String 理論における K-theory と非可換幾何

京都大学基礎物理学研究所　　浅川　嗣彦[1]

1　Introduction

String 理論は、量子重力を含む無矛盾な理論の最も有力な候補として以前から盛んに研究されている。しかし、理論自身は摂動論的にしか定義されておらず、未だその全貌を知るには至っていない。その一つの大きな原因は string 理論の内包している幾何、特に時空構造に関係する幾何がどんなものかが分かっていないことにあると思われる。古典重力を記述する一般相対論の場合には Riemann 幾何が対応していた。同様に string 理論の背景にある幾何がわかれば、それをヒントにして理論を定式化することができると考えられる。単純に考えると、string 理論には closed string が存在しその massless mode として重力を含むものであるから、string という非局所性を取り入れたような時空の幾何が対応しているはずである。しかし、現状ではその答えは見つかっていない。

ところがここ数年来、D-brane の発見により string 理論の非摂動的な理解は急速に深まってきた。特に、D-brane の持つ、理論の強結合領域でも安定であるという BPS 性により、string 理論の間の duality が調べられてきた。その結果、string 理論はある特定の領域では string を基本にする理論であるが、別の領域では D-brane が基本的な対象にも成り得るということがわかってきた。このことから、string 理論を D-brane から非摂動的に定式化しようと考えるのは自然な流れであろう。現在行われているいくつかの研究もこの方向性に沿っているといえる。それは大きく 2 つに分けられる。その一つは string field theory である [2]。これは時空を埋める 10 次元の D-brane 上に励起する open string を考え、粒子が第二量子化されて場の理論になるのと同様、open string を場の理論として定式化する試みである。もう一つは matrix model と呼ばれる理論で、無限個の 0 次元あるいは 1 次元の D-brane を基本的な対象とみなす理論である [3, 4]。この場合そもそもが多体系であるから、場の理論とは違う形の第二量子化と考えられる。

従ってここで問題にするのは、D-brane の理論の内包する幾何はどんなものか？という問である。D-brane の力学はそこに付着する open string の力学であるから、それは open string の幾何と言っても良い。しかしそれを理解するのも簡単ではない。そこで、本稿ではもう少し問題を絞って、「最大次元（または最低次元）の D-brane 系から、全ての低次元（高次元）の D-brane をその理論の枠内で構成する」ということを考える。より具体的には、「いかに低次元（高次元）の D-brane を構成するか？」ということと、「その D-brane をどのように分類するか？」という問に対しての現在での理解について説明したい。これには open string の最低次の mode の幾何が関係しているため、上の 2 つの方向性をサポートするためにも最低限理解しておくことが必要と思われる。しかしそれだけではなく、このこと自体をヒントに新たな定式化の方向性を探るという目的もある。

本稿の話の流れは以下の通りである。§2 ではまず、これから扱う対象である D-brane の性質や有効理論での記述を紹介する。次いで non-BPS D-brane 系と呼ばれる BPS ではない D-brane 系を導入し、最大次元の non-BPS D-brane 系からの低次元の D-brane の構成を行う。これらは理論に含まれるタキオン場の凝縮（tachyon condensation）によって安定化するときのソリトン解として作られる。§3 ではその D-brane が topological K-theory で分類されることを見る。§4 では背景に B-field がある場合の D-brane を考える。このときの D-brane 上の理論は非可換ゲージ理論で記述され、非可換 D-brane と呼ばれるものになる。§5 では、非可換ゲージ理論のソリトンに関する知識を用いて最大次元の非可換 D-brane からの同様の構成を行う。それらは C^* 代数の (algebraic) K-theory により分類されると考えられる。以上をまとめる

[1] asakawa@yukawa.kyoto-u.ac.jp

と大体以下のような表になる。

高 → 低	作り方	分類
可換 D-brane	ソリトン解	topological K-theory
非可換 D-brane	非可換ソリトン	algebraic K-theory

(1.1)

その後は、上とは逆に、最低次元の系から全ての高次元の D-brane を構成する話に移る。まず非可換 D-brane が、無限個の最低次元の D-brane 系における非可換平面解としても記述されることを §6 で見る。ここで無限個というのが作用素環に置き換わるところが重要である。そしてこの観点を応用し、§7 では無限個の最低次元の non-BPS D-brane 系から全ての D-brane が構成できること、またその分類が可能であることを示す。これらを上と同じ表で表すと、

低 → 高	作り方	分類
(非) 可換 D-brane	spectral triple	analytic K-homology

(1.2)

となる。即ち、低次元の系からの構成では作用素環だけでなく、非可換微分幾何や K-homology が登場する。最後に両者の構成を KK-theory を用いて統一的に理解できることを見る。

なお、上の表 (1.2) は我々の得た最近の結果である [1]。従って §7 だけは review ではないことを予めお断りしておく。本稿は参考文献は全く網羅していない。また内容が多岐に渡るため、全体的に説明不足の感があるので、各章冒頭に挙げる代表的な review 文献も参考にして頂きたい。

2 D-brane と non-BPS system

この章ではまず D-brane についての基本的知識を整理し、次いで non-BPS D-brane 系を導入する。これらが以下の考察の主な対象である。そしてこれらの間にタキオン凝縮を通して成り立つ関係 (descent relations) について見る。なお、string 理論と D-brane については [5] が、non-BPS D-brane 系については [6] が基本的な文献である。

さて、本稿で考える string 理論は最も簡単な構造の Type II string 理論に限る。これは closed superstring の理論である。摂動論的には 2 次元 Riemann 面から 10 次元時空 X への写像を場とする σ-model で記述される。時空には $N = 2$ の超対称性 (32 個の生成子で生成される) があるが、その chirality により、Type IIA と Type IIB の 2 種類の理論がある。以下で必要なのは closed string の bosonic massless mode の種類くらいである。時空 X 上に以下の massless 場が存在する。

$$\begin{cases} \text{NSNS sector}: & \phi,\ g_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu} \\ \text{RR sector}: & C^{(p+1)} \end{cases} \tag{2.1}$$

NSNS sector の場はそれぞれスカラー場 (dilaton)、2 階対称テンソル (graviton)、2 階反対称テンソル (B-field) で、特に graviton と dilaton が重力を表す場である。RR sector の場は時空の $(p+1)$-form で、RR-field あるいは RR-form と呼ばれる。但し、許される p は Type IIA では even、Type IIB では odd に限られる。また、B-field と RR-form はゲージ場 (の高次版) である。例えば B-field は 2-form であるが、1-form のゲージパラメーター Λ により $B \mapsto B + d\Lambda$ というゲージ変換性を持つ。低エネルギーでは Type II string 理論は、これら massless 場から成る超重力理論 (SUGRA) で記述される。以下ではこれらの場を背景として、その中で D-brane を考えてゆく。後で分かるが、D-brane を通して見れば、B-field は非可換幾何と関係があり、RR-form は K-theory と関係がある。また以下では時空の計量が Euclid か Minkowski かの違いはあまり気にせず、string scale α' は特に必要なとき以外は $2\pi\alpha' = 1$ とおく。

2.1 BPS D-branes

D-brane は「open strings の端が付着することができる時空 X 中の超対称な超曲面 M」として定義される広がった object である。M が $p+1$ 次元のときには Dp-brane と呼ばれる。ここで時間 1 次元と空間 p 次元とを合わせて $p+1$ 次元である。例えば D0-brane は時空中の粒子の軌跡を、D(-1)-brane は時空を占める一点をそれぞれ表す。以下 D-brane のいろいろな特徴を羅列してみる。

- RR-charged object (closed string の source)
  closed string から見ると、Dp-brane は厳密には closed string の 2 次元 worldsheet の境界状態として定義される。あるいは低エネルギーの SUGRA では、時空の領域 M に広がったソリトン解 として記述される。これは D-brane が closed string の吸収、放出を行うことを意味する。特に massless 場の重力、RR-form と結合する。その結合の大きさをそれぞれ tension(体積あたりの mass) T_p と RR-charge μ_p で表す。D-brane が charge を持つと普通言うのは、μ_p を単位として測られる RR-charge のことであり、一枚の Dp-brane は最小結合 $\mu_p \int_M C^{(p+1)}$ により対応するゲージ場 $C^{(p+1)}$ の source になっている。従って許される Dp-brane は p が

$$\begin{cases} \text{IIA}: & p=0,2,4,6,8 \\ \text{IIB}: & p=-1,1,3,5,7,9 \end{cases} \tag{2.2}$$

  のときである。また M は向き付けを持ち、逆向きは逆の単位 RR-charge を持つので、これを anti-Dp-brane あるいは $\overline{\mathrm{D}p}$-brane と呼ぶ。

- BPS object
  BPS 性とは一般に mass と charge の間にある関係が付いて、超対称性を保つ状態をいう。Dp-brane は $T_p=\mu_p$ を満たし、時空の超対称性の半分を保つ BPS 状態である。平行に置いた 2 枚の Dp-branes の間には closed string の放出、吸収により力が働くが、BPS 性により重力と RR-form による斥力が釣り合って相殺する。従って、平行な Dp-brane の間には束縛エネルギーが生じず、何枚重ねたものも BPS である。なお、以下では BPS ではない D-brane が出てくるので、特にそれと区別したいときは BPS D-brane という言い方をする。

- dynamical object
  境界のある worldsheet は open string の worldsheet とも解釈されるので、D-brane に open string の端が付着した状態とみなせる。この open string の massless mode は、D-brane の低エネルギーでの運動を記述する自由度と解釈される。これにより D-brane は dynamical に運動したり形を変えたりする object になり、その力学は低エネルギーでは M 上の massless 場の理論で記述される。実際、時空 $X=\mathbb{R}^{10}$ 中の Dp-brane $M=\mathbb{R}^{p+1}$ の場合、両方の端が M に乗った open string から生じる M 上の bosonic な massless 場は、座標 $x \in M$ の関数として

$$\begin{cases} A_\mu(x) & (\mu=0,1,\cdots,p): & U(1) \text{ gauge field} \\ \phi^i(x) & (i=p+1,\cdots,9): & \text{transverse scalar} \end{cases} \tag{2.3}$$

  で与えられる。ここで μ は M に平行な方向、i は垂直な方向を表す。つまり、Dp-brane には $U(1)$ ゲージ理論が乗っていて $A=A_\mu dx^\mu$ がそのゲージ場である。またスカラー場 ϕ^i は Dp-brane と垂直な i 方向への位置の変化を表す。従って Dp-brane の状態は単に worldvolume M だけで指定されるのではなく、その上の力学的な情報も含んでいる。M が曲がった空間の場合にも適用できるようまとめると、時空 X 中の Dp-brane は

$$\begin{cases} M: & p+1 \text{ dim. worldvolume} \\ \mathcal{L}\to M: & \text{line bundle over } M \\ \phi: M \hookrightarrow X: & \text{embedding} \end{cases} \tag{2.4}$$

という組で記述されると言える。ここで $\mathcal{L}$ の connection が $U(1)$ ゲージ場である。

- gauge symmetry enhancement
  D-brane が N 枚平行に重なった系を N D-brane と記す。この系の力学変数も同様に、open string の massless mode に由来する。この場合、open string の端点がどの D-brane に端を持つかを区別するために、各 D-brane にラベル $\{1,\cdots,N\}$ を付け、N 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ を Chan-Paton 空間と呼ぶ。open string は向き付けを持つので N^2 の自由度があるが、これを Chan-Paton 空間に作用する自己準同型 $\mathrm{End}\mathbb{C}^N = M_N(\mathbb{C})$ と考え、Chan-Paton 因子と呼ぶ。従って open string の各状態は、mode 展開に加え Chan-Paton 因子で指定されることになる。さて、両方の端が同じ D-brane に乗っている状態からは上と同じく $U(1)$ のゲージ場が出るが 、異なる D-brane をつなぐ open string からも massless 場が出るので、ゲージ群は単純に予想される $U(1)^{\otimes N}$ ではなく、$U(N)$ に拡大していることがわかる。従って N Dp-brane 上の場は

$$\begin{cases} A_\mu(x) \quad (\mu=0,1,\cdots,p): \quad U(N) \text{ gauge field} \\ \phi^i(x) \quad (i=p+1,\cdots,9): \quad \text{transverse scalar} \end{cases} \tag{2.5}$$

  で与えられる。垂直な方向のスカラー場も $U(N)$ の adjoint 表現に拡大しているため、単純に Dp-brane 位置を表すわけではなくなる。$\phi^i(x)$ のうち、$N\times N$ 行列の対角成分の N 個のスカラー関数が N 枚の Dp-brane の i 方向の位置を表す。一方、各非対角成分は 2 枚の Dp-brane の位置の差に比例した mass を持ち、全ての位置が一致するとき以外は、$U(N)$ を最大 $U(1)^N$ に破る効果を持つ。従って、全ての $i,\ j$ に対し $[\phi^i,\phi^j]=0$ の場合には全ての方向が対角化され N 枚が重なった位置として解釈できるが、$[\phi^i,\phi^j]\neq 0$ の場合は非可換 (non-Abel 的) な座標とみなすしかない。但し重心座標 $\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\phi^i$ は常に取り出せるので、しばらくは $[\phi^i,\phi^j]\neq 0$ の効果は忘れ、以下で時空 X 中の N Dp-brane を特徴付ける。

$$\begin{cases} M: \quad p+1 \text{ dim. worldvolume} \\ E\to M: \quad \text{Chan-Paton bundle over } M \\ \phi: M\hookrightarrow X: \quad \text{embedding} \end{cases} \tag{2.6}$$

  ここで Chan-Paton bundle とは、その fiber が Chan-Paton 空間 $\mathbb{C}^N$ で構造群が $U(N)$ の複素ベクトルバンドルを意味する。

以上のことを踏まえて、N Dp-brane を記述する場の理論を以下で与える。これは場 A,ϕ を力学変数とする M 上の場の理論で、その作用汎関数は

$$S[A,\phi]=S_{BI}+S_{CS} \tag{2.7}$$

という 2 項からなる。S_{BI} は $N=1$ の場合は Dirac-Born-Infeld 作用と呼ばれる

$$S_{BI}=T_p\int_M d^{p+1}x\sqrt{\det(\widetilde{g}+2\pi\alpha'(\widetilde{B}+F))_{\mu\nu}} \tag{2.8}$$

という汎関数である。ここで $T_p=\frac{2\pi}{g_s(2\pi\sqrt{\alpha'})^{p+1}}$ は Dp-brane の tension で、$\widetilde{g}=\phi^*g$、$\widetilde{B}=\phi^*B$ は時空 X 上の背景場 g、B の worldvolume M への pull-back を意味する。よってこれは $U(1)$ 曲率 $F=dA$ と pull-back ϕ を力学変数とし、背景の NSNS sector の場との結合を記述している[1] 。特に、B-field と曲率が $\widetilde{B}+F$ の組み合わせで現れることに注意する。これは、D-brane の存在下では B-field のゲージ変換が

$$B\mapsto B+d\Lambda,\quad A\mapsto A-\widetilde{\Lambda} \tag{2.9}$$

[1] dilaton は定数に固定して string coupling g_s に含めている。

と、ゲージ場の変換を含めて成り立つことを反映している。これを Λ 対称性と呼ぶ。なお、この作用汎関数では曲率 F の微分項は無視している。N 枚の場合は厳密には確立されていないが、(2.8) の適当な $U(N)$ への拡張で正しいとされている[2] 。しかし、どのような拡張であったとしても、string scale が $\alpha' \to 0$ の極限では次の $U(N)$ Yang-Mills 理論に帰着すべきだと予想されている。

$$S_{YM} = \frac{1}{4g_{YM}} \int_M d^{p+1}x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left(-F_{\mu\nu}^2 + 2(D_\mu\phi^i)^2 + ([\phi^i,\phi^j])^2\right) \tag{2.10}$$

一方、S_{CS} は Chern-Simons term あるいは Wess-Zumino term と呼ばれる項で、力学には効かない topological な情報を記述している。

$$S_{CS} = T_p \int_M \widetilde{C} \wedge \mathrm{ch}(E) \sqrt{\frac{\widehat{A}(TM)}{\widehat{A}(N(M,X))}} \tag{2.11}$$

ここで $C := \sum_q^p C^{(q+1)}$ は RR-form の形式和で (q は IIA では even、IIB では odd を最大 p まで走る)、$\widetilde{C} := \phi^*\left(C \wedge e^{2\pi\alpha' iB}\right)$ はそれと B-field との組み合わせを pull-back したもの。$\mathrm{ch}(E) := \mathrm{Tr}\, e^{2\pi\alpha' iF}$ は Chan-Paton bundle E の Chern character である。残りの項は TM や埋め込みに関する normal bundle $N(M,X)$ が非自明なときの補正項である[3] 。

ここから読み取れる「brane within brane」という現象は以下で特に重要である。ゲージ場の topology に依らず、この項は必ず Dp-brane と RR-form $C^{(p+1)}$ との最小結合を含んでいるが、これは Dp-brane が RR-charge(Dp-brane charge) を持つことを意味していた。ところが、ゲージ場が $\mathrm{ch}(E) \neq 1$ なる非自明な配位をとったときには、それだけではなく、$q < p$ なる RR-form $C^{(q+1)}$ とも結合する。つまり、低い次元の Dq-brane charge も同時に持つ。これは Dp-brane に Dq-brane が含まれている、言い換えると bound state になっていることを意味する。例えば、4 次元 Yang-Mills 理論を D3-brane 上の理論と考えると、その非自明な instanton 配位は D3-D(-1) bound state と解釈される。

