Note Book

古典電気力学の基礎
に関する研究

昭和十九年一月～

N19

2.

空中ならびに水中に於ける輻射線・放射線の傳達に關する研究

それは、光、宇宙線等の輻射線が空氣・水等の媒質中を傳播する模様を研究することは
これ等の輻射線を利用せる各種兵器の進歩改良の上に極めて必要なること言を俟たず
然れども従来は特定の狭き領域に於ける断片的研究に止まれり
これをあらゆる種類の輻射線に亘り根本的に且つ綜合的に研究するには量子力学を
~~輻射理論~~ 素粒子論に立脚せる輻射理論を前提とせざるべからず。これ恰かも古典電氣力學に立脚せる電波傳播の理論が電波兵器研究の先驅となれるが如し
更に又輻射線以外の各種放射線も特殊兵器として利用さるべき可能性あるが故に、素粒子論の立場よりそれが種々の媒質中を傳達する模様を考究することも亦極めて重要なる問題なり。

各種放射線利用の可能性に就て

昭和18年9月

緒言

京大理論物理学研究室

空中又は水中に於ける各種放射線の伝播の問題は今日及び明日の戦争に対して特にその各種放射線を兵器として利用する可能性と関係として充分研究する価値あり
放射線は大別すれば

輻射線（電波、赤外線、可視光線、紫外線、エックス線、ガンマ線）

1

及び粒子の
放射線　アルファ線（イオン線）
陽極線
ベーター線（電子線）
陰極線
中性子線
中性微子線
中間子線
（宇宙線）

となる。
それ等の
発生、吸収、散乱、減衰
二次的作用
等が問題となる。これ等放射線と種々物質の間の相互作用の研究がその基礎となつてゐるが、細かに見れば

4

電磁

1

古典
+電磁気論に関しては例へば
Stratton, Electromagnetic Theory
が詳しい

†† 例へば
van Vleck, Electric and Magnetic
Susceptibilities

* Lorentz, Theory of Electrons
Page, Adams, Electrodynamics

吸収, 放射を起す
第一に媒質(空気.水等)としての物質.或いは
発生源としての物質(電極.双極子,[illegible]
性的振動子) 二次的作用を起す的(target)
としての物質 等 ~~など~~ に分けて考へられる.

先づ輻射線と物質との相互作用から考へて見る.
その中で波長が長い電波の場合を考へて見ると
その伝播の問題、発生、吸収、二次的作用の
問題はおおむね 巨視的物質中における Maxwell
の電磁場の変化の問題として取扱ひ得る.
その際 媒質の電気的な性質は統計力学及
量子論の上に於て説明すべき ~~量子力学的~~
ものである. 然し ~~Maxwellの電磁場の~~ 又発生の
機構には 電子の ~~集合体~~ の問題が入つて
来るし.又 ~~物体~~ 陰極 ガス其の他の物質と電子と
の相互作用の問題が入つて来るが,これ等も
大部分量子力学.統計力学の問題である.
それ又 巨視的電磁場論自身が微視的電子
論の統計的平均であると考へられる
これに関しては古典電子論の範囲内で Lorentz
によつて詳しく論ぜられた.* これは今日の
量子力学の立場から見直して論ぜられるべき
である. これは形式的な問題であるが,
やつて置く価値がある. この方から入つて行く.
先づ 問題 見合せ

$$\iiint e^{-\frac{r^2}{a^2}}\,dv = a^3\pi\sqrt{\pi} = (a\sqrt{\pi})^3$$

$$f(r) = \frac{1}{(a\sqrt{\pi})^3}e^{-\frac{r^2}{a^2}}$$

I Form は van Vleck 参考

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\mathfrak{h} = \frac{1}{c}\Big(4\pi\underbrace{\rho' v}_{i} + \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}\Big)$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{e} = 4\pi\rho' \ (\sigma) \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{h} = 0$$

$$\mathbf{E} = \overline{\overline{\mathfrak{e}}} \qquad \mathbf{B} = \overline{\overline{\mathfrak{h}}}$$

= は巨視的に見て充分小さな、併し微視的に見て充分大きな空間についての平均を意味する.

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{D}-\mathbf{E}}{4\pi} = N\overline{\overline{p}} \qquad p = \underbrace{\iiint \rho' r\,dv}_{一分子}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}-\mathbf{H}}{4\pi} = N\overline{\overline{m}} \qquad m = \frac{1}{2c}\underbrace{\iiint \rho'[rv]\,dv}_{一分子}$$

II

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = 2\cdot\frac{a}{\cancel{\sqrt{2}\sqrt{2}}}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cancel{= \frac{2}{a}\sqrt{\pi}} = a\sqrt{\pi}$$

$$x = \frac{ay}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\cancel{f(x)}\ e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\cos ux\,du$$

第一章 古典電気力学の基礎

§1. 古典的 電磁場論 ~~の基礎~~ の微視的性格

問題は Maxwell の式

$$\begin{cases} \mathrm{curl}\,\mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} & \mathrm{curl}\,\mathbb{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbb{I} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbb{D} = 4\pi\rho & \mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0 \end{cases}$$

に現はれる 諸量 $\mathbb{E}, \mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{H}, \rho, \mathbb{I}$ の 微視的 ~~物理的~~ 意味を ~~物理~~ 量子論の立場から明かにすることにある。
古典電子論に於ては 微視的電磁場も又 古典的な ものと考へられてゐたから その空間的平均として巨視的 ~~電磁~~ 場量が出来た。†
その手續は その儘、量子論に移つてよい。その際 e, h としては量子化された場。
~~粒子の中に入つてゐる電荷密度 ρ'~~ をとることは勿論である。特 粒子の方に関係するのは ρ' の $\bar{e} = \psi^*\psi$ であるが、これも亦量子化された 波動函数の 二次形式として与へられる。
そこで両者の平均をとる時最も簡単な、そして便利な方法として Gauss の誤差函数を両者に乗じて積分する方法をとる。
例へば

$$\mathbb{E}_{(xyz)} = \frac{1}{a^3\sqrt{\pi}^3}\iiint \mathbb{e}(\xi\eta\zeta)\, e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

$$\cancel{\mathbb{e}(xyz) = \sum_{lmn} a_{lmn} \cos lx \cos my \cos nz + \cdots}$$

$$\cancel{\rho = \frac{1}{a^3\sqrt{\pi}^3}\iiint \rho'(\xi\eta\zeta)\, e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta}$$

8

* Dirac, Principles of Quantum Mechanics

$$[E_x(x'), H_y(x'')] = -4\pi\,\delta(x'-x'')\,\delta(y'-y'')\times\delta'(z'-z'')$$

$$\left(\Sigma (i\hbar)^{-1}\left(E_x(x')H_y(x'') - H_y(x'')E_x(x')\right)\right)$$

† 平均値を次の如く定義して置けば明かに

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \overline{\overline{\frac{\partial e_x}{\partial x}}}$$

