

# Development of a cosmic ray propagation simulation code based on magnetohydrodynamic simulations

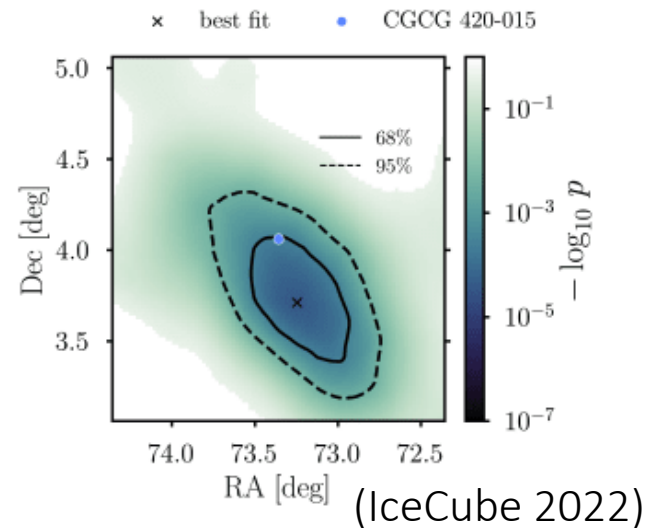
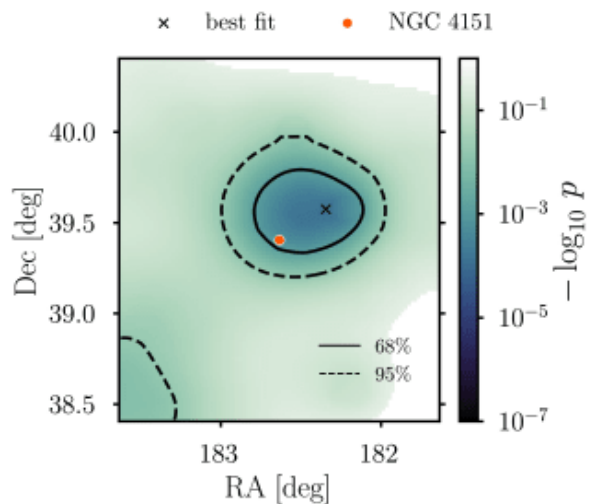
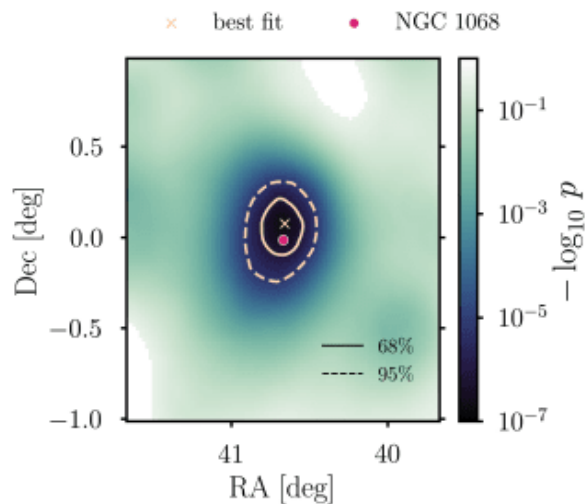
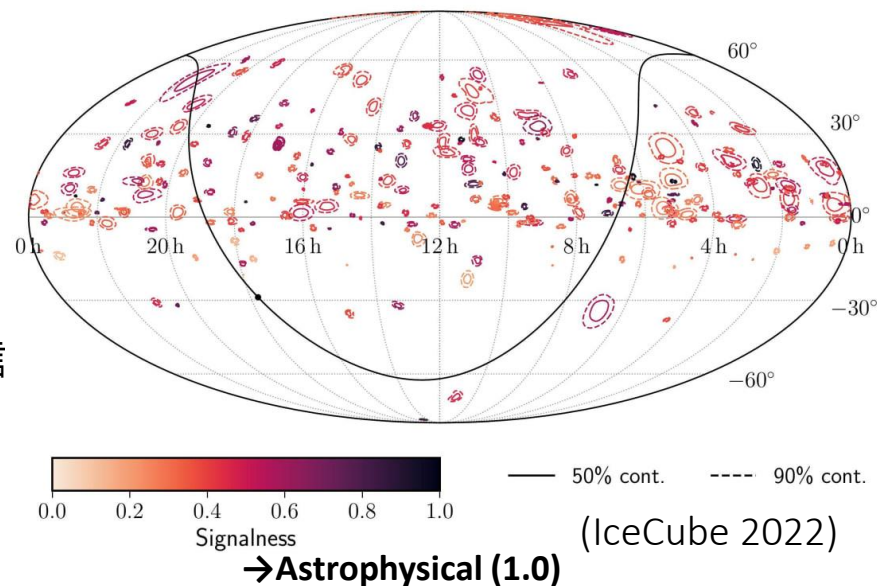
東北大学(2024/4~)