2.2 Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ system

上述のように、Dp-brane は何枚でも力が働くことなく自由に重ねることができ、その全体は BPS 性を保っていた。ここでは、Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane １枚ずつを平行に置いた系を考える。これを Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系と呼ぶ。どちらも closed string の source であるから両者の間には力が働くが、この場合 RR-charge が互いに逆符号であるため RR-form の交換による力は引力になる。従ってこの系は不安定で、最後にはつぶれてしまうと考えられる。また超対称性を破っているため BPS でもない。この不安定性は open string から見ると brane の力学として記述することができる。

この系の Chan-Paton 因子は open string のどちらの端がどちらの brane に乗るかによって以下の 4 種類がある。

$$\begin{pmatrix} p-p & p-\bar{p} \\ \bar{p}-p & \bar{p}-\bar{p} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

ここで例えば $p-p$ とは両方の端が Dp-brane にある open string を表す。つまり Chan-Paton 空間が $\mathbb{C}^2$ で、Chan-Paton 因子は $M_2(\mathbb{C})$ である。これは単位行列と Pauli 行列 $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ で生成される。但し、2 枚の Dp-brane の場合とは以下の違いがある。$p-p$ と $\bar{p}-\bar{p}$ には、worldsheet のフェルミオン数 F に対し even な状態 $(-1)^F = 1$ を選ぶという GSO projection が課されているのに対し、$p-\bar{p}$ と $\bar{p}-p$ には

[2] F を $U(N)$ の Chan-Paton bundle の曲率として、対称化した trace を挿入した non-Abelian Dirac-Born-Infeld にするなど。更に重心以外の $[\phi^i, \phi^j]$ の項を含める。
[3] 以下しばしば省略する。

通常とは逆の GSO projection $(-1)^F = -1$ を課す必要がある[4] 。このことは、Chan-Paton 空間が super ベクトル空間で、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ が grading 作用素

$$(-1)^F = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

により $\mathbb{Z}_2$-grading を持つ、と表現できる。生成元で言うと $\{I, \sigma_3\}$ が even、$\{\sigma_1, \sigma_2\}$ が odd である。

さて、これらの open string の mode を調べると、even な状態 $p-p$ と $\bar{p}-\bar{p}$ には通常の GSO projection を課すので、それぞれ Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane 上のゲージ場とスカラー場が massless 場として出てくる。一方、odd な状態 $p-\bar{p}$ と $\bar{p}-p$ には逆の GSO projection を課すので、massless mode ではなく、タキオンと呼ばれる負の $(\mathrm{mass})^2$ を持つスカラー場が残る。従って Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 上の場は

$$\begin{cases} p-p \text{ sector:} & A_\mu^+,\ \phi^{+i} \\ \bar{p}-\bar{p} \text{ sector:} & A_\mu^-,\ \phi^{-i} \\ p-\bar{p} \text{ sector:} & T \end{cases} \tag{2.14}$$

で与えられる。ここで open string は向き付けがあるため、タキオン T は複素スカラー場で、$\bar{p}-p$ sector の場はその複素共役 $\overline{T}$ である。具体的な作用汎関数は §3.1 で与える。

このタキオンの存在が、系の不安定性を表している。後で具体的に与えるが、一般にタキオンのポテンシャル $V(T)$ は $|T|$ の関数で、wine bottle 型をしている。$T=0$ で上に凸であることが負の $(\mathrm{mass})^2$ を意味していて、ポテンシャルの底は複素場ゆえ $|T| = {}^{\exists}T_0$ なる円周上にある。従ってこの系は $T=0$ では不安定であるが、タキオンが $|T| = T_0$ に値をとるときに安定化する。これをタキオン凝縮と呼ぶ。では安定化した先はどんな状態か？ということが問題になるが、物理的には Sen による次の予想がある。「Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系はタキオン凝縮により消滅して真空になる。」ここでいう真空とは D-brane が存在しない closed string の基底状態、つまり RR-charge もエネルギーも 0 の状態である。元々系の RR-charge は $1 + (-1) = 0$ であるから、この予想は、元々のエネルギーである 2 枚分の tension と、タキオンが $T=0$ から $|T| = T_0$ へ値を変えるときのポテンシャルエネルギーの落ち込みが相殺して、$2T_p = V(0) - V(T_0)$ を満たすことを意味する。この予想は今や様々な計算によって確かめられている。

より一般には Dp-brane が N 枚、$\overline{\mathrm{D}p}$-brane が M 枚重なった系が考えられる。この場合には、(2.14) のそれぞれのゲージ場は $U(N)$、$U(M)$ で、スカラー場はそれぞれ $U(N)$、$U(M)$ の adjoint 表現、タキオンはこれらの双基本表現 $(N, \overline{M})$ に属する。

2.3 non-BPS Dp-brane

もう一種類の不安定な系として non-BPS Dp-brane がある。これは Type IIA (IIB) の場合、「Type IIB (IIA) の Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系を $(-)^{F_L}$ で割ったもの」として定義される。ここで正確には F_L は closed string の left moving sector の時空のフェルミオン数を表すが、用いるのは次の性質だけである。$(-1)^{F_L}$ による orbifold を closed string でとると、IIA 理論と IIB 理論が入れ替わる。また brane に関しては、$(-1)^{F_L}$ の作用は Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を入れ替える。つまり Chan-Paton 空間への作用は $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の成分の入れ替え

$$(-1)^{F_L} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

であるから、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ のうち $(-1)^{F_L}$ even な状態は $\{I, \sigma_1\}$ で生成される部分である。従って、IIA の Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系から出発すると、理論は IIB になり、系は Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ のうち $(-1)^{F_L}$ 不変な状態 $\{I, \sigma_1\}$

[4] 元々理論を定義する際に closed string に GSO projection が課されているが、2 枚の brane をつなぐ closed string を open string と読み替えるときに、$p-p$ と $p-\bar{p}$ とでは逆の GSO になる。

に制限される。Dp-brane と $\overline{\mathrm{D}p}$-brane を引き離す自由度の $\{\sigma_3\}$ が落ちるので、この系はもはや 2 枚ではなく 1 枚の系であることに注意する。

定義からすぐわかるように、許される non-BPS Dp-brane は BPS の場合 (2.2) と逆である。

$$\begin{cases} \mathrm{IIA}: & p=-1,1,3,5,7,9 \\ \mathrm{IIB}: & p=0,2,4,6,8 \end{cases} \tag{2.16}$$

時空にはこれに結合する RR-form が無いので、non-BPS Dp-brane は RR-charge を持たない。従ってこの系は保存電荷を持たないため不安定である。実際、この不安定性は non-BPS Dp-brane 上の場にタキオンが含まれることで表されている。先程と同様に、open string の解析から non-BPS Dp-brane 上の場は

$$\begin{cases} I \text{ sector:} & A_\mu,\ \phi^i \\ \sigma_3 \text{ sector:} & T \end{cases} \tag{2.17}$$

と得られる。I sector は BPS Dp-brane と同じ種類の場である。σ_3 sector には負の $(\mathrm{mass})^2$ を持つタキオン場があるが、今度は Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ のときとは違い実スカラー場である。従ってポテンシャル $V(T)$ は一般に double well 型をしている。$T=\pm T_0$ を底とすると、Sen 予想は $\sqrt{2}T_p=V(0)-V(T_0)$ となる[5] 。N 枚が重なった N non-BPS Dp-brane 系も同様に考えられる。そのときはゲージ場は $U(N)$ で、スカラー場とタキオン場はその adjoint 表現に属する。

なお、ここでは時空は $X=\mathbb{R}^{10}$ などを想定しているため、non-BPS Dp-brane は不安定であると言っているが、適当な orbifold $X=\mathbb{R}^{10}/\Gamma$ などを取ると、orbifold projection によりタキオンが落ちる場合が考えられ、non-BPS でも安定になることがあり得る。元々はそのような場合に物理的に興味があるわけだが、ここでは消滅する過程やそのパターンの方に注目する。

最後に、Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系と non-BPS Dp-brane 系の類似点と相違点についてコメントしておく。類似点は Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系と同じく non-BPS Dp-brane 系の Chan-Paton 因子も $\mathbb{Z}_2$-grading を持つことである。$\{I,\sigma_1\}$ が複素 Clifford 代数 $\mathbf{C}_1=\mathbb{C}\cdot I\oplus\mathbb{C}\sigma_1$ を生成していることに注意すると、N non-BPS D-brane の Chan-Paton 空間は $\mathbf{C}_1$-module の構造を持つと考えられる。実際、$\mathbb{C}^N\otimes\mathbf{C}_1=\mathbb{C}^N\oplus\mathbb{C}^N\sigma_1$ から、その自己準同型は $\mathrm{End}\mathbb{C}^N\otimes\mathbf{C}_1=M_N(\mathbb{C})\cdot I\oplus M_N(\mathbb{C})\sigma_1$ となり、確かに non-BPS D-brane の Chan-Paton 因子になる。Clifford 代数には自然に $\mathbb{Z}_2$-grading (I 成分を even、σ_1 成分を odd とする) がある。従って、この場合も Chan-Paton bundle は superbundle である。通常用いられる用語では両者の superbundle の違いは、Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ の方は even(graded)、non-BPS Dp-brane の方は odd(non-graded) と区別される。つまり Chan-Paton bundle に関して言うと、BPS D-brane との違いは $\mathbb{Z}_2$-grading があるかどうかで、BPS でない 2 つの系は even か odd かの違いだけである。

2.4 descent relations

これまで見てきたいろいろな D-brane 系は、descent relations と呼ばれる以下のような関係で相互に結びついている。

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{IIB} & & \mathrm{IIA} & & \mathrm{IIB} \\ (p+1)\ \mathrm{dim.} & \boxed{\mathrm{IIB\ D}p\text{-}\overline{\mathrm{D}p}} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\mathrm{IIA\ non\text{-}BPS\ Dp}} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\mathrm{IIB\ BPS\ Dp}} \\ & \Downarrow & \swarrow_T & \Downarrow & \swarrow_T & \\ p\ \mathrm{dim.} & \boxed{\mathrm{IIB\ non\text{-}BPS\ Dp\text{-}1}} & \xrightarrow{(-1)^{F_L}} & \boxed{\mathrm{IIA\ BPS\ Dp\text{-}1}} & & \\ & \Downarrow & \swarrow_T & & & \\ (p-1)\ \mathrm{dim.} & \boxed{\mathrm{IIB\ BPS\ Dp\text{-}2}} & & & & \end{array} \tag{2.18}$$

[5] 一枚の non-BPS Dp-brane は BPS に比べて $\sqrt{2}$ 倍の tension を持つ。

まず $p+1$ 次元の系同士の横の関係は、$(-1)^{F_L}$ で割るという演算で結びついている。最初の $(-1)^{F_L}$ は non-BPS Dp-brane の定義であり、Chan-Paton 因子 $M_2(\mathbb{C})$ に関して even な生成元 $\{I, \sigma_1\}$ を選ぶものだった。更に (IIA の)$(-1)^{F_L}$ で割ると、生成元は I だけ残り、一枚の BPS Dp-brane が得られることがわかる。斜めの矢印は T-duality を表す。そして、縦の矢印はタキオン凝縮である。不安定な non-BPS D-brane 系は既に見たようにそのままでは真空に消滅するが、topological な obstruction がある場合には、より次元の低い安定な系にまで崩壊してそこで止まる。ここでは、Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ から BPS D$(p-2)$-brane に崩壊するプロセスとして、vortex 型のソリトン解により次元が 2 下がる場合と、kink 型のソリトン解により次元が 1 下がるプロセスを 2 回繰り返す場合を紹介する。

- Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ $\to$ BPS D$(p-2)$
これはラフに言えば Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ の消滅と「brane within brane」の組み合わせである。即ち、D$(p-2)$ charge を持つようなゲージ flux がある状態から Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ の消滅が起きると、D$(p-2)$-brane だけが後に残ることになる。具体的には D$(p-2)$-brane の余次元 2 の $\mathbb{R}^2$ を極座標 (r,θ) で表したとき、$\mathbb{R}^2$ の無限遠 $r\to\infty$ で vortex 型の配位
$$T \sim T_0 e^{i\theta}, \quad A^+_\theta - A^-_\theta \sim 1 \tag{2.19}$$
をとる。タキオンは無限遠で vacuum manifold $\frac{U(1)\times U(1)}{U(1)} \sim U(1)$ を 1 回 wind している $\pi_1(U(1))$ の生成元である。また $\int_{\mathbb{R}^2} F^+ - F^- = 2\pi$ より単位 D$(p-2)$ charge を持つ。これが $\mathbb{R}^2$ の原点 $r=0$ 以外ではタキオンが真空に消滅し、原点に D$(p-2)$-brane の残った配位であることが示せる。

- Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ $\to$ non-BPS D$(p-1)$ $\to$ BPS D$(p-2)$
最初のプロセスは、タキオンが余次元 1 の $x\in\mathbb{R}^1$ 上で $T\sim\pm T_0$ at $x\to\pm\infty$ という kink 型の配位をとるものである。しかし、タキオンは複素で wine bottle 型のポテンシャルを持つので、この配位は安定ではない。実際、この解からの揺らぎには実のタキオンが残っている。従ってこれは non-BPS D$(p-1)$-brane と解釈される。次のプロセスも kink 型の配位であるが、今度は実タキオンは double well 型のポテンシャルなので安定なソリトン解であり、$\pi_0(\{\pm T_0\}) = \mathbb{Z}_2$ を生成する。

以上の議論から分かるのは、任意の次元の D-brane は 1 次元あるいは 2 次元高い不安定な non-BPS 系からタキオン凝縮により作られる、ということである。更に高い余次元の場合も、元の系の枚数を増やしておいて上の構成を繰り返せば同様な構成が可能である。例えば、2 枚ずつの D$(p+2)$-$\overline{\mathrm{D}(p+2)}$ から出発して、そのうち 1 ペアから vortex により Dp を、もう 1 ペアから anti-vortex により $\overline{\mathrm{D}p}$ を一枚ずつ作って Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ とし、その系で再び vortex を考えると D$(p-2)$ が作れる。従って、十分多い枚数の最大次元の不安定な系
$$\begin{cases} \text{IIA:} & \text{non-BPS D9 系} \\ \text{IIB:} & \text{D9-}\overline{\text{D9}}\text{ 系} \end{cases} \tag{2.20}$$
から出発すれば全ての次元の D-brane が作られることになる。これは元々closed string 理論のソリトン解であった D-brane が、10 次元の worldvolume 上の場の理論のソリトン解としても記述できる、という全く新しい観点を与えている[6]。場の理論のソリトンの charge は一般に homotopy 群 $\pi_n(G/H)$ で分類されるため、この観点からの D-brane charge の topological な分類が可能であることが予想される。このことを次章で見る。

[6] 更に言うと open string 理論のソリトンともいえる。

3 D-brane と K-theory

D-brane は元々closed string 理論のソリトンで、RR-form との最小結合を通じて RR-charge を持っていた。よって時空に存在しうる D-brane は RR-ゲージ場の振る舞いで決定される。これは D-brane の RR-charge が cohomology で測られることを示している。しかし、D-brane がゲージ場を伴う object であることを考慮すると、RR-form との結合は Chern-Simoms term で表されるため、RR-charge は cohomology ではなくその一般化である K-theory で測られることが示唆される。このことは open string で見るとはっきりする。即ち、D-brane が場の理論のソリトンであるという観点から、D-brane が K-theory で分類されることを本章では説明する。なお、この章に関する参考文献は [7] である。

3.1 Type IIB と $K(X)$

Type IIB 理論における任意の D-brane は、D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系から構成される。まずこの系について整理しておく。N D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系の力学的な情報は以下の組で与えられる[1] 。

$$\begin{cases} X : 10 \text{ dim. worldvolume} = \text{spacetime} \\ E = E^+ \oplus E^- : \text{Chan-Paton bundle over } X \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで 10 次元の worldvolume M は時空を埋め尽くしているため X と同一視する。 また Chan-Paton bundle は fiber $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$ が $\mathbb{Z}_2$-grading を持つ (even) superbundle で、その構造群は $U(N) \times U(N)$ である。もちろん E^+ が D9、E^- が $\overline{\mathrm{D9}}$ の Chan-Paton bundle である。これに対応して D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 上の場は (even) superconnection

$$i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} iA^+ & \overline{T} \\ T & iA^- \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

としてまとめることができる。これは次のように定式化される [8]。一般に superbundle E の自己準同型 End$E$ は $\mathbb{Z}_2$-grading を持つため、End$E$ 値の微分形式 $\Omega(X, \mathrm{End}E)$ には自然な $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-grading がある。そのうち全 $\mathbb{Z}_2$ のみを考えると、E の通常の connection は 1-form ゆえ odd な元に属するが、それに加えて odd な自己準同型値の 0-form も odd な元に属する。通常の connection にこれを含めて拡張したものを superconnection という。今の場合は even superbundle $E = E^+ \oplus E^-$ であるから、

$$\mathrm{End}(E) = \begin{pmatrix} \mathrm{End}E^+ & \mathrm{Hom}(E^-, E^+) \\ \mathrm{Hom}(E^+, E^-) & \mathrm{End}E^- \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