が成立する。(即ち 巨視的な量の微係数は微視的な量の微係数の平均値となる。)
~~従って巨視的な量~~

$$\because\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 〃 \iiint e_x(\xi)\frac{\partial}{\partial x} e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= -〃 \iiint e_x(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= -〃 \iint e_x(\xi) e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\eta\, d\zeta \Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty}$$

$$+ \frac{1}{a^3\sqrt{\pi}^3}\iiint \frac{\partial e_x}{\partial \xi} e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \overline{\overline{\frac{\partial e_x}{\partial x}}}$$

所が巨視的な場の微係数は微視的な場の微係数の平均値となるから, 巨視的な場の方程式として

$$\mathrm{curl}\,\mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 4\pi\,\bar{\bar{\rho}} \to \bar{\bar{\sigma}}$$

$$\mathrm{curl}\,\mathbb{H} = \frac{1}{c}\,4\pi\,\overline{\overline{\rho v}}\ (\bar{\bar{i}}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$$

が得られる. ここまでは形式的には Lorentzの理論と全く同じであるが, 問題は, 第一には $\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$ 等が普通の函数でなく, 互ひに交換不可能な演算子になったことである*

第二には $\bar{\bar{\rho}}$, $\overline{\overline{\rho v}}$ 等の平均が如何なる意味をもつかである. 元来 ρ, ρv 等は量子化された波動函数の二次形式である. その空間的平均値が果して Lorentzの理論に於けるが如く巨視的な量として

$$\bar{\bar{\sigma}} = \rho - \mathrm{div}\,\mathbb{P}$$

$$\bar{\bar{i}} = \mathbb{I} + c\,\mathrm{curl}\,\mathbb{M} + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t}$$

となるかどうかが問題である.

Heisenberg und Pauli I, S. 25

$$\dagger \quad \int f(x)\,\delta'(x-x')\,dx = -f'(x')$$

$$i\hbar[e_x, h_y'] = e_x h_y' - h_y' e_x$$

$$[\bar{\bar{e}}_x, \bar{\bar{h}}_y] = +4\pi \left[\iiint \frac{\partial}{\partial z'}\left(e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2}\right)\right]_{(x'y'z')}$$

$$= 4\pi \left[\frac{\partial}{\partial z'} e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2}\right]$$

$$\frac{1}{a^6\pi^3}\cdot \times \qquad R = \sqrt{(\underset{x}{\xi}-x')^2+(\underset{y}{\eta}-y')^2+(\underset{z}{\zeta}-z')^2}$$

$$= 4\pi \iiint e^{-\frac{R^2}{a^2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{-\frac{R'^2}{a^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

$$R' = \sqrt{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2+(z'-\zeta)^2}$$

$$[\bar{\bar{e}}_x, \bar{\bar{h}}_y] = \frac{\sqrt{2}}{a^5\sqrt{\pi}}(z-z')\,e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{2a^2}}$$

* 次元はいくらか $\left(\frac{eh}{\hbar}\right) = \frac{\text{Energy}}{L^3} \quad \frac{1}{\text{Energy}\cdot T}$

$=$

$-\cancel{i}\hbar c$

先づ第一の問題を考へてみる　e, h に関しては

$$[e_x, h'_y] = \cancel{4\pi}\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta'(z-z')$$

等の交換関係がある。従って

$$[\bar{e}_x, \bar{h}'_y] = \frac{\cancel{4\pi}}{-c}\iiint e^{-\left(\frac{R'}{a}\right)^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^2}d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$R'^2 = (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + (z'-\zeta)^2$$

丸括弧の積分は場所(x)と(x')との距離が a 程度以内の場合にのみ大きくなる。即ち計算の結果は

$$\cancel{[\bar{e}_x, \bar{h}'_y]}\ [E_x, H'_y] = \frac{\hbar c}{a^5\sqrt{\pi}^3 / 2\sqrt{2}}(z-z')\,e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{2a^2}}$$

となる。

~~従って a が相当大きければ~~ 電場及び磁場の測定の精度を ΔE, ΔH とすると

$$\Delta E\cdot\Delta H \gg \frac{\hbar c}{a^4} \qquad (*)$$

なる限り上の交換関係は何等の実質的な意味を持たない。電場と磁場は同時に観測し得ることになる。

今波長が a の程度以上の電波を考へると、~~それと~~

~~半径 a の球~~　$\begin{matrix}E\\H\end{matrix} \sim A \sin n(x-ct)$

* これは　半径 a の球の中に　電子が　局限されているという條件である

$$a = 1\mu = 10^{-4}\,\mathrm{cm}$$

とおくと，
$$\frac{\hbar c}{a} = \frac{10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{10}}{10^{-4}}\,\mathrm{erg}$$
$$= 3\cdot 10^{-13}\,\mathrm{erg}$$

E, H は量子的

即ち　ΔE, ΔH を共に A に比しては小さく，但し $\frac{\sqrt{\hbar c}}{a^2}$ に比しては大きく（大）取り得るからである。

なる数とすると，

$$n \lesssim \frac{1}{a}$$

半径 a なる球の中に含まれている電場のエネルギーは

$$A^2 a^3$$

の程度である。
~~一~~一方に於て この電場に伴ふ n 個の光子のエネルギーは

$$\hbar n c \lesssim \frac{\hbar c}{a}$$

である。従って 古典的な電場として取扱ひ得る為めには
~~従って上の不確定性関係は~~

$$\cancel{A^2 \gg \frac{c}{a^4}}$$

$$A^2 a^3 \gg \hbar n c$$

であればよい*。それには

$$A^2 a^3 \gg \frac{\hbar c}{a}$$

~~故に~~ 又は

$$A^2 \gg \frac{\hbar c}{a^4}$$

ならばよい。　さ
~~これは前の (*) 式と同じことである~~
~~、左辺は　A^2~~
~~(*)の~~
そしてさういふ場合には (*) も満足される。†
~~要するに~~ これは極めて当然のことである。

$$H = -eV + \left(p + \frac{e}{c}A\right)^2 / 2m$$

$$\tilde{\Psi} \quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \sum\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2 / 2m\,\Psi + eV\Psi = 0$$

$$-\Psi \quad -i\hbar\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} - \sum\left(+i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2 / 2m\,\tilde{\Psi} + eV\tilde{\Psi} = 0$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Psi}\Psi) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\tilde{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{i\hbar}{m}\frac{e}{c}\left(\tilde{\Psi}A_x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi A_x\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x}\right)$$

$$\parallel$$

$$\tilde{\Psi}A_x\Psi$$

$$\sigma = -e\,\tilde{\Psi}\Psi$$

$$i = \frac{-e}{2m}\left\{\tilde{\Psi}\left(-i\hbar\,\mathrm{grad} + \frac{e}{c}A\right)\Psi\right.$$

$$\left. + \Psi\left(i\hbar\,\mathrm{grad} + \frac{e}{c}A\right)\tilde{\Psi}\right\}$$

$$\Psi$$

§ $\bar{\bar{\sigma}}$ の計算

第二の関係はもっと複雑である

$$\bar{\bar{\sigma}} = \rho - \mathrm{div}\,\mathbb{P}$$

$$\bar{\bar{i}} = \mathrm{I} + c\,\mathrm{curl}\,\mathrm{M}$$

が成立するのは、如何なる場合であるかを考へて見よう、左辺の σ, i は量子化された波動函数に関係する。
簡単のため外場は古典的に扱って、電子のスピンを無視することにすると、波動方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\sum\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2\psi + eV\psi = 0$$

$$-i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} - \frac{1}{2m}\sum\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2\tilde{\psi} + eV\tilde{\psi} = 0 \quad (1)$$