石崎 渉

共同研究者:木村成生,檜山和己

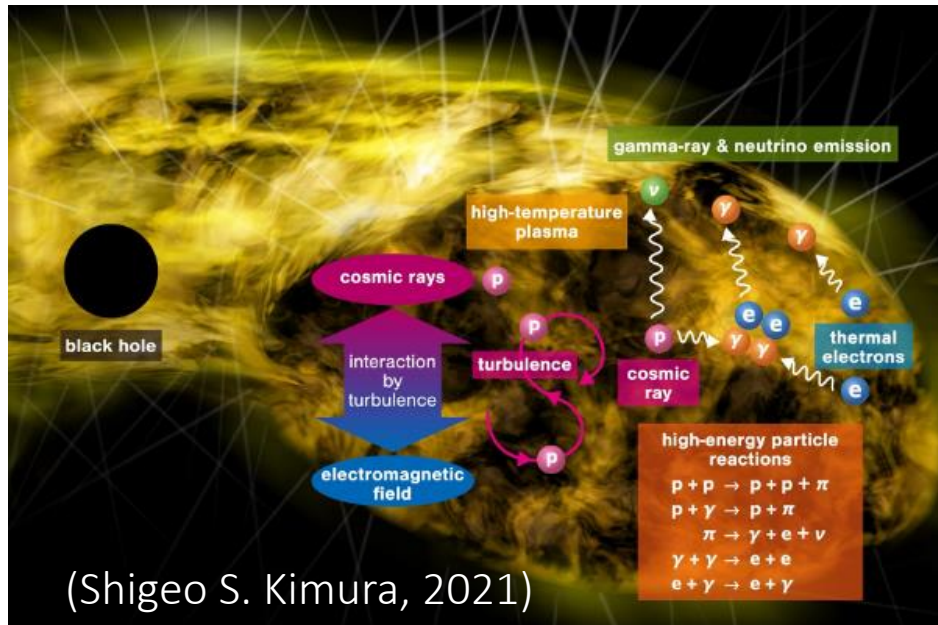
# Astrophysical Neutrinos

- Astrophysical neutrinos
  - 天体ニュートリノの検出 (IceCube 2013)
  - 背景放射だけでなく、点源の候補も
  - いくつかのセイファート銀河からのニュートリノ信号の兆候あり (IceCube 2022)
    - NGC1068 (M77)  $\rightarrow 4.2\sigma$  (post-trial)



# しりたいこと

- ニュートリノ源になる天体はどのような環境？
  - ガンマ線はあまり明るくないが、宇宙線はたくさん出ているはず (e.g. Ahler & Halzen 2017)
  - ガンマ線に対しては”光学的に”厚く、無衝突プラズマが存在する環境
  - AGNにおける銀河中心BH周囲の磁気乱流を伴う低密度降着円盤(orコロナ)？
  - 粒子加速とそれに伴うPhotomeson productionによるニュートリノ放射



(Shigeo S. Kimura, 2021)

## 何を明らかにしたいか

- 粒子はどこで注入されているのか？
- 粒子はどこで加速されているのか？
- 以上の情報はどのように宇宙線/ニュートリノスペクトルに反映されているのか？
- 降着円盤の性質はどのようにスペクトルを変えるのか？



MHD計算で得られた円盤の構造に基づいて、宇宙線の加速と伝播を計算する！

# 解くべき方程式

- Fokker-Planck equation

- 宇宙線の伝搬・加速を記述する移流拡散方程式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}f - D_{xx} \nabla f] + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 \left( -\frac{p}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) f - D_{pp} \frac{\partial f}{\partial p} - \Lambda_{\text{loss}} f \right) \right] = 0$$

- 考える過程

- 移流: 速度場をMHDシミュレーションから読み込む
- 断熱加熱・冷却: MHDシミュレーションから読み込む
- 空間拡散: MHDからモデル化(磁場とその揺らぎなどを使ってモデル化)
- 運動量拡散: 空間拡散と同様
- 注入: MHDシミュレーションからモデル化 (例: reconnection region ( $E \cdot B \neq 0$ ))
- 冷却: 適切な過程 (例: photomeson / p-p collisionに伴う冷却)

この方程式を空間3次元+エネルギー空間1次元でシミュレーションに基づいて解きたい

# Stochastic Differential Equation (SDE) method

- 伊藤型確率微分方程式(SDE; Stochastic Differential Equation)

- 確率過程を含んだ常微分方程式
- 標準形:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -a(\hat{v}) + b(\hat{v}) \cdot \hat{\xi}$$

$$\Leftrightarrow d\hat{v} = -a(\hat{v})dt + b(\hat{v}) \cdot d\hat{L} \Leftrightarrow \hat{v}(t) = \hat{v}(0) - \int_0^t a(\hat{v}(s))ds + \int_0^t b(\hat{v}(s))d\hat{L}(s)$$

$a(v)$ ,  $b(v)$  は適当になめらかな関数、 $\xi$  はガウス過程に従う確率変数

- 確率微分方程式(SDE)と偏微分方程式(PDE; Partial Differential Equation)の1対1対応

- SDEの解の分布関数は、マスター方程式と呼ばれるPDEに従う
- 特に、伊藤型SDEのマスター方程式は移流拡散方程式になる

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \underbrace{-a(\hat{v})}_{\text{Drift}} + \underbrace{b(\hat{v}) \cdot \hat{\xi}}_{\text{Random walk (mean free path)}} \Leftrightarrow \frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial v} (a(v)P(v, t))}_{\text{Advection}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{2} b(v)^2 P(v, t) \right)}_{\text{Diffusion}}$$

$\left( \langle f(v) \rangle = \int f(v)P(v, t)dv \right)$

# Stochastic Differential Equation (SDE) method

- 伊藤型確率微分方程式(SDE; Stochastic Differential Equation)

- 確率過程を含んだ常微分方程式
- 標準形:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -a(\hat{v}) + b(\hat{v}) \cdot \hat{\xi}$$

$$\Leftrightarrow d\hat{v} = -a(\hat{v})dt + b(\hat{v}) \cdot d\hat{L} \Leftrightarrow \hat{v}(t) = \hat{v}(0) - \int_0^t a(\hat{v}(s))ds + \int_0^t b(\hat{v}(s))d\hat{L}(s)$$

