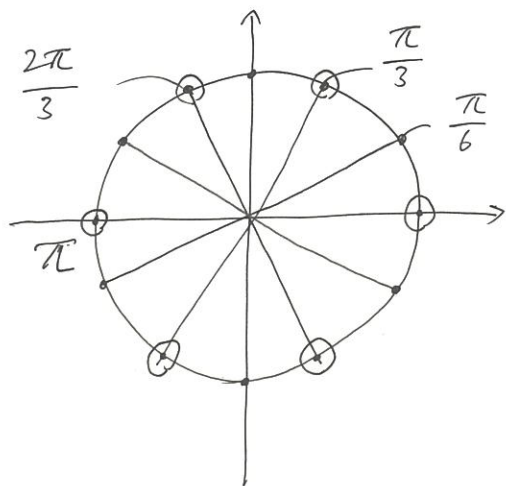
$$(1) \sin\left(\frac{17}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{18}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{-1}{3}\pi + \underbrace{6\pi}_{2n\pi (n=3)}\right) \\ = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \#$$

$$(2) \cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{25}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}} \#$$

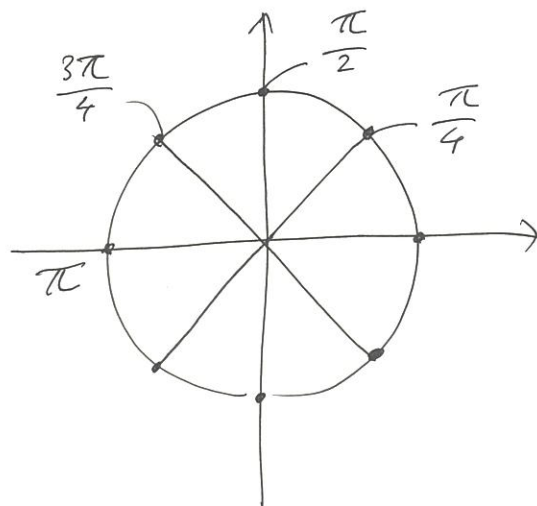
$$(3) \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{-1} \#$$

$$(4) \cos\left(-\frac{2021}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2021}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2016}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi\right) \\ = \cos\left(672\pi + \frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \underline{+\frac{1}{2}} \#$$

$\frac{n}{3}\pi$ & $\frac{m}{6}\pi$ 用



~~h~~ $\frac{k}{4}\pi$ 用

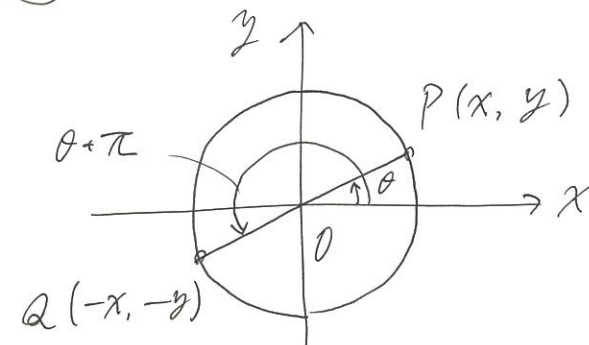


<9/30, 火, 2025> 1-2 基数 II 18 ab 用ノート

本日 → 三角関数の性質 & グラフ

変化則
m の ~~性質~~ (つぎ、p. 153)

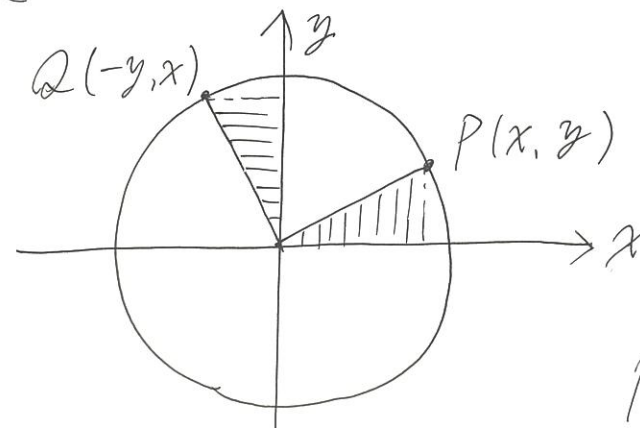
③ $\theta \rightarrow \theta + \pi$ の変化:



$$\begin{aligned} \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \tan(\theta + \pi) &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$P(x, y) \rightarrow Q(-x, -y)$$

④ $\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$ の変化:



$$\begin{aligned} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \theta \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{-1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$$P(x, y) \rightarrow Q(x, y) = Q(-y, x)$$

⑤ $\theta \rightarrow \pi - \theta$ と $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ の変化:

上記の③ & ④ の θ の代わりに $-\theta$ を代入して得られた。

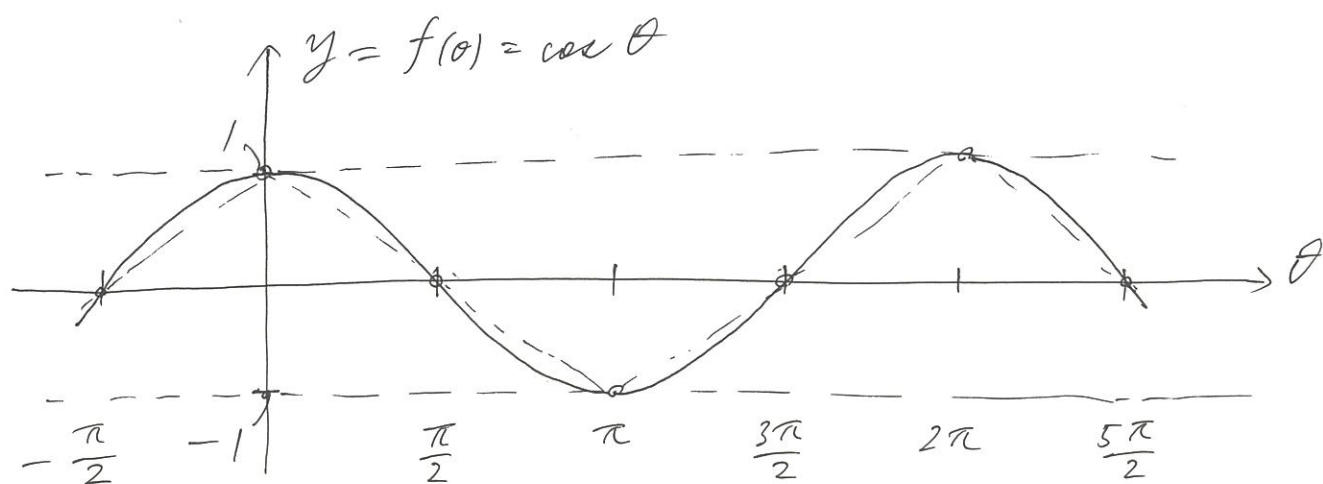
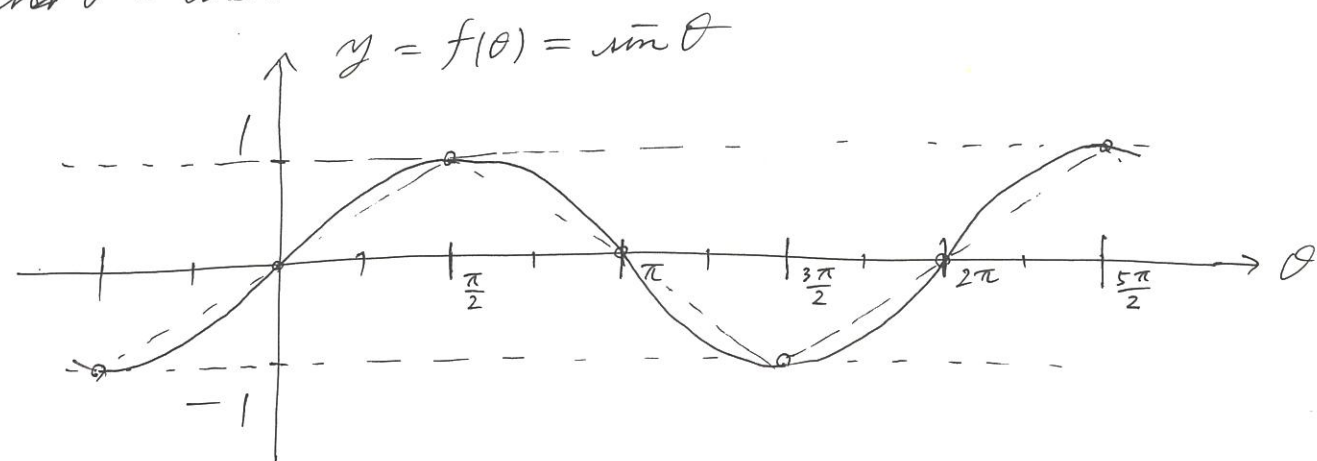
$$\begin{aligned} \cos(\theta - \pi) &= -\cos(-\theta) = -\cos \theta \\ \sin(\theta - \pi) &= -\sin(-\theta) = \sin \theta \\ \tan(\theta - \pi) &= \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

例 = 2.29

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi - \theta) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\pi - \theta) \\ &= (-\sin \theta) \cdot \sin \theta + \cos \theta \cdot (-\cos \theta) \\ &= -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -1 \end{aligned}$$

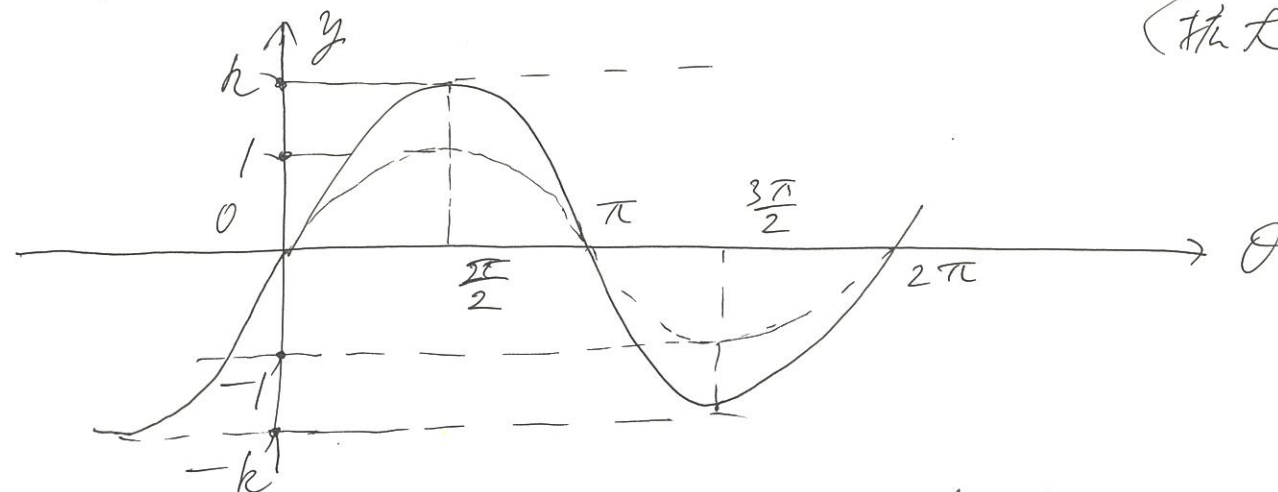
$\sin \theta$ と $\cos \theta$ のグラフ



✓ $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ より、 $\cos \theta$ のグラフは、 $\sin \theta$ のグラフを、 θ 方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの。

✓ $f(\theta + \overset{n}{C}) = f(\theta)$ を満たすような定数 C を“周期”と呼ぶ。→ $\sin \theta$ & $\cos \theta$ はどちらも $C = 2\pi$ の“周期関数”である。

$\sin \theta$ & $\cos \theta$ の定数倍 ~~振幅~~ “振幅”の
 $f(\theta) = k \sin \theta \rightarrow \sin \theta$ のグラフを y 軸方向に k 倍だけ
 (拡大したもの。)



⇒ 振幅が k 倍される。

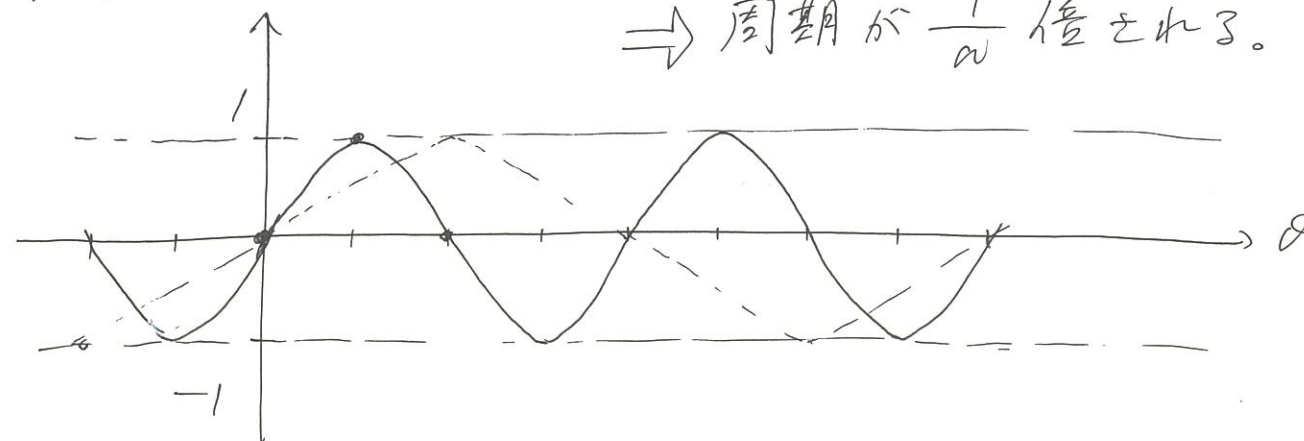
~~周期の定数倍~~

$\sin \theta$ & $\cos \theta$ の“周期”の定数倍

$f(\theta) = \sin a\theta \rightarrow \sin \theta$ のグラフを θ 方向に $\frac{1}{a}$ だけ縮小したもの。

$$y = f(\theta) = \sin 2\theta$$

⇒ 周期が $\frac{1}{a}$ 倍される。



$$\sin \theta = \sin\left(\theta + n \cdot \overset{C}{2\pi}\right) \quad \sin\left(a\theta + n \cdot \frac{2}{\cancel{a}}\pi\right)$$

$$\rightarrow \sin a\theta = \sin\left\{a\left(\theta + n \cdot \frac{2\pi}{a}\right)\right\} = \sin\left\{a\left(\theta + \overset{n}{C'}\right)\right\},$$

$$C' = \frac{2\pi}{a} = \frac{C}{a}$$

$\sin \theta$ & $\cos \theta$ のグラフの平行移動 (p.156)