のうち対角成分が even、非対角成分が odd である。従って $E^\pm$ のゲージ場 $A^\pm \in \Omega^1(X, \mathrm{End}E^\pm)$ に加えてタキオン場 $T \in \Omega^0(X, \mathrm{Hom}(E^+, E^-))$ を含めた (3.2) は superconnection である。

この系の作用汎関数については、最近の計算により具体的な形が分かってきている [9]。以下の K-theory との対応の議論は作用汎関数の詳細には依らず成り立つが、具体形を知っている方が構造が理解しやすいので、ここで紹介する。簡単のため、B-field を 0 とする。作用は $A^\pm$ と T の汎関数で、

$$S[A^\pm, T] = S_0 + S_{CS} \tag{3.4}$$

の 2 項から成る。第一項は後で用いないので大雑把な形だけ記す。

$$S_0 = T_9 \int_X d^{10}x \; e^{-|T|^2} \left(2 + \mathcal{L}_{BI}(A^+) + \mathcal{L}_{BI}(A^-) + cD_\mu T D^\mu \bar{T} + \cdots \right) \tag{3.5}$$

[1] 両者の枚数が等しいことが string の tadpole 相殺から要請される。

ここで $\mathcal{L}_{BI}$ は (2.8) の Dirac-Born-Infeld ラグランジアンの non-Abel 版で、T や曲率の高次微分項や A^+ と A^- の混じる項などを省略して書いている。残念ながら $\mathcal{A}$ の汎関数にはなっていないようである。これからわかるのは、タキオンのポテンシャルが

$$V(T) = 2T_9\ e^{-|T|^2} \tag{3.6}$$

で与えられることである。これは $T = 0$ で最大値 $2T_9$ を取り、$|T| \to \infty$ で最小値 0 に急減少する関数である。∞ を避けたい場合には、$|T| = 1$ で最小となるよう場の再定義 $\widetilde{T} = \frac{T}{\sqrt{1+|T|^2}}$ を行うと、$V(\widetilde{T}) = 2T_9 \exp(-\frac{|\widetilde{T}|^2}{1-|\widetilde{T}|^2})$ となり、確かに wine bottle 型のポテンシャルになる。いずれにしても、Sen 予想 $V(0) - V(T_0) = 2T_9$ を満たしている。即ち、タキオンが定数 $|T| = T_0 := \infty$ または $|\tilde{T}| = \tilde{T}_0 := 1$ の配位をとるとき、D9-$\overline{\text{D9}}$ は消滅して真空になる。

一方第二項の Chern-Simons term の方は、最近の計算によると以下のように superconnection $\mathcal{A}$ の汎関数としてシンプルにまとまる。

$$S_{CS} = T_9 \int_X\ C \wedge \mathrm{Str}\, e^{i\mathcal{F}} \tag{3.7}$$

ここで、$C = \sum_{p:odd} C^{(p+1)}$ は RR-form の形式和で、$\mathcal{F}$ は次で定義される supercurvature である。

$$i\mathcal{F} := i\,(d\mathcal{A} - i\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} iF^+ - \overline{T}T & D\overline{T} \\ DT & iF^- - T\overline{T} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} F^{\pm} := dA^{\pm} - iA^{\pm} \wedge A^{\pm} \\ DT := dT + iTA^+ - iA^- T \end{array} \tag{3.8}$$

また、$\mathrm{Str} : \Omega(X, \mathrm{End}E) \to \Omega(X)$ は (even) supertrace で、

$$\mathrm{Str}M := \mathrm{Tr}(-1)^F M = \mathrm{Tr}\,\sigma_3 M \tag{3.9}$$

と定義される。Str $e^{i\mathcal{F}}$ は closed form で、その cohomology class は T に依存しないことが示される。従って、特に $T = 0$ ととれば Str $e^{i\mathcal{F}} = \mathrm{tr}(e^{iF^+} - e^{iF^-}) = \mathrm{ch}(E^+) - \mathrm{ch}(E^-)$ となり、D9-brane と $\overline{\text{D9}}$-brane の Chern-Simons term の和に一致する[2] 。

それでは、Type IIB の D-brane と K-theory との対応を見てゆく [10]。本稿ではその対応を 2 つの主張で述べることにする。主張 1 は D9-$\overline{\text{D9}}$ という不安定なシステムに関する対応で、主張 2 はその系のタキオン凝縮というプロセスに関する対応である。従って、後者は前者の主張の系として導かれるが、後者は BPS D-brane の RR-charge の分類に直接関係しているため、あえて 2 つに分けて述べる。言い換えると主張 1 は D9-$\overline{\text{D9}}$ の分類、主張 2 は BPS D-brane の分類に関する主張である。

主張 1 「 D9-$\overline{\text{D9}}$ 系は $K(X)$ で分類される。」

まず $K(X)$ について簡単に復習しておく (例えば [11] を参照)。X を compact Hausdorff 空間とする。$Vect(X)$ を X 上の複素ベクトルバンドルの同型類とすると、これは Abelian monoid になっている。これから Grothendieck の構成 ($\mathcal{S}$ と記す) により得られる Abel 群が X の K 群である。

$$K(X) := \mathcal{S}(Vect(X)) = \{(E, F) \in Vect(X) \times Vect(X)\}/ \sim \tag{3.10}$$

ここで、ベクトルバンドルのペア (E, F) に対し $(E, F) \sim (E \oplus H, F \oplus H)$ なる同値関係を入れる。次に、reduced K-theory は inclusion $i : \mathrm{pt.} \hookrightarrow X$ に対し $\widetilde{K}(X) := \ker i^*$ で定義される。即ち rank E= rank F

[2] $\overline{\text{D9}}$-brane の RR-charge は $-T_9$ である。

なるペア (E,F) に限った部分群である。更に、relative K-theory を X とその closed subset $Y\subset X$ に対して次で定義する。

$$K(X,Y):=\{(E,F,\alpha)\}/\sim \tag{3.11}$$

ここで $\alpha: E|_Y \overset{\sim}{\to} F|_Y$ は Y 上で同型となる bundle map であり、同値関係はある elementary な (G,H,β) に対し、$(E,F,\alpha)\sim(E\oplus G, F\oplus H, \alpha\oplus\beta)$ とする。elementary とは $G\simeq H$ であって β が Id_G に homotopic なときを指す。さて、X が non-compact(局所 Hausdorff) のときには、compact supported K-theory を $K_c(X):=\widetilde{K}(X^+)=K(X^+,\mathrm{pt.})$ で定義する。ここで X^+ は一点 compact 化を表し、添え字 c は以後省略する。

さて、主張 1 を示すには、$K(X)$ の代表元と D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系の情報が対応していることと、K-theory の同値関係と物理的な同値関係とが一致することを示せば良い。時空 X は一般に non-compact なので正確には $K_c(X)$ との対応を見るべきである。その対応は

$$(E,F,\alpha)=(E^+,E^-,T) \tag{3.12}$$

で与えられる。即ち、ベクトルバンドルのペアをそれぞれ D9、$\overline{\mathrm{D9}}$ の Chan-Paton bundle のペアに、bundle map をタキオンと同定する。同型類とは右辺ではゲージ同値を意味する。左辺が compact support であることは、右辺ではエネルギー有限の配位に限ることに対応する。これが (3.12) の等号の意味である。よって左辺の 2 つの (E,F,α) の和とは、右辺では D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ ペアの枚数を増やすことを意味する。また、左辺で elementary な (G,H,β) は、右辺ではゲージ変換の不定性を除いてタキオンが $T(x)\equiv T_0\cdot\mathrm{Id}_G$ となる配位が対応する。これは真空に消滅する D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ ペアの配位で、真空と等価であるから、直和して枚数を増やしても物理的にも何も変わらない。従って同値関係も一致している。以上から主張が示された。つまりこの主張は、D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系の情報の全体 (場の理論の配位の全体) から Abel 群への関手を与えるようなものである。

なお、D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系の Chern-Simons term はこの対応を cohomology で見たものである。$K(X)$ の Chern character は $\mathrm{ch}(E,F,\alpha)=e^{iE}-e^{iF}\in H^{\mathrm{even}}(X)$ で定義されるが、これは Str $e^{i\mathcal{F}}$ に一致する。

主張 2 「タキオン凝縮の過程は $K(Y)\hookrightarrow K(X)$ を表す。」

この主張は D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系の配位のうち特定の配位についてのものである。即ちタキオン凝縮により $Y\subset X$ に巻きついた BPS D-brane が残る過程を考える。例えば $X=\mathbb{R}^{10}$ 上の N D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ から、$Y=\mathbb{R}^{p+1}$ を worldvolume とする Dp-brane が作られる場合、余空間は $\mathbb{R}^{9-p}$ となる。このとき補題として「BPS Dp-brane の RR-charge は余空間の K-theory $K(\mathbb{R}^{9-p})$ で測られる。」が得られる。まずこちらから説明する。

N D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系のタキオン場が $\mathbb{R}^{9-p}$ の無限遠でポテンシャルの底に値をとる場合、ゲージ群を $U(N)\times U(N)$ から $U(N)$ に破るので、vacuum manifold は

$$\mathcal{V}_{\mathrm{IIB}}(N)=\frac{U(N)\times U(N)}{U(N)}\simeq U(N) \tag{3.13}$$

で与えられる。よってタキオン凝縮による余次元 $n=9-p$ のソリトン解は、無限遠 S^{n-1} での $\mathcal{V}_{\mathrm{IIB}}(N)$ の巻き付き方で分類される。

$$\pi_{n-1}(\mathcal{V}_{\mathrm{IIB}}(N))=\pi_{n-1}(U(N))=\begin{cases}\mathbb{Z} & (n:\mathrm{even}) \quad {}^\forall N>n\\ 0 & (n:\mathrm{odd})\end{cases} \tag{3.14}$$

但し N は上を満たすよう十分多い枚数が必要である。これは余空間 $\mathbb{R}^n$ の K-theory に一致し、知られている Dp-brane のスペクトルを再現する。

$$K(\mathbb{R}^n)=\widetilde{K}(S^n)=\pi_{n-1}(U(N))=\begin{cases}\mathbb{Z} & (p:\mathrm{odd})\\ 0 & (p:\mathrm{even})\end{cases} \tag{3.15}$$

この $K(\mathbb{R}^{9-p})=\mathbb{Z}$ の生成子は、具体的には ABS 構成と呼ばれる構成法が知られている [12]。より一般の場合に拡張することを念頭においてこれを説明する。まず、$Y=\mathbb{R}^{p+1}$ を Dp-brane の worldvolume とし、時空 X は余空間 $\mathbb{R}^{2k}(2k=9-p)$ を fiber とする Y 上の normal bundle $N(Y,X)$ とみなす。その構造群 $SO(2k)$ は $Spin(2k)$ に拡大できるので、Y 上に spin bundle $S^{\pm}\to Y$ が定義できる。この fiber は 2^{k-1} 次元の複素ベクトル空間で、各々Clifford 代数 $\mathbf{C}_{2k}$ が作用する。そしてこれを時空 X 上のバンドルに拡張したものを D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系と解釈する。即ち、$N=2^{k-1}$ 枚の D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ を考え、その Chan-Paton bundle が $E=S^{+}\oplus S^{-}$ でタキオンは bundle map $T:S^{+}\to S^{-}$ であるとする。このとき、タキオンの配位として以下をとる。

$$T(x)=u\mu_x=u\sum_{i=1}^{2k}\Gamma_i x^i \tag{3.16}$$

ここで u は任意パラメーターである。μ_x は $(x^1,\cdots,x^{2k})\in\mathbb{R}^{2k}$ から Clifford 代数 $\mathbf{C}_{2k}$ への表現を与える Clifford 積で、具体的にはガンマ行列 Γ_i を用いて表される。この配位は $\mathbb{R}^{2k}$ 上の $|x|=\frac{1}{u}$ の S^{2k-1} で同型写像であり、$K(\mathbb{B}^{2k},S^{2k-1})=\widetilde{K}(S^{2k})=\mathbb{Z}$ の生成子であることがわかる。物理的には、$|x|>\frac{1}{u}$ の領域でタキオンが真空に凝縮し D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ が消滅して、$|x|<\frac{1}{u}$ の辺りに topological defect が残った状況を表す。特に $u\to\infty$ の極限では $\mathbb{R}^{2k}$ の原点に局在し、$\mathbb{R}^{p+1}$ 方向に広がった BPS Dp-brane の配位になっている[3]。実際、上の配位を Chern-Simons term (3.7) に代入すると、u に依らず

$$\begin{aligned} S_{CS} &= T_9\int_X C\wedge e^{-u^2|x|^2}\mathrm{Str}e^{u\gamma_i dx^i}, \quad \text{但し } \gamma_i:=\begin{pmatrix}0 & \overline{\Gamma}_i\\ \Gamma_i & 0\end{pmatrix} && (3.17)\\ &= T_p\int_Y C^{(p+1)} && (3.18)\end{aligned}$$

となり、Y に巻きついた一枚の BPS Dp-brane を表している。この $\mathrm{Str}e^{i\mathcal{F}}$ 部分は Gauss 型の Thom form と呼ばれ、$u\to\infty$ で δ-関数型の current になる。その fiber 積分が $1(\times$ 定数$)$ を与える Thom class であるため、X 積分は底空間 Y 上の積分に帰着する。

以上により補題が示された。即ち (3.15) ではソリトン charge が $K(\mathbb{R}^{9-p})$ に等しいことを示し、(3.16) ではその生成子が Dp-brane の RR-charge を生成している、つまりソリトン charge = Dp-brane charge を示した。

この補題を主張 1 の枠内で見たものが主張 2 である。主張 1 により D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ の特定の配位は $K(X)$ の特定の元を定めるが、(3.16) の配位の場合はたまたま $K(\mathbb{R}^{9-p})$ の生成元になっていて、Y に巻きつく一枚の Dp-brane を表していた。しかし場の $\mathbb{R}^{9-p}$ 依存性だけを固定すれば、より一般の Y に巻きつく配位も考えられる。N 枚の Dp-brane は N 回巻き付く配位で、$\overline{\mathrm{D}p}$-brane は上で S^+ と S^- を入れ替えた配位で得られる。また Dp-brane が非自明な Chan-Paton bundle を伴う配位は、$\mathbb{R}^{9-p}$ 上自明な D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ の Chan-Paton bundle E をテンソルしておいた $E\otimes S$ をとれば得られる。従って、Y に巻きつく Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系の配位全体は、D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ の配位全体のうちの一部分として実現される。主張 1 の類似により、Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$ 系は $K(Y)$ に対応しているので、このことは D-brane と K-theory の以下の対応を与えていることになる。$f:Y\hookrightarrow X$ に対し、

$$\begin{array}{ccccc} f_!: & K(Y) & \xrightarrow{\sim} & K(X) \\ & \updownarrow & & \updownarrow \\ & \mathrm{D}p\text{-}\overline{\mathrm{D}p} & \longleftarrow & \mathrm{D9}\text{-}\overline{\mathrm{D9}} \end{array} \tag{3.19}$$

ここで上の写像は、ABS 構成による K-theory 的な Thom 同型を表し、具体的にはカップ積

$$\begin{array}{ccc} K(Y)\otimes K(\mathbb{B}^{2k},S^{2k-1}) & \xrightarrow{\sim} & K(Y\times\mathbb{B}^{2k},Y\times S^{2k-1}) \\ (E,F)\otimes(S^+,S^-) & \longmapsto & (E\otimes S^+\oplus F\otimes S^-,E\otimes S^-\oplus E\otimes S^+) \end{array} \tag{3.20}$$

[3] §2.4 の vortex 型の配位の高い余次元への拡張である。

で与えられる。一方、$K(Y),\ K(X)$ の元は主張 1 よりそれぞれ Dp-$\overline{\mathrm{D}p}$, D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系と対応する。下の写像はタキオン凝縮による場の配位空間の Y 方向への制限である。より一般の Y に対しては $X \simeq N(Y,X)$ ではないが、この場合の ABS 構成は、$i : Y \hookrightarrow N(Y,X)$ と $j : N(Y,X) \hookrightarrow X$ を組み合わせた $f = j \circ i : Y \hookrightarrow X$ に対する Gysin 準同型

$$f_! = j^* \circ i_! : \ K(Y) \xrightarrow{\sim} K(N(Y,X)) \to K(X) \tag{3.21}$$

を与える。但し一般には spin bundle やその X への拡大を定義するところで obstruction があるので注意が必要である。Chern-Simons term はこの ABS 構成 $f_!$ を cohomology で見たもので、

$$\mathrm{ch}(f_!^K 1) = \pi^*(\widehat{A}(N(Y,X))^{-1}) f_!^H 1 \tag{3.22}$$

なる関係を与えている。但し $\pi : X \to Y$ で、K, H はそれぞれ K-theory と cohomology を表し、$X(Y)$ での Poincaré duality $\mathcal{D}_X(\mathcal{D}_Y)$ を用いて $f_!^H = \mathcal{D}_X^{-1} f_* \mathcal{D}_Y$ と定義される。