$a(v)$ ,  $b(v)$  は適当になめらかな関数、 $\xi$  はガウス過程に従う確率変数

- 確率微分方程式(SDE)と偏微分方程式(PDE; Partial Differential Equation)の1対1対応

- SDEの解の分布関数は マスター方程式と呼ばれるPDEに従う

Ito-SDEをたくさん解いて分布関数を求めれば  
移流拡散方程式を解くことができる！

Drift

Random walk  
(mean free path)

Advection

Diffusion

$$\left( \langle f(v) \rangle = \int f(v)P(v, t)dv \right)$$

# For multi-D equation

- 解くべき方程式: Fokker-Planck方程式 (FP方程式)

- “4次元”の移流拡散方程式 (3次元(位置:  $x, y, z$ ) + 1次元(エネルギー:  $E$  (または  $p$ )))
- 空間拡散は一般に非等方 (つまり拡散係数  $\kappa$  はテンソル)
- 方程式は具体的に以下のように書ける:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla f - \mathbf{V}f) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 \left( \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V})p + \Lambda_{\text{loss}} \right) f \right] + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left( D_{pp} p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \right)$$

- SDEでの定式化

- 多次元のIto-SDE (4変数):

$$dQ^\mu = K^\mu(t, \mathbf{Q})dt + \sum_{\sigma} B_{\sigma}^{\mu}(t, \mathbf{Q})dW_{\sigma}(t) \quad (\mu = 1, \dots, 4)$$

$$K^\mu(t, \mathbf{q}) = A^\mu + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \sigma} B_{\sigma}^{\nu} \frac{\partial B_{\sigma}^{\mu}}{\partial q^{\nu}}$$

- 上記のIto-SDEに対応するマスター方程式:

$$\frac{\partial P(t, \mathbf{q})}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial q^{\mu} \partial q^{\nu}} G^{\mu\nu} - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} K^{\mu} \right] P(t, \mathbf{q}) \quad G^{\mu\nu} = \sum_{\sigma} B_{\sigma}^{\mu} B_{\sigma}^{\nu}$$

# Advantages / Disadvantages (vs. grid-based method)

- 利点

- 多次元化・多粒子種化への拡張が容易
- 高い並列化効率～100%(多数の独立なODEを解くだけ)
- グリッドサイズに起因するCFL条件が発生しないため、計算の安定性を確保しやすい
- 単一の粒子の方程式に対する効果のみを考慮するため、直感的に新しい効果を導入できる

- 欠点

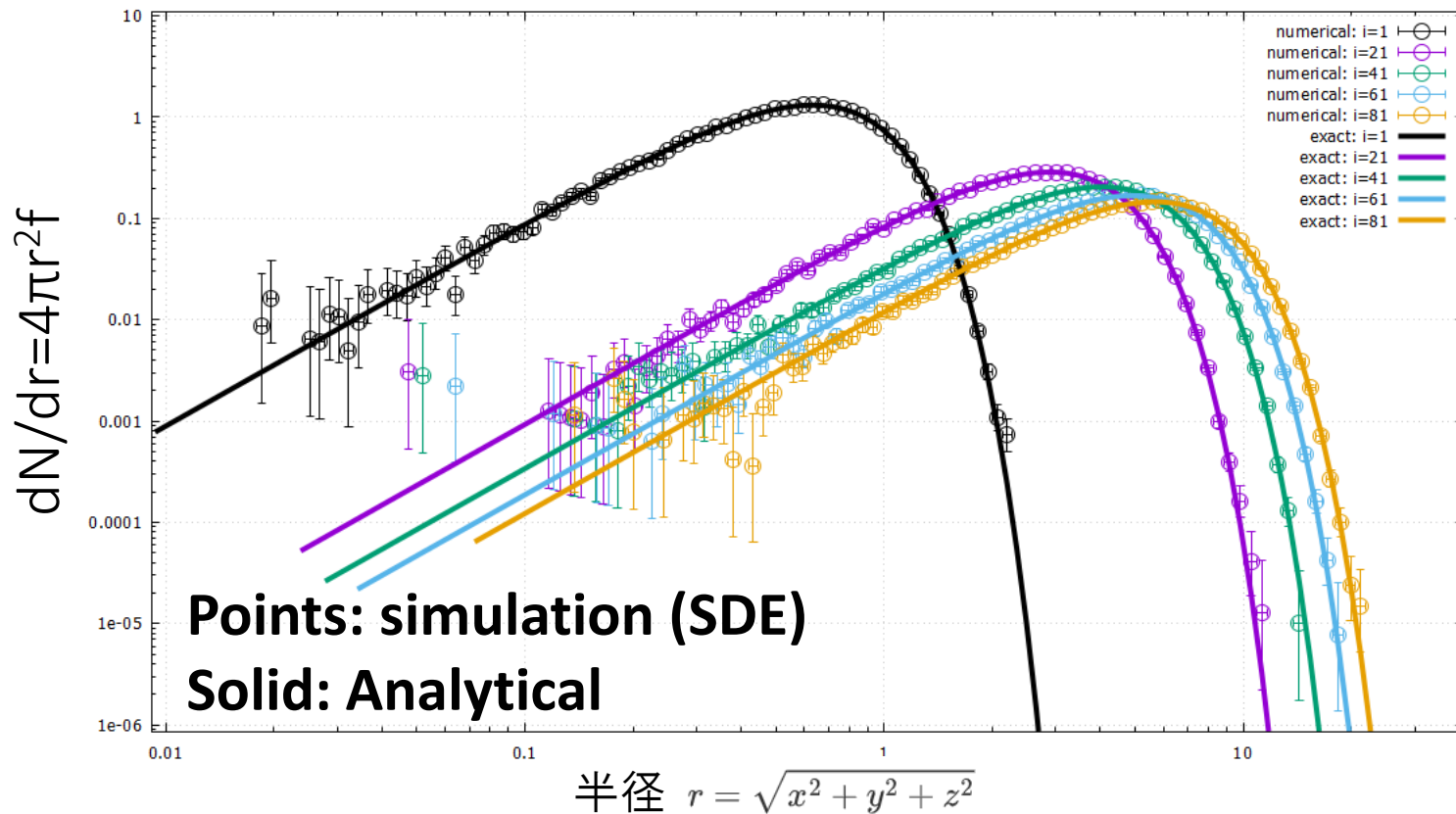
- 境界条件の設定が難しい
  - 特にNeumann境界条件とは相性が悪い
  - 比較的単純な境界条件(例: 無限大で“0”他, Dirichlet境界条件)を考慮するだけなら問題ない
- 計算精度が粒子数の統計に依存する
  - 多次元の情報を得るためには必要な粒子数が爆発的に増える
  - 高い並列化効率で補える(はず)