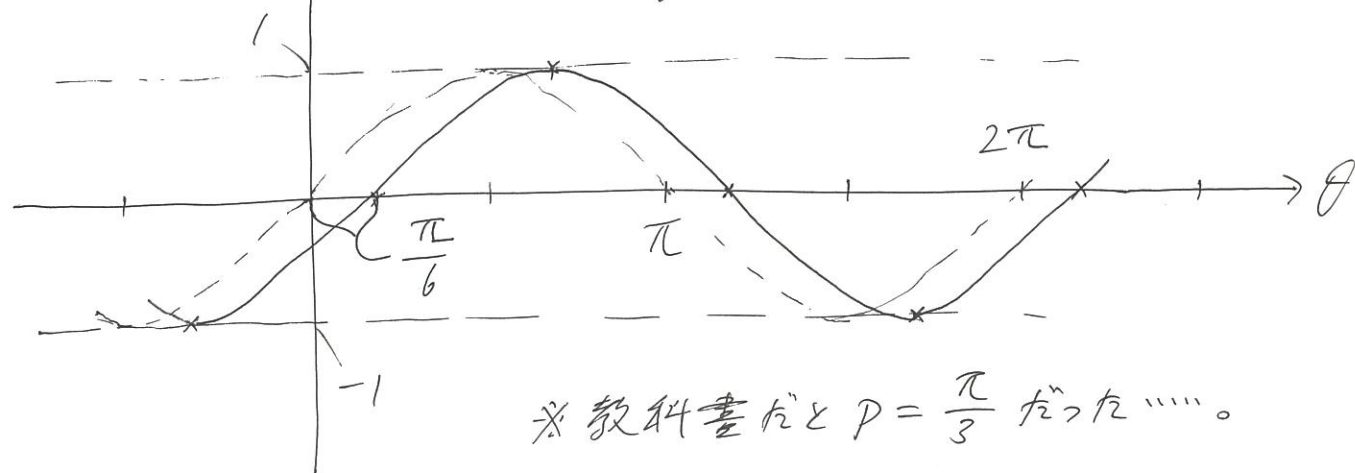
→ 基礎数学 I で ^や 学んでいる内容:

$y = f(x)$, これを ~~y~~ x 方向に +p,
y 方向に +q,

$$y - q = f(x - p)$$

→ 三角関数でも同じ。ただし x の代わりに θ 。

$$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leftarrow p = \frac{\pi}{6}, q = 0.$$



$\sin \theta$ & $\cos \theta$ の変形のもとめ

$$f(\theta) = \textcircled{1} A \sin(\textcircled{2} a\theta + \textcircled{3} p) \text{ or } A \cos(\textcircled{2} a\theta + \textcircled{3} p)$$

① …… 定数 A = 振幅の倍率。y 軸方向に A 倍。

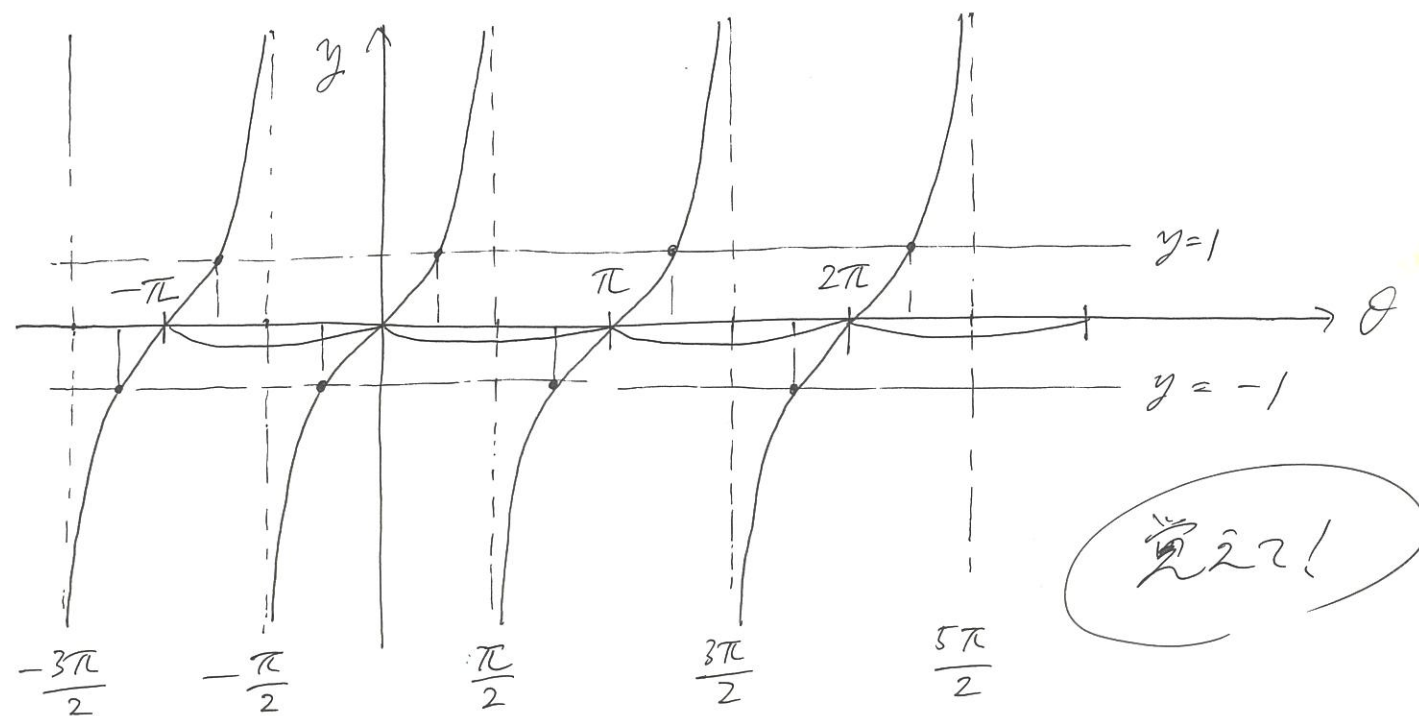
② …… 定数 a = 周期の ^割 率 ($\frac{1}{a}$)。x 軸方向に $\frac{1}{a}$ 倍
(だけ拡大 or 縮小。)

③ …… 定数 p = ~~変~~ 方向に +p だけズラす。+p > 0 なら右へ。
応用: $p = 2\pi$ ズラせば、当然元に戻る。

$\sin \theta$ & $\cos \theta$ の変形のもとめ ②

$$y = \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{振幅を} \\ A \text{ 倍} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{周期を} \\ \frac{1}{a} \text{ 倍} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \theta \text{ 方向に} \\ +p \text{ だけ} \\ \text{ズラす。} \\ \hline \end{array} \Rightarrow y = \begin{cases} A \sin(a\theta - p) \\ A \cos(a\theta - p) \end{cases}$$

$\tan \theta$ のグラフ (p.157)



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \rightarrow \cos \theta \rightarrow 0 \text{ の点では } \pm \infty \text{ に発散する。} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 3\pi, \dots \rightarrow \tan \theta = 1,$$

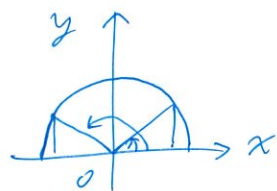
$$\theta = -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \pi, -\frac{\pi}{4} + 2\pi, -\frac{\pi}{4} + 3\pi, \dots \rightarrow \tan \theta = -1.$$

$$\tan \theta \text{ の周期は } \pi. \quad \text{つまり } \tan(\theta \pm n\pi) = \tan \theta.$$

本日 → 三角関数を含む等式、不等式 (p. 158 ~ 160)

例 = 例題 5.12 (p. 158), $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
 (1周分だけ考えれば良い。)

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = ?$



単位円上では、 $\sin \theta = y = \frac{1}{2}$ となる

のは、 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

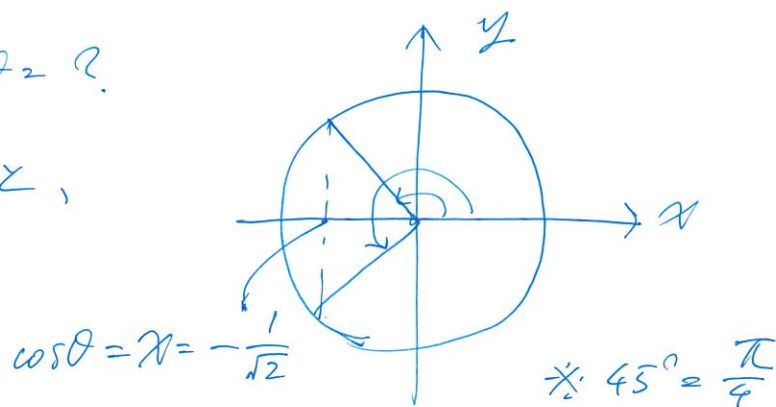
(2) $\sqrt{2} \cos \theta + 1 = 0 \rightarrow \theta = ?$

まず $\cos \theta$ に関する2解と、

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

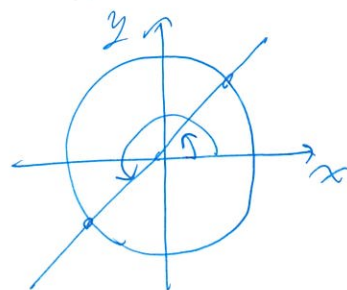
2つの解を持つのは、

$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$



(3) $\tan \theta = 1 \rightarrow \theta = ?$

単位円上では、 $\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \rightarrow y = x$ となる点を採れば良い。



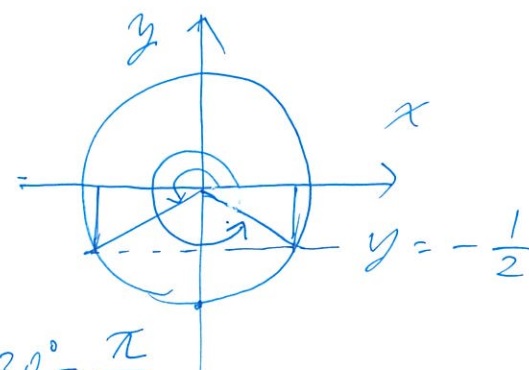
$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

* 上記の議論はすべて単位円上: $x^2 + y^2 = 1$ を前提にしている点に注意。

次は不等式。

例 = 例題 5.13 (p. 159), $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\sin \theta < -\frac{1}{2} \rightarrow \theta$ は? 単位円上では



* $30^\circ = \frac{\pi}{6}$,

$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

$\sin \theta = y$ より、 $y < -\frac{1}{2}$ となる

θ の条件は、

$\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6}$

(2) $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta$ は? 単位円上では

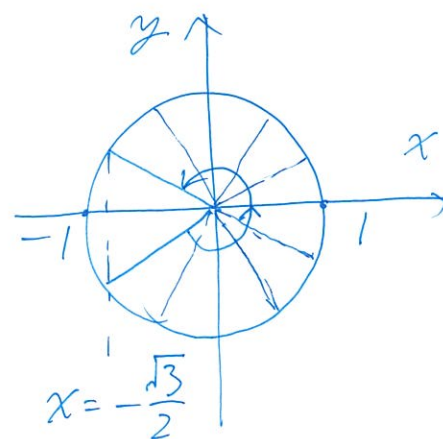
$\cos \theta = x$ より、 $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

となる θ の条件は、

$0 \leq \theta \leq 5 \times 30^\circ$ & $7 \times 30^\circ \leq \theta < 360^\circ$

↓

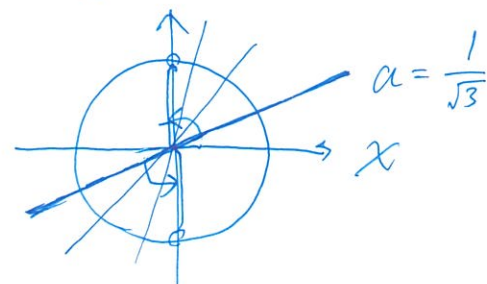
$0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6} \leq \theta < 2\pi$



(3) $\tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta$ は?

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ より、 $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$,

つまり、 $y = ax$ と置いて、傾き a が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ より大きくなる θ の条件を調べれば良い。



$\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{7\pi}{6}$

$\tan \theta = \pm \infty$ になる点は含めないように。

問題文の定義域が $0 \leq \theta < 2\pi$ である点に注意。

例 = 例題 5.14 (1)

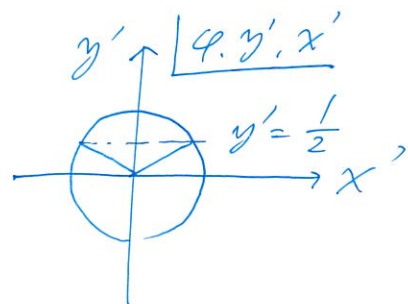
* $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \theta \text{ は?}$$

考え方: $\varphi = \theta + \frac{\pi}{3}$ とまず置いてみる。 φ のための単位円 $(x')^2 + (y')^2 = 1$ を考える。
(721)

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} = y' \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$$



ただし、初期条件より $0 \leq \theta < 2\pi$ である。
2の場合、 2π を足す = 1 周合計
に直す。 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(2)

$$2\cos^2 \theta \geq -5\sin \theta + 4 \rightarrow \theta \text{ は?}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ より, } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ となる,}$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) \geq -5\sin \theta + 4$$

$$0 \geq +2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2$$

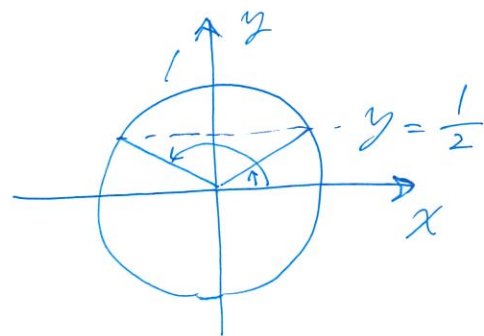
$$0 \geq (2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 2$$

ただし ~~初期条件~~ である。よって $\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$

定義より $\sin \theta \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

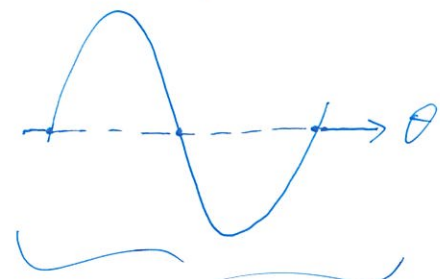


余談

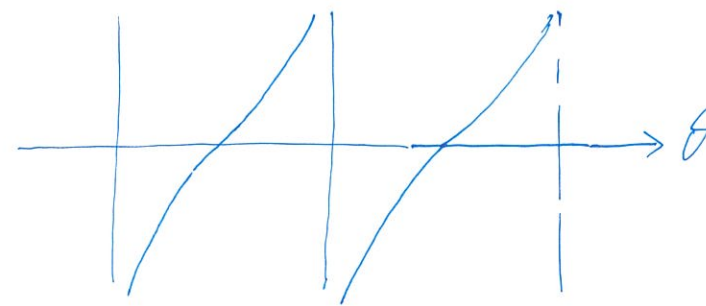
三角関数のグラフの描き方と作法

✓ どの $\sin$? $\rightarrow$ 最低 / 周期分。それ以上は好みで。

$\sin$ & $\cos$ は



for $\sin / \cos$



$\tan$ だけは 2 周期分。

✓ “ $\sin$ ” と “ $\cos$ ” の記法 $\rightarrow$ 自分なりにアレンジも可。

ただし、試験では絶対に使わないように!