3.2 Type IIA と $K^{-1}(X)$

Type IIA 理論の D-brane は 10 次元の non-BPS D9-brane 系から構成される。この場合にも、§3.1 に類似した K-theory との対応がある。まず、N non-BPS D9-brane 系の情報は

$$\begin{cases} X : 10 \text{ dim. worldvolume} = \text{spacetime} \\ E = F \oplus F = F \otimes \mathbf{C}_1 : \text{Chan-Paton bundle over } X \end{cases} \tag{3.23}$$

で与えられる。ここで Chan-Paton bundle は rank N のベクトルバンドルで $\mathbf{C}_1$ module の構造を持つ odd superbundle である。また non-BPS D9-brane 上の場はこの Chan-Paton bundle の (odd) superconnection として入っている。

$$i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} iA & T \\ T & iA \end{pmatrix} = iA + T\sigma_1 \tag{3.24}$$

ここで $U(N)$ ゲージ場 A は even endomorphism 値の 1-form $\Omega^1(X, \mathrm{End}F)$ に、タキオン T は $U(N)$ の adjoint 表現の実スカラー場で、odd endomorphism 値の 0-form $\Omega^0(X, \mathrm{End}F\sigma_1)$ に組み込まれている。

この系の作用は A, T の汎関数で、次の 2 項から成る。

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{2}T_9 \int_X d^{10}x \ e^{-T^2} \left(1 + \mathcal{L}_{DBI}(A) + cD_\mu T D^\mu T + \cdots \right) \\ S_{CS} &= \sqrt{2}T_9 \int_X \ \tilde{C} \wedge \mathrm{Str}\ e^{i\mathcal{F}} \end{aligned} \tag{3.25}$$

特に Chern-Simons term は supercurvature と supertrace の定義が以下の通り odd である他は、D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ と同じ形をしている。

$$\begin{aligned} &i\mathcal{F} = iF - T^2 + DT\sigma_1 \\ &F := dA - iA \wedge A, \quad DT := dT - i[A,T] \\ &\mathrm{Str}(M + N\sigma_1) := \mathrm{Tr}\, N \end{aligned} \tag{3.26}$$

これから読み取れるタキオンポテンシャルは

$$V(T) = \sqrt{2}T_9 \ e^{-T^2} \tag{3.27}$$

である。D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ と同様、これは $T=0$ で最大値 $\sqrt{2}T_9$ を取り、$T\to\pm\infty$ での最小値 0 に急減少する関数で、$T=\pm1$ で最小となるよう場の再定義 $\widetilde{T}=\frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$ を行うと double well 型のポテンシャルになる。

さて、Type IIB の場合と同様、Type IIA 理論の D-brane と K-theory との対応が与えられている [13]。ここでは先程と同様に 2 つの主張で表す。

主張 1 「non-BPS D9-brane 系は $K^{-1}(X)$ で分類される。」

この場合の K 群は $K^{-1}(X)$ が対応する。この定義はいくつかあるが、E を X 上のベクトルバンドル、$\alpha: E\to E$ をバンドルの自己同型写像とするとき、以下で定義する。

$$K^{-1}(X) := \{(E,\alpha)\}/\sim \tag{3.28}$$

ここで同値関係はある elementary な (G,β) に対し、$(E,\alpha)\sim(E\oplus G,\alpha\oplus\beta)$ とする。このとき、$K^{-1}(X)$ と non-BPS D9-brane 系との対応は

$$(E,\alpha)=(F,-\exp(\pi i\widetilde{T})) \tag{3.29}$$

で与えられると考えられている。ここでは規格化したタキオン $\widetilde{T}$ を用いている。よって elementary に対応するのは、ゲージ変換の不定性を除いて、真空に凝縮する配位 $\widetilde{T}=\mathrm{diag}(\pm1,\pm1,\cdots)$ の場合で、これは non-BPS D9-brane の生成消滅を同一視するという物理的な同値関係に一致する。

主張 2 「タキオン凝縮の過程は $K(Y)\hookrightarrow K^{-1}(X)$ を表す。」

§3.1 と同様、まず「BPS Dp-brane の RR-charge は余空間の K-theory $K^{-1}(\mathbb{R}^{9-p})$ で測られる。」から見る。具体的には、$2N$ non-BPS D9-brane 系からタキオン凝縮により Y に巻きついた BPS Dp-brane を作ることができる。この場合、余空間 $\mathbb{R}^{9-p}$ は余次元が odd $9-p:=2k+1$ になる。まずソリトンの分類を行う。タキオンが無限遠で $\widetilde{T}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$(但し 1 と -1 が N 個ずつ) の時、ゲージ群を $U(2N)$ から $U(N)\times U(N)$ に破るので、vacuum manifold は

$$\mathcal{V}_{\mathrm{IIA}}(2N)=\frac{U(N)}{U(N)\times U(N)} \tag{3.30}$$

で与えられる。従って、topological defect の分類は余空間の K-theory に一致し、知られている Type IIA の Dp-brane のスペクトルを再現する。

$$\begin{cases} K^{-1}(\mathbb{R}^{2k+1})=K^{-1}(S^{2k+1})=\pi_{2k}(\mathcal{V}_{\mathrm{IIA}}(2N))=\mathbb{Z} \\ K^{-1}(\mathbb{R}^{2k})=0 \end{cases} \tag{3.31}$$

この $K^{-1}(\mathbb{R}^{2k+1})$ の生成子は ABS 構成の類似から、$N=2^{k-1}$ として

$$\widetilde{T}(x)=\frac{u}{\sqrt{1+|x|^2}}\sum_{i=1}^{2k+1}\Gamma_i x^i \tag{3.32}$$

と与えればよい。このとき $\alpha=-e^{i\pi\widetilde{T}}$ は $K^{-1}(\mathbb{B}^{2k+1},S^{2k})=K^{-1}(S^{2k+1})$ を生成する。従って、§3.1 と同様の議論によりタキオン凝縮は $f_!: K(Y)\hookrightarrow K^{-1}(X)$ を表している。

しかし、上の構成は余次元が 3 以上 ($k\geq1$) の場合にしか適用できない。一枚の non-BPS D9-brane から一枚の D8-brane を作る場合には、kink 型の配位

$$\widetilde{T}(x)=\pm\frac{x^9}{\sqrt{1+|x|^2}} \tag{3.33}$$

を用いる。ここで余空間 $\mathbb{R}$ の座標を x^9 した。$\pm$ はそれぞれ D8、$\overline{\mathrm{D8}}$ を表す。この場合 vacuum manifold は 2 点 $\{\pm 1\}$ より $\pi_0(\{\pm 1\}) = \mathbb{Z}_2$ であり、K-theory による D8-brane charge $K^{-1}(S^1) = \mathbb{Z}$ に一致しない。これは、任意枚の D8-brane を作るには N non-BPS D9-brane 系で始めから $N \to \infty$ とすべきことを示唆している。ここでは述べないが、明白に $N = \infty$ が必要となる議論が他にある [14]。上の N non-BPS D9-brane と対応する $K^{-1}(X)$ の定義 (3.29) では任意の有限 rank のベクトルバンドルを用いるため、$N = \infty$ を取り入れるには不十分である。よって $N = \infty$ を含むような $K^{-1}(X)$ の定義として以下を用いる方が適当である。

$$K^{-1}(X) := [X, \mathcal{F}^{sa}], \quad \mathcal{F}^{sa} := \{\text{self-adjoint Fredholm operators on } \mathcal{H}\} \tag{3.34}$$

つまり、Chan-Paton 空間を無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とすると、タキオン場は $\mathcal{H}$ 上の作用素に値をとるスカラー場になる。作用汎関数を有限にする条件から Fredholm 作用素に限られ、このタキオンの分類により $K^{-1}(X)$ を定義する[4]。物理的には無限枚の殆どは真空に消滅し、安定に残る系は常に有限 rank であるから問題はない。この定義が良いと思われる別の理由は、これに対応する $K(X)$ の定義が

$$K(X) := [X, \mathcal{F}], \quad \mathcal{F} := \{\text{Fredholm operators on } \mathcal{H}\} \tag{3.35}$$

であり、両者が類似している点である。これがちょうど D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系と non-BPS D9-brane 系 (の Chern-Simons term) が、superbundle の even, odd の違いしかないという類似に対応している点からも、この定義が適当であると考えられる。また Chan-Paton 空間を無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とみなす観点は後の章では本質的である。

3.3 その他の K 群

本稿では、Type II string 理論で時空が多様体、B 場が 0 の場合のみを扱ったが、その他 string 理論に現れる様々な状況でも、D-brane を K-theory で分類するという同様の考察ができる。ここでは、典型的な場合に現れる K 群を非常に簡単に紹介する。まず時空がある (離散) 群 G で割られた orbifold X/G の場合の Type IIB 理論を考える。このとき時空を埋める D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系は、時空が X のときの D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系を G 作用で割ったものである。G は底空間と Chan-Paton bundle の双方に同変に作用するので、G 不変な Chan-Paton bundle のペアの分類は equivariant K-theory $K_G(X)$ で成される。

次に Type I string 理論の場合の K 群を考える。Type I は、Type IIB で 32 枚の D9-brane が存在する系を worldsheet の parity Ω で割った一種の orbifold で定義される。このとき向き付けがないことを反映して Chan-Paton bundle の構造群は $O(N)$ になる。このようなペアの分類をする Abel 群は real K-theory $KO(X)$ である。更に、時空の $\mathbb{Z}_2$-orbifold と Ω を組み合わせて orientifold を考えると Real K-theory $KR(X)$ なども現れる。

最後に背景の B 場が非自明な cohomology 類に属する場合 $[H := dB] \in H^3(X, \mathbb{Z})$ を考える。このような状況は NS5-brane という brane の一種が存在する場合に起きる。このとき時空を埋める D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ 系のゲージ場も Λ 対称性で B 場と関係しているため変更を受けて、Chan-Paton bundle は patch の 3 次の交差 $U_i \cap U_j \cap U_j$ 上で変換関数が $H^3(X, \mathbb{Z})$ の分だけ twist を受けた twisted bundle になる。それに応じて、分類は twisted K-theory $K_{[H]}(X)$ が対応する。従って NS-brane は背景として K 群の種類を変える効果としては考慮に入れられるが、NS-charge 自体を分類しているわけではない[5]。この辺りに関する研究は現在も行われている。

---

[4] 無限次元の Hilbert 空間を fiber とするベクトルバンドルは自明であるから、タキオンの振る舞いだけで決まる。
[5] Type IIB の S-duality からは NS5-brane と D5-brane は対等なはずである。

4　String 理論における非可換 D-branes

この章から string 理論に現れる非可換幾何について議論を進める。但し、その全てを網羅するには広すぎるため、これまでの話の流れに関係する部分に絞って話をする。この分野全般に関する文献として [15] を挙げておく。本章では非可換 D-brane を導入し、§5 でその有効理論におけるソリトン (非可換ソリトン) の構成法とその分類に関する話題を扱う。そして §6 では Chan-Paton 空間の非可換性と非可換 D-brane の関係について議論し、その見方から D-brane を分類することを §7 で行う。

まず、これまで string 理論の枠内で現れると考えられてきた非可換幾何について概観する。歴史的には最初の兆候は open string field theory [2] であった。これは string を第二量子化した理論で、string の場 Φ を変数とし、その相互作用を扱う理論である。作用汎関数は

$$S = \frac{1}{2}\int \Phi \mathrm{Q} \Phi + \frac{1}{3}\int \Phi * \Phi * \Phi \tag{4.1}$$

で与えられる。ここで相互作用を表す第二項が非可換結合積 $*$ であることが非可換幾何を示唆している。この非可換性は worldsheet の vertex operator の演算子積の非可換性である。一方、第一項の Q は場 Φ の成す非可換結合代数に作用する外微分の役割をしていて、合わせて非可換微分幾何の構造を持っている。

次に認識されたのは、Chan-Paton 因子の非可換性である。これは §2.1 で既に述べたように、D-brane が N 枚重なったときにそのゲージ対称性は $U(N)$ になるが、同時に D-brane の位置を表す垂直方向のスカラー場が $U(N)$ の adjoint 表現になることを解釈したものである。この効果については §6 §7 で扱う。

さてここで注目するのは、D-brane の worldvolume 方向に現れる非可換性である [16]。特に、背景に定数の B-field が存在するとき、D-brane の有効理論が非可換平面上の場の理論で記述されることが示される。このような D-brane を非可換 D-brane と呼ぶことにする。この非可換性も、open string の vertex operator の非可換性に起因するが、上の場合と違い、mode 展開の最低次に現れている。以下このことを見る。

4.1　open strings in B-field background

ここでは背景に B-field があるときに D-brane の有効理論が非可換場の理論で記述されることを見る [17]。そのために背景として $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$: 定数をとり、open string の bosonic 部分を考える。更に、$B_{\mu\nu}$ のうち D-brane に垂直方向の成分はゲージ変換により 0 にできるなどの簡単化ができるので、以下では D-brane の worldvolume $M = \mathbb{R}^{2n} \ni x^i \, (i = 1, 2, \cdots 2n)$ の方向のみ考え、$B_{ij} \neq 0$ は簡単のため invertible とする。

この場合の open string の σ-model の作用汎関数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma \left(g_{ij}\partial_a X^i \partial^a X^j - 2\pi\alpha' i B_{ij}\epsilon^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^j\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma g_{ij}\partial_a X^i \partial^a X^j - \frac{i}{2}\int_{\partial\Sigma} B_{ij} X^i \partial_t X^j \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで Σ は Disk worldsheet で $\partial\Sigma$ はその boundary である。この作用の見方として 2 通りある。一つは第一項を運動項、第二項を相互作用項として扱う通常の方法で、もう一つは両方を運動項として扱う方法である。前者の場合、運動項から得られるのは、D-brane の有効理論が M 上の場の理論で記述されるということで、相互作用項については、D-brane 上のゲージ場が $F_{ij} = B_{ij}$ なる flux を持つ項と解釈できる。この扱いで得られるのが Dirac-Born-Infeld 作用 (2.8) である。ここでは後者で扱う[1] 。

両方を運動項と見るので、まず境界条件は

$$g_{ij}\partial_n X^j + 2\pi\alpha' i B_{ij}\partial_t X^j|_{\partial\Sigma} = 0 \tag{4.3}$$

[1] 前者の扱いは以下で $B_{ij} = 0$ とすれば良い。

となる。第一項は Neumann 条件であり、open string の端点が D-brane 上で自由に動けることを表すが、B-field の効果の分だけ Dirichlet 条件が入り、自由には動けなくなることを意味している。このことは vertex operator の演算子積 としてより正確に記述できる。まず boundary の 2 点 t, s での propagator を求めると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^i(t)X^j(s)\right\rangle_\Sigma &= -\alpha' G^{ij}\log(t-s)^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(t-s) \\
G^{ij} &= \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_S, \quad \theta^{ij} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_A
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

S と A は ij のそれぞれ対称成分、反対称成分を表し、$\epsilon(t-s)$ は sign function である。これを用いて tachyon vertex operator $V_p(t) =: e^{ip\cdot X} : (t)$ の演算子積を求めると、

$$
V_p(t)V_q(s) = (t-s)^{2\alpha' G^{ij}p_i q_j} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}p_i q_j} V_{p+q}(s) \tag{4.5}
$$

右辺第一項は通常の扱いでも現れる項だが、metric が g^{ij} から B-field の分だけ変更を受けているため、各 mode の $(\mathrm{mass})^2$ も G^{ij} で測られる。従って G^{ij} は open string metric と呼ばれる。一方第二項は $B_{ij} \neq 0$ のときに初めて現れる項で、この phase factor が非可換性を表している。これは D-brane 上の有効理論において、$2n$ 次元平面 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数の積が Moyal 積

$$
f * g(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) f(x)g(y)|_{y=x} \tag{4.6}
$$

に置き換わることを意味している[2] 。特に座標関数に対して

$$
[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij} \tag{4.7}
$$

であるから、Moyal 積を持つ空間は非可換平面の一種である。これを Moyal 平面と呼び、$\mathbb{R}^{2n}_\theta$ と記す。従って今の扱いで得られる D-brane の有効理論は、通常の扱いで得られる作用汎関数において、metric g を G に置き換え、$B=0$ とする代わりに場の積を Moyal 積に置き換える、という操作によって得られる。

このように、場の積が Moyal 積の場の理論を非可換(空間上の)場の理論と呼び、特にゲージ理論の場合、非可換ゲージ理論と呼ぶ。また、有効理論が非可換場の理論で記述される D-brane を非可換 D-brane と呼ぶ。まとめると、背景 B-field 中の D-brane は非可換 D-brane になる。その worldvolume は Moyal 平面 $M = \mathbb{R}^{2n}_\theta$ で、一枚の場合は非可換 $U(1)$、N 枚の場合は非可換 $U(N)$ をゲージ群に持つ M 上の非可換ゲージ理論で記述される。

しかし、上述のように有効理論の導出には 2 通りあり、これらは物理的には等価なはずである。通常の扱いでは、D-brane 上の有効理論は $U(1)$ ゲージ理論になるが、曲率の微分を無視する近似では Dirac-Born-Infeld 作用で記述される[3] 。

$$
\begin{aligned}
&S_{BI}[A] = \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{g_s}\int d^{2n}x\sqrt{\det\left(g+2\pi\alpha'(B+F)\right)} \\
&\begin{cases} F = dA \\ \delta_\lambda A = d\lambda \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

この理論の場は $U(1)$ ゲージ場 A で、g, B は定数の背景、g_s は string coupling である。その下には曲率とゲージ変換性 $A \mapsto A + \delta_\lambda A$($\lambda$ はゲージパラメータ)を書いておいた。B-field が D-brane 上では $U(1)$ flux とみなせるという事実は、常に $B+F$ という組で作用に現れることに反映されている。一方、今の

[2] (4.5) の phase factor は (4.6) をフーリエ変換で表したものである。

[3] スカラー場は省略している。また $T_p = (2\pi)^{\frac{1-p}{2}}/g_s$.