となる。従って

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi}\psi) - \frac{1}{2m}\sum\Big\{\tilde{\psi}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2\psi$$

$\frac{e}{i\hbar}$

$$-\psi\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2\tilde{\psi}\Big\} = 0$$

$$-e\cancel{i\hbar}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi}\psi) \pm \frac{e}{2m}\left(\cancel{\frac{1}{-i\hbar}}\right)\sum\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\tilde{\psi}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\psi$$

$$+\psi\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\tilde{\psi}\Big\} = 0$$

故に $\sigma = -e\tilde{\psi}\psi$

$$i_x = -\frac{e}{2m}\Big\{\tilde{\psi}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\psi + \psi\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\tilde{\psi}\Big\}$$

16

(4) の波動方程式は

$$L = \tilde{\psi}^{\dagger} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \tilde{\psi}^{\dagger} eV\psi$$

$$- \frac{1}{2m}\sum \left(i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}^{\dagger}}{\partial x} + \frac{e}{c}A\tilde{\psi}^{\dagger}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{e}{c}A\psi\right)$$

から導いた原理

$$\delta \int L\, dv\, dt = \int \delta\tilde{\psi}\left\{ i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} + eV\psi - \frac{1}{2m}(-i\hbar \quad)^2\psi\right\} - \int \left(-i\hbar\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + eV\tilde{\psi} - \frac{1}{2m}(+i\hbar \quad)^2\tilde{\psi}\right)\delta\psi = 0$$

によつて導き出される

$$\psi^{+} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial t}} = i\hbar\tilde{\psi}, \quad \psi\psi^{+\prime} + \psi^{+\prime}\psi = i\hbar\delta$$

$$H = \psi^{+}\frac{\partial \psi}{\partial t} - L = -\tilde{\psi}eV\psi + \frac{1}{2m}\sum(+ \quad)(- \quad)$$

---

* 空間を立方体の中の格子点を考へる。但し
~~千位 a 格~~ (x y z) を含む
空位の大さは a に比して小さいものとする。

~~偖て上の波動方程式(H)は Lagrange 函数~~

そこで先づ $\bar{\bar{\sigma}}$ を求めるためには ψ を近似的に適当な函数

$$u_1\ u_2 \ldots\ldots$$

及び

$$v_1\ v_2 \ldots\ldots$$

で展開する* 但し $u_1, u_2, \ldots$ は電子がいづれかの原子に束縛されてゐる状態を表はす固有函数, $v_1\ v_2$ 等は自由電子の諸状態を表はす平面波とする.

$$\psi = \sum_i a_i u_i + \sum_i b_i v_i$$

~~然らば~~

$$\tilde{\psi} = \sum_i a_i^* \tilde{u}_i + \sum_i b_i^* \tilde{v}_i$$

すると

$$a_i a_j^* + a_j^* a_i = 1$$

etc

の交換関係が成立する.

これを $\bar{\bar{\sigma}}$ の式に代入すると

$$\bar{\bar{\sigma}} = -e\Big(\sum_{i,j} a_i^* a_j\, \overline{\overline{\tilde{u}_i u_j}} + \sum_{i,j} b_i^* a_j\, \overline{\overline{\tilde{v}_i u_j}} + \sum_{i,j} a_i^* b_j\, \overline{\overline{\tilde{u}_i v_j}} + \sum_{i,j} b_i^* b_j\, \overline{\overline{\tilde{v}_i v_j}}\Big)$$

18

我々は直ちに中性子内を~~動く~~粒子の状態函数
ψ に対しては

十但し u_i, u_j は陽子又は中性子と同じ重さ
(重い粒子)に属する状態で、しかもその
結合エネルギーが極めて小さい様な場合
それは

$$\overline{\overline{\tilde{u}_i u_j \tilde{\phi}}}$$

と置いてはならない場合があり得る。
~~しかし~~ 特に複雑な核の性質、殊に
核のごときものを考へるとこの様な場合
も問題となる。
(~~それは~~これは 電子の状態が細かくなるに伴って a
も小さくならねばならぬことゝ関聯してゐる)

所で 例へば v_i なる函数は 電子の原子核の附近 位置$R_i(X_i\ Y_i\ Z_i)$ の附近だけで大きく、離れた所では ~~急に~~ と急に小さくなる函数である.
従つて $\tilde{v}_i u_j$ は $e^{-\frac{r}{a}}$ の如く急激に減少する函数をかけて積分したものは 殆んど 0 と見てよい。
なれ

$$\overline{\overline{\tilde{u}_i u_j}} \simeq 0 \qquad (i \neq j)$$

同様に

$$\overline{\overline{\tilde{v}_i u_j}} \simeq 0$$

$$\overline{\overline{\tilde{u}_i v_j}} \simeq 0$$

但し v_i と v_j の運動量の値が著しく異らぬ場合, 即ち

$$|p_i - p_j| \lesssim \frac{h}{a} \qquad (*)$$

が成立する場合には

$$\overline{\overline{\tilde{v}_i v_j}} \neq 0$$

(この方は 平面波の取り方を変へて (*) の範囲内の平面波を重ね合せて 半径が a の程度の波束を作らすことが出来るが これに就ての詳細は後に述べる)
従つて

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sum_{i} n'_i \overline{\overline{\tilde{u}_i u_i}} + \sum_i n_i \overline{\overline{\tilde{v}_i v_i}} + \sum_{i \neq j} n^*_{ij} \overline{\overline{\tilde{v}_i v_j}}$$

到る所で u_i の周の値はいづれも $\delta(0,1)$ であるから

$$\rho = (-e)\chi\left\{\sum_i{}' \overline{\overline{\tilde{u}_i u_i}} + \sum_i{}' \overline{\overline{\tilde{v}_i v_i}} + \sum_{i\neq j} b_i^* b_j \overline{\overline{\tilde{v}_i v_j}}\right\}$$

但し Σ' は充たされた状態にわたる和を意味する。

今 $\tilde{u}_i u_i(r') = \rho_i(r'-R_i)$

$$e^{-\frac{|r'-r|^2}{a^2}} = f(r'-r)$$

と書くことにすると

$$\sum_i{}' \overline{\tilde{u}_i u_i} = \sum_i{}' \int \rho_i(r'-R_i)\, f(r'-r)\, dv'$$