$\{\sin, \cos\}, \{s, c\}, \{\sin, \cos\},$ 等々。

<10/13, 月, 2025> 1-2 基礎数学Ⅱ [20] 用ノート

今週 → 三角関数の加法定理

加法定理Ⅰ (p. 162)

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

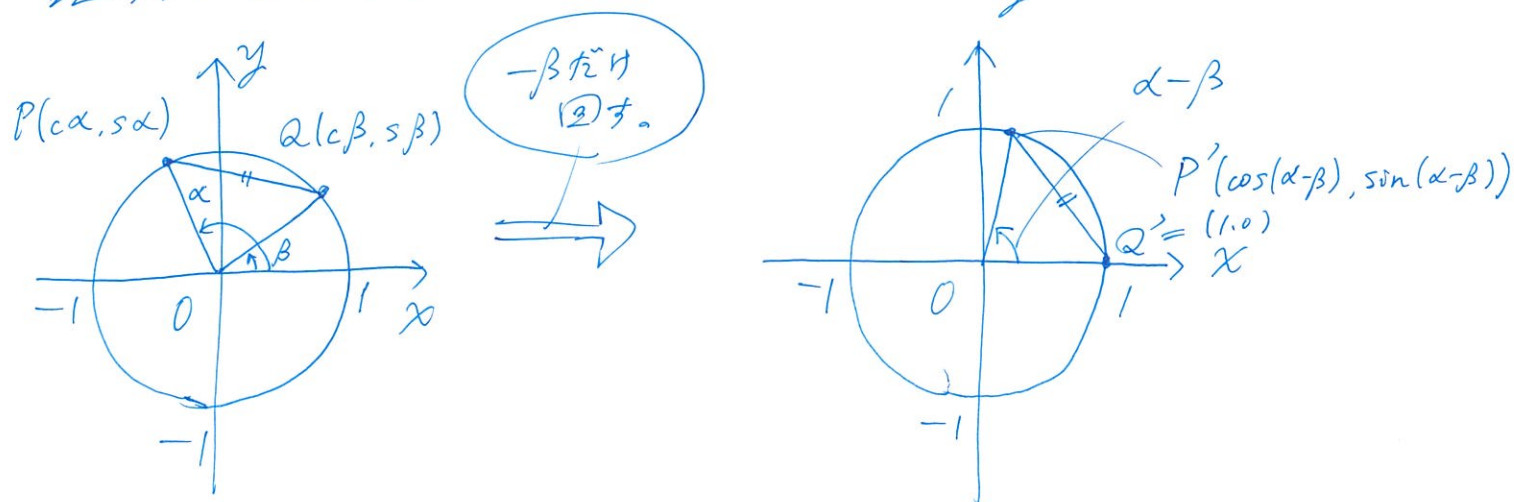
$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

美しい!!!

覚えて!

証明: まず (4) から証明する。単位円上にて、



$(P'Q')^2 = (PQ)^2$ である。両辺に互平方の定理を用いると、

$$\text{左辺} = \{\cos(\alpha - \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha - \beta) - 0\}^2$$

$$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$= \{\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)\} + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta),$$

$$\text{右辺} = \{\cos \alpha - \cos \beta\}^2 + \{\sin \alpha - \sin \beta\}^2$$

$$= [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha] + [\cos^2 \beta + \sin^2 \beta]$$

$$- 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta, \quad (A)$$

したがって、

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

となり、(4) 式の証明を終了。

(3) の証明: 上の (4) 式で、 $\beta = -\gamma$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \gamma) &= \cos \alpha \cos(-\gamma) - \sin \alpha \sin(-\gamma) \\ &= \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \end{aligned}$$

となり、(3) 式の証明も終了。

(1)

~~証明~~ の証明: $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ を思い出す。 $\theta = \alpha + \beta$ と ~、

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta),$$

← (4) 式を使う。

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos \beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

となり、(1) 式の証明も終了。

(2) の証明: 上の (1) 式で、 $\beta = -\gamma$ とおくと、

$$\sin(\alpha - \gamma) = \sin \alpha \cos(-\gamma) + \sin(-\gamma) \cos \alpha$$

$$= \sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha$$

となり、(2) 式の証明も終了。

例 = 問 5.38 (p. 163), (2)

$$\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

加法定理 I (p.162)

$$(5) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(6) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

証明 → 教科書 p.162 を読んで。簡単。

例 = 問 5.38 (p.163), (3)

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})}{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

2倍角の公式 (p.163)

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

証明: $\sin 2\theta$ & $\tan 2\theta$ については、加法定理 I & II

にて、 $\alpha = \beta = \theta$ と代入すれば即座に示される。

$\cos 2\theta$ については、 $\alpha = \beta = \theta$ を代入すれば、

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ はすぐに示される。(→)

(→) 22から更に $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を用いて、次式が示される。

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos^2 \theta - \{1 - \cos^2 \theta\} = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= \{1 - \sin^2 \theta\} - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

例 = 問 5.41 (p.164), (1), $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおくと、

$$(1) \tan \theta = \tan\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$(2) \cos \theta = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right), \text{ 22より } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ より、}$$

$$= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 2 \left(\frac{1}{1 + \tan^2(\theta/2)} \right) - 1$$

$$= 2 \frac{1}{1 + t^2} - 1 = \frac{2 - 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$(3) \sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

半角の公式 (p.165)

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \leftarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \leftarrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \leftarrow \tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

証明: (1) $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ より、 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ より、 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

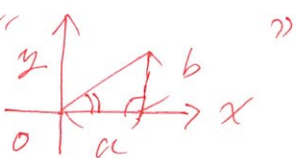
$$\begin{aligned} (3) \tan^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \end{aligned}$$

〈10/21, 火, 2025〉1-2基礎数学Ⅱ [21] 用1-ト

今週 → 三角関数の合成と和積公式、積和公式

三角関数の合成 (p. 166)

$$a \sin \theta + b \cos \theta = A \sin(\theta + \alpha), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\alpha = \arg(a-b) = \text{""$$

$$= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \cdots \tan \alpha = \frac{b}{a} \text{ とした角度}$$

例 = 問 5.45 (p. 167), 次の等式・不等式を解け。 ($0 \leq x < 2\pi$)

$$(1) \sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2} \quad (2) -\sin x + \cos x \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$A = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \text{ したがって}$$

$$\text{左辺} = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} (= 180^\circ + 45^\circ)$$

$$x = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\rightarrow \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{左辺} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{19\pi}{12} \leq x \leq \frac{23\pi}{12}$$

例 = 問 5.46, (2) (p. 168)

$$y = -\sqrt{7} \sin x + 3 \cos x = \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + 3^2} \sin(x + \alpha) = 4 \sin(x + \alpha)$$

$$\ast \tan \alpha = \frac{b}{a} = -\frac{3}{\sqrt{7}}, \text{ 不要情報。}$$

$$\rightarrow -4 \leq y \leq 4$$

積和の公式 (p. 168)

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

※ 導出は教科書を各自で読んで!

例 = 問 5.47, (2)

$$\sin 52.5^\circ \sin 7.5^\circ = \frac{1}{2} \{ \sin(52.5^\circ + 7.5^\circ) - \sin(52.5^\circ - 7.5^\circ) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \cos 60^\circ - \cos 45^\circ \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$$

和積の公式 (p. 169)

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

※ 導出は教科書を各自で読んで!

例

※ 残念ながら $\sin A \pm \cos B = \dots$ みたいな公式は無い。一応、 $\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ と変換すれば、使えないこともない。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

<10/28, 火, 2025> 1-2 基礎数学 II 122

中間テストの範囲 → p. 146 ~ p. 171 に確定!

* “図形と式”には入らない。

~~今日のエクササイズ → 以下の加法定理の公式を③から書き写すこと! オレもやる!~~

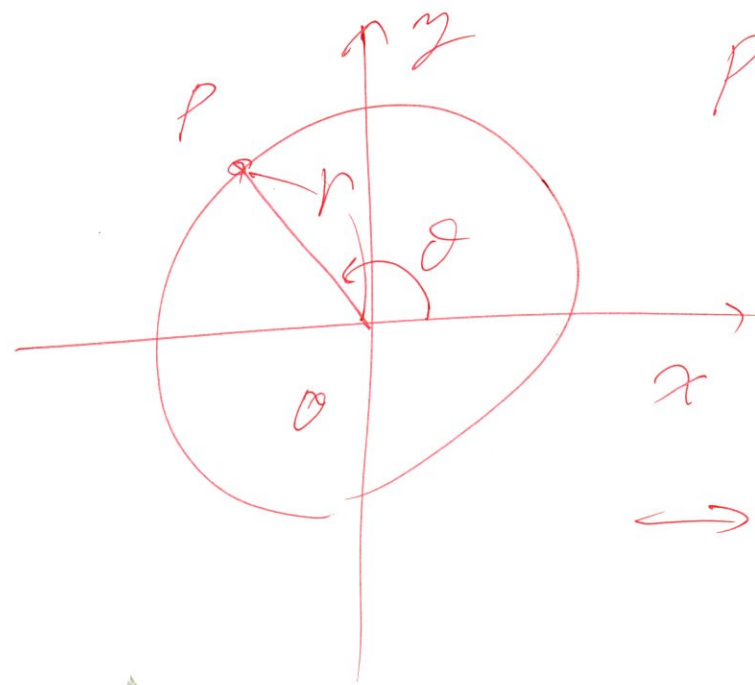
~~$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$~~

→ 次②に。

本日 → 三角関数の復習 その①

それぞれ $\sin \theta$, $\cos \theta$ の定義とは?



$$P = P(x, y),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{y}{r} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \end{cases}$$

* θ がどの象限にあろうとも、この定義は共通。

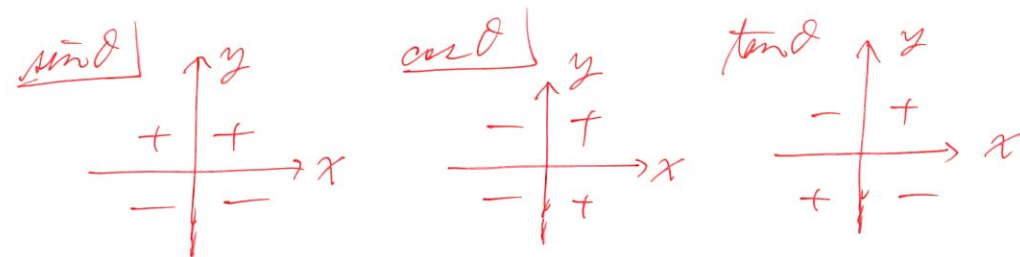
ただし、以後は $r=1$, すなわち単位円を考慮²³。

$$\rightarrow \sin \theta = y, \cos \theta = x. \quad (\text{77c})$$

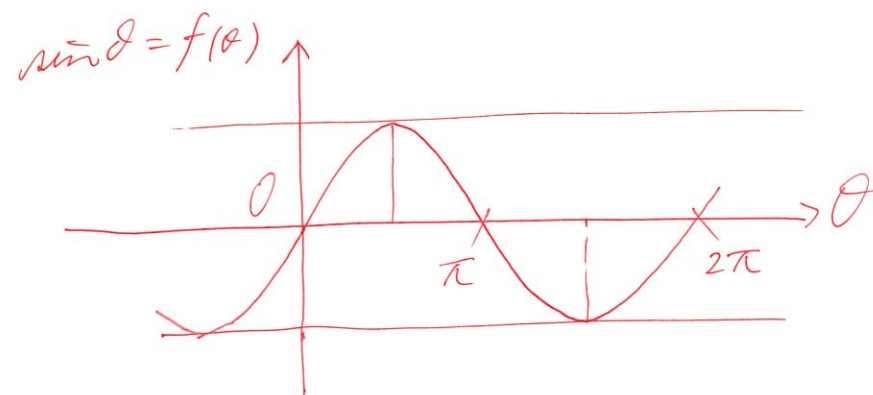
(77g)

尚, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ と定めた。
 $\swarrow$
 $= y/x$

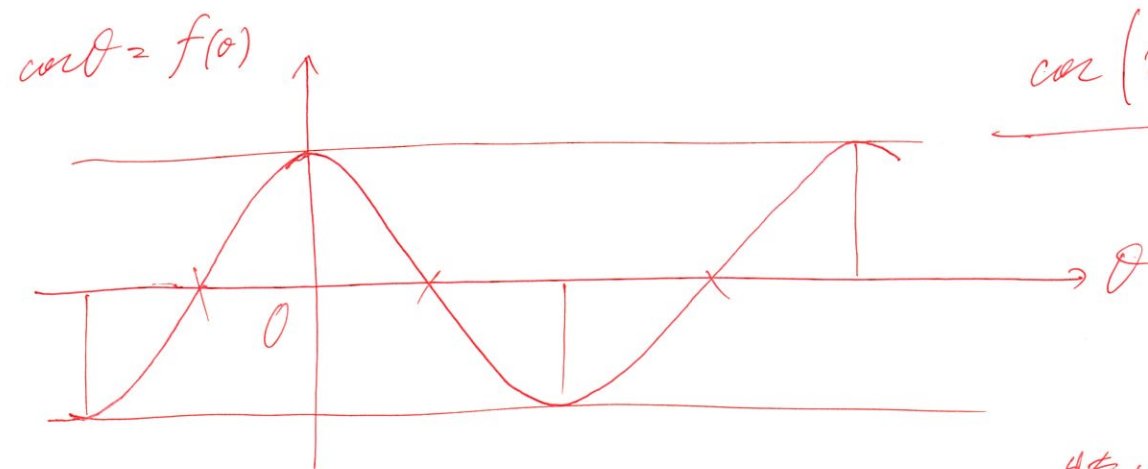
$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の正負 (覚えて!)