我々の扱いで得られる有効理論は非可換 $U(1)$ ゲージ理論である。このゲージ場を上と区別するため $\hat{A}$ と書く。すると、有効作用は上述の置き換えにより

$$S_{BI}[\hat{A}] = \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{G_s} \int d^{2n}x \sqrt{\det\left(G + 2\pi\alpha' \hat{F}\right)_*}$$
$$\begin{cases} \hat{F} = d\hat{A} - i[\hat{A}, \hat{A}]_* \\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A} = D\hat{\lambda} := d\hat{\lambda} - i[\hat{A}, \hat{\lambda}]_* \end{cases} \tag{4.9}$$

となる。ここで場の積が Moyal 積であることが非可換場の理論を意味する。これを非可換 Dirac-Born-Infeld 作用と呼ぶ。曲率とゲージ変換性は共に、$U(1)$ であるにもかかわらず、Moyal 積の非可換性のために non-Abel 的なものになっている。これが非可換 $U(1)$ の大きな特徴である。以上 2 つの有効理論は物理的には等価であるはずだから、両者の場の間には何らかの関係がある。これを Seiberg-Witten map と呼ぶ。これは写像

$$SW : \begin{cases} A \mapsto \hat{A}(A) \\ \lambda \mapsto \hat{\lambda}(A, \lambda) \end{cases} \tag{4.10}$$

で、以下の図式が可換になるものとして定義される。

$$\begin{array}{ccc} A + \delta_\lambda A & \xrightarrow{SW} & \hat{A}(A + \delta_\lambda A) = \hat{A} + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A} \\ \delta_\lambda \Big\uparrow & & \Big\uparrow \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \\ A & \xrightarrow[SW]{} & \hat{A}(A) \end{array}$$

これは、場 A, $\hat{A}$ 自身ではなく、それぞれのゲージ軌道同士が一対一に対応することを要請している。この写像は一意的ではないが存在することが示される [18]。更に、この写像の下で作用汎関数 (4.8),(4.9) が（微分を無視する近似で）等しいこともいえる。従って両者は実際等価であり、B-field を扱う方法の違いに過ぎない。

なお、より一般には両者の中間の記述も可能である。つまり B-field の一部は通常のように flux Φ の相互作用として扱い、残りを Moyal 積に効く運動項として扱うことにすると、

$$S_{BI}[\hat{A}] = \frac{(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}}{G_s} \int d^{2n}x \sqrt{\det\left(G + 2\pi\alpha'(\Phi + \hat{F})\right)_*} \tag{4.11}$$

という作用が得られる。ここで理論の各パラメーターは

$$\frac{1}{G + 2\pi\alpha'\Phi} + \frac{\theta}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{g + 2\pi\alpha' B}$$
$$G_s = g_s \left(\frac{\det(G + 2\pi\alpha'\Phi)}{\det(g + 2\pi\alpha' B)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

という関係で与えられる。これらの記述の自由度は Φ の値によって決まり、特に Moyal 積を定める θ も Φ ごとに異なることになる。先の 2 つの記述については、$\Phi = B$ の場合が式 (4.8) で、$\Phi = 0$ の場合が式 (4.9) である。

以上のように非可換 D-brane といっても単なる記述の違いに過ぎないので、あまり非可換で考える意味が無いように思える。同じものを可換な記述で見ると、B-field は flux と解釈され、Chern-Simons term (2.11) において $B \neq 0$ は「brane within brane」を引き起こす。つまり非可換 D-brane は、単に低い次元の D-brane との bound state である。しかし、いろいろな記述があるということ自体が概念的に重要だとも言える。また実用的にも、可換な記述とは違う領域で非可換理論の方が良い記述になるなどの御利益がある。例えば、通常の Dirac-Born-Infeld 作用 $S_{BI}[A]$ で $\alpha' \to 0$ の極限をとると Yang-Mills 理論に

なったが、別の極限として G, θ を固定して $\alpha' \to 0$ の極限をとると、非可換 DBI 作用 $S_{BI}[\hat{A}]$ は非可換 Yang-Mills 理論

$$S_{YM}[\hat{A}] = \frac{1}{4g_{YM}^2}\int d^{2n}x\sqrt{G}G^{ik}G^{jl}\hat{F}^{ij}\hat{F}^{kl} \tag{4.13}$$

になるのに対し、通常の DBI 作用 $S_{BI}[A]$ は non-polynomial な作用汎関数になる。よってこの領域では非可換理論での解析の方が容易である。また、非可換場の理論におけるソリトンを考えると、非可換ゆえの興味深い性質を有していたりする。例えば非可換平面は「点」が θ の広がりを持つため、非可換 instanton の moduli 空間では small instanton の特異性が解消されるという事実は良く知られている (この辺りについては [19] などを参照)。

4.2 変形量子化

上述のように定数の B-field によって現れる非可換幾何は Moyal 平面という最も単純な場合で、ほとんどの研究はこの場合に限られている。しかし Moyal 平面 $\mathbb{R}^{2n}_\theta \in (x^1, \cdots, x^{2n}),\ [x^i, x^j]_* = i\theta^{ij}$ あるいはその関数環は元々古典力学の相空間 $T^*\mathbb{R}^n$ の変形量子化で現れるものである。ここで、変形量子化は以下のように定式化される。一般に Poisson 多様体 $(M, \{,\})$ 上の複素関数環 $C^\infty(M)$ は Poisson 環であるが、これをパラメーター $\hbar$ で変形した空間 $A = C^\infty(M)[[\hbar]]$ を考え、そこに非可換な結合積 $*$ を導入し、環を変形することをいう。但し $f * g = f \cdot g + \hbar\{f, g\} + \cdots$ を満たすものにとる。この $*$ 積の存在は、Kontsevich により示された [20]。

これに対応して、定数とは限らない一般の B-field (但し closed $dB = 0$) の場合には、より一般の $*$ 積を持つ非可換 D-brane になることが予想される。それは、Kontsevich 変形量子化を target 空間を Poisson 多様体 M とする topological σ-model で記述する方法があるが [21]、string の σ-model (4.2) でも $g_{ij} \to 0$ 極限をとれば topological になるからである。

一方 symplectic 多様体に限れば、Fedosov による変形量子化の方法もある [22]。これは M 上の接バンドルを Moyal 積で変形してそれを M 上で smooth に繋げる方法で、M 上に一般のベクトルバンドルがある場合への拡張が容易である。従って、N D-brane 上の非可換ゲージ理論を記述するのに都合が良い。我々はこの方法で非可換ゲージ理論の一般論を考察した [23]。

5 非可換ソリトン

ここでは、D-brane に限らず、非可換場の理論一般における特徴的なソリトン解について議論する。このような解を見つけるには、Moyal 平面よりも、Hilbert 空間とその上の作用素を考える方が都合が良い。その後、non-BPS D-brane 系にそれを適用する。この章では簡単のため 2 次元のみ扱うが、任意の偶数次元への拡張も自明にできる。この章の内容は主に [24] に従っている。

5.1 Weyl 変換

まず、場の理論の底空間を、Moyal 平面 $\mathbb{R}^2_\theta \ni (x^1, x^2),\ [x^1, x^2]_* = i\theta^{12} \equiv i\theta$ から、量子力学の Heisenberg 代数 $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ に置き換え、作用素環の言葉で場の理論を定式化する。正確には Moyal 平面上の複素関数環から separable な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素環への同型写像

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(\mathbb{R}^2_\theta) & \to & \mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H}) \\ f & \mapsto & \hat{\mathcal{O}}_f \end{array} \tag{5.1}$$

を Weyl 変換と呼ぶ。ここで $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の成す C^*-代数である。この写像は

$$\hat{\mathcal{O}}_f = \frac{1}{(2\pi\theta)^2}\int d^2k\, U(k)\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi\theta)^2}\int d^2k d^2x\ e^{-ik\cdot(x-\hat{x})}f(x) \tag{5.2}$$

で定義される。ここで、$\tilde{f}(k) := \int d^2x\ e^{ik\cdot x}f(x)$ は f の Fourier 変換で、$U(k) = e^{-ik\cdot\hat{x}}$ は Weyl-Heisenberg 群の元で、これらは $U(k)U(k') = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}k_ik'_j}U(k+k')$ を満たす。この写像の下で、Moyal 積、微分、積分はそれぞれ

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}_{f*g} &= \hat{\mathcal{O}}_f\hat{\mathcal{O}}_g \\ \hat{\mathcal{O}}_{\partial_i f} &= -i\theta^{-1}_{ij}[\hat{x}^j, \hat{\mathcal{O}}_f] \equiv \partial_i\hat{\mathcal{O}}_f \\ \int d^2x\ f(x) &= 2\pi\theta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\hat{\mathcal{O}}_f\end{aligned} \tag{5.3}$$

と写される。以下演算子の ^ は省略する。

更に Hilbert 空間の基底として調和振動子基底をとることにする。即ち複素座標 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2)$ から生成消滅演算子 $a = \frac{1}{\sqrt{\theta}}z,\ \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\bar{z},\ [a, \bar{a}] = 1$ を定義し、その Fock 空間として Hilbert 空間を

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}\,|\,n\,\rangle, \quad |\,n\,\rangle = \frac{1}{n!}(\bar{a})^n\,|\,0\,\rangle \tag{5.4}$$

と与える。このとき微分は (5.3) からそれぞれ $\partial \equiv \partial_z = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}\mathrm{ad}\ \bar{a},\ \bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\mathrm{ad}\ a$ で与えられることに注意する。この基底で簡単に表される重要な演算子の例としては以下がある。

$$\begin{aligned}P_k &= \sum_{i=0}^{k-1}|\,i\,\rangle\langle\,i\,| \ \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \quad \text{rank } k \text{ projection operator} \\ S &= \sum_{n=0}^{\infty}|\,n+1\,\rangle\langle\,n\,| \ \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \quad \text{shift operator}\end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ はコンパクト作用素の集合を表す。P_k は $|\,i\,\rangle$ $(i = 0, \cdots, k-1)$ の状態みを残す projection operator で、Weyl 変換の前 (Weyl 逆変換という) はかなり複雑な関数である。S は全ての状態を $|\,m\,\rangle \mapsto |\,m+1\,\rangle$ と一斉にずらす作用素で Fredholm operator の一種である。

さて、非可換場の理論の定式化はこれでほぼ完了している。例えば非可換スカラー場は $C^\infty(\mathbb{R}^2_\theta)$ の元であるから、Weyl 変換 (5.2) により作用素環 $\mathcal{A}$ の元としての場になる。また、その作用汎関数は関数の積、微分、積分で書かれているから、(5.3) によりすぐさま作用素環の言葉に写る。より一般の場の理論も同様である。例えばゲージ理論などは可換平面ではベクトルバンドルの connection であるが、Moyal 平面の場合には有限生成射影加群がベクトルバンドルの切断全体と一致するので、この加群上の connection で定式化できる。これを Weyl 変換して作用素環に写れば良い[1] 。

5.2 非可換ソリトン

最も簡単な非可換場の理論として、$\mathbb{R}^2_\theta \times \mathbb{R}$ 上の実スカラー場 ϕ を考える ($\mathbb{R}$ は時間方向)。まず簡単のため運動項を無視すると、作用汎関数は元の Moyal 表示では

$$S = \int dtd^2xV(\phi), \quad V(\phi) = c_2\phi*\phi + c_3\phi*\phi*\phi + \cdots \tag{5.6}$$

[1] 一般には B-field により微分形式も変更を受ける可能性があるが、あまり考えられていない。

のようにポテンシャルのみで与えられる。但し非可換場の理論ゆえ、場の積が Moyal 積である。これを Weyl 変換して作用素環の記述に移ると

$$S = 2\pi\theta \int dt \, \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \, V(\phi) \tag{5.7}$$

となる。以後全て作用素しか用いないので $\phi \equiv \hat{O}_\phi$ と置いている。運動方程式は

$$V'(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{5.8}$$

である。関数としてのポテンシャル V の停留点を $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ とおくと、可換理論 $(\theta = 0)$ の場合には自明な解 $\phi(x) \equiv \lambda_i = \text{const.}$ しかないのに対し、今の非可換理論の場合、それ以外に (5.5) の projection operator P_k を用いて非自明な解が構成できる。

$$\phi = \lambda_i P_k, \quad {P_k}^2 = \overline{P}_k = P_k \tag{5.9}$$

この解は局所的な場の励起を表している。例えば、最も簡単な $P_0 = |\,0\,\rangle\langle\,0\,|$ の場合、これを Weyl 逆変換すると $f(x) = 2e^{-\frac{|x|^2}{\theta}}$ となり、大体 θ のサイズの広がりを持っている。またエネルギーを評価すると

$$E = 2\pi\theta \, \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \, V(\phi) = 2\pi\theta V(\lambda_i) \, \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \, P_k = 2\pi\theta k V(\lambda_i) \tag{5.10}$$

となり、有限の値を持つ。一般にエネルギーは projection の rank と停留点でのポテンシャルの値にしかよらないことに注意。このような解は可換な理論では存在しない解であり、非可換ソリトンと呼ばれる。但しこの構成は、作用がポテンシャルだけで与えられている場合に特有のものである。

次に、より一般の場合に適用できる構成を紹介する。これは solution generating technique と呼ばれている。まず、作用汎関数 (5.7) がユニタリ作用素の群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の作用

$$\phi \mapsto U\phi\overline{U}, \quad \overline{U}U = U\overline{U} = 1 \tag{5.11}$$

の下で不変であることに注意する。当然運動方程式の解は解に写る。しかし変換後も解であるということだけを要請するのならば、$\mathcal{U}(\mathcal{H})$ からはみだす作用素のうち、non-unitary isometry と呼ばれる

$$\overline{U}U = 1, \; U\overline{U} \neq 1 \tag{5.12}$$

なる演算子で変換した場合も、解は解に写ることがわかる。このとき $U\overline{U}$ は projection operator になっている。もちろん有限次元ベクトル空間の場合は第一式から自動的に $U\overline{U} = 1$ なので、これは無限次元 $\mathcal{H}$ に特有の作用素である。従って、non-unitary isometry を用いれば新たな解をいくらでも作ることができる。例えば (5.5) の shift operator S は $\overline{S}S = 1, \; S\overline{S} = 1 - |\,0\,\rangle\langle\,0\,|$ を満たすので non-unitary isometry である。S^k も同様。よって、自明な解 $\phi = \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ から出発して $U = S^k$ で変換すると、$\phi = S^k(\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathcal{H}})\overline{S}^k = \lambda_i(1 - P_k)$ となり、先程の非可換ソリトンが得られる。

この方法は他の非可換場の理論にも容易に適用できる。次の例として複素スカラー場 ϕ を考える。作用汎関数は運動項を無視すると

$$S = 2\pi\theta \int dt \, \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(W(\phi\bar{\phi}) + W(\bar{\phi}\phi) \right) \tag{5.13}$$

のような形をしていて、$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \phi \mapsto V\phi U$ なる対称性がある。従って $\overline{U}U = \overline{V}V = 1$ のみを仮定すれば解は解に写ることになる。例えば $\phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ から $\phi = V\overline{U}$ が得られる。この場合は実スカラーと違い ϕ 自身は projection operator ではないが、$\overline{\phi}\phi = U\overline{U}$, $\phi\overline{\phi} = V\overline{V}$ は projection operator で、特に $\phi\overline{\phi}\phi = \phi$ を満たす。このような演算子は partial isometry と呼ばれる。つまり、複素スカラー場の場合、partial isometry が非可換ソリトンになる。具体的には $U = S^m$, $V = S^n$ などととれば良い。

また、作用汎関数に運動項が入ったより複雑な場合にもこの構成法は適用できる。この場合単に微分を用いて運動項を作ったとすると $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 不変性は破れるので、それが回復するように非可換ゲージ場 $\hat{A}$ を加える必要がある。つまり、作用汎関数は共変微分

$$D\phi = \partial\phi - i[\hat{A}, \phi] = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}[C, \phi], \quad C \equiv \bar{a} + i\sqrt{\theta}\hat{A} \tag{5.14}$$

を用いて書かれる。これらは $D\phi \mapsto UD\phi\overline{U}$ または $C \mapsto UC\overline{U}$ と共変に変換するので、上のテクニックは ϕ と C の系に対して適用できる。但し、曲率は $F := iF_{z\bar{z}} = \theta^{-1}([C, \overline{C}] + 1)$ であり、共変に変換しないため、作用汎関数には $F - \theta^{-1}$ の組み合わせで入っている必要がある。例としては、自明な解(ゲージ場は 0)から出発して $U = S^k$ により変換したもの、つまり

$$\begin{aligned} &\phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \quad C = \bar{a}, \quad \overline{C} = a \\ &\overset{U=S^k}{\longmapsto} \quad \phi = 1 - P_k, \quad C = S^k \bar{a} \overline{S}^k, \quad \overline{C} = S^k \bar{a} \overline{S}^k \end{aligned} \tag{5.15}$$