# Test-calculation 1: simple diffusion in 3D-space

- 3次元の拡散方程式:  $D=1.0$ , impulsive injection in  $t=0$  ( $@r_0=0$ )
  - 計算は空間三次元のデカルト座標( $x,y,z$ )で実行

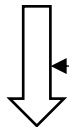
$$\frac{\partial f}{\partial t} - D\Delta f = 0 \quad G(r, t; r_0, t_0) = \frac{1}{\pi^{3/2} [4D(t-t_0)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{|r-r_0|^2}{4D(t-t_0)}\right)$$



# Test-Calculation 2: 乱流加速

- [Mertsch 2011](#); 断熱冷却+運動量拡散を考慮したFP方程式の(非定常)Green関数

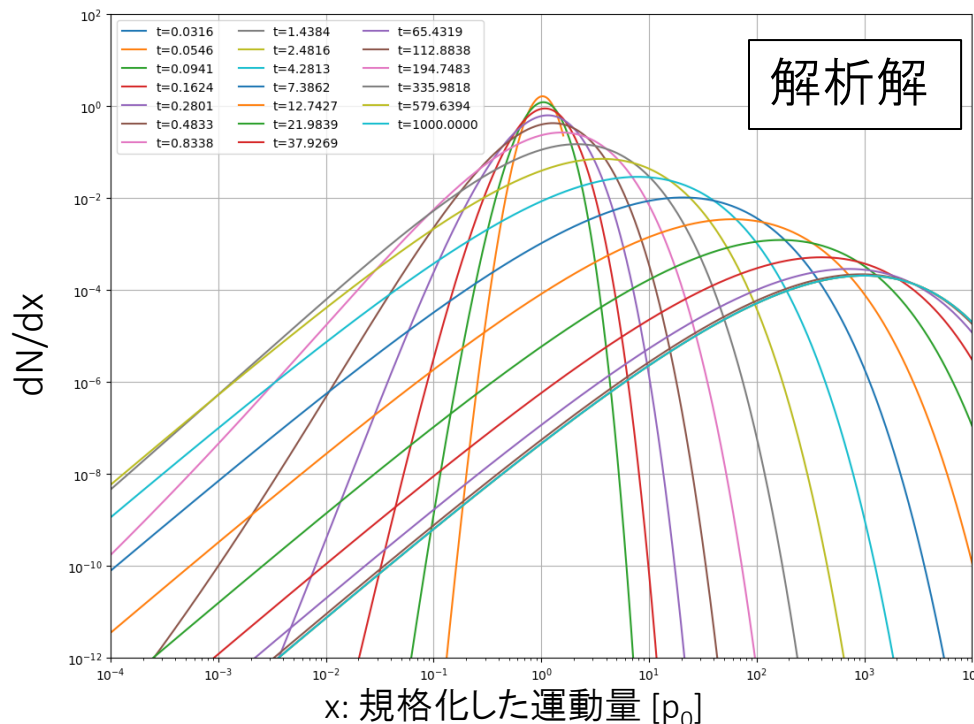
$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left( p^2 \left( -D_{pp}(p, t) \frac{\partial f(p, t)}{\partial p} + A(p, t) f(p, t) \right) \right)$$



$$A(p, t) = mc \left( \frac{p}{mc} \right) a_0, \quad D_{pp}(p, t) = k_0 (mc)^2 \left( \frac{p}{mc} \right)^q$$

Injected at  $t=t_0$  and  $x=x_0$  ( $p=x_0 mc$ )

$$f = \frac{1}{(mc)^3 4\pi x_0^3} \exp\left(-\frac{3}{2} a_0 (t - t_0)\right) \frac{a_0}{k_0} \frac{(x x_0)^{(2-q)/2} \sqrt{g(t)}}{1 - g(t)} \exp\left(-\frac{a_0}{(2-q)k_0} \frac{x^2 - q g(t) + x_0^2 - q}{1 - g(t)}\right) I_{\frac{1+q}{2-q}} \left[ \frac{a_0}{(2-q)k_0} \frac{2(x x_0)^{(2-q)/2} \sqrt{g(t)}}{1 - g(t)} \right] \left( \frac{x}{x_0} \right)^{-3/2}$$



$$g(t) = \exp[-(2-q)a_0(t-t_0)]$$

$I_\nu$ : modified Bessel function

$$m=c=1 \quad a_0=-0.1 \text{ (<0)}$$

$$x_0=1 \quad k_0=0.5$$

$$t_0=0 \quad q=5/3$$

$t \gg 100$  で定常状態

(この問題を選んだ理由)