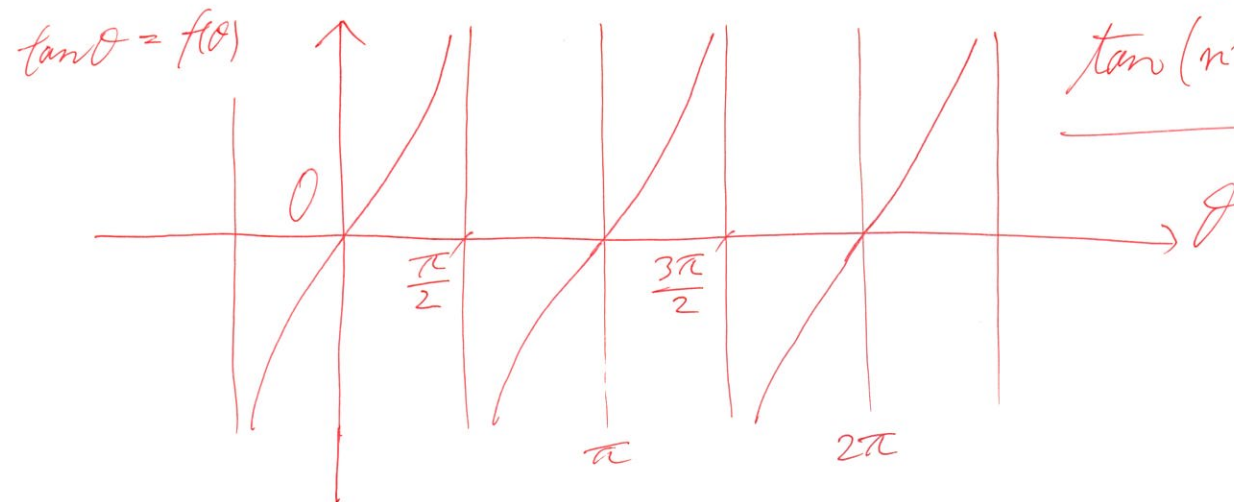
$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のグラフ (覚えて!)



特に、
 $\sin(n\pi) = 0$



特に、
 $\cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$



特に、
 $\tan(n\pi) = 0$

三角関数の値域

$$1) 0 \leq |\sin \theta| \leq 1, \quad 0 \leq |\cos \theta| \leq 1$$

$$1) \tan \theta = \pm \infty \quad (\theta = n\pi + \frac{\pi}{2})$$

神公式そのI

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{証明: } \text{左辺} = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

神公式そのII

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{証明: } \text{左辺} &= 1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

周回した値 (p. 152)

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta, \quad \sin \theta, \quad \tan \theta \text{ についても同様。}$$

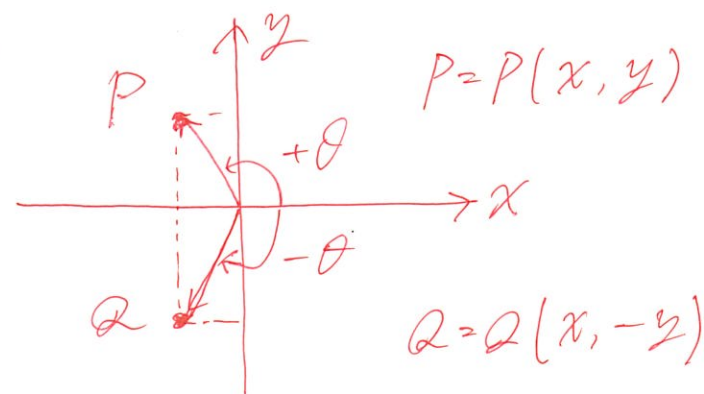
$$\cos \left(\begin{array}{c} \updownarrow \\ \text{図} \end{array} \right) = \cos \left(\begin{array}{c} \updownarrow \\ \text{図} \end{array} \right)$$

逆回した値 → sin と tan の正負が逆転 (p. 152)

$$\cos(-\theta) = \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta = \frac{-y}{r}$$

$$(\tan(-\theta) = -\tan \theta)$$



今日のエクササイズ → 5問ずつ書き写せ!

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

半周した場合 ~~(p. 153)~~ & $\frac{1}{4}$ 周した場合 (p. 153)

$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \\ \left(\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \\ \left(\tan(\theta + \pi) = \tan \theta \right) \end{cases}$$

* $\pi - \theta$ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ は
覚えておく、
 $\theta \rightarrow -\theta$ と置き
換えれば導ける。

加法定理 (p. 161, 先回り)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

* 残りの2本は $\beta \rightarrow -\beta$ とすれば導ける。

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

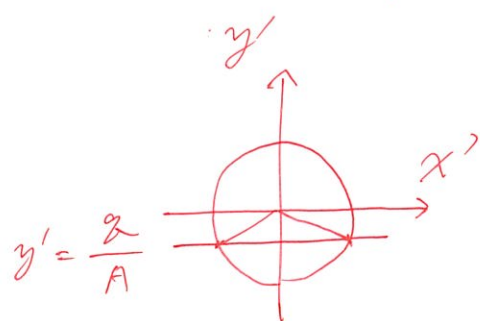
(復習) 三角関数を含む方程式・不等式 (p. 158)

とりあえず方程式の方を解けるように!

単位円を描け! メンドいけど!!

sin型: $A \sin(\theta - \alpha) - g = 0$

① $\sin(\theta - \alpha) = \frac{g}{A}$, まずは $\theta' = \theta - \alpha$ と考えて、 θ' のための単位円を考える。



② $\sin \theta' = \frac{g}{A}$ なのて、 $y' = \frac{g}{A}$ となる横線を引く。

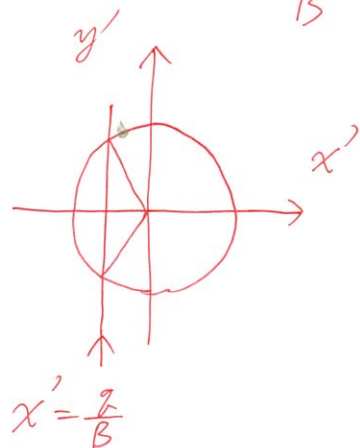
③ $\theta' = r_1, r_2$ と求まる。

交点を指している角度を r_1, r_2 とすれば、

④ $\theta' = r_1, r_2 \rightarrow \theta = r_1 + \alpha, r_2 + \alpha$

cos型: $B \cos(\theta - \beta) - g = 0$

① $\cos(\theta - \beta) = \frac{g}{B}$, まずは $\theta' = \theta - \beta$ と考えて、



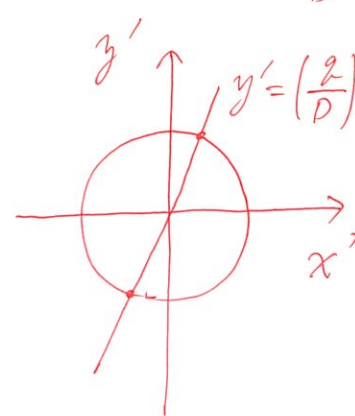
② $\cos \theta' = \frac{g}{B}$ なのて、 $x' = \frac{g}{B}$ となる縦線を引く。

③ 交点を指している角度を r_1, r_2 とすれば、 $\theta' = r_1, r_2$ と求まる。

④ $\theta' = r_1, r_2 \rightarrow \theta = r_1 + \beta, r_2 + \beta$

tan型: $D \tan(\theta - \delta) - g = 0$

① $\tan(\theta - \delta) = \frac{g}{D}$, まずは $\theta' = \theta - \delta$ と考えて



② $\tan \theta' = \frac{y'}{x'}$ なのて、 $y' = \left(\frac{g}{D}\right)x'$ の直線を引く。

③ 交点を指している角度を r_1, r_2 とすれば、 $\theta' = r_1, r_2$ と求まる。

④ $\theta' = \theta - \delta = r_1, r_2 \rightarrow \theta = r_1 + \delta, r_2 + \delta$

不等式

→ 正直なところ、方程式の解法よりやや2しい。

ただし、共通しているところもある。

交点を求める。

~~$A \sin(\theta - \alpha) = \frac{g}{A}$~~
 ~~$B \cos(\theta - \beta) = \frac{g}{B}$~~

$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta - \alpha) \oplus \frac{g}{A} \\ \cos(\theta - \beta) \oplus \frac{g}{B} \\ \tan(\theta - \delta) \oplus \frac{g}{D} \end{array} \right.$

$\oplus$ は $\{>, <, \geq, \leq\}$

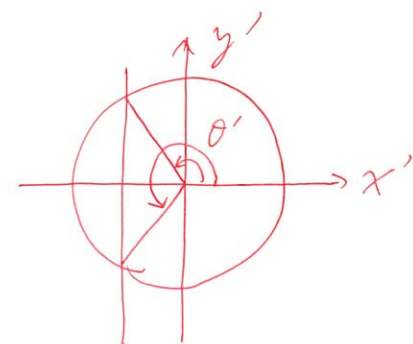
① どの場合でも、先に $\oplus \rightarrow "="$ に置き換えた方程式を解いて、交点を求める。 $\theta' = \theta - \alpha$ と置く。

② その後は $\oplus$ の記号によって、条件を満たす角度の範囲を読み取る。

先に θ' の範囲 $\rightarrow \theta = \theta' + \alpha$ と答える。

例①: $2\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + 1 < 0$

$\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) < -\frac{1}{2}$, 222 対応方程式 $\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$
を解くと、 $\theta' = (\theta - \frac{\pi}{4}) = 120^\circ, 240^\circ$



$= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

~~$\theta = \theta' + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$~~

$x' = -1/2$

元の不等式 ~~は~~ $\cos \theta' < -\frac{1}{2}$ より、

$\rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta' < \frac{4\pi}{3}$, $\theta' = \theta - \frac{\pi}{4}$ なので、

$\rightarrow \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{11\pi}{12} < \theta < \frac{19\pi}{12}$

~~加法定理~~ (p.162) $\rightarrow$ ~~先週~~ 先週やった。

2倍角の公式 (p.163)

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

半角の公式 (p.165) $\leftarrow$ すべて $\cos 2\theta = \dots$ から。

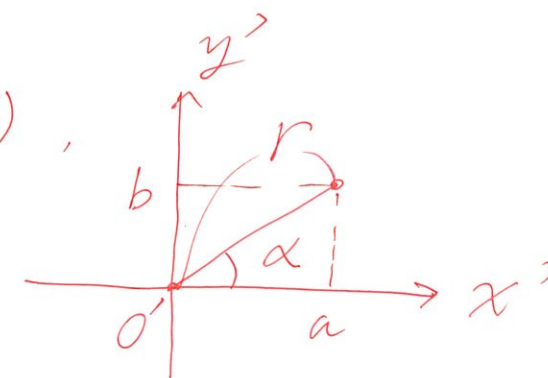
$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$, $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$, $\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

三角関数の合成 (p.166)

$a\sin \theta + b\cos \theta = r\sin(\theta + \alpha)$,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$\alpha =$ 右図の角



$\cos \alpha = \frac{a}{r}$, $\sin \alpha = \frac{b}{r}$, $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

積和の公式 (p.168) } 各自で。筋トレがオスス。
和積の公式 (p.169)

両者の比較

$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta \\ \sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta \\ \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta \\ \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \sin \beta \\ \cos A - \cos B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$

with $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$

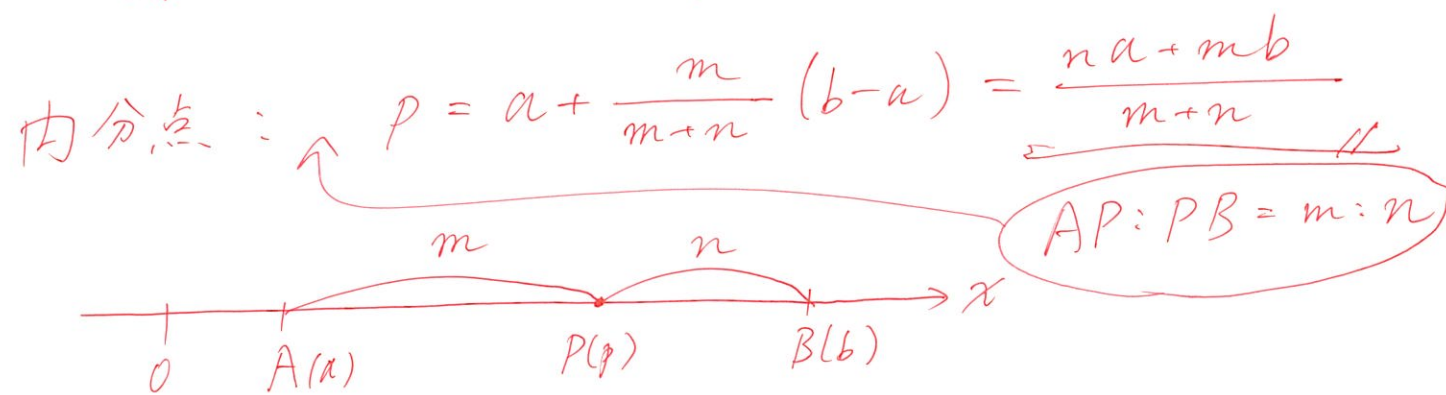
$\updownarrow$
 $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$

<11/20, 木, 2025> 1-2 基礎数学Ⅱ 24.5 用ノート

テスト返し & 短縮授業なので。

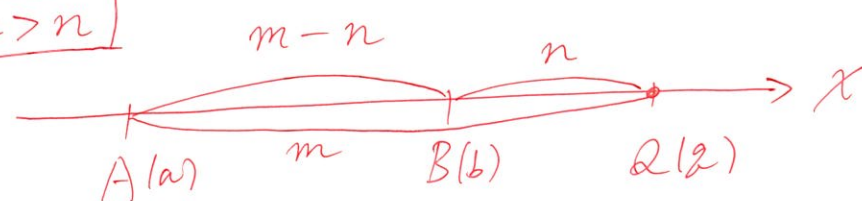
今日 → 2点間の距離 → <10/21, 2025> のノート。

& 内分点と外分点 (p. 173)