しかるに ρ_i は $r'=R_i$ の近くだけで大きな値をもつから、f をその附近で展開し

$$f(r'-r) = f(R_i - r) + (r'-R_i)\,\mathrm{grad}\, f(R_i - r)$$

$$\therefore \sum_i{}' = \sum_i{}' \int \rho_i\, f(R_i - r)\, dv' + \sum_i{}' \int (r'-R_i)\,\rho_i\, dv'\; \mathrm{grad}_i f(R_i - r)$$

$$\overline{\overline{\tilde{v}_i v_i}} = c\int e^{-\frac{|x'-x|^2}{a^2}} dv' = 1$$

N′を単位体積中の軽電子の数とすれば

$$\sum_i{}' \overline{\overline{\tilde{v}_i v_i}} = -N'(x)e = \rho_2(x)$$

$$N_1(x)\overline{\overline{e}} = \rho_1(x)$$

$$N_1(x)\overline{\overline{\mu}} = \mathbb{P}(x)$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

+電子を除いた陽イオンの電荷密度をも加へて
を[illegible]は おかねばならぬことは勿論である.

$$e^{-\frac{|R_i - r|^2}{a^2}}$$

$$\sum_i{}' = \sum_i{}' e_i f''(R_i - r)$$

$$+ \sum_i{}' p_i \,\mathrm{grad}_i f(R_i - r)$$

$$\left.\begin{aligned} e_i &= e\int \rho_i \, dv' \\ p_i &= e\int (r' - R_i)\rho_i \, dv' \end{aligned}\right\}$$

$\sum_i{}'$ の和を積分になおして

$$\sum_i{}' = \iiint e(R) f(R - r) \times N_1(R)\, dV + \iiint p(R)\,\mathrm{grad} f \cdot N_1(R)\, dV$$

但し $N_1(R)$ は単位体積中の束縛電子の数

$$\sum_i{}' = \rho - \underset{R \text{以遠の}}{\iiint} \mathrm{div}\, p \cdot f \, dV / N_1(R)$$

$$= \rho - \mathrm{div}\, p \cdot N_1(r)$$

$$= \rho - \mathrm{div}\, P$$

となる。これは古典論に於ける誘電体の理論の平均に於ける式と一致する。

$$\mathrm{curl}_x \; \frac{e}{m}\{\tilde{u}_i[\mathbf{r}\,\mathbf{p}]u_j\}$$

$$= \frac{e}{m}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left\{\tilde{u}_i\, x(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial y} - \tilde{u}_i\, y(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\tilde{u}_i\, z(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial x} - \tilde{u}_i\, x(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial z}\right\}\right]$$

$$= \frac{2e}{m}\,\tilde{u}_i\,(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial x}$$

+ これに依つて (Bethe, Handbuch 23 I. S. 558)

$$\frac{\partial u_{nlm}}{\partial x} + i\frac{\partial u_{nlm}}{\partial y} = \mathrm{const.}\, Y_{l+1,m+1}\left(\frac{dR}{dr} - l\frac{R}{r}\right)$$

$$+ \mathrm{const.}\, Y_{l-1,m+1}\left(\frac{dR}{dr} + (l+1)\frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{\partial u_{n,l,m}}{\partial x} - i\frac{\partial u_{n,l,m}}{\partial y} = \mathrm{const}\, Y_{l+1,m-1}\,(\;''\;)$$

$$+ \mathrm{const.}\, Y_{l-1,m-1}\,(\;''\;)$$

$$\frac{\partial u_{nlm}}{\partial z} = \mathrm{const.}\, Y_{l+1,m}\,(\;''\;) + \mathrm{const}\, Y_{l-1,m}\,(\;''\;)$$

§ $\bar{\bar{i}}$ の計算 (1)

$\bar{\bar{i}}$ の方はもっと複雑である。即ち sum に

$$\bar{\bar{i}}_x = -\frac{e}{2m}\sum_{i,j} a_i^* a_j \Big\{\tilde{u}_i(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial x} - u_j(-i\hbar)\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} + \frac{2e}{c}A_x \tilde{u}_i u_j\Big\}$$

$$-\frac{e}{2m}\sum_{i,j} b_i^* a_j \Big\{\tilde{v}_i(-i\hbar)\frac{\partial u_j}{\partial x} - u_j(-i\hbar)\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} + \frac{2e}{c}A_x \tilde{v}_i u_j\Big\}$$

$$-\frac{e}{2m}\{\text{comp. conj}\}$$

$$-\frac{e}{2m}\sum_{i,j} b_i^* b_j \Big\{\tilde{v}_i(-i\hbar)\frac{\partial v_j}{\partial x} - v_j(-i\hbar)\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} + \frac{2e}{c}A_x \tilde{v}_i v_j\Big\}$$

に於て $\tilde{u}_i u_j$ i, j が異なって居ても 0 でない。
は直交性の関係を持たない。
併しこの中で $\tilde{u}_i$ 又は u_j を含んだ項は
一般に ~~象~~ 半径 a の球の中で急激に変化するから
$e^{-\frac{R^2}{a^2}}$ の如き函数は之を1と見て扱ってよい。
所が一体原子の場合に於て一体問題の近似を取ると
u は一般に

$$u = u_{n,l,m} = R_{n,l}(r)\,P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$
$$= R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

なる形に書ける。

従って

$$a_i^* a_j \quad \tilde{u}_i (-i\hbar) \frac{\partial u_j}{\partial x}$$

之が0でないのは、第一には

$$u_i = u_{nlm}$$

$$u_j = u_{n'\, l\pm1,\, \left\{ {m\pm1 \atop m} \right.}$$

の場合に~~限られる~~ 限る。この様な二者の ~~数~~ 強度に相当する遷移確率が成立つ場合に限つて 巨視的な電場は 0でない。但し 若しも n と n' とが違へば

$$\nu_{ji} = \frac{W_j - W_i}{h}$$

は 大きな振動数の電波の ~~[illegible]~~ 源泉となり得る。そして 半径 a なる球内の種々の原子の集合する 電場の 位相の間の関係は ~~不規則的~~ 出鱈目 で、多くの incoherent な波の 集合を形成する。

~~但し 外部からの 一つの波によつて 誘導されれた~~

第二に $i = j$ の場合には

$$\iiint \tilde{u}_i(r') (-i\hbar) \frac{\partial u_i(r')}{\partial x'} e^{-\frac{|r'-r|^2}{a^2}} dv'$$

$a_k u_k$ 的各項が ψに関する 波動方程式を満足するならば

$$i\hbar \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + \mathrm{div}\, i_{kl} = 0$$