などが考えられる。このように微分項の入った場合の解を exact な非可換ソリトン解という。

5.3 非可換 D-brane への応用

以上のソリトン解の構成法を、Type II string 理論の不安定な D-brane 系からの BPS D-brane 解の構成に応用してみる。即ち、Type IIA では non-BPS D9-brane、Type IIB では D9-$\overline{\text{D9}}$ system を非可換 D-brane と考える。簡単のため B-field は 2 次元のみが 0 でないとする。このとき系は底空間 $\mathbb{R}^2_\theta \times \mathbb{R}^8$ 上の非可換ゲージ + タキオン理論で、タキオンは IIA の場合は実スカラー場、IIB の場合は複素スカラー場である。これらの系から $\mathbb{R}^8$ に巻きついた D7-brane 解を作ろうとすれば、余次元 2 の Moyal 平面 $\mathbb{R}^2_\theta$ 上のソリトンを考えればよいので、これまでの議論が適用できる[2]。従って、タキオンの配位が IIA では projection operator、IIB では partial isometry のときに解になる。例えば IIB 理論における $\mathbb{R}^2_\theta$ 上の m vortex-n anti-vortex 解は $U = S^n,\ V = S^m$ として変換すると得られる。

$$T = S^m \overline{S}^n, \quad C = S^n \bar{a} \overline{S}^n, \quad \overline{C} = S^m \bar{a} \overline{S}^m \tag{5.16}$$

これは m D7-n $\overline{\text{D7}}$ を意味する。実際、この解のエネルギーは $E = (n+m)T_7$ であり、揺らぎもこの系の場の理論を正しく再現していることが確かめられる。更に、高い余次元 $2n$ の非可換ソリトンも、ABS 構成の類似物が作られている [25]。

このことから、背景に定数の B-field がある場合にも §3 と同様に K-theory による D-brane の分類が可能であることが予想される。実際、上の D9-$\overline{\text{D9}}$ の非可換ソリトン解は、K-theory の 2 つの定義と対応していることが指摘されている。

- $\mathcal{A}$ を C^*-代数とし、$\mathcal{C}$ を $M_\infty(\mathcal{A})$ の projection operator の Murray von-Neumann 同値類の集合とする。即ち projection $p,\ q$ が同値 $p \sim q$ とは、ある partial isometry v により $p = \bar{v}v,\ q = v\bar{v}$ と書ける場合をいう。このとき Grothendieck の構成により得られる Abel 群 $K_0(\mathcal{A}) := \mathcal{S}(\mathcal{C})$ を C^*-代数 $\mathcal{A}$ の K 群と呼ぶ。今の例の場合、$\mathcal{A}$ を D7-brane の余空間 $\mathbb{R}^2_\theta$ 上の bounded function 全体 $C_0(\mathbb{R}^2_\theta)$ であると考えると、この定義の v が tachyon に対応している。一方、non-BPS D9-brane の非可換ソリトンは projection p に対応すると考えられる[3]。

- もう一つの K 群の定義は (3.35) の $K(Y) := [Y, \mathcal{F}]$ である。ここで $\mathcal{F}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Fredholm 作用素の集合で、その homotopy 同値類で定義される。この場合 D7-$\overline{\text{D7}}$ の worldvolume を $Y = \mathbb{R}^8$

[2] IIA の場合余次元 even は non-BPS であるから、本当は可換 1 次元分も合わせて余次元 3 のソリトンを考える必要がある。
[3] 本当は余次元 3 のソリトンと $K_1(\mathcal{A} \otimes C_0(\mathbb{R}))$ の対応を議論すべきである。

とし、M の各点上の Chan-Paton 空間と $\mathcal{H}$ を同定する。つまり無限枚の D7-$\overline{\text{D7}}$ 系を考えていることになる。余空間 $C_0(\mathbb{R}^2_\theta)$ は Weyl 変換を通して $\mathcal{H}$ に作用する作用素環となる。このとき作用汎関数が有限になるような配位はタキオンが Fredholm 作用素の場合であるから、$K(Y)$ の元を定めている。一方、IIA のタキオンは (3.34) の $K^1(Y) := [Y, \mathcal{F}^{sa}]$ の元になる。ここで $\mathcal{F}^{sa}$ は self-adjoint Fredholm 作用素の全体を表す。

§3 の言い方をすれば、前者は ABS 構成に対応する補題の部分に相当し、後者は残る D7-$\overline{\text{D7}}$ 系の配位全体を考えているので主張 2 に相当する。しかし、可換な D-brane と非可換な D-brane を全て合わせて §3 のように系統的な説明をすることはされていないようである。それは、非可換 D-brane がそもそも bound stete であることが原因と思われる。この理解に関係する非可換 D-brane の Chern-Simons term については、最近かなり分かってきている (例えば [27])。ここでは後者の観点が重要であることを指摘するにとどめる。つまり非可換平面 $C_0(\mathbb{R}^2_\theta)$ は Chan-Paton Hilbert 空間に作用する作用素環である、ということを用いると、次の §6 で見るように、低次元の D-brane から高次元の非可換 D-brane を構成することができる。

6 Chan-Paton 因子による非可換 D-brane の構成

この章からはこれまでとは逆に、最低次元の D-brane 系からの高次元の D-brane の構成に関する議論をしていく。これに本質的な役割を果たすのは、Chan-Paton 因子、つまり D-brane が N 枚重なったときに垂直方向のスカラー場同士が持つ $U(N)$ の構造である。これは有限枚 $N < \infty$ の場合は non-Abel 性に過ぎないが、無限枚 $N = \infty$ の場合には無限次元の Chan-Paton 空間が付随し、そこに作用する作用素環として高次元の空間が生み出されることになる。本章ではまず、今まで無視していた Chan-Paton 因子の非可換性を有効理論にどう取り込むかを見る。そして BPS D(-1)-brane 系の配位が実際に非可換平面、つまり高次元の非可換 D-brane を含むことを見る。これは元々matrix model の枠内で議論されてきたものである [28, 29]。ここでは [30] に従う。

N 枚の BPS Dp-brane の有効理論は worldvolume M 上の場の理論として、$U(N)$ のゲージ場 A_μ $(\mu = 0, 1, \cdots, p)$ と $U(N)$ の adjoint 表現のスカラー場 ϕ^i $(i = p+1, \cdots, 9)$ で記述される。Chan-Paton 因子の非可換性とは $[\phi^i, \phi^j] (\neq 0)$ のことである。この項を取り入れた作用汎関数として Myers 作用と呼ばれるものが知られている [31]。これは N 枚の BPS D9-brane の作用汎関数が non-Abelian Dirac-Born-Infeld であることを仮定したときに、Type II string 理論の対称性である T-duality 変換不変性を要請して求めた作用汎関数のことである。i $(i = p+1, \cdots, 9)$ 方向に T-duality 変換を行うと D9-brane が Dp-brane になり、元の i 方向のゲージ場が $A_i \mapsto \phi^i$ とスカラー場に変換される。従って元の $U(N)$ 曲率から $F_{ij} \mapsto [\phi^i, \phi^j]$ により Chan-Paton 因子の非可換性が現れることになる。具体的には BPS Dp-brane の Chern-Simons term S_{CS} (2.11) は、この方法により以下のように変更を受ける (S_{BI} も同様にできるが省略。また $B = 0$ とする)。

$$S_{CS} = T_p \int_M \mathrm{Tr}\, P \left(e^{\mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\phi} C \right) \wedge e^{iF} \tag{6.1}$$

特徴的なのは内部積 $\mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\phi$ と pull-back の一般化 P である。これらは例えば $M = (\mu, i)$ として時空の 2-form $C^{(2)} = \frac{1}{2} C_{MN} dx^M \wedge dx^N$ に対し、以下で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\phi C^{(2)} &:= \phi^i \phi^j C_{ij} = \frac{1}{2} [\phi^i, \phi^j] C_{ij} \\ P(C_{\mu\nu}) &:= C_{\mu\nu} + 2 D_\mu \phi^i C_{i\nu} + D_\mu \phi^i D_\nu \phi^j C_{ij} \end{aligned} \tag{6.2}$$

ここで $D_\mu \phi^i$ は $U(N)$ の共変微分である。また第二式の右辺は x^μ と ϕ^i の (汎) 関数と理解する。従ってこの両者に ϕ^i の non-Abel 性が反映されている。しかしここでは $[\phi^i, \phi^j]$ の効果に注目したいので、共変

微分のない系、つまり 0 次元の系として Type IIB の N BPS D(-1)-brane を考える。この有効理論に含まれる場は 10 個のスカラー場 Φ^μ ($\mu = 0, 1, \cdots, 9$) のみで[1] 、0 次元ゆえこれらは全て $U(N)$ adjoint 表現の単なる行列である。その作用汎関数も Myers の方法により以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
S_{BI} &= \frac{2\pi}{g_s}\,\mathrm{Tr}\,\sqrt{\det(\delta^\mu_\nu - i g_{\nu\rho}[\Phi^\rho, \Phi^\mu])} \\
S_{CS} &= \frac{2\pi}{g_s}\,\mathrm{Tr}\left(e^{\mathbf{i}_\Phi \mathbf{i}_\Phi}\widetilde{C}\right)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

ここで、(6.2) の P はこの場合第一項のみであるから P を作用させた後の表式を書いている。従って RR-form $\widetilde{C} = \sum_n C^{(n)}$ の各成分は Φ^μ の対称な汎関数 $C_{\mu_1\cdots\mu_n}(\Phi)$ で、内部積を施した後 0-form のみ取り出す約束をとる。そうすると「brane within brane」に類似した現象があることがわかる。つまり $\mathrm{Tr}[\Phi^\mu, \Phi^\nu] = 0$ であれば $C^{(0)}$ とのみ結合し、D(-1)-charge を持つことを表すだけであるが、$\mathrm{Tr}[\Phi^\mu, \Phi^\nu] \neq 0$ なる配位であれば内部積が効いて、高い次数の RR-form $C^{(p)}$ ($p \geq 1$) とも結合する。これは高い次元の Dp-brane との bound state を表す。但し、このような配位は有限の N ではあり得ないことに注意[2] 。

では実際に非可換 Dp-brane がこの系の解として得られることを見る。作用汎関数 (7.1) から得られる運動方程式の自明な解としては $[\Phi^\mu, \Phi^\nu] = 0$ ($\mu, \nu = 0, 1, \cdots, 9$) がある。10 個のスカラー場（の対角成分）は N 個の D(-1)-brane の位置と解釈されることと、S_{CS} は $C^{(0)}$ しか含まないことから、この解は 10 次元時空に N 個の D(-1)-brane が散らばって存在する配位を表す。一方、$N = \infty$ の場合には以下の配位もあり得る。

$$
\begin{aligned}
&\Phi^i = x^i \ (i = 0, 1, \cdots, p), \quad [x^i, x^j] = i\theta^{ij} \\
&\Phi^a = 0 \ \ (a = p+1, \cdots, 9)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

ここで $N = \infty$ とは、正確には Chan-Paton 空間が separable Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で、場 Φ^i はその上に作用する作用素と見なしている。これは無限個の D(-1)-brane が $p+1$ 次元の非可換平面 $\mathbb{R}^{p+1}_\theta$ を成している配位である。S_{CS} には $[x^i, x^j]$ と縮約して 0-form になる全ての RR-form との結合があり、これは B-field が $B_{ij} = \theta^{-1}_{ij}$ の場合の (2.11) に一致する。言い換えると非可換 Dp-brane の RR charge に一致する。更に、この解のまわりで次の揺らぎを考える。

$$
\Phi^i = x^i + \theta^{ik}\hat{A}_k(x) \tag{6.5}
$$

下で $\hat{A}_i$ は非可換 Dp-brane 上の非可換ゲージ場と解釈される。実際、微分が $\partial_j = -i\theta^{-1}_{jk}\mathrm{ad}x^k$ と書けることにより

$$
[\Phi^i, \Phi^j] = iQ^{ij} = \theta^{ij} - \theta^{ik}\hat{F}^{kl}\theta^{lj}, \quad \hat{F}_{ij} := \partial_i\hat{A}_j - \partial_j\hat{A}_i - i[\hat{A}_i, \hat{A}_j] \tag{6.6}
$$

と曲率を含む表式が得られるが、これを作用汎関数 S_{BI} に代入し、Weyl 逆変換の公式 (5.3) を用いると[3]

$$
\begin{aligned}
S_{BI} &= \frac{2\pi}{g_s}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,\mathrm{Pf}\theta\sqrt{\det(g_{ij} - Q^{-1}_{ij})} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}}{G_s}\int d^{p+1}x\sqrt{\det(G_{ij} + \Phi_{ij} + \hat{F}_{ij})_*}
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

となり、確かに非可換 Dp-brane の作用汎関数 (4.11) が再現される。但し、各パラメータは (4.12) で $\Phi_{ij} = -B_{ij}$ としたものである。S_{CS} についても同様に議論でき、Φ^a に揺らぎとしてスカラー場 $\Phi^a = \phi^a(x)$ を入れて考えることもできる。以上のことから、$N = \infty$ D(-1)-branes から非可換 D-brane が作られることが分かった。

[1] 上と違い D(-1)-brane に垂直な方向を μ とおいた。
[2] $\mathrm{Tr}([\Phi^\mu, \Phi^\nu]\Phi^\rho) \neq 0$ であれば有限の N でも可能である。このときも高次元の D-brane を含み、Myers 効果と呼ばれている。
[3] 正確には (5.3) の高次元版。特に $\int d^{p+1}x = (2\pi)^{\frac{p+1}{2}}\,\mathrm{Pf}\,\theta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$.

この構成により、非可換 D-brane の Hilbert 空間と作用素環による記述 (Weyl 変換したもの) は、Chan-Paton Hilbert 空間と D(-1)-brane 上の場に他ならないことが分かった。非可換 D-brane の worldvolume はあくまでも $*$ 積を持つ代数 $C_0(\mathbb{R}^{p+1}_\theta)$ であり、§5 の Hilbert 空間は便宜上現れただけであった。ここではそれが Chan-Paton Hilbert 空間として意味付けがされたことになる。この対応の下で、非可換 D-brane の非可換 $U(1)$ ゲージ群は、D(-1)-brane の対称性 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ のうち $[x^i, x^j] = i\theta^{ij}$ を保つ部分群であることがわかる。

但し、この構成に対していくつか注意がある。まず、このような構成は単なる $N = \infty$ 極限では実現できないことに注意しておく。その場合の Chan-Paton 因子は $M_\infty(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{K}(\mathcal{H})$ であり $C_0(\mathbb{R}^{p+1}_\theta)$ を含むことはできないからである[4] 。また、D(-1)-brane から得られるのは、いろいろな記述の自由度 (4.12) のうち特に $\Phi_{ij} = -B_{ij}$ の記述であることに注意する。これは微分が inner derivation であることに関係している。つまり、Chan-Paton 因子から何らかの空間を生み出すには座標と微分の両方が必要であるが、Φ^μ を一種の座標と解釈している限り、微分は座標で書けるものしか考えられない。言い換えると、この構成では可換な D-brane は作れない。次章ではこれに対する解決を与える。

7 K-matrix theory

前章では BPS D(-1)-brane の Chan-Paton 因子から非可換 Dp-brane を構成した。しかしこれは必ず非可換 (bound state) であり、Dp-brane charge だけを持つ可換な Dp-brane は作れなかった。これは §3 の状況に似ている。BPS D-brane でのゲージ場の非自明な配位は低い次元の D-brane との bound state は記述しているものの、低い次元の D-brane そのものは作れない。これに対し、不安定な non-BPS D9-brane あるいは D9-$\overline{\text{D9}}$ から出発すると、全ての bound state ではない BPS D-brane を作ることができた。従って今の場合も、最低次元の系から出発して可換な D-brane を作るには、不安定な 0 次元の D-brane 系を考えれば良いことが予想できる。即ち、この章では

$$\begin{cases} \text{IIA:} \quad \text{non-BPS D}(-1) \text{ 系} \\ \text{IIB:} \quad \text{D}(-1)\text{-}\overline{\text{D}(-1)} \text{ 系} \end{cases} \tag{7.1}$$

という系を考え、可換な D-brane を構成する。すると、最低次元の系においても §3 と同様な D-brane の分類を与える Abel 群が対応するはずであるが、それが K-theory ではなく K-homology であることを見る。

なお、この章は [1] の紹介である。そこではこの系に K-matrix theory という名前を付けているが、それは、この系が string 理論の非摂動的な定式化のモデルという物理的な意味を持つ理論であることを期待しているからである。しかしここでは、単に D-brane 系のうちの一つと思って頂いて構わない。

7.1 spectral triles

まずこれから扱う系について整理しておく。IIA と IIB の両者は同様に議論できるので、主に Type IIA で考える。(7.1) の通り、Type IIA K-matrix theory は無限個の non-BPS D(-1) 系である。この worldvolume は 0 次元であるから、bosonic な場

$$\begin{cases} \Phi^\mu \ (\mu = 0, \ldots, 9) : \text{scalar fields}, \\ T : \text{tachyon} \end{cases} \tag{7.2}$$