外分点: $AQ:QB = m:n$

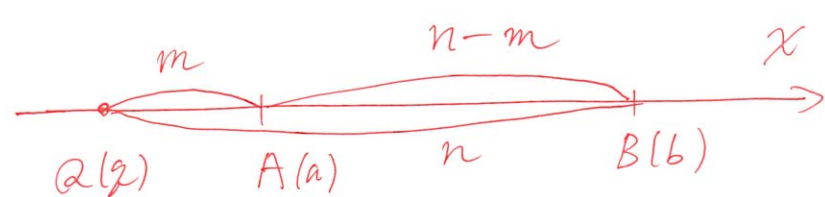
$m > n$



$$q = a + \frac{b-a}{m-n} \cdot m$$

$$= \frac{ma - na + mb}{m-n} = \frac{-na + mb}{m-n}$$

$m < n$



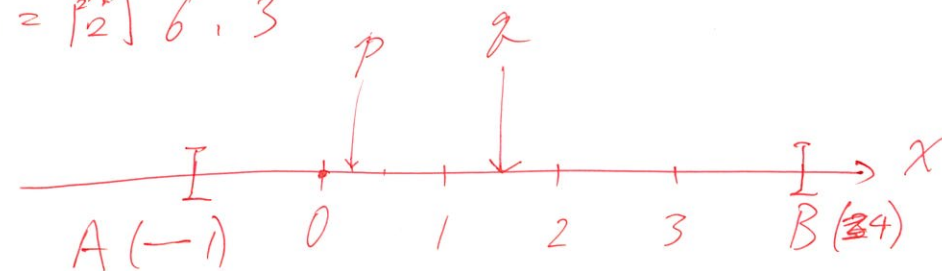
$$q = a - \frac{b-a}{n-m} \cdot m = \frac{-na + mb}{m-n}$$

$q = a - QA$, $QA:AB = m:(n-m)$ より、
 $QA = \frac{m}{n-m} AB = \frac{m(b-a)}{n-m}$
 $= a - \frac{m(b-a)}{n-m}$

⇒ 結局どちらの場合でも $q = \frac{-na + mb}{m-n}$

例 = 例 6.3

(p. 175)



(1) 1:3 に内分 → $p = \frac{na+mb}{m+n} = \frac{3(-1)+1 \cdot 4}{1+3} = \frac{-3+4}{4} = \frac{1}{4}$

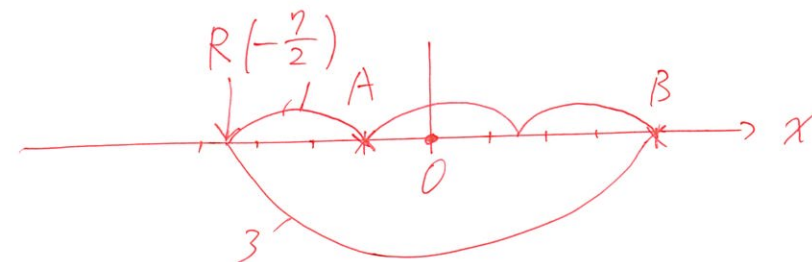
$m:n = 1:3$

(2) 中点 → $m:n = 1:1$ に内分 → $q = \frac{(-1)+4}{2} = \frac{3}{2}$

(3) 1:3 に外分する点 R(r) → $r = \frac{-na+mb}{m-n}$ (a, b) = (-1, 4)

$m:n = 1:3$

$$= \frac{-3(-1)+1 \cdot 4}{1-3} = \frac{3+4}{-2} = -\frac{7}{2}$$



(4) $m:n = 5:2$ に

外分する点 S(s) → $s = \frac{-na+mb}{m-n} = \frac{-2(-1)+5 \cdot 4}{5-2} = \frac{2+20}{3} = \frac{22}{3} \rightarrow S(\frac{22}{3})$

まとめの内分点 & 外分点

A(a) と B(b) を $m:n$ に

内分する点 P(p) → $p = \frac{na+mb}{m+n}$
 外分する点 Q(q) → $q = \frac{-na+mb}{m-n}$ $n \Rightarrow -n$

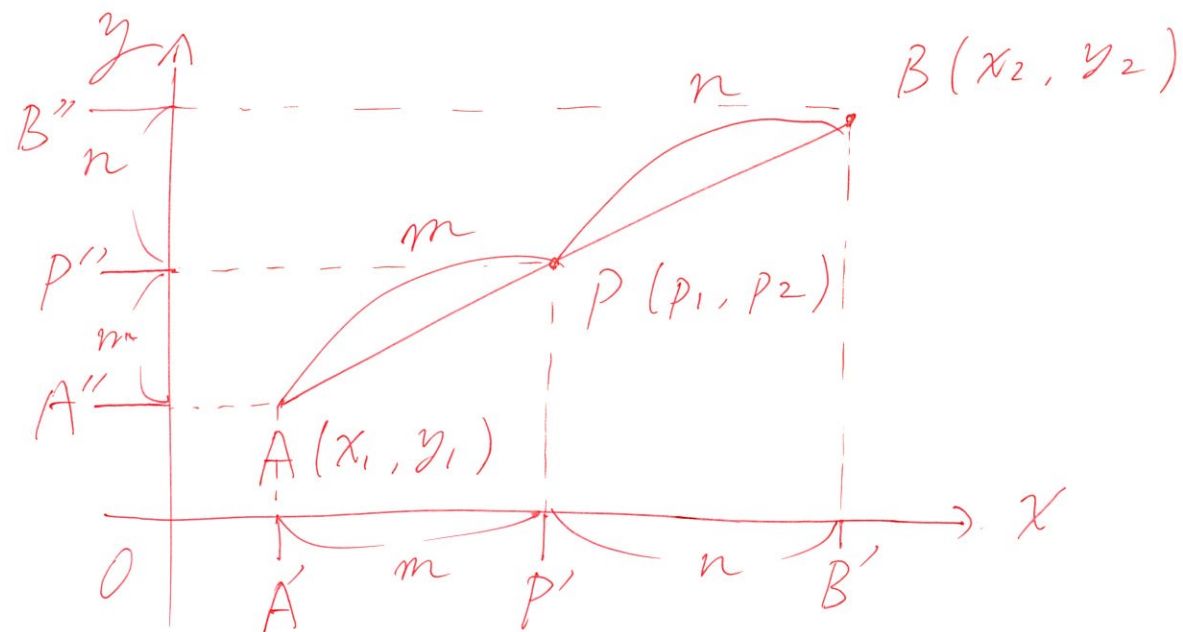
<12/02, 大, 2025> 基礎数学Ⅱ 25 用ノート (1-2)

※ <11/25 ~ 11/28, 2025> はイレフルで学級閉鎖!!

本日 → xy 平面上の内分点と外分点 (p. 175)

～ 円の方程式 (p. 186)

xy 平面上の内分点 & 外分点 (p. 175 ~ 176)



$$\textcircled{1} AP:PB = m:n = A'P':P'B' \rightarrow p_1 = \frac{n x_1 + m x_2}{m+n}$$

$$\textcircled{2} AP:PB = m:n = A''P'':P''B'' \rightarrow p_2 = \frac{n y_1 + m y_2}{m+n}$$

$$\rightarrow \text{内分点 } P = \left(\frac{n x_1 + m x_2}{m+n}, \frac{n y_1 + m y_2}{m+n} \right)$$

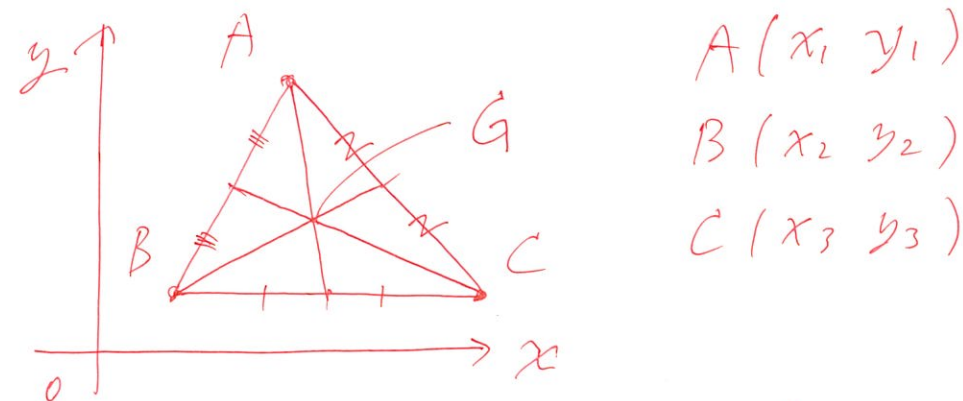
同様に考えると、

$$\rightarrow \text{外分点 } Q(x_1, x_2) = \left(\frac{-n x_1 + m x_2}{m-n}, \frac{-n y_1 + m y_2}{m-n} \right)$$

特に AB の中点 M の座標は

$$\text{中点 } M(m_1, m_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

三角形の重心 (p. 177)

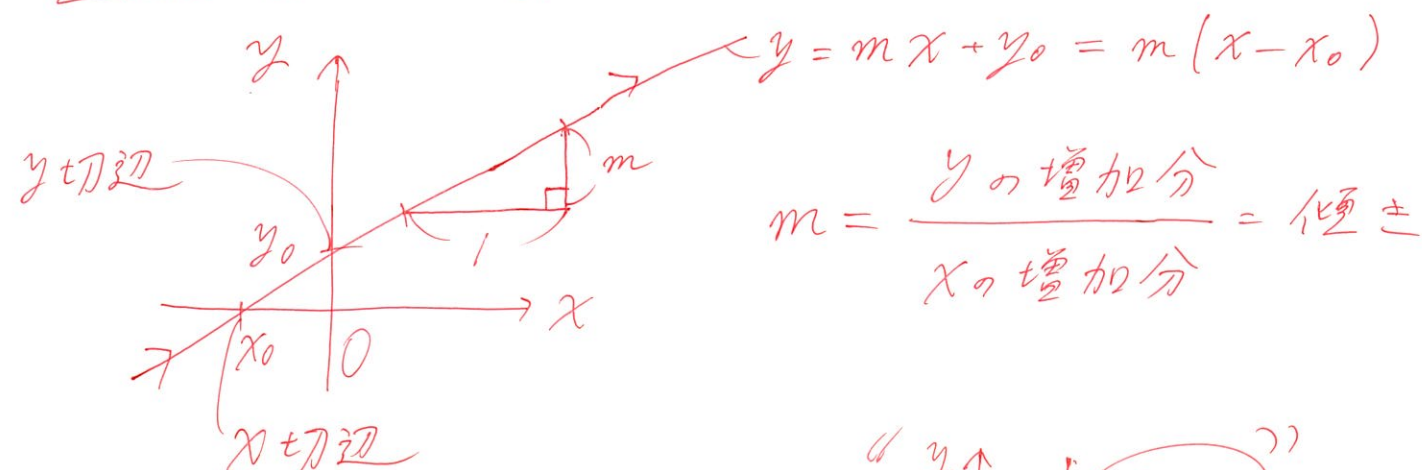


→ 2 の $\triangle ABC$ の重心 $G(x_G, y_G)$ とすると、

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

※ 理由 2 つの 2 は 各直で教科書と!

直線の方程式 (p. 178 ~ 182)



ちなみに傾き $m \rightarrow \infty$ になると、 $x = x_0$ になる。

① 点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

証明: $y = mx + y_0$ が (x_1, y_1) を通る $\rightarrow y_0 = y_1 - m x_1$

$$\text{よって } y = mx + (y_1 - m x_1)$$

$$\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \text{ となった。 (つづく)}$$

② (x_1, y_1) を通り、 y 軸に平行 (= 傾きが無限大) の直線の方程式は $x = x_1$.

2点 P_1, P_2 が与えられた場合の直線の方程式 (p. 179)

2つの点 (x_1, y_1) & (x_2, y_2) を通る直線は

① $x_1 \neq x_2 \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1), m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

② $x_1 = x_2$ (y 軸に平行) $\rightarrow x = x_1$

一般化された直線の方程式 (p. 180)

$$l: ax + by + c = 0 \quad (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0)$$

$$\Rightarrow b \neq 0 \text{ ならば、 } y + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = 0 \text{ より}$$

$$l: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

☆ 色々な書き方にまどわされないように。

2直線の関係 (平行 & 垂直) (p. 182)

$$l_1: y = mx + n, \quad l_2: y = m'x + n' \text{ とする。}$$

① $l_1 \parallel l_2$ (平行) $\Leftrightarrow m = m'$ (傾きが等しい。)

② $l_1 \perp l_2$ (垂直) $\Leftrightarrow mm' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$

※ 理由については各自で教科書を!