なる連續方程式が成立する。
但し 外部から 時間的に変化する電磁場が作用してゐる場合には

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(p + \frac{e}{c}A\right)^2 \psi - eV\psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{i\hbar e}{mc}A\psi + \frac{e^2}{2mc^2}A^2\psi - eV\psi$$

$$\psi = \sum a_k u_k \qquad -\frac{i\hbar e}{mc}A_0\psi_k + \frac{e^2}{2mc^2}A_0^2\psi_k$$

$$E_k u_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u_k - eV\psi_k$$

とすると

$$i\hbar \dot{a}_k = E_k a_k + \sum_l H'_{kl} a_l$$

$$H'_{kl} = \int \tilde{u}_k \left(-\frac{i\hbar e}{mc}A + \frac{e^2}{2mc^2}A^2\right) u_l \, dv$$

$$a_k = e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} a'_k$$

$$i\hbar \dot{a}'_k = \sum_l H'_{kl} a'_l \qquad H'_{kl} = e^{i\omega_{kl}t} H'_{kl}(0)$$

$$a'_k = a'_k(0) + \sum_l a'_{kl} e^{-i\omega_{kl}t}$$

$$+\hbar\omega_{kl} a'_{kl} = \sum_l H'_{kl}(0)\, a'_l(0)$$

§ $\bar{\bar{i}}$ の計算 (2)

$$\tilde{\psi} = \sum_k a_k^* \tilde{u}_k \qquad u_k = u_i(r - R_\alpha) \rightarrow$$ R_α にある原子核に束縛されている場合

$$\psi = \sum_k a_k u_k \qquad u_k = v_i(r) \longrightarrow$$ 自由なる場合

$$\bar{\bar{i}} = \frac{ie\hbar}{2m}(\tilde{\psi}\,\mathrm{grad}\,\psi - \mathrm{grad}\,\tilde{\psi}\cdot\psi) - \frac{e^2}{mc}\tilde{\psi}\psi A$$

$$= \sum_{kl} i_{kl}$$

$$i_{kl} = \frac{ie\hbar}{2m} a_k^* a_l (\tilde{u}_k\,\mathrm{grad}\,u_l - \mathrm{grad}\,\tilde{u}_k (u_l))$$

$$- \frac{e^2}{mc} a_k^* a_l \tilde{u}_k u_l A$$

$$\sigma = -e\tilde{\psi}\psi$$

$$= \sum_{kl} \sigma_{kl}$$

$$\sigma_{kl} = -e\,a_k^* a_l \tilde{u}_k u_l$$

$$\bar{\bar{i}}(r) = \frac{1}{\Theta}\sum_k \int i_{kk}(r') \exp\left(-\frac{|r'-r|^2}{a^2}\right) dv'$$

$$+ \frac{1}{\Theta}\sum_{k \neq l} \int i_{kl}(r') \exp\left(-\frac{|r'-r|^2}{a^2}\right) dv'$$

右辺の第一項は　$u_k = v_i$ とすれば

$$-\frac{e}{\Theta}\sum_{i} a_i^* a_i \int \Big[\frac{\hbar}{2im}\{\tilde{v}_i(x')\,\mathrm{grad}'\, v_i(x')$$

$$- \mathrm{grad}'\tilde{v}_i(x')\cdot v_i(x')\} + \frac{e}{mc}\tilde{v}_i(x')v_i(x')A(x')\Big]$$

$$\times \exp\left(\frac{-|x'-x|^2}{a^2}\right) dv'$$

$$= -e\sum_i \frac{n_i}{\Theta}\int \tilde{v}_i(x')\left\{\frac{\hbar}{im}\,\mathrm{grad}' + \frac{e}{mc}A\right\} v_i(x')$$

$$\times \exp\left(\frac{-|x'-x|^2}{a^2}\right) dv'$$

$$-\frac{e\hbar}{2mi}\sum_i \frac{n_i}{\Theta}\int \tilde{v}_i(x')v_i(x')\,\mathrm{grad}'(\exp\cdots)\,\cancel{dv'}$$

$$-\frac{\hbar}{2i}\,\mathrm{grad}\, n_f(x)$$

$$= \cancel{n_c}\,\mathrm{I}(x) + \frac{e\hbar}{2mi}\,\mathrm{grad}\, N_c(x).$$

$$\mathrm{I} = -e\sum_i \frac{n_i}{\Theta}\int \tilde{v}_i(x')\left\{\frac{\hbar}{im}\,\mathrm{grad}' + \frac{e}{mc}A\right\}$$

$$\times v_i(x')\exp(\quad)\,dv'$$

$$\cancel{N_c(x) = \sum_i \frac{n_i}{\Theta}\int \tilde{v}_i(x)v_i(x)\exp(\quad)\,dv'}$$

$$\bar{\bar{n}}_f(x) = -\frac{e}{\Theta}\int \tilde{v}_i' v_i' \exp(\quad)\,dv'$$

次にわれ達の第二法は

34

$$\frac{1}{\textcircled{H}}\iiint i(r')\exp\left(-\frac{|r'-r|^2}{a^2}\right)dv'$$

$$\not\simeq \frac{1}{\textcircled{H}}\iiint(\tilde{u}_{\alpha_i}\ \alpha\ u_{\alpha_i})'\cdot\underbrace{\exp\left(-\frac{|r'-r|^2}{a^2}\right)}_{f}dv'$$

$$\underset{i'_\alpha}{\parallel}$$

$$=\frac{1}{\textcircled{H}}\iiint(\tilde{u}_{\alpha_i}\ \alpha\ u_{\alpha_i})'\{\cancel{f}+(r'-R_\alpha)\ \mathrm{grad}\,f(R_\alpha-r)\}dv'$$

$$\underset{i'_\alpha}{\parallel}\qquad f(R_\alpha-r)$$

$$(r'_\alpha=r'-R_\alpha)$$

$$\frac{1}{\textcircled{H}}\iiint \mathrm{div}'\,i'_\alpha\cdot r'_\alpha\{r'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f(r_\alpha)\}dv'_\alpha;$$

$$=\Big[\frac{1}{\textcircled{H}}\iiint\left(\frac{\partial i'_{\alpha x}}{\partial x'_\alpha}+\frac{\partial i'_{\alpha y}}{\partial y'_\alpha}+\frac{\partial i'_{\alpha z}}{\partial z'_\alpha}\right)x'_\alpha\{\quad\}dv'_\alpha$$

$$=-\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_{\alpha x}\{r_\alpha\,\mathrm{grad}\,f(r_\alpha)\}dv'_\alpha-\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_{\alpha x}x'_\alpha\frac{\partial f(r_\alpha)}{\partial x'_\alpha}dv'_\alpha$$

$$-\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_{\alpha y}x'_\alpha\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}dv'_\alpha-\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_{\alpha z}x'_\alpha\frac{\partial f}{\partial z'_\alpha}dv'_\alpha\Big]$$

$$=-\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_\alpha\{r'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f(r_\alpha)\}dv'_\alpha-\frac{1}{\textcircled{H}}\int r'_\alpha(i'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f)\,dv'_\alpha$$

$$\not\simeq\frac{1}{\textcircled{H}}\int i'_\alpha\{r'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f(r_\alpha)\}dv'_\alpha=-\frac{1}{\textcircled{H}}\int r'_\alpha(i'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f)dv'_\alpha$$

$$-\frac{1}{\textcircled{H}}\iiint \mathrm{div}\,i'_\alpha\cdot r'_\alpha\{\quad\}dv'_\alpha$$