移流と拡散が空間非一様な場合のテスト

(乗法的ノイズが数值的に解けているかのチェック)

# Test-Calculation 2: 乱流加速

- SDEでの定式化の例示:

- $\phi = 4\pi p^2 f$ を導入してFP方程式をIto-SDEのマスター方程式と対応する形に変形

$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left( p^2 \left( -D_{pp}(p, t) \frac{\partial f(p, t)}{\partial p} + A(p, t) f(p, t) \right) \right)$$

$$\implies \frac{\partial \phi(p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p} \left( \left( A(p, t) + \frac{2D_{pp}(p, t)}{p} + \frac{\partial D_{pp}(p, t)}{\partial p} \right) \phi(p, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D_{pp}(p, t) \phi(p, t))$$

- Ito-SDEとそのマスター方程式の対応 (再掲)

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -a(\hat{v}) + b(\hat{v}) \cdot \hat{\xi} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} (a(v) P(v, t)) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{2} b(v)^2 P(v, t) \right)$$

- 結局FP方程式に対応するSDEは...

$$d\hat{p} = \left( A(p, t) + \frac{2D_{pp}(p, t)}{p} + \frac{\partial D_{pp}(p, t)}{\partial p} \right) dt + \sqrt{2D_{pp}(p, t)} d\hat{W}$$

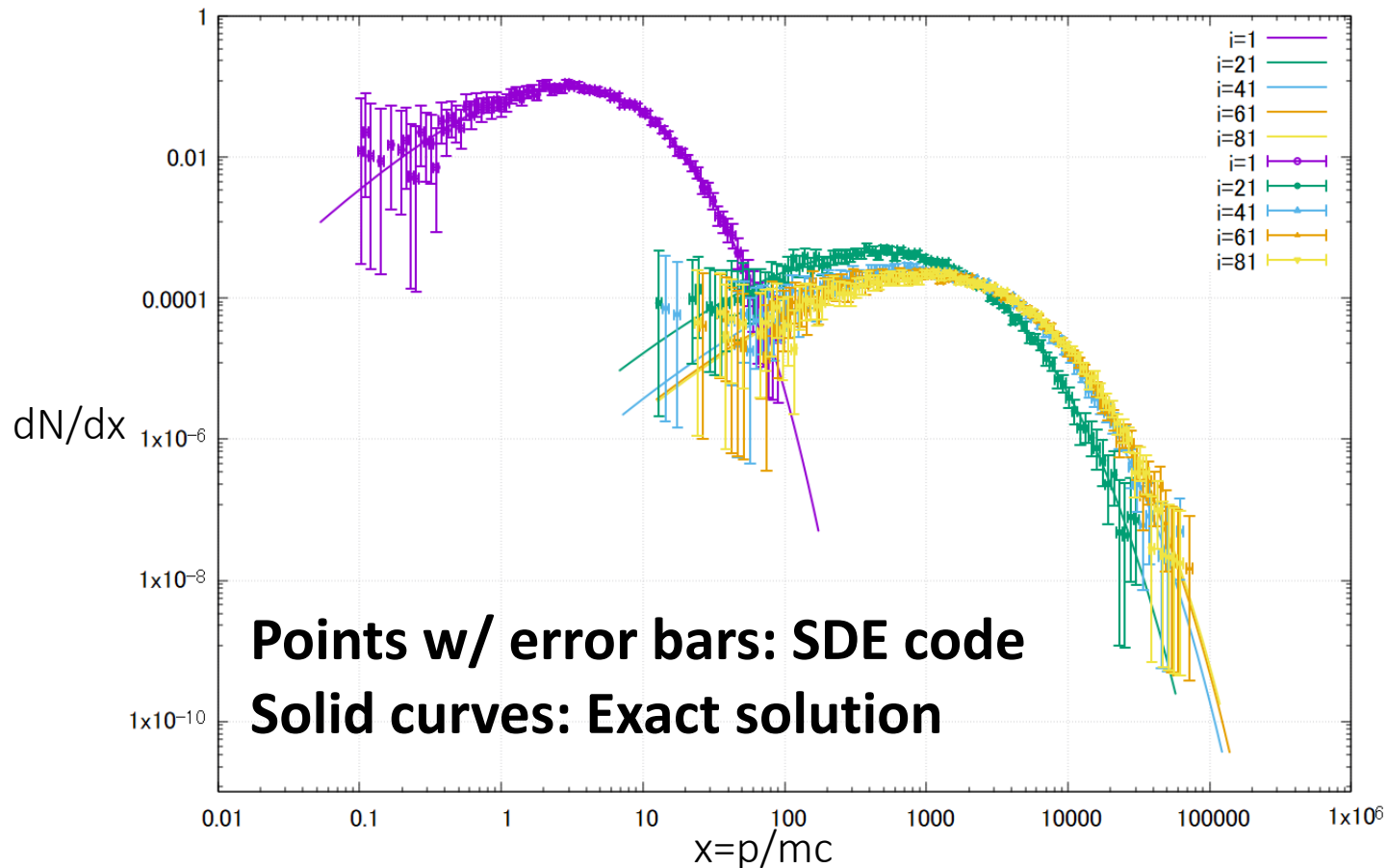
# Test-Calculation 2: 乱流加速

- 厳密解との比較

$$d\hat{p} = \left( A(p, t) + \frac{2D_{pp}(p, t)}{p} + \frac{\partial D_{pp}(p, t)}{\partial p} \right) dt + \sqrt{2D_{pp}(p, t)} d\hat{W}$$