軌跡 (p. 183)

ある条件を満たしながら動く点 $P(x, y)$ が描く図形。条件を決めている式は軌跡の方程式。

例 = 例題 6.5 (p. 183)

2点 $(0, 0)$ & $(2, 2)$ からの距離が等しい点 P の軌跡を求めよ。

$$\rightarrow \begin{cases} (0, 0) \text{ からの距離 } d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (2, 2) \text{ " } d'(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \end{cases}$$

$d(x, y) = d'(x, y)$ が軌跡の方程式であるから、

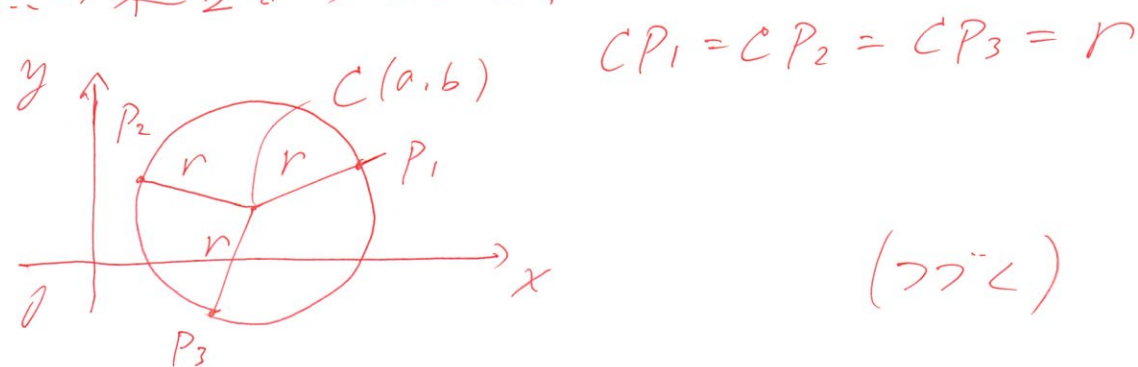
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$0 = -4x - 4y + 8 \rightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \text{ or } \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

円の方程式 (p. 183 ~ 184)

円 = ある中心点 (a, b) からの距離 r である点の集合。すなわち、



(つづく)

(つづき) 円上の任意の点 $P(x, y)$ について、 x と y は、
 $CP = r$ の条件より、次式を満たす。

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r, \quad \text{両辺を2乗して、}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \dots\dots \text{円の方程式}$$

まとめると、 (a, b) が中心で、半径が r の円は、

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{で表される。}$$

円の方程式の変形 (p. 185 ~ 187)

こんなのも円の方程式となり得る ↓

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

x と y について平方完成をすると、

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l^2}{4} + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + n = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 + \underbrace{\left\{n - \frac{l^2}{4} - \frac{m^2}{4}\right\}}_{-R} = 0$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R, \quad \begin{cases} a = -\frac{l}{2}, \\ b = -\frac{m}{2}, \\ R = \frac{l^2 + m^2}{4} - n > 0 \end{cases}$$

したがって、
円の条件がある。

$$\textcircled{1} R = a^2 + b^2 - n > 0 \quad \dots\dots \text{円の方程式,} \\ \text{中心 } \left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right), \text{半径 } \sqrt{R}$$

$$\textcircled{2} R = 0 \quad \dots\dots \text{ただ1点 } \left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$$

$$\textcircled{3} R < 0 \quad \dots\dots \text{そのような図形は存在しない。}$$

例 = 例題 6.6 (p. 186)

3点 $A(-1, 0)$, $B(3, -2)$, $C(1, 4)$ を通る円の方程式を求めよ。またその中心と半径を求めよ。

$$\rightarrow x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \quad \text{と置く。}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -l + n = 1 \\ 3l - 2m + n = -3^2 - (-2)^2 = -13 \\ l + 4m + n = -(1)^2 - (4)^2 = -17 \end{cases}$$

$$\text{これを解くと } \begin{cases} l = -4 \\ m = -2 \\ n = -5 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 5 = 0$$

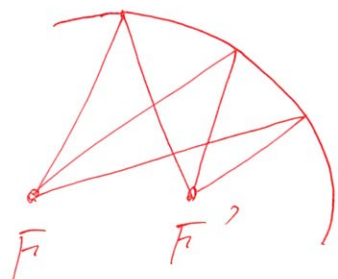
$$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$\rightarrow \text{中心 } (2, 1), \text{半径 } \sqrt{10}.$$

<12/9, 火, 2025> 基礎数学Ⅱ 28 用ノート

楕円... 2つの点 F & F' (焦点という) からの距離の合計が等しい点の集合 = 軌跡。



楕円の方程式 (横長の場合) (p. 187 ~ 189)

$$\begin{cases} F(c, 0), F'(-c, 0), \\ a^2 = b^2 + c^2, a > b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

また、楕円上の1点を P とすると、 $PF + PF' = 2a$ 。

楕円の方程式 (縦長の場合)

$$\begin{cases} F(0, c), F'(0, -c) \\ \cancel{a^2 = b^2 + c^2} \quad b^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$$

2つの焦点 F & F' からの距離の和 = $2b$

横長の場合の証明:

2つの焦点 $F(c, 0)$ と $F'(-c, 0)$ からの距離の和が一定の点の集合を求めろ。この点を $P(x, y)$ と置くと、

$$FP + F'P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = d$$

ここで $d = 2a$ と置く。

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$a^2 \{(x+c)^2 + y^2\} = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx$$

$$\underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} x^2 + a^2 y^2 = \underbrace{a^2(a^2 - c^2)}_{b^2}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

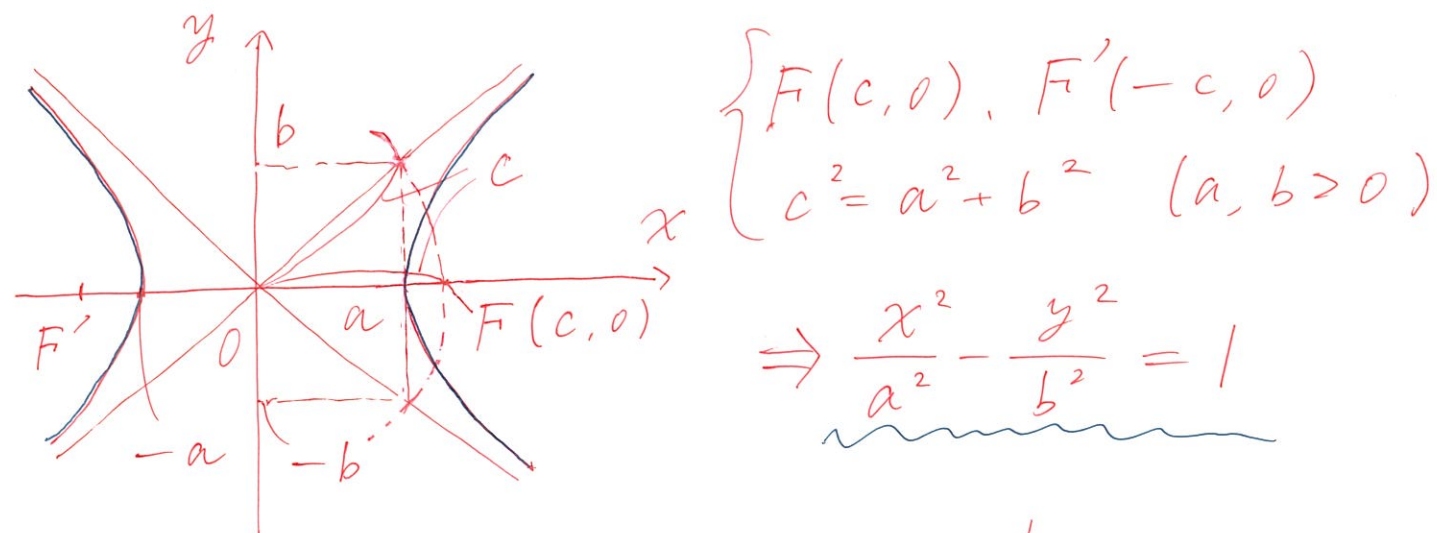
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

縦長の場合の証明 → 各自で!

※基礎数学Ⅰで ~~回転~~ ^{やった} ~~90度~~ 90度回りの回転が $(x, y) = (-y, x)$ である事を使うと楽。(p. 27)

双曲線... 2つの点 F & F' からの距離の差が等しい
 ような点の集合。楕円とはここが違う。

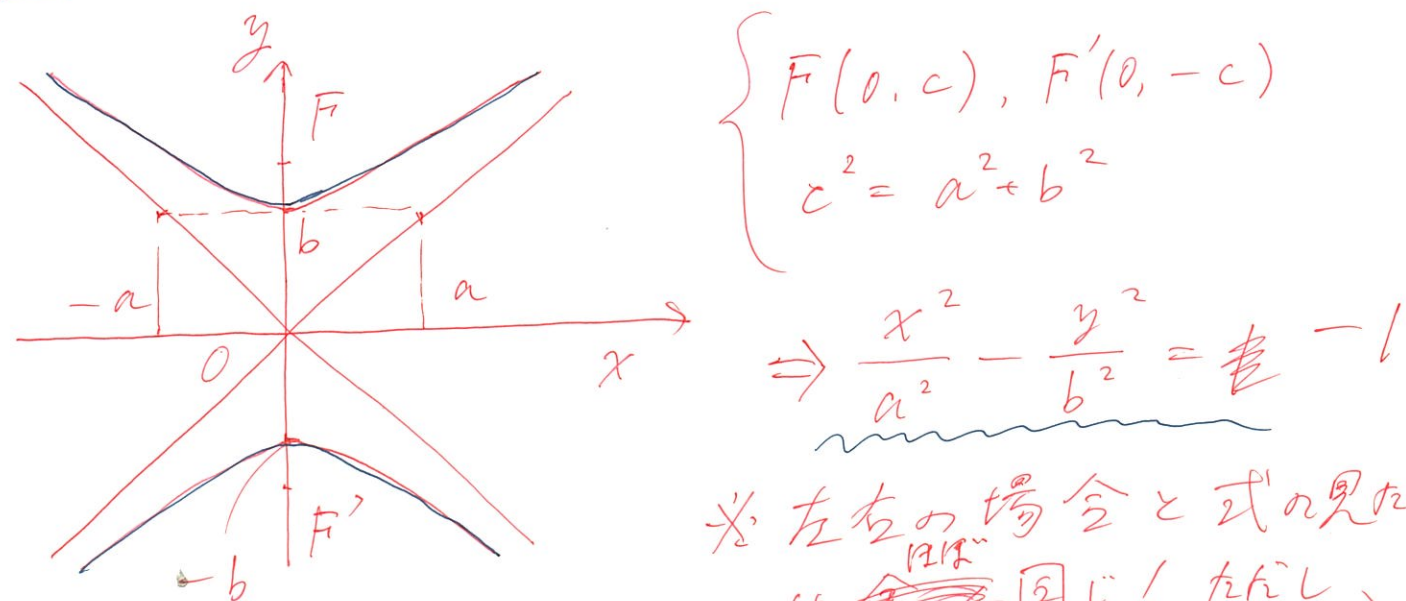
左右に現れる双曲線 (p. 191 ~ 193)



また2の場合、漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

2つの焦点からの距離の差 $|FP - F'P| = 2a$

上下に現れる双曲線 (p. 195)



※ 左右の場合と式の見た目は ~~全然~~ 同じ! ただし、
 焦点の座標が異なり!!

2つの焦点からの距離の差 $|FP - F'P| = 2b$

漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

左辺の場合の証明:

$$FP - F'P = \pm 2a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

~~$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (\pm 2a) + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$~~

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$-4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$cx + a^2 = \mp a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2\{(x+c)^2 + y^2\}$$

$$\underbrace{x^2(c^2 - a^2)}_{b^2} - a^2y^2 = a^2\underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2}$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

また $x \rightarrow \infty$ のときを考えると、

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \cong \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2} = \pm \frac{b}{a} x \quad (x \gg a)$$

これが漸近線の方程式となる。

上下の場合の証明: 左辺の場合で、 $(x \pm c)^2$ の
 代わりに、 $(y \pm c)^2$ としてスタートするだけ。各自で。

楕円と双曲線のまとめ

焦点

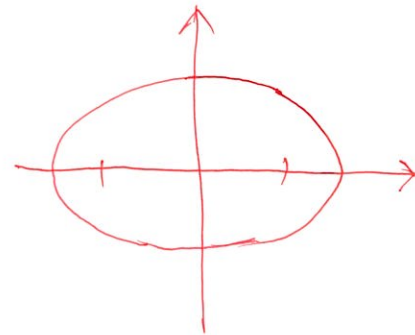
$$\begin{cases} F(c, 0), \\ F'(-c, 0) \end{cases}$$

(x軸上)

楕円 (横長)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

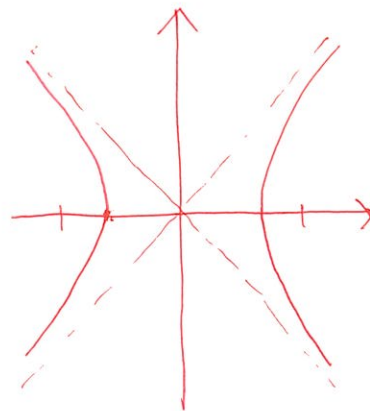
$$(a^2 = b^2 + c^2)$$



双曲線 (左右)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(c^2 = a^2 + b^2)$$



$$\text{漸近線 } y = \pm \frac{b}{a}x$$

焦点

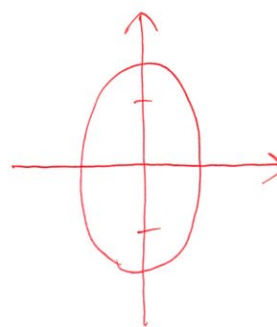
$$\begin{cases} F(0, c), \\ F'(0, -c) \end{cases}$$

(y軸上)

楕円 (縦長)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

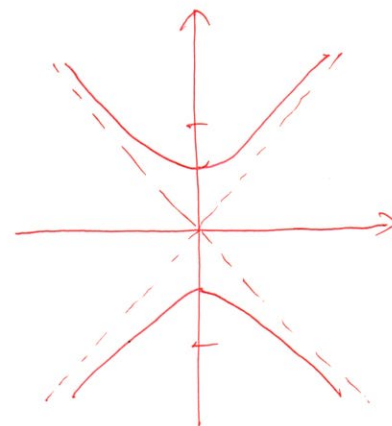
$$(b^2 = a^2 + c^2)$$



双曲線 (上下)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

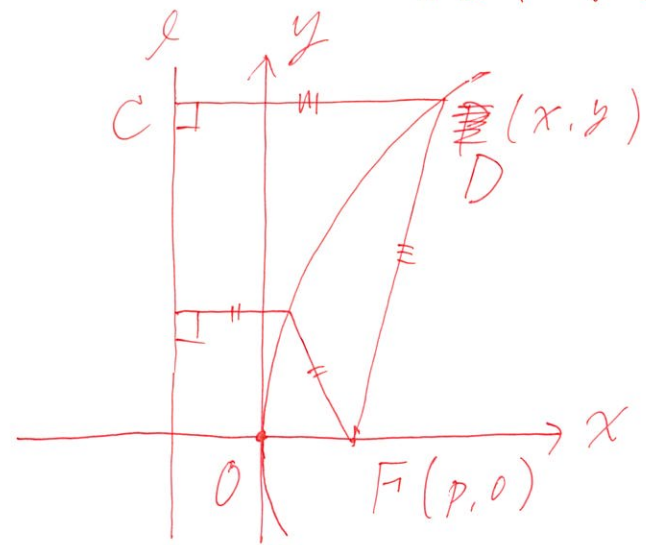
$$(c^2 = a^2 + b^2)$$



$$\text{漸近線 } y = \pm \frac{b}{a}x$$

<12/16, 火, 2025> 基礎数学II 27 月ノート

放物線 --- ある点 F と、その F を含まない直線 l から、等距離にある点の集合。



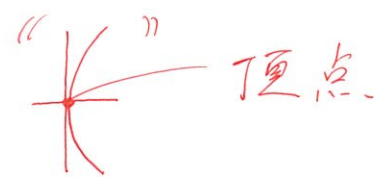
$$D \equiv C = D \equiv F, \begin{cases} F = F(p, 0) \\ C = (-p, y) \end{cases}$$

$$|x - (-p)| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$(x+p)^2 = (x-p)^2 + y^2$$

$$y^2 = 4px$$

F ... 焦点、直線 l ... 準線、この式 ... 標準形、



左右 ~~どちら~~ どちらかに現れる放物線 (p. 197)

$$y^2 = 4px \dots \begin{cases} p > 0 \rightarrow \text{右側}, \text{長} \\ p < 0 \rightarrow \text{左側}, \text{短} \end{cases}$$