§ 電子の相対論的分析.

$$\dot{i} = \dot{i}_b + \dot{i}_f + \dot{i}_{bf}$$

$$\dot{i}_b \equiv -e\Big\{\sum_{\alpha i} n_{\alpha i}(\tilde{u}_{\alpha i}\,\alpha\, u_{\alpha i})$$

$$+\sum_{\alpha}\sum_{i\neq j} a^*_{\alpha i} a_{\alpha j}(\tilde{u}_{\alpha i}\,\alpha\, u_{\alpha j}) + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i,j} a^*_{\alpha i} a_{\beta j}$$

$$(\tilde{u}_{\alpha i}\,\alpha\, u_{\beta j})$$

$$\dot{i}_f \equiv -e\Big\{\sum_i n_i(\tilde{v}_i\,\alpha\, v_i) + \sum_{i\neq j} b^*_i b_j(\tilde{v}_i\,\alpha\, v_j)$$

$$\dot{i}_{bf} \equiv -e\sum_{\alpha i}\sum_j\Big\{a^*_{\alpha i} b_j(\tilde{u}_{\alpha i}\,\alpha\, v_j)$$

$$+ b^*_j a_{\alpha i}(\tilde{v}_i\,\alpha\, u_{\alpha i})$$

$$\tilde{u}_{\alpha i}\,\alpha\, u_{\alpha i}$$

$$\frac{1}{(n)}\iiint \dot{i}'_\alpha\, dv'_\alpha = \frac{1}{(n)}\iiint d\dot{w}'\dot{i}'_\alpha \cdot \mathfrak{r}'_\alpha\, dv'_\alpha = 0.$$

$$\frac{1}{(n)}\int[\mathfrak{r}'_\alpha \dot{i}'_\alpha]_{(x)}\,\mathrm{grad}\,f\cdot dv'_\alpha \Big|_x$$

$$= \frac{1}{(n)}\int \dot{i}'_\alpha(\mathfrak{r}'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f)\,dv'_\alpha - \frac{1}{(n)}\int \mathfrak{r}'_\alpha(\dot{i}'_\alpha\,\mathrm{grad}\,f)\,dv'_\alpha\Big\}_x$$

$$\dot{i}'_{\alpha x}\Big(x'_\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + y'_\alpha\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z}\Big)$$

$$= \frac{1}{(n)}\int\Big\{[\mathfrak{r}'_\alpha \dot{i}'_\alpha]_y\frac{\partial f}{\partial z} - [\mathfrak{r}'_\alpha \dot{i}'_\alpha]_z\frac{\partial f}{\partial y}\Big\}dv'_\alpha$$

$$= \frac{1}{(n)}\int\Big\{(z'_\alpha \dot{i}'_{\alpha x} - x'_\alpha \dot{i}'_{\alpha z})\frac{\partial f}{\partial z} - (x'_\alpha \dot{i}'_{\alpha y} - y'_\alpha \dot{i}'_{\alpha x})\frac{\partial f}{\partial y}\Big\}dv'_\alpha$$

$$\frac{1}{ⓝ}\int \dot{i}'_\alpha \{ r'_\alpha \operatorname{grad} f(r_\alpha)\} dv'_\alpha = \frac{1}{2ⓝ}\int [r'_\alpha \times \dot{i}'_\alpha]$$

$$\times \operatorname{grad} f' \cdot dv'_\alpha$$

$$\underset{(r_\alpha)}{m} = \frac{-e}{2c}[r'_\alpha \dot{i}'_\alpha]$$

$$-\frac{ec}{(n)}\iint(\tilde{u}_{\alpha_i}\alpha u_{\alpha_i})' \exp\left(-\frac{(r'-r)^2}{a^2}\right) dv'$$

$$=\frac{1}{2(n)}\iiint[r_\alpha' i_\alpha'] \times \operatorname{grad}_\alpha f(x) dv_\alpha'$$

$$\overline{\overline{i}}_\alpha = c \operatorname{curl} M_\alpha$$

$$M(r) = N(r)\,\overline{\overline{m}}(r)$$

$$\overline{\overline{i}}_f = \overline{\sum_i n_i(\tilde{v}_i\alpha v_i)} = I_f$$

+ Klein, Zeits. f. Phys. 41 (1927), 407
Heisenberg, Ann. d. Phys. 9 (1931), 338
Rosenfeld, ZS. f. Phys. 65 (1930), 589.

* ψの満たすべきDirac式は

$$\left\{-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e}{c}\Phi_0+\alpha_i\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{e}{c}\Phi_i\right)+\alpha_4\mu c\right\}\psi = 0$$

$$\psi=\psi^{(0)}+\psi^{(1)}$$

$$\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}-D\right)\psi^{(0)}=0$$

$$\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}-D\right)\psi^{(1)} = i\left(b\,e^{\frac{2\pi i(Kr-kct)}{L}}-b^*e^{-\frac{2\pi i(Kr-ckt)}{L}}\right)(F\cdot\psi^{(0)})$$

$$\psi^{(0)}=\sum a_n^{(0)}u_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t}$$

$$\psi^{(1)}=\sum a_n^{(1)}u_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t}$$

と置くと $a_n^{(1)}$ は

$$-\frac{h}{2\pi i c}\frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial t}=\sum_m i\left\{b\,e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n-E_m-h\nu)t}\,F_{nm}a_m^{(0)} - b^*e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n-E_m+h\nu)t}\,F^*_{nm}a_m^{(0)}\right\}$$

F_{nm}, F^*_{nm} : $e^{\pm\frac{2\pi i Kr}{L}}F$ の行列要素

これを縮らしたものが本文(9)の各式になる.

§ 量子電気力学に於ける摂動論的方法 T

Heisenberg によれば量子電気力学に於ても、古典電気力学と同様な方法が採用出来、干渉の問題、伝播の問題の見通しがよくなる。

$$\psi(r,\sigma) = \sum a_n u_n(r,\sigma) e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t}$$

$$a_n = \Delta_n N_n \qquad a_n^* = N_n \Delta_n^* \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\dfrac{k}{L}}\, \mathbf{e}^{\mathbf{k}\lambda} \left(b_{\mathbf{k}\lambda} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k}r - ctk)}{L}} - b_{-\mathbf{k},-\lambda} e^{-\frac{2\pi i(\mathbf{k}r - ctk)}{L}} \right) \\ \mathbf{H} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\dfrac{k}{L}} \left[\mathbf{e}^{\mathbf{k}\lambda}, \dfrac{\mathbf{k}}{k} \right] \end{cases}$$

$$\left(b_{\mathbf{k}\lambda} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k}r - kct)}{L}} - b_{-\mathbf{k},-\lambda} e^{-\frac{2\pi i(\mathbf{k}r - kct)}{L}} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{ch}{2}}$$

$$b_{\mathbf{k}\lambda} = \Delta^{+}_{\mathbf{k}\lambda} M^{1/2}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad b_{-\mathbf{k},-\lambda} = b^*_{\mathbf{k}\lambda} = M^{1/2}_{\mathbf{k}\lambda} \Delta^{-}_{\mathbf{k}\lambda}$$