- 点: SDE法で計算(誤差: Poisson統計), 実線: 厳密解(Mertsch 2011)

SDE法でちゃんとFP方程式が解けてる！

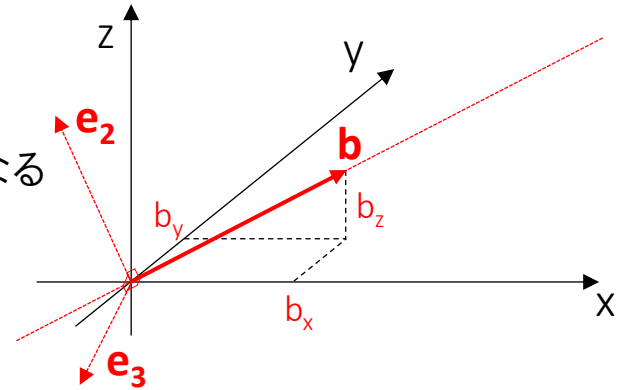


# Test-Calculation 3: 非等方拡散

- 非等方拡散

- 磁力線に平行な拡散と垂直な拡散は一般に異なる
- 拡散係数は以下のように書ける

$$\kappa^{\mu\nu} = \kappa_{\parallel} b^{\mu} b^{\nu} + \kappa_{\perp} (\delta^{\mu\nu} - b^{\mu} b^{\nu})$$



- SDEの係数を求めるには、拡散係数にあたるテンソルを2つのベクトルに分ける必要がある

$$\text{SDE: } dQ^{\mu} = K^{\mu}(t, \mathbf{Q})dt + \sum_{\sigma} \underline{B_{\sigma}^{\mu}}(t, \mathbf{Q})dW_{\sigma}(t) \quad (\mu = 1, \dots, 4)$$

$$K^{\mu}(t, \mathbf{q}) = A^{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \sigma} \underline{B_{\sigma}^{\nu}} \frac{\partial B_{\sigma}^{\mu}}{\partial q^{\nu}}$$

$$\text{PDE: } \frac{\partial P(t, \mathbf{q})}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial q^{\mu} \partial q^{\nu}} \underline{G^{\mu\nu}} - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} K^{\mu} \right] P(t, \mathbf{q}) \quad G^{\mu\nu} = \sum_{\sigma} \underline{B_{\sigma}^{\mu}} \underline{B_{\sigma}^{\nu}}$$

拡散係数にあたるテンソル

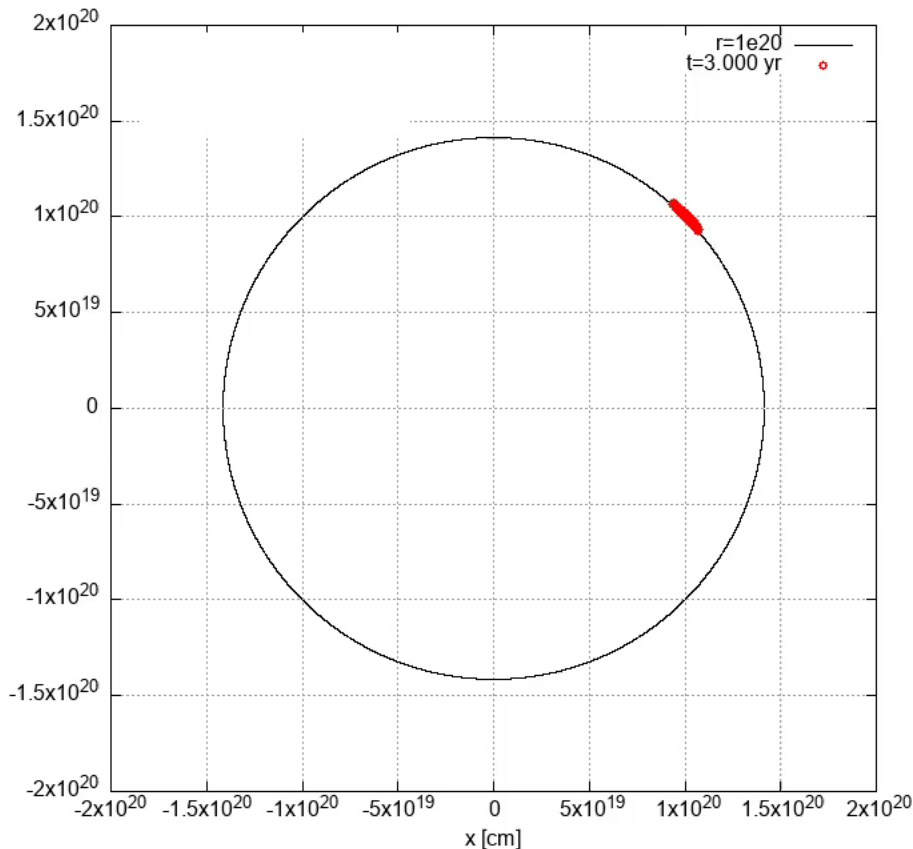
- 次のようにすれば作れる

$$B_1^{\mu} = \sqrt{2\kappa_{\parallel}} b^{\mu}, \quad B_{2,3}^{\nu} = \sqrt{2\kappa_{\perp}} e_{2,3}^{\nu}$$