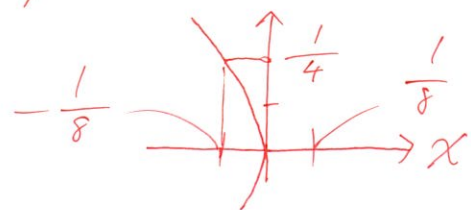
焦点 $F = F(p, 0)$,

準線 $l: x = -p$, x 軸に対して対称。

問 6.26, (2)

$$y^2 = -\frac{1}{2}x = 4\left(-\frac{1}{8}\right)x, \quad p = -\frac{1}{8}, \quad l: x = \frac{1}{8}$$

* 先に放物線, 図盛りは後付け。



上下どちらかに現れる放物線 (p. 197)

左 ~~右~~ どちらかの放物線: $y^2 = 4px$ と、 $x \leftrightarrow y$ すれば求まる。

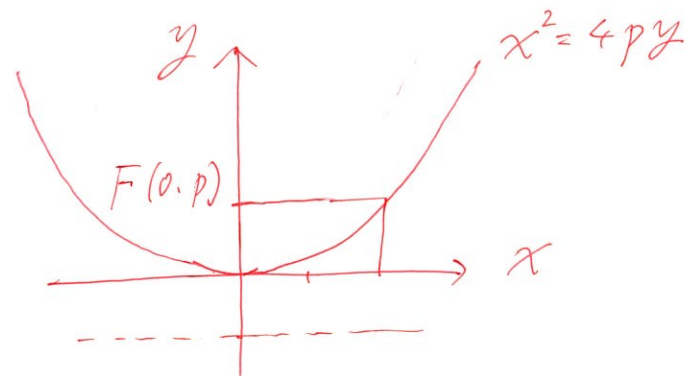
$$\Rightarrow x^2 = 4py, \text{ or}$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \text{ (2次関数)}$$

焦点 $(0, p)$

準線 $l: y = -p$

y 軸に対して対称



$$\begin{cases} p > 0 \rightarrow \text{上} \\ p < 0 \rightarrow \text{下} \end{cases}$$

円, 楕円, 双曲線, 放物線 ... x^2 or y^2 を含む。
→ 2次曲線とまとめて呼ばれます。

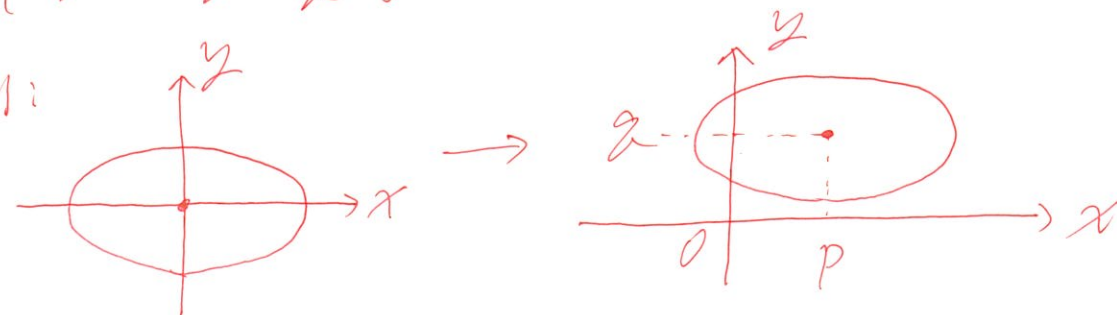
2次曲線の平行移動 (p. 198)

$$\text{何らかの曲線: } f(x, y) = 0$$

これを x 軸方向に $+p$, y 軸方向に $+q$ だけ平行移動した曲線は、次式で表される。

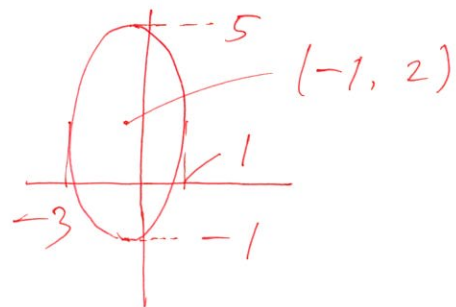
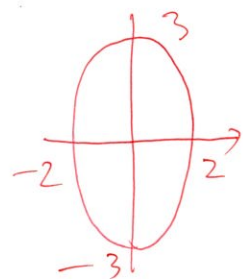
$$\begin{cases} x \rightarrow x-p \\ y \rightarrow y-q \end{cases} \text{ より } f(x, y) \rightarrow f(x-p, y-q) = 0$$

例:



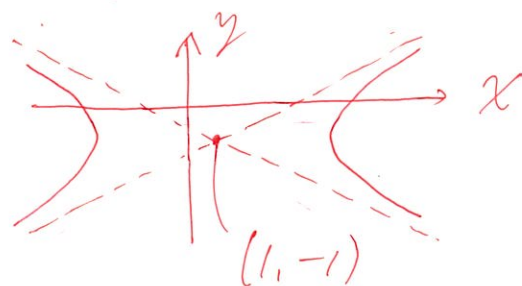
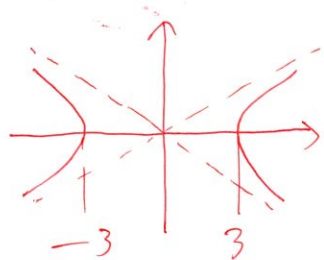
p. 2] 6.29, (1)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \xrightarrow{(x_{k+1}, y_{k+2})} \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$



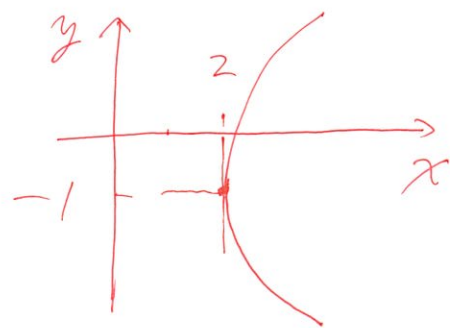
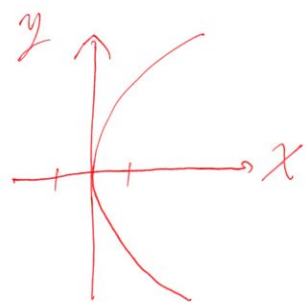
(2)

$$\frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \xrightarrow{(x_{k+1}, y_{k+1})} \frac{(x-1)^2}{9} - (y+1)^2 = 1$$



(3)

$$y^2 = 4x \xrightarrow{(x_{k+2}, y_{k+1})} (y+1)^2 = 4(x+2)$$



2次曲線と直線 (p. 200)

曲線: $f(x, y) = 0$

直線: $g(x, y) = ax + by + c = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right. \rightarrow f(x, y) = g(x, y)$

これを解くと、

共有点が求まる。

p. 2] 6.31 (p. 200)

(1) $\begin{cases} \text{楕円: } 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ \text{直線: } x - y - 1 = 0 \end{cases}$ 元の $y = x - 1$ の方が良さそう。

$y = x - 1$ なので、 $3x^2 + 4(x - 1)^2 - 12 = 0$

$$3x^2 + 4x^2 - 8x + 4 - 12 = 0$$

$$7x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{7}, \quad y = x - 1 = \frac{-3 \pm 6\sqrt{2}}{7}$$

(2) 答え $= (-1, 0) \text{ \& } (-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - (2x+2)^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 4(x+1)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4\{x^2 + 2x + 1\} - 1 = 0$$

$$-3x^2 - 8x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$(3x+5)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \left\{ -1, -\frac{5}{3} \right\}, \quad y = 2x + 2 = \left\{ 0, -\frac{4}{3} \right\}$$

$$(3) \frac{44}{2} z = (1, -1), (4, 2)$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = x \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ (x-1)(x-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \{1, 4\}, y = x - 2 = \{-1, 2\}$$

問 6.32 (p. 201)

$$\begin{cases} \text{円: } (x-3)^2 + y^2 = 1 \\ \text{直線: } y = x + k \end{cases} \rightarrow \text{両者が接するような } k \text{ は?}$$

0 or 9

$$(x-3)^2 + (x+k)^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 + 2(k-3)x + (k^2 + \overset{8}{\cancel{7}}) = 0, \text{ 2次が重解を持つ。}$$

$$D = 4(k-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 + \overset{8}{\cancel{7}})$$

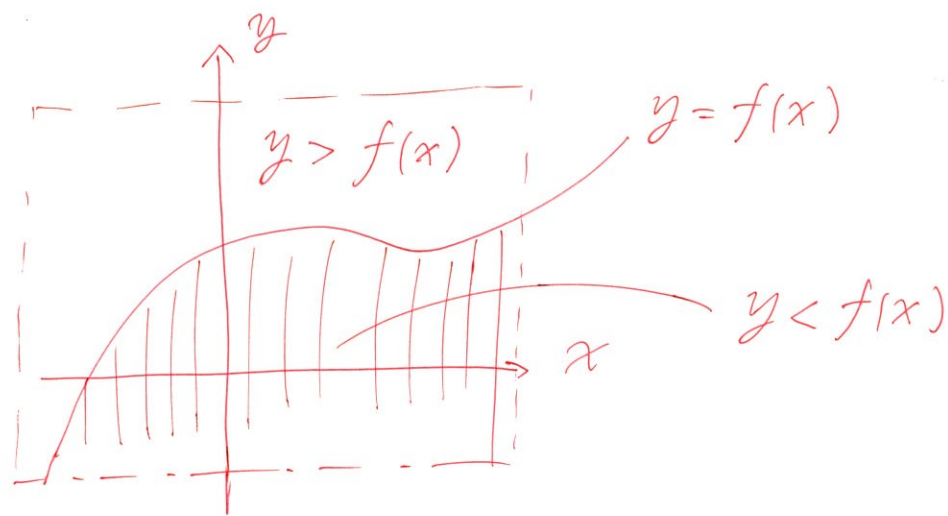
$$= 4k^2 - 24k + 36 - 8k^2 - \overset{64}{\cancel{72}}$$

$$= -4k^2 - 24k + \overset{28}{\cancel{36}} = 0$$

$$k^2 + 6k + 7 = 0$$

$$k = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 7}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

不等式と領域 (p. 202)

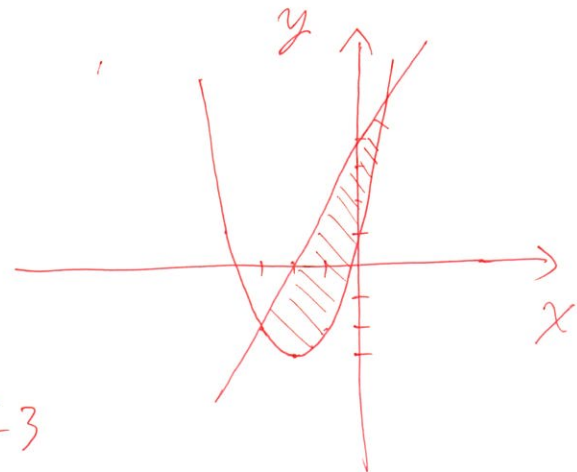


- $\begin{cases} y > f(x) \cdots \cdots \text{曲線 } f(x) \text{ より上側。} \\ y \geq f(x) \cdots \cdots \text{ただしグラフを境界として含む。} \end{cases}$
- $\begin{cases} y < f(x) \cdots \cdots \text{曲線 } f(x) \text{ より下側。} \\ y \leq f(x) \cdots \cdots \text{ただしグラフを境界として含む。} \end{cases}$

連立不等式が表す領域 (p. 203)

例題 6.10

$$\begin{cases} y < 2x + 4 \\ y > (x+2)^2 - 3 \end{cases}$$



交点: $2x + 4 = (x+2)^2 - 3$

$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (1, 4) \text{ \& } (-3, -2) \text{ が交点。}$

$(x+3)(x-1) = 0, x = -3, 1$

よって求めた領域は図中の  部分で、境界は含まない。
 含む/含まない、どちらの場合でも、2の但し書きまで必ず付けたと。

円の不等式を含む不等式が表す領域 (p. 204)

円: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ について、

(1) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \rightarrow$ 円の ~~内側~~ 境界を含まない。

(2) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 \rightarrow$ 円の外側、境界を含まない。

例 6.17

連立不等式 $\begin{cases} y < x + 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

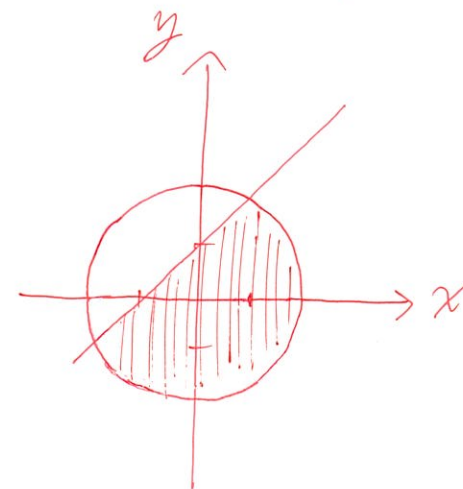
交点: $x^2 + (x+1)^2 = 4$

$2x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$



ただし境界は含まない。

$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \text{ \& } \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

線形計画法 (p. 204)

例題 6.11

	原料 P	原料 Q	利益 / 日
A / kg	5 kg	1 kg	1 万円 / 日
B / kg	2 kg	2 kg	1 万円 / 日

1 日に供給できる原料 P = 14 kg ---- (★1)

" Q = 6 kg ---- (★2)