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} :$$

$$a_n^{(1)} = -c \sum_m i \left\{ b \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m - h\nu)t} - 1}{E_n - E_m - h\nu} F_{nm} a_m^{(0)} \right.$$

$$(9) \qquad \left. - b^* \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m + h\nu)t} - 1}{E_n - E_m + h\nu} F^*_{nm} a_m^{(0)} \right\}$$

これは形式的には Schrödinger の輻射理論と同じである。

40

† $a_n^{*(1)} a_{n'}^{(0)}$ 等の cross term ~~は表はの中~~

$a_n^{*(1)} a_{n'}^{(0)}$, $a_{n'}^{*(0)} a_n^{(1)}$, $a_m^{*(1)} a_n^{(0)}$, $a_n^{*(0)} a_m^{(1)}$

$a_n^{(1)} a_{n'}^{(0)} = 0$. $n' \neq m$.

$a_m^{*(1)} a_n^{(0)} = 0$ $n \neq m$

であるが

$a_{n'}^{*(0)} a_n^{(1)}$, $a_n^{*(0)} a_m^{(1)}$ $n \neq m$

の如き形のものが残る，但し

これ等は ~~偶然な物理的意味を持たない~~。

Ψ* を左からかければ 0 になる。

* Ψ は Ausgangszustand の Schrödingerfunktion

† この項は Ψ* を左からかければ 0.

共鳴の場合 (Resonanzfall)

$a_n^{(0)}$ 及び $N_n^{(0)}$ は $n=m$ を除いて 0. $W_m^{(0)}=1$ とする.

$E_n > E_m$ ならば (9) の分母の 0 となるのは第一項である.

$h\nu = E_n - E_m$ なる振動数の附近の Δν なる範囲の振動について積分をとると

$$a_n^{(1)*} a_n^{(1)} = a_m^{(0)*} a_m^{(0)} \frac{\sum^{\Delta\nu} b^*_{\kappa\lambda} b_{\kappa\lambda}}{Z_\nu \Delta\nu} B_n^m t$$

$$= t\, B_n^m N_m^{(0)} \frac{\sum^{\Delta\nu} M_{\kappa\lambda}}{Z_\nu \Delta\nu} = t\, B'^m_n N_m^{(0)} \rho_\nu$$

$$Z_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} L^3$$

ρ_ν : Energiedichte pro Volumen und Δν.

$E_n < E_m$ ならば (9) の第二項が大きくなり

$$a_n^{(1)*} a_n^{(1)} = a_m^{(0)*} a_m^{(0)} \frac{\sum^{\Delta\nu} b_{\kappa\lambda} b^*_{\kappa\lambda}}{Z_\nu \Delta\nu} B_n^m t$$

$$= t\, B_n^m N_m^{(0)} \frac{\sum^{\Delta\nu} (M_{\kappa\lambda}+1)}{Z_\nu \Delta\nu}$$

$$= t\, B'^m_n N_m^{(0)} \left(\rho_\nu + \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu\right)$$

依って

$$\overline{a_n^* a_n} = \int \Psi^* a_n^* a_n \Psi \, d\tau$$

$n \neq m$ ならば

$$= \cancel{\int \Psi^* a_n^{(0)*} a_n^{(1)} \Psi \, d\tau} + \int \Psi^* a_n^{(1)*} a_n^{(1)} \Psi \, d\tau$$

$E_n > E_m$:
$$= t \cdot B'^m_n N_m^{(0)} \rho_\nu$$

$E_n < E_m$:
$$= t \cdot B'^m_n N_m^{(0)} \left(\rho_\nu + \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu\right)$$

42

$$
\dagger\ (15')\begin{cases} \rho = e\sum_{\sigma}\psi_\sigma^{*}\psi_\sigma \\ s_i = e\sum_{\sigma\tau}\psi_\sigma^{*}\alpha_{\sigma\tau}^{i}\psi_\tau \end{cases}
$$

輻射の放出、吸収、散乱

この際放出される輻射に関しては、Maxwell式から

$$(14)\begin{cases} \mathbf{H} = \mathrm{rot}\displaystyle\int \frac{\mathbf{S}_{t-\frac{r}{c}}}{r_{pp'}}\,dV_{p'} + \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{E} = \mathrm{grad}\displaystyle\int \frac{\rho_{t-\frac{r}{c}}}{r_{pp'}}\,dV_{p'} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathbf{S}_{t-\frac{r}{c}}}{r_{pp'}}\,dV_{p'} + \mathbf{E}_0 \end{cases}$$

によって与へられる.† 但し $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ は真空中の Maxwell 式の解であり $t=0$ に於ける与へられた $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ の分布に依る様に ~~定める~~. ((14)から…に対する) (詳しくいへば (14) を与へられた Schrödinger funktional に作用した場合に於て与へられた結果に依る様に) 定める.

輻射の振幅を

$$i\left(\mathfrak{b}^* e^{2\pi i\nu t} - \mathfrak{b}\, e^{-2\pi i\nu t}\right)$$

と書くと、$E_n > E_m$ ならば $\mathfrak{b}$ は

$$a_n a_m^* u_n u_m^* e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)t}$$

なる ~~因数を~~ 因数を含む. 従って (†)

$$\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} \propto a_m a_n^* a_n a_m^* = N_n(1-N_m)$$

で 高い方の状態 $N_n = 1$, 低い方の $N_m = 0$ なる場合のみ, ~~輻射が~~

$$\nu = E_n - E_m$$

なる振動数の輻射が放出される.

† Heisenberg, Pauli, ZS. 59 (1930), 168.

$$\sum_{\rho\sigma}^{x_i'} f_{\rho\sigma}(x_i)\psi_\rho^*(x_i)\psi_\sigma(x_i')\Phi(1_{\rho_1 q_1}, 1_{\rho_2 q_2}, 0_{\rho_p q_p}, 1_{\rho_r q_r}, \ldots)^*$$

$$= \sum_{p, r} f_{\rho_p \rho_r}(q_{ip}, q_{ip}^*)\,\Phi\,\Phi\,($$

散乱の場合には、Rayleigh 散乱光の振幅は

$$\sum_m s_m a_m^* a_m b$$

に比例する。

Raman 光の振幅は $\nu - \frac{E_n - E_m}{h}$ $\left(\nu > \frac{E_n - E_m}{h}\right)$

なる振動数の場合に

$$a_n^* a_m b$$

に比例し、$\nu + \frac{E_n - E_m}{h}$ の場合

$$a_n a_m^* b$$

に比例する。それ等の強さはそれ

$$a_m^* a_m a_n a_n^* b^* b = N_m(1-N_n)M$$

$$a_m a_m^* a_n b^* b = N_n(1-N_m)M$$

光の伝播速度、干渉

(14)からして、光の強さの観測値が0でない所は光速度cで伝はることがわかる。即ち Ausgangszustand に於て強さが至る所0で、原点が t=0 なる時刻に光をおしはじめたとすると、強さが0でない所は(14)により光速度cで伝はる。干渉についても同様に、古典論と同様な結果がでる