$$\sum_{k=1}^3 B_k^{\mu} B_k^{\nu} = 2\kappa^{\mu\nu}$$

# Test-Calculation 3: 非等方拡散

- 磁力線:  $\phi$ 方向のみ
  - ほぼ平行拡散  $\kappa_{\perp} = 10^{-6} \kappa_{\parallel}$  ( $\kappa_{\parallel} = 3.0 \times 10^{28} (E/10 \text{ GeV})^{1/3}$ )
  - Setting: 1000-particles, 3000yr, Power-law injection to energy space



$$\overleftrightarrow{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{\perp} + (\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{y^2}{x^2 + y^2} & -(\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{xy}{x^2 + y^2} & 0 \\ -(\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{yx}{x^2 + y^2} & \kappa_{\perp} + (\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{x^2}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\perp} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\kappa} = -\frac{\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}}{\rho} \hat{\rho}$$

$(\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$

非等方拡散もうまく解けた！

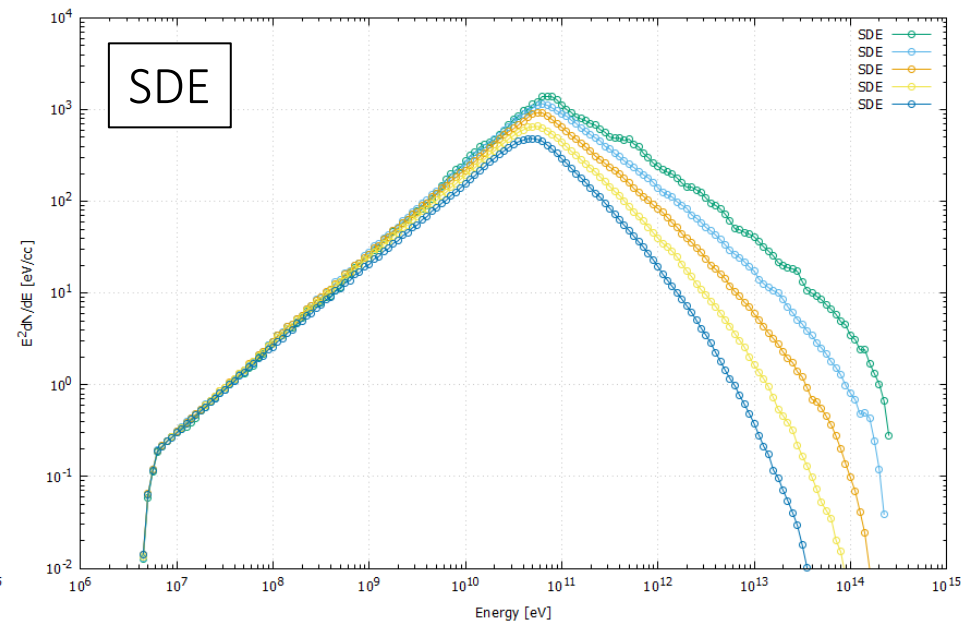
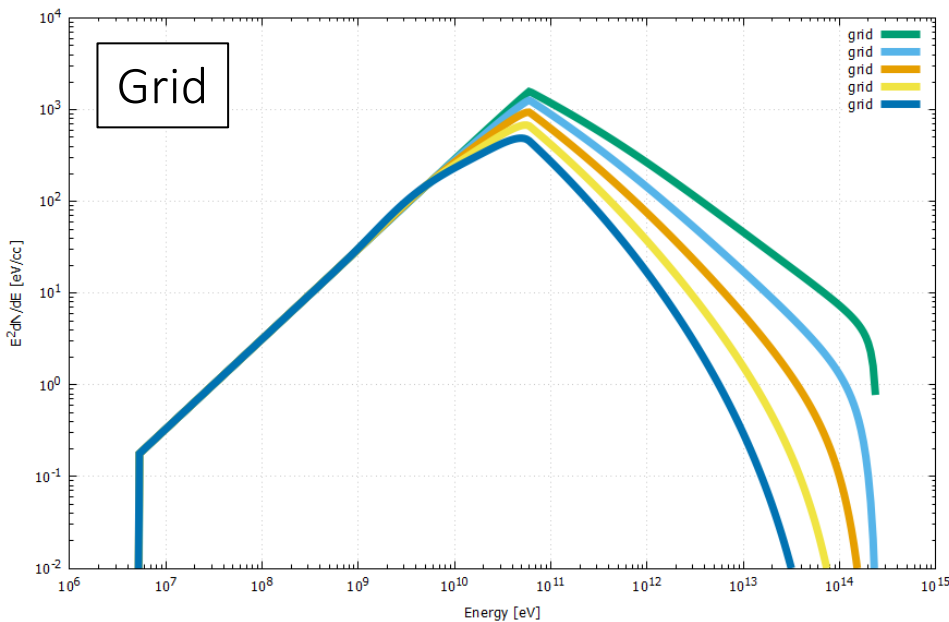
概ねすべての項を解けるようになった