は、有限個 $N < \infty$ であれば $U(N)$ の adjoint 表現の単なる hermite 行列である。ここでは無限個 $N = \infty$ を定式化するために、無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を用意する。また non-BPS D-brane としての $\mathbb{Z}_2$-grading も考慮すると、Chan-Paton 空間は $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \mathbf{C}_1$ となる。Φ^μ と T は $\mathcal{H}$ に作用する self-adjoint な

[4] 対応して $U(\infty)$ と $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ は全く異なる。

作用素で、それぞれ $\mathbf{C}_1$ の I、σ_1 sector に属する。作用汎関数は BPS D(-1)-brane のときと同様、non-BPS D9-brane の作用から Myers の方法で得られる。

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \sqrt{2}T_{-1}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\,e^{-T^2}\left(1+\sqrt{\det(\delta^\mu_\nu - ig_{\nu\rho}[\Phi^\rho,\Phi^\mu])}+c[\Phi_\mu,T][\Phi^\mu,T]+\cdots\right)\\
S_{CS} &= \sqrt{2}T_{-1}\mathrm{Str}_{\mathcal{H}}\left(e^{-T^2+\mathbf{i}_\Phi\mathbf{i}_\Phi - i\mathbf{i}_{[\Phi,T]}\sigma_1}\widetilde{C}\right)
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

ここで $\mathrm{Str}_{\mathcal{H}}$ は $\mathbf{C}_1$ の (odd) supertrace と $\mathcal{H}$ の trace の双方を意味する。

この作用汎関数を BPS D(-1)-brane の場合と比べると、タキオンが入っている点が大きく異なる。タキオンポテンシャルは $V(T)=\sqrt{2}T_{-1}\ e^{-T^2}$ で、$T=\pm 1$ で最小となるよう場の再定義 $\widetilde{T}=\frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$ を行うと double well 型のポテンシャルになる。重要なのはタキオン T が $N=\infty$ をコントロールしている点である。通常の matrix model では有限の N で理論を定式化し、$N\to\infty$ の極限を手で課すのだが、物理的な情報は極限操作に含まれている場合が多い。 一方、このモデルでは始めから無限次元で、タキオン凝縮の仕方によっては有限行列になり、そのサイズが決まるという構造をしている。例えば、ほとんどの non-BPS D(-1)-brane が真空に消滅する場合、e^{-T^2} の spectrum が有限個を除いて 0 （つまりコンパクト作用素) となり、有限行列を再現する。

また Chern-Simons term に関しては、タキオンの存在により内部積 $\mathbf{i}_{[\Phi,T]}$ が加わっている点が重要である。この項の存在が §6 とは違い、可換な D-brane の配位を可能にしている。実際、平面 $\mathbb{R}^{p+1}$ 上に広がった可換な BPS Dp-brane の配位は、ABS 構成と類似の方法で与えられる [32]。まず Hilbert 空間は $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^{p+1})\otimes S$ とする。ここで S を $SO(p+1)$ の spinor 表現の $2^{p/2}$ 次元ベクトル空間とした。このとき、$\mathcal{H}$ に作用する作用素として、

$$
\begin{aligned}
&T = u\,D = u\sum_{\alpha=0}^{p}\hat{p}_\alpha\otimes\gamma^\alpha,\\
&\Phi^\alpha = \hat{x}^\alpha\otimes 1\ (\alpha=0,\cdots,p),\quad \Phi^i=0\ (i=p+1,\cdots,9)
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

という配位をとる。ここで、$\hat{x}^\alpha$ は関数 x^α の掛け算、$\hat{p}_\alpha$ は微分作用素 $-i\partial/\partial x^\alpha$ として $L^2(\mathbb{R}^{p+1})$ に作用していて、$[\hat{x}^\alpha,\hat{x}^\beta]=[\hat{p}_\alpha,\hat{p}_\beta]=0,\ [\hat{x}^\alpha,\hat{p}_\beta]=i\delta^\alpha_\beta$ という代数を成す。また u はパラメータで、γ^α は S に作用するガンマ行列である。この配位は $u\to\infty$ で BPS Dp-brane を表す。Φ^μ 同士は可換なので、非可換 D-brane の場合とは異なり、可換な平面 $\mathbb{R}^{p+1}$ あるいはその関数環 $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ を生成している[1] 。一方、T は $\mathbb{R}^{p+1}$ 上の Dirac 作用素で、非可換 D-brane と違い微分作用素が座標とは独立に存在することに注意する。この配位を Chern-Simons term に代入すると、$\mathbf{i}_{[\Phi,T]}$ が $(p+1)$ 回 $\widetilde{C}$ に作用したものしか残らないため、

$$
\begin{aligned}
S_{CS} &= \sqrt{2}T_{-1}u^{p+1}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(\gamma^0\gamma^1\cdots\gamma^p C_{01\cdots p}(x)e^{-u^2T^2}\right)\\
&= \sqrt{2}T_{-1}u^{p+1}2^{p/2}\int d^{p+1}k\ \langle\, k\,|\,C_{01\cdots p}(x)e^{-u^2k^2}\,|\,k\,\rangle\\
&= T_p\int d^{p+1}x\ C_{01\cdots p}(x)
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

となり、確かに BPS Dp-brane の Chern-Simons term を表している。非可換 D-brane の構成では Weyl 逆変換から積分が現れたのに対し、ここではタキオンが Dirac 作用素であることが効いて、$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-T^2})$ から $(p+1)$ 次元の体積積分が出る。まとめると、K-matrix theory では、高い次元の可換な (bound state ではない) D-brane を構成することができる。

この例を一般化すると、この理論の配位は一般に spectral triple で与えられることがわかる。Spectral triple は $(\mathcal{H},\widehat{\mathcal{A}},T)$ の 3 つ組みで定義される。ここで $\mathcal{H}$ は separable な Hilbert 空間、$\widehat{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{H}$ に作用する

[1] 無限遠で 0 となる元のみ考えると $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ だが、x^α 自身は $C_0(\mathbb{R}^{p+1})$ の元ではない。

C^*-代数[2] 、T は $\mathcal{H}$ 上の self-adjoint な作用素で、

$$(T-\lambda)^{-1} \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \quad \text{for } {}^\forall\lambda \notin \mathbb{R}, \quad [\widehat{a}, T] \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \quad \text{for } {}^\forall\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}} \tag{7.6}$$

を満たすものである。非可換微分幾何において、spectral triple は非可換な Riemann 多様体の役割を果たす [33]。特に、可換な Riemann 多様体の情報は canonical triple $(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{A}}, T) = (L^2(M,S), C^\infty(M), D)$ から再現されることが知られている。ここで $C^\infty(M)$ は閉 Riemann spin 多様体上の ∞ 級の関数環で、$L^2(M,S)$ は M 上の spin bundle S の L^2-section 全体、D は Levi-Civita connection から得られる Dirac 作用素を表す。Spectral triple はこの非可換版である。位相空間としての情報は C^*-代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ に完全に含まれている。例えば M 上の点 $p \in M$ は character と呼ばれる $\widehat{\mathcal{A}}$ 上の関数 $\phi_p : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ に相当する。また、T はそこに metric の情報を与えている。例えば距離は 2 つの状態 $\phi_1,\ \phi_2$ に対し、

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{a \in \widehat{\mathcal{A}}} \left\{ \ |\phi_1(a) - \phi_2(a)| \ \middle| \ \parallel [T, a] \parallel \leq 1 \ \right\} \tag{7.7}$$

で与えられる。実際 canonical triple に対し状態を character とすると、これは M の geodesic distance に一致する。また、M の次元などの情報も T に含まれている。

さて、我々の場合、$\mathcal{H}$ を non-BPS D(-1)-brane の Chan-Paton Hilbert 空間 ($\widehat{\mathcal{H}}$ のうちの)$\mathcal{H}$、$\widehat{\mathcal{A}}$ をスカラー場 Φ^μ の生成する C^* 代数、T をタキオン場 T と同定すると、これらは spectral triple $(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{A}}, T)$ を成す。これは概ね次のような議論から来る。作用汎関数を評価すると

$$\begin{aligned} |S_0| &\leq \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-T^2}\right) \left(1 + \parallel [\Phi^\mu, \Phi^\nu] \parallel^2 + \parallel [\Phi^\mu, T] \parallel^2 + \cdots\right) \\ |S_{\mathrm{CS}}| &\leq \sum_n \frac{1}{n!} \parallel C_{\mu_1 \ldots \mu_n}(\Phi) \parallel \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-T^2}\right) \prod_{\{\mu_k\}} \parallel [T, \Phi^{\mu_k}] \parallel \text{ or } \parallel [\Phi^{\mu_k}, \Phi^{\mu_l}] \parallel \end{aligned} \tag{7.8}$$

のような不等式が得られる。ここで $\parallel \cdot \parallel$ は作用素のノルムで、第二式は μ_k の足の適当な縮約を表す。従って、作用が有限となる配位として以下を満たすものが考えられる[3] 。

$$(T-\lambda)^{-1} \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } {}^\forall\lambda \notin \mathbb{R}, \quad [\Phi^\mu, T],\ [\Phi^\mu, \Phi^\nu],\ {}^\forall C(\Phi) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \tag{7.9}$$

$C(\Phi)$ は Φ^μ の任意の対称関数を意味する。従ってこれを上の同定に当てはめると spectral triple の条件 (7.6) になる。なお、$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の成す C^*-代数を表し、$\mathbb{K}(\mathcal{H})$ はコンパクト作用素の集合で $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の中では「無限小」を意味する。よって特に T は条件から非有界作用素である。これは物理的には、T の spectrum の殆どが真空 $T = \pm\infty$ に集中することを意味する。一方、規格化したタキオンは有界作用素 $\widetilde{T} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ である。これを用いると、同じ条件 (7.6) は

$$\widetilde{T}^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}), \quad [\widehat{a}, \widetilde{T}] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } {}^\forall\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}} \tag{7.10}$$

とも書ける。今度は $\widetilde{T}^2$ の spectrum の殆どが真空 $\widetilde{T} = \pm 1$ に集中する条件である。この表式は次節 §7.2 で用いる。

従って K-matrix theory の配位は、非可換微分幾何的に表現された多様体を表していることになる。スカラー場 Φ^μ の spectrum は元々各 non-BPS D(-1)-brane の位置を表していたが、この無限個の「点」から成る位相空間を Φ^μ の生成する C^*-代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ として表現している。そしてタキオン T の凝縮は、点集合としての空間を一つの多様体にしている。この多様体を、高い次元の D-brane の worldvolume M と解釈するわけである。$\widehat{\mathcal{A}}$ が非可換環の場合は、非可換 D-brane が対応する。

もちろん D-brane には worldvolume M だけではなく、Chan-Paton bundle E (ゲージ理論) が付随しているが、spectral triple にはその情報も含まれている。一般に、ユニタリ作用素 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ の生成する

[2] 簡単のため $\widehat{\mathcal{A}}$ は unital と仮定するが、non-unital への拡張も可能である。(7.4) は non-unital な例である。
[3] 作用 S_0 を厳密に知らないと有限となる必要十分条件かはわからないが、ここではこの条件を満たす配位のみ考える。

$\widehat{\mathcal{A}}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathcal{A}})$ の作用は、同値な spectral triple を与え、ゲージ変換と解釈される[4]。また、$\widehat{\mathcal{A}}$ と森田同値な $M_N(\widehat{\mathcal{A}})$ まで含めて spectral triple の同値性を考えると、これは $U(N)$ のゲージ変換を含む。具体的には、M を記述する canonical spectral triple に Chan-Paton bundle E を含めたものは $(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{A}}, T) = (L^2(M, S \otimes E), C^\infty(M), D_E)$ で与えられる。ここで D_E は $S \otimes E$ 上の connection から得られる twisted Dirac 作用素である。

Type IIB K-matrix theory の場合も同様な議論ができる。これは無限個の D(−1)-$\overline{\text{D}(-1)}$ 系で、その上の場はスカラー場のペア Φ^μ、$\overline{\Phi}^\mu$ とタキオン場 T から成る。Chan-Paton Hilbert 空間 $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ が even superspace の構造を持つ他は IIA と同様である。特に、以下のような表示

$$\widehat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi}^\mu = \begin{pmatrix} \Phi^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}^\mu \end{pmatrix}, \quad \widehat{F} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\widetilde{T}} \\ \widetilde{T} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

をとると IIA との類似は明らかである。ここで規格化したタキオンを用いているので $\widehat{F} \in \mathbb{B}(\widehat{\mathcal{H}})$ であることに注意。さて、Φ^μ と $\overline{\Phi}^\mu$ の生成する代数は一般には異なっていても良いが、同一の $\widehat{\mathcal{A}}$ である場合、その配位は spectral triple と解釈される。このとき条件 (7.10) に対応するのは

$$\widehat{F}^2 - 1 \in \mathbb{K}(\widehat{\mathcal{H}}), \quad [\widehat{a}, \widehat{F}] \in \mathbb{K}(\widehat{\mathcal{H}}) \text{ for } {}^\forall \widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}} \tag{7.12}$$

であり、IIA の場合と (grading を除いて) 一致する。

7.2 K-homology

全節では K-matrix theory の配位が一般に spectral triple であり、高次元の D-brane をその中に含んでいることを見たが、ここではそれらの topological な分類を考える。つまり、ある時空多様体 X に対し、そこに埋め込まれている worldvolume が $M(\hookrightarrow X)$ の D-brane を分類する。この埋め込みを非可換空間の場合にも適用できるよう代数的に表現すると次のようなる。「時空の C^*-代数 $\mathcal{A}$ に対し、$*$-準同型写像 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ で与えられる $\widehat{\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\phi \simeq \mathcal{A}/\ker\phi$ は $\mathcal{A}$ に埋め込まれた C^*-代数である。」従って、時空の C^*-代数 $\mathcal{A}$ を固定し、いろいろな worldvolume $\widehat{\mathcal{A}}$ を考える代わりにいろいろな $*$-準同型 ϕ を動かして分類が行える。例えば時空が可換な $X = \mathbb{R}^{10}$ だとすると、埋め込まれた D-brane も可換な worldvolume を持つものに限られる。上の例 (7.4) は、$\mathcal{A} = C_0(\mathbb{R}^{10})$ の生成元を $\{x^\alpha, x^i\}$ としたとき、$\phi(x^\alpha) = \hat{x}^\alpha, \phi(x^i) = 0$ で ϕ を指定した場合に当たる。

D-brane は実際は $\widehat{\mathcal{A}}$ だけではなく spectral triple $(\widehat{\mathcal{A}}, \mathcal{H}, T)$ で指定されるので、結局時空 $\mathcal{A}$ に埋め込まれた D-brane は triple $(\mathcal{H}, \phi, \widetilde{T})$ で指定される。この分類は $\mathcal{A}$ の analytic K-homology として知られている[5]。実際、この Abel 群は以下のように定義される [34]。まず、$\mathcal{A}$ 上の odd Fredholm module は $(\mathcal{H}, \phi, F)$ の 3 つ組みで与えられる。ここで、$\mathcal{H}$ は separable Hilbert 空間、$\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ は $*$-準同型、F は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 上の self-adjoint な作用素で

$$F^2 - 1 \in \mathbb{K}(\mathcal{H}), \quad [F, \phi(a)] \in \mathbb{K}(\mathcal{H}) \text{ for } {}^\forall a \in \mathcal{A} \tag{7.13}$$

を満たすものである。よってこれは Type IIA K-matrix theory の配位を表す triple $(\mathcal{H}, \phi, \widetilde{T})$ に他ならない。つまり $\mathcal{H}$ は Chan-Paton Hilbert 空間、ϕ は Φ^μ の生成する worldvolume $\widehat{\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\phi$ を表し、F は規格化したタキオン $\widetilde{T}$ で、これらの満たす関係 (7.10) は (7.13) に一致する。同様に、even Fredholm module $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\phi}, \widehat{F})$ は $\widehat{\mathcal{H}}$ が $\mathbb{Z}_2$-graded Hilbert 空間である他は上と同様に定義される。従ってこれは Type IIB K-matrix theory の配位を表す triple $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\phi}, \widetilde{F})$ に他ならない。2 つの Fredholm module の直和 $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \phi_0 \oplus \phi_1, F_0 \oplus F_1)$

[4] 詳しくは [33]。内部自己同型 $\mathrm{Inn}(\widehat{\mathcal{A}})$ は $U(1)$ ゲージ変換、外部自己同型 $\mathrm{Out}(\widehat{\mathcal{A}})$ は diffeomorphism と同定される。

[5] ここで規格化したタキオンを用いているのは、analytic K-homology の標準的な定義に合わせるためである。元のタキオン T を用いる unbounded Fredholm module によっても同じ群が定義される。

は再び Fredholm module であるため、Fredholm module の全体を同値関係で割ることにより、analytic K-homology 群 $K^i(\mathcal{A})$ $(i=0,1)$ が定義される。

$$\begin{aligned} K^1(\mathcal{A}) &= \{(\mathcal{H},\phi,F) : \text{odd Fredholm module over } \mathcal{A}\}/\sim, \\ K^0(\mathcal{A}) &= \{(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\phi},\widehat{F}) : \text{even Fredholm module over } \mathcal{A}\}/\sim \end{aligned} \tag{7.14}$$