⇒ 利益を最大化するためには、製品 A & B をどのくらい生産すれば良いか？

⇒ 1 日に生産する A と B の量を x kg, y kg とする。

すると利益 $\underset{k}{=} x \cdot 1 + y \cdot 1 = x + y$ (万円)。

一方で、

必要な P の量 $= 5x + \overset{2y}{=} \leq 14$ kg ← 条件 (★1)

" Q の量 $= x + 2y \leq 6$ kg ← 条件 (★2)

当然 x と y は正の値: $x \geq 0, y \geq 0$

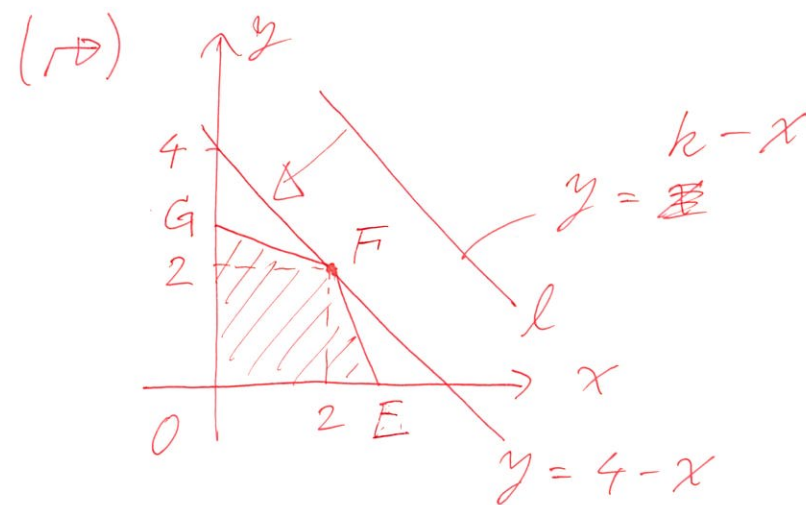
⇒ 以上をまとめると、

条件 $\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 14 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$ の下で、利益 $x + y = k$ を最大化せよ、
という問題になった。

$$5x + 2y = 14 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \overset{7}{=}$$

$$x + 2y = 6 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

(★)



領域 OEF G が
条件式の表す領域。

この上に、 $y = -x + k$
を、 k の値を変え
ること重ねる。

⇒ 領域 OEF G (境界を含む) 上で、 $y = -x + k$ の
 k が最大となるのは、 l が (2, 2) を通る、($k = 4$)
のとき。したがって、

$x = 2$ kg, $y = 2$ kg で A と B を生産したとき、
最大の利益 $k = 4$ 万円 / 日

⇒ 線形計画法 --- 条件で決まる領域の範囲
内で、 $k = ax + by$ を最大
または最小にする解を求める。

〈1/6, 火, 2026〉1-2 基礎数学II [29] 用ノート

今週... 等差数列とその和

数列 (p.1~)

数を一列に並べたもの。最初の数を初項、 n 番目の数を第 n 項という。無限数列の場合は以下のように書く。 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

これを一括して $\{a_n\}$ と書く。 $\{a_n\}$ の第 n 項を a_n ,

$$a_n = n \quad (\text{"n" の } \cancel{\text{項数}} \text{ 或 } \text{項数})$$

と書き表したものを一般項という。

例: $\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, \dots \Leftrightarrow a_n = 2n - 1$

項が有限個で終わる数列を有限数列という。この場合、最後後の項を末項、項の個数を項数という。

例: $\{a_n\} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ (24の約数の列)
 $= a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$

例: $\{b_n\} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ (2~20の間の素数)
 $= b_1, b_2, b_3, \dots, b_8$

※ n 以外の文字も使って良い。 n 以外の添字も。

等差数列 (p.2)

$$a_n = a + (n-1)d$$

a ... 初項, d ... 公差

項数が定められていない = 無限数列の場合には、

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \{a_n\} = a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & \dots \\ n = & 1, & 2, & 3, & 4, & \dots \end{array} \right.$$

図に表すとこんな感じ↓

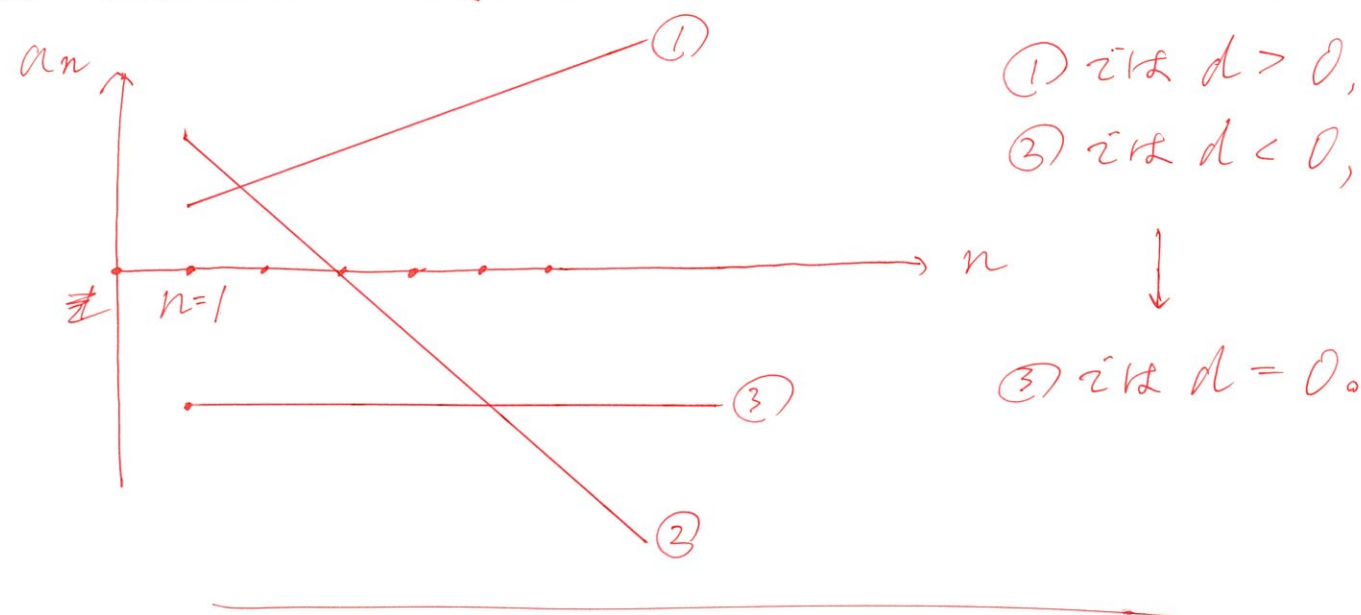


図1.2 (p.3), (証明問題)

(1) 一般項 $a_n = 3n - 2$ の数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを証明する。与式より、

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2) = 3,$$

これがすべての n について成り立つので、 $\{a_n\}$ は公差が $d = 3$ である等差数列である。また初項は、

$$a_1 = 3 - 2 = 1 \quad \text{より、} a = 1 \text{ である。}$$

(2) スキップ。

等差数列の和の公式 (p. 3~4)

$$a_n = a + (n-1)d \text{ に対して、}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ と置く。}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \text{ でもある。}$$

$$\begin{aligned} 2S_n = S_n + S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &+ a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 \\ \hline &= \begin{pmatrix} a_1 \\ + a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ + a_{n-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_n \\ + a_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

22 まで末項を $a_n = l$ とおくと、

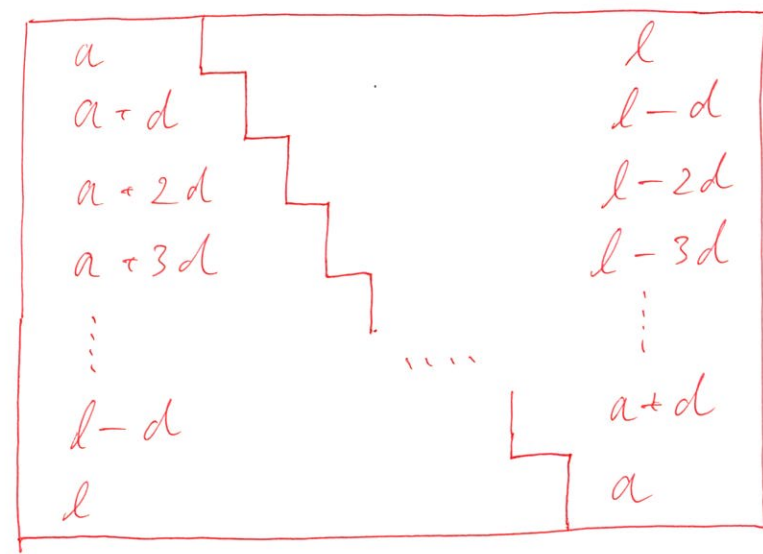
$$\begin{aligned} 2S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \dots + \cancel{a + (n-1)d} \\ &\quad (l-d) + l \\ &+ l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+d) + a \\ \hline &= \begin{pmatrix} a \\ + l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ + l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ + l \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a \\ + l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ + a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

つまり $(a+l)$ が n 個ある。したがって

$$2S_n = n \cdot (a+l), \quad l = a_n = a + (n-1)d \text{ より、}$$

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

これを $\square$ 形に表すと、



$\left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ a+d \\ a+2d \\ a+3d \\ \vdots \\ l-d \\ l \end{matrix}} \right\} n \text{ 段}$

$$1 \text{ 段} = a+l,$$

$$2S_n = n \cdot (a+l)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_n &= \frac{n(a+l)}{2} \\ &= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \end{aligned}$$

例 = 例 1.3 (p. 4)

$$(1) \{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, \dots \text{ (奇数, } a_1 = 1)$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 \rightarrow d = 2, a = 1$$

$$\rightarrow S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(2 + (n-1)2)}{2} = \frac{n^2}{1}$$

$$(2) \{a_n\} = 2, 4, 6, 8, \dots \text{ (偶数, } a_1 = 2)$$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 \rightarrow d = 2, a = 2$$

$$\rightarrow S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n\{4 + (n-1)2\}}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{1}$$

(3) $S_{12} = 324$ とある。導出:

$$\{a_n\} = 5, \dots, a_{12} = 49, \quad (a_1 = 5, a_{12} = 49, \text{等差})$$

$$\text{まず } a_n = a + (n-1)d \text{ と置く。}$$

$$a_{12} = 49 = 5 + (12-1)d = 5 + 11d \rightarrow d = 4,$$

$$\text{よって } a_n = 5 + (n-1)4, \quad (a = 5, d = 4) \quad (n=12 \text{ を代入して } S_{12} = 324)$$

$$\rightarrow S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n\{10 + (n-1)4\}}{2} = \frac{n(2n+3)}{1}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 29 \\ \hline 84 \\ 24 \\ \hline 324 \end{array}$$

<1/13, 火, 2026> 基礎数学Ⅱ (1-2) 130 用ノート

今週... 等比数列とその和

$$\{a_n\} = a, ra, r^2a, r^3a, \dots, r^{n-1}a$$

a ... 初項

r ... 公比 ← マイナスなこともある。無理数も。

問 1.4 (p.6)

(1) $a=3, r=-2$, $a_n = r^{n-1} \cdot a$ より、 $n=5$ までの項

$$\{a_n\} = 3, (-2) \cdot 3, (-2)^2 \cdot 3, (-2)^3 \cdot 3, (-2)^4 \cdot 3$$

$$= 3, -6, 12, -24, 48$$

(2) $a=2, a_4 = -\frac{1}{4}$

まず $a_4 = a \cdot r^3 = 2 \cdot r^3 = -\frac{1}{4}$ より、

$$r^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow r = -\frac{1}{2} \text{ がわかる}$$

したがって $n=5$ までの項は、

$$\{a_n\} = 2, \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2, \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2, \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2$$

$$= 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

(3) $a_3=3, a_5=9$

まず $a_3 = a \cdot r^2, a_5 = a \cdot r^4$ より、

$$\frac{a_5}{a_3} = r^2 = \frac{9}{3} = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3} \text{ がわかる。}$$

よって $n=5$ までの項は、次に初項 a について、
 ~~$\{a_n\} =$~~ $a_3 = 3 = a \cdot r^2 = a \cdot (\pm\sqrt{3})^2$ より、 $a=1$ 。

したがって $n=5$ までの項は、

$$\{a_n\} = 1, 1 \cdot (\pm\sqrt{3}), 1 \cdot (\pm\sqrt{3})^2, 1 \cdot (\pm\sqrt{3})^3, 1 \cdot (\pm\sqrt{3})^4$$

$$= 1, \pm\sqrt{3}, 3, \pm 3\sqrt{3}, 9$$

和の公式 (p.6)

$$a_n = a \cdot r^{n-1} \text{ に対して、}$$

$$S_N \equiv 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_N \quad \text{とすると、これは} \\ \text{次式で与えられる。}$$

$$= \begin{cases} a \frac{1-r^N}{1-r} & (r \neq 1) \\ Na & (r=0) \end{cases}$$

導出:

($r=0$) のときは、単純に、 $a_n = a$ for all n より、

$$S_N = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{N \text{ 個}} = Na \text{ となる。}$$

($r \neq 0$) のとき、

(12ページへ)

($r \neq 0$) のとき、

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{N-2} + ar^{N-1}$$

$$rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{N-1} + ar^N$$

したがって両辺を引くと、公式が得られる。

$$S_N - rS_N = a - ar^N \rightarrow S_N = \frac{1-r^N}{1-r} \cdot a$$

問 1.5 (p. 6)

である等比数列

(3) $a_{n=3} = 3$, $a_{n=5} = 5$ のとき、 S_N は?

まず 問 1.4 (3) の答えから、 $a_n = 1 \cdot (\pm 3)^{n-1}$ である。

したがって、

$$S_N = a \frac{1-r^N}{1-r} = 1 \cdot \frac{1-(\pm\sqrt{3})^N}{1-(\pm\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\{1-(\pm\sqrt{3})^N\} \{1+(\pm\sqrt{3})\}}{\{1-(\pm\sqrt{3})\} \{1+(\pm\sqrt{3})\}}$$

$$= \frac{\{1-(\pm\sqrt{3})^N\} \{1+(\pm\sqrt{3})\}}{-2}$$

$$= -\frac{\{1-(\pm\sqrt{3})^N\} \{1+(\pm\sqrt{3})\}}{2}$$

<1/20, 火, 2026> 1-2 基礎数学Ⅱ ③

→ 小テスト & 解説