⇒次はMHD計算との接続

# Test-Calculation 4: Pulsar Wind Nebulae

- MHD計算との接続テスト

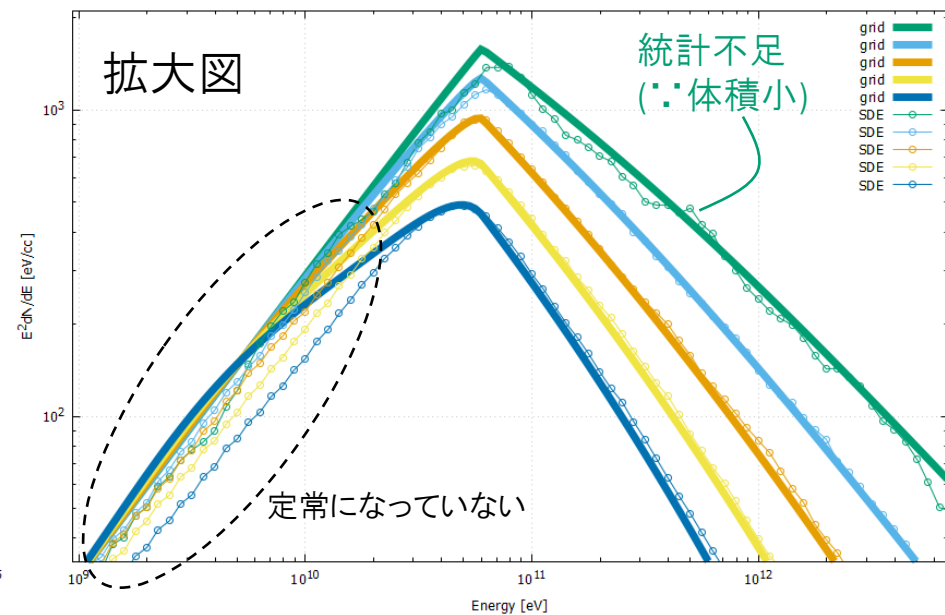
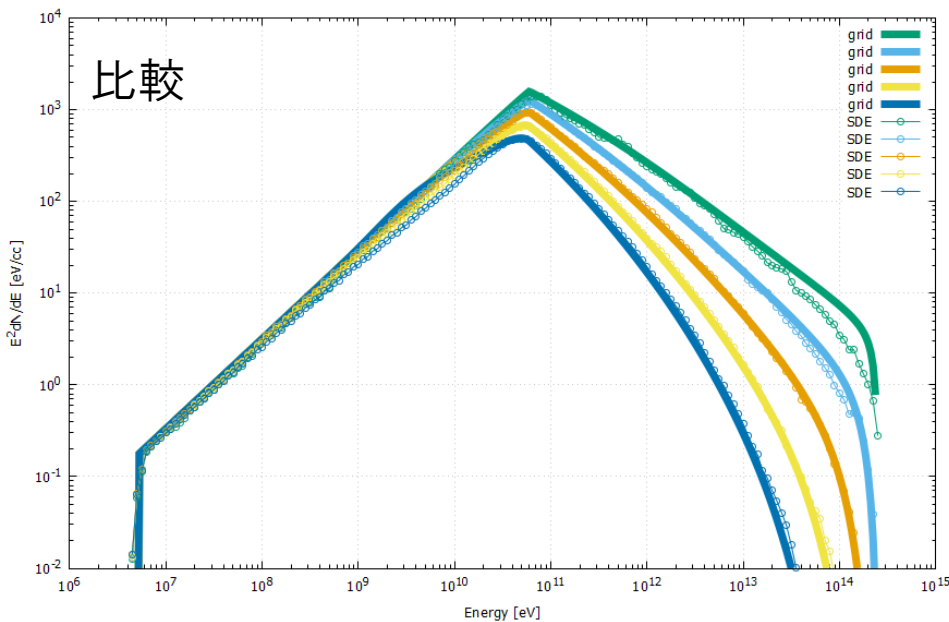
- (模擬の3D)MHDデータを読みこんで速度場・磁場を取得 (デカルト座標, 等間隔grid 200x200x200)
- 比較対象: パルサー星雲の球対称定常拡散モデル (Ishizaki+2018; 左図)
- 計算設定の違い:
  - 境界条件: SDEコードでは固定境界を再現するために適当な時間間隔で粒子を複数回注入
  - 定常/非定常: Gridコードは定常の式を解いているが、SDEコードは非定常の式を定常になるまで解く
- 各半径における粒子のエネルギースペクトル (SDEコードでは3+1次元で計算)



# Test-Calculation 4: Pulsar Wind Nebulae

- MHD計算との接続テスト

- (模擬の3D)MHDデータを読みこんで速度場・磁場を取得 (デカルト座標, 等間隔grid 200x200x200)
- 比較対象: パルサー星雲の球対称定常拡散モデル (Ishizaki+2018; 左図)
- 計算設定の違い:
  - 境界条件: SDEコードでは固定境界を再現するために適当な時間間隔で粒子を複数回注入
  - 定常/非定常: Gridコードは定常の式を解いているが、SDEコードは非定常の式を定常になるまで解く
- 各半径における粒子のエネルギースペクトル (SDEコードでは3+1次元で計算)





# Summary

- まとめ
  - MHDシミュレーションの上で宇宙線の加速と伝播を解くポストプロセスコードを開発中
  - SDEを用いる手法で、容易に拡張可能で並列化効率の高いコードが作れそう
  - 進行状況:
    - 移流拡散方程式の各項は実装済み
    - MHDシミュレーションから物理量を読み込んで計算できるようになった
  - 本計算コードで得られる情報:
    - 各粒子の各時刻における位置とエネルギー
    - 最初に注入された位置座標、粒子の軌跡も記録可能
- 次にやること
  - 実データに基づく拡散係数のモデル化、SDEコードへの実装
  - 人工的に立てた乱流を用いて既知の解析的な結果との整合性チェック