同値関係は以下の 3 種類で生成され[6] 、物理的にも同一視されるべきものである。

- unitary equivalence: 2 つの Fredholm module $(\mathcal{H}_i,\phi_i,F_i)$ $(i=0,1)$ がユニタリ同値とは、各 ϕ_i、F_i を繋ぐユニタリ作用素が $\mathbb{B}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ にある場合をいう。これは物理的にはゲージ同値性に他ならない。

- operator homotopy: これは $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1$、$\phi_0=\phi_1$ かつ F_0 と F_1 を繋ぐノルム連続な経路が存在する場合を指し、タキオンの homotopic な連続変形を意味する。

- addition of a degenerate Fredholm module: 退化な Fredholm module とは、(7.13) のうち厳密に $F^2-1=[F,\phi(a)]=0$ が成り立つものを指す。つまり真空と区別がつかない配位である。よって直和してその配位を生成させても何も変わらない。

以上から、K-matrix theory の配位のうち、固定した時空 $\mathcal{A}$ に埋め込まれる配位は analytic K-homology $K^i(\mathcal{A})$ で分類されることが結論される。但し、これが BPS D-brane の分類であることは直感的には分かりにくい[7] 。以下の議論はそれをサポートするものである。

まず §3 の K-theory との関係を見る。時空 $X=\mathbb{R}^{10}$ 中の $M=\mathbb{R}^{p+1}$ を worldvolume に持つ Dp-brane の RR-charge は $K^i(\mathbb{R}^{9-p})\simeq K_i(C_0(\mathbb{R}^{9-p}))$ で測られた。ここで IIA は $i=1(3.31)$、IIB は $i=0(3.15)$ である。一方、同じ Dp-brane charge は K-homology では $K^i(C_0(\mathbb{R}^{p+1}))\simeq K_i(\mathbb{R}^{p+1})$ で分類される。実際、

$$K^1(C_0(\mathbb{R}^{p+1}))=\begin{cases}\mathbb{Z} & (p:\text{even})\\ 0 & (p:\text{odd}),\end{cases}\qquad K^0(C_0(\mathbb{R}^{p+1}))=\begin{cases}0 & (p:\text{even})\\ \mathbb{Z} & (p:\text{odd})\end{cases} \tag{7.15}$$

は既知の D-brane の spectrum を再現する。K-theory では余空間 $\mathbb{R}^{9-p}$ 、K-homology では worldvolume $\mathbb{R}^{p+1}$ という違いがあることに注意する。この両者は $X=\mathbb{R}^{10}$ における Poincaré dual の関係にあるため、その分類が一致するのである。一般に n 次元 compact 多様体 X に対し、

$$\begin{array}{ccccc} K\text{-homology} & K_i(X) & \simeq & K^{n-i}(X) & K\text{-theory} \\ & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \text{homology} & H_i(X;\mathbb{Z}) & \simeq & H^{n-i}(X;\mathbb{Z}) & \text{cohomology} \end{array} \tag{7.16}$$

なる関係が成り立つ。ここで下の段は通常の Poincaré dual であり、上の段はその K 理論的拡張で K-dual と呼ばれる。また上下の関係は Chern-character map で与えられ、$\mathbb{Q}$ 係数の場合は Chern 同型を表す。主張 1 の見方で言うと、例えば Type IIA の場合、左側は non-BPS D(-1) 系の配位を、右側は non-BPS D9-brane 系の配位を表している。よって、物理的にはこの duality は、D-brane がどちらの系から作られるかには依らないことを意味している。従って、K-homology による分類も D-brane を分類していることになる。

上で K-homology による分類が worldvolume $\mathbb{R}^{p+1}$ に直接関係していたのは、(7.16) が示すように、K-homology が反変な関手で homology の一般化である点に起因している。これは topological K-homology

[6] 同値関係のおき方にはかなりの任意性がある。実際この 3 つは独立ではない。詳しくは [34] を参照。
[7] そのためには同値類に必ず一つ D-brane の配位があることを示す必要がある。

を考えるとより明らかになる。時空が可換な C^* 代数 $\mathcal{A} = C_0(X)$ の場合、以下のように別の K-homology 群の定義ができる [35]。

$$K_0(X) = \{(M, E, \varphi) : \text{even K-cycle over } X\}/\sim, \tag{7.17}$$

$$K_1(X) = \{(M, E, \varphi) : \text{odd K-cycle over } X\}/\sim \tag{7.18}$$

ここで、X 上の K-cycle は triple (M, E, φ) で定義され、M は閉 Spin^c 多様体、E は M 上の複素ベクトルバンドル、φ は M から X への連続写像を表す。M が偶数 (奇数) 次元のとき even(odd) K-cycle と呼ぶ。2 つの K-cycle の disjoint union $(M_0, E_0, \varphi_0) \cup (M_1, E_1, \varphi_1)$ は再び K-cycle である。また同値関係は bordism、direct sum、vector bundle modification という 3 種から生成される[8] 。E が無い場合の $\{(M, \varphi)\}/\sim$ は通常の homology であるから、上で述べたように、この Abel 群は homology に E の情報を加えた一般化になっている。注目すべきは、この一般化がちょうど D-brane の worldvolume M に Chan-Paton bundle E を加えたことに相当している点である。つまり K-cycle (M, E, φ) は BPS D-brane の情報 (2.6) に一致する。従って、topologocal K-homology は Type II 理論の D-brane をより明確な形で分類している。これは analytic K-homology $K^i(C_0(X))$ と同型であるから、K-matrix theory の配位の分類も D-brane を分類していることになる。

更に、BPS D-brane の有効理論の Chern-Simons term に関してもよりシンプルな解釈ができる。上の (7.16) の Chern-character map とは

$$\mathrm{ch.} \quad : \quad K_0(X) \to H_{\mathrm{even}}(X; \mathbb{Q}), \tag{7.19}$$

$$\mathrm{ch.} \quad : \quad K_1(X) \to H_{\mathrm{odd}}(X; \mathbb{Q}) \tag{7.20}$$

のことであるが、topological K-homology の代表元に対してこの写像は

$$\mathrm{ch.}(M, E, \varphi) = \varphi_*(\mathrm{ch}(E) \cup \mathrm{Td}(TM) \cap [M]) \tag{7.21}$$

で定義される。この X の homology 群の元と RR-form の形式和 $C = \sum C^{(p+1)}$ との最小結合は、単に C を積分したものであるから

$$S_{CS} \quad = \quad \int_{\mathrm{ch.}(M,E,\varphi)} C \tag{7.22}$$

$$= \quad \int_M \varphi^* C \wedge \mathrm{ch}(E) \wedge \mathrm{Td}(TM) \tag{7.23}$$

となり、BPS D-brane の Chern-Simons term を再現している[9] 。つまり元の M との最小結合に E の情報を加えたものが Chern-Simons term に他ならない。これまでは BPS D-brane の Chern-Simons term と K-theory を関係付けるには、主張 2 でやった K-群の準同型を cohomology で見るということをやっていた。つまり $\mathrm{ch}(E)$ を $K(M)$ の Chern character $\mathrm{ch}(E) - \mathrm{ch}(I^N)$ と考え、それを Poincaré duality を用いて $K(X)$ の Chern character に写し、X 上で cohomology の内積として RR-form と結合させる。しかしそれは結局 K-homology との対応を dual に見ていただけである。つまり BPS D-brane と直接的な対応があるのは K-homology で、K-theory とは K-dual を通じて間接的に対応があるに過ぎないと言える。

7.3 KK-theory

この節では K-theory と K-homology を含む一般化について概観する。まずこれまでの議論を振り返る。最初に §2§3 では、全ての次元の BPS D-brane を時空を埋める最大次元の系から構成することを行った。

[8] 説明は省略する。詳細は [35] を参照。同値関係の物理的な解釈は [1]。

[9] 簡単のため X の topology に関する補正項は省略している。これを考慮するには (7.21) に $\sqrt{\widehat{A}(TX)}$ を掛けて変形する。

Type IIA の non-BPS D9-brane 系、Type IIB の D9-$\overline{\text{D9}}$ 系の配位は K-theory で分類される。この系の不安定性を表すタキオン場が ABS 型の $T = \gamma \cdot x$ という配位に凝縮すると、10 次元 worldvolume が $q+1$ 次元に局所化し、BPS Dq-brane が後に残る。ここで γ は Dq-brane の余空間 $\mathbb{R}^{9-q}$ の gamma 行列である。一方、この章 §7 では D-brane を最小次元の系、つまり Type IIA の場合 non-BPS D(-1)-brane 系、Type IIB の場合 D(-1)-$\overline{\text{D}(-1)}$ 系から構成した。この場合は Chan-Paton 空間が無限次元であることから、Dirac 演算子型の $T = \widetilde{\gamma} \cdot p$ なる配位が考えられて、これが 0 次元 worldvolume から $q+1$ 次元への拡大の効果を持つため、Dq-brane を表す。ここで $\widetilde{\gamma}$ は $\mathbb{R}^{q+1}$ の gamma 行列である。これらは K-homology によって分類される。そして両者の分類は（K-dual の意味で）一致している。このように、高次元からの構成と低次元からの構成が一致するという描像は、元々非可換 D-brane がどちらからも構成できるという §4§5§6 での理解がヒントになっていた。

さて、BPS Dq-brane を構成するのであれば、最大次元や最小次元に限らずとも中間次元の不安定な系から出発しても可能である。即ち、無限個の non-BPS Dp-brane 系（IIA の場合 p: odd、IIB の場合 even）または Dp-$\overline{\text{D}p}$ 系（IIA の場合 p: even、IIB の場合 odd）において、

$$T = \gamma \cdot x + \widetilde{\gamma} \cdot \hat{p} \tag{7.24}$$

のような配位で Dq-brane を表すことができる。これは worldvolume の一部に局所化し、垂直方向へは拡大する配位である。これまでの議論から、この中間次元の不安定系を分類する理論は KK-theory であると予想される。KK-theory $KK^i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $(i = 0, 1)$ は C^* 代数のペア $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ から定義される Abel 群で、代表元は Kasparov module と呼ばれる Hilbert $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodule で与えられる。これはラフに言えば空間 $\mathcal{B}$ でパラメータ付けされた (even or odd) Fredholm module のことで、§7.2 の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ や $\widehat{\mathcal{H}}$ を、$\mathcal{B}$ 上の Hilbert 空間 (right $\mathcal{B}$-module) に置き換えれば、analytic K-homology とほぼ同様に定義される[10]。従って $\mathcal{B}$ が一点 $\mathbb{C}$ の時、KK-theory は $\mathcal{A}$ の K-homology に一致する。即ち $KK^i(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = K^i(\mathcal{A})$。一方、$\mathcal{A}$ が一点 $\mathbb{C}$ の時は $\mathcal{B}$ の K-theory に帰着する。即ち $KK^i(\mathbb{C}, \mathcal{B}) = K_i(\mathcal{B})$。特に $\mathcal{B} = C_0(X)$ のときには (3.34)(3.35) の K-theory の定義に一致する[11]。よって KK-theory は両者の一般化である。そしてこの群を上の D-brane 系の配位の分類理論と考える。簡単のため時空を直積空間 $X = N \times M$ とする。このとき $(C_0(N), C_0(M))$ 上の odd Kasparov module は、worldvolume が M で transverse 空間が N の non-BPS Dp-brane 系の配位と同定される。つまり M 上の無限次元 Chan-Paton bundle の各 fiber $\mathcal{H}$ に $C_0(N)$ が作用していて、タキオンは M 上 Fredholm 作用素値の場である。同様に even Kasparov module は Dp-$\overline{\text{D}p}$ 系と同定される。しかし、どの系から出発しても作られる D-brane は同じである。これを反映して、(7.16) を一般化した以下の同型

$$KK^i(C_0(N), C_0(M)) \simeq KK^{i+m}(C_0(X), \mathbb{C}) \simeq KK^{i+n}(\mathbb{C}, C_0(X)) \tag{7.25}$$

が成り立つ。ここで $n = \mathrm{dim}N, m = \mathrm{dim}M$ で添え字は mod 2 とする。以上のように、BPS D-brane の構成と分類は KK-theory という観点で統一的にまとめることができる。

謝辞

このノートは研究会「開 Calabi-Yau 多様体への代数幾何と弦理論からのアプローチ」における講演を基にしています。発表の機会を与えて下さった世話人の松下、泰泉寺両氏、および実り多い議論をして下さった参加者の方々に感謝致します。また、この原稿を読み、いろいろな指摘を頂いた細道、岸本、百武、浜中各氏にも感謝致します。最後に、発表内容の後半は杉本、寺嶋両氏との共同研究に基づいています。

[10] 詳細は [34] を参照。Kasparov module には様々な表現があり、この定義は Fredholm picture と呼ばれる。
[11] §3.2 で別の定義を与えたのは、これが理由である。

参考文献

[1] T. Asakawa, S. Sugimoto and S. Terashima, "D-branes, Matrix Theory and K-homology," hep-th/0108085.

[2] E. Witten, "Noncommutative Geometry and String Field Theory", Nucl. Phys. **B268** (1986) 253.

[3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A Large-N Reduced Model as Superstring," Nucl. Phys. **B498** (1997) 467, hep-th/9612115.

[4] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, "M Theory as a Matrix Model: A Conjecture," Phys. Rev. **55** (1997) 5112, hep-th/9610043.

[5] J. Polchinski, *String Theory I,II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998), "TASI Lectures on D-Branes," hep-th/9611050.
I. V. Vancea, "Introductory Lectures on D-Branes," hep-th/0109029.

[6] A. Sen, "Non-BPS States and Branes in String Theory," hep-th/9904207.
J. H. Schwarz, "TASI Lectures on Non-BPS D-Brane Systems," hep-th/9908144.

[7] K. Olsen and R. J. Szabo, "Constructing D-Branes from K-Theory," Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 889, hep-th/9907140.

[8] D. Quillen, "Superconnection and the Chern character," Topology **24** (1985) 89.

[9] P. Kraus and F. Larsen, "Boundary String Field Theory of the DDbar System," Phys. Rev. **D63** (2001) 106004, hep-th/0012198.
T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, "Brane-Antibrane Action from Boundary String Field Theory," JHEP **0003** (2001) 019, hep-th/0012210.

[10] E. Witten, "D-branes and K-theory," JHEP **9812** (1998) 019, hep-th/9810188.

[11] M. F. Atiyah, *K-Theory* (W. A. Benjamin, 1967).

[12] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, "Clifford modules," Topology **3** (1964) 3

[13] P. Horava, "Type IIA D-Branes, K-Theory, and Matrix Theory," JHEP **9901** (1999) 016, hep-th/9811028.

[14] E. Witten, "Overview Of K-Theory Applied To Strings," Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 693, hep-th/0007175.

[15] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative Field Theory," Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977, hep-th/0106048.

[16] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, "Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori," JHEP **9802** (1998) 003, hep-th/9711162.

[17] N. Seiberg and E. Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry", JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142.

[18] T. Asakawa and I. Kishimoto, "Comments on Gauge Equivalence in Noncommutative Geometry," JHEP **9911** (1999) 024, hep-th/9909139.

[19] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," hep-th/0011095

[20] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," q-alg/9709040.

[21] A. S. Cattaneo and G. Felder, "A path integral approach to the Kontsevich quantization formula," Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591, math.QA/9902090.

[22] B.V. Fedosov, "A simple geometrical construction of deformation quantization," J. Diff. Geom. **40** (1994) 213-238. *Deformation quantization and index theory* (Akademie-Verl., Berlin, 1996).

[23] T. Asakawa and I. Kishimoto, "Noncommutative Gauge Theories from Deformation Quantization," Nucl. Phys. **B591** (2000) 611, hep-th/0002138

[24] J.A. Harvey, "Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes," hep-th/0102076.

[25] J.A. Harvey and G. Moore, "Noncommutative Tachyons and K-Theory," hep-th/0009030.

[26] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras: a friendly approach* (Oxford University Press, 1993).

[27] H. Liu and J. Michelson, "Ramond-Ramond Couplings of Noncommutative D-branes," Phys. Lett. **B518** (2001) 143, hep-th/0104139.

[28] N. Ishibashi, "p-branes from $(p-2)$-branes in the Bosonic String Theory," Nucl. Phys. **B539** (1999) 107, hep-th/9804163.

[29] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, "Noncommutative Yang-Mills in IIB Matrix Model," Nucl. Phys. **B565** (2000) 176, hep-th/9908141.

[30] S. Mukhi and N. V. Suryanarayana, "Ramond-Ramond Couplings of Noncommutative Branes," hep-th/0107087.

[31] R.C. Myers, "Dielectric-Branes," JHEP **9912** (1999) 022, hep-th/9910053.

[32] S. Terashima, "A Construction of Commutative D-branes from Lower Dimensional Non-BPS D-branes," JHEP **0105** (2001) 059, hep-th/0101087

[33] A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academic Press, 1994).
See also, "A Short Survey of Noncommutative Geometry," hep-th/0003006. "Noncommutative Geometry Year 2000," math.QA/0011193.

[34] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras* (Cambridge, 1998).

[35] P. Baum and R.G. Douglas, "K-homology and Index Theory," Proc. of Symposia in Pure Mathematics, **38** (1982) 117.