電子間の相互作用

~~この場合~~ 相互作用を考へるには

$$\mathrm{rot}_i H - \frac{1}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t} = 4\pi e \sum \alpha_p^i \delta(r - r_p)$$

なる式から出発する。† Schrödinger funktional Ψ は

$$\Psi(E, r_1 \cdots r_Z) = \sum \Phi_n(E) u_n(r_1 \cdots r_Z)$$

* 多電子系に、
数子系が

$$N_{\rho_1 q_1} = N_{\rho_1 q_2} = \cdots = N_{\rho_p q_p} = \cdots = 1$$

但し $N_{\rho_r q_r} = 0$

なる状態にあつたとすると

$$\cancel{\Phi(N_{\rho_1 q_1}) = \sum \delta_{\rho_1 \rho} \delta_{q_1 q}}$$

$$\Phi(N_{\sigma_1 q_1} N_{\sigma_2 q_2} \cdots) = \cancel{\delta_{\sigma_1 \rho}\, \delta_{q}}$$

$$\Phi(1_{\rho_1 q_1} \cdots 1_{\rho_p q_p} \cdots 0_{\rho_r q_r} \cdots) \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

$$\sum_{\substack{\sigma,\sigma' \\ x,x'}} f_{\sigma\sigma'}(xx')\, \psi_\sigma^*(x)\, \psi_{\sigma'}(x')\, \Phi(\cdot N_{\rho q} \cdots)$$

$$= \cancel{f_{\sigma\sigma'}(xx')}\, \Phi'(\cdots N_{\rho q} \cdots)$$

但し、

$$\Phi'(0'_{\rho_1 q_1} \cdots 0_{\rho_p q_p} \cdots 1_{\rho_r q_r} \cdots)$$

$$= \nu \sum_{\substack{\rho_r \rho_p \\ q_r q_p}} f_{\rho_r \rho_p}(q_r q_p)\, \Phi(1_{\rho_1 q_1} \cdots 1_{\rho_p q_p} \cdots 0_{\rho_r q_r} \cdots)$$

$$\Phi(1_{\rho_1 q_1} \cdots) = \cancel{\varepsilon} \cdot \varphi(\rho_1 q_1 \cdots \rho_p q_p \cdots)$$

$$\Phi' = \nu f_{\rho_r \rho_p}(q_r q_p) \cdot \nu\, \varphi(\rho_1 q_1 \cdots \rho_r q_r \cdots)$$

と置いて

$$\sum_n \left(\text{rot}_i H - \frac{1}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t} \right) \Phi_n u_n$$

$$= 4\pi e \sum_1^Z \alpha_p^i \, \delta(x - x_p) \sum_n \Phi_n u_n$$

$$= 4\pi e \sum_{n,m} X_{nm}^i \Phi_n u_m$$

$$\left(\text{rot}_i \overset{E}{\cancel{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \overset{E}{\cancel{H}}_i}{\partial t} \right) \Phi_n = 4\pi e \sum_m X_{mn}^i \Phi_m$$

$$X_{mn}^i(\cancel{x}) = \int u_m^* \sum_1^Z \alpha_p^i \, \delta(x - x_p) u_n \, dV_1 \cdots dV_Z.$$

原子が一つしかないとし, u_n なる状態の Anregungs-stärke を a_n とすると

$$\sum_n a_n^* a_n = 1, \quad a_n^* a_n = N_n$$

a_n, a_n^* が式(2)を満足すると. Φ_n なる函数は N_n が 1 なる値をとる確率振幅と解せられる.

$$\text{rot}_i H - \frac{1}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t} = 4\pi e \sum_{nm} a_n^* a_m X_{mn}^i$$

† Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien (1939) II, S. 360

$$A_y = a \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \varphi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{2\pi\nu}{c} a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_y &= \frac{2\pi\nu}{c} a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta u + \frac{2im}{\hbar}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2} V u = \frac{2ie}{\hbar c} a \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_k = \psi_k e^{-\frac{i}{\hbar} W_k t} \qquad b = \frac{ie}{\hbar c} a$$

$$u = u_k + b w + \cdots$$

$$\Delta w + \frac{2im}{\hbar}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2} V w$$

$$= \frac{\partial \psi_k}{\partial y}\left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}\left[W_k t + h\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]} + e^{-\frac{i}{\hbar}\left[W_k t - h\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]}\right\}$$

$$w = w_+ e^{-\frac{i}{\hbar}(W_k + h\nu)t} + w_- e^{-\frac{i}{\hbar}(W_k - h\nu)t}$$

$$\Delta w_\pm + \frac{2m}{\hbar^2}(W_k \pm h\nu - V) w_\pm = \frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{\pm 2\pi i \frac{x}{\lambda}}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{\pm 2\pi i \frac{x}{\lambda}} = \sum A_{jk} \psi_j$$

の展開を行ふ，次

$$w_\pm = \sum B_{jk} \psi_j$$

§ 通常の攝動論による分散の理論†

$$u = \psi_k e^{-\frac{i}{\hbar}W_k t} + w_+ e^{-\frac{i}{\hbar}(W_k + h\nu)t} + w_- e^{-\frac{i}{\hbar}(W_k - h\nu)t}$$

$$w_\pm = \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{(j)} \frac{A_{jk}\psi_j}{W_k - W_j \pm h\nu}$$

$$2A_{jk} = \int\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y}\psi_j^* - \frac{\partial \psi_j^*}{\partial y}\psi_k\right)d\tau$$

$$= -\frac{2\pi m \nu_{jk}}{\hbar} y_{jk}$$

$$\nu_{jk} = \frac{W_j - W_k}{h} \qquad A_{jk}^* = -A_{kj}$$

$$u = \left\{\psi_k + \frac{b}{2}\sum \nu_{jk} y_{jk}\left(\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{\nu_{jk} - \nu} + \frac{e^{2\pi i\nu t}}{\nu_{jk} + \nu}\right)\psi_j\right\} \times e^{-\frac{i}{\hbar}W_k t}$$

$$M_y = e\int y\rho\, d\tau = e\int y u^* u\, d\tau$$

$$P = N M_y$$

$$= Ne\left\{y_{kk} - 2ib\nu\sum \frac{\nu_{jk}|y_{jk}|^2}{\nu_{jk}^2 - \nu^2}\sin 2\pi\nu t\right\}$$

$$\mathbf{P} = -\frac{2iNeb\nu}{3}\sum \frac{\nu_{jk}|r_{jk}|^2}{\nu_{jk}^2-\nu^2}\sin 2\pi\nu t$$

$$= \frac{Ne^2|\mathbf{E}|}{3\pi\hbar}\sum \frac{\nu_{jk}|r_{jk}|^2}{\nu_{jk}^2-\nu^2}$$

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \varepsilon - 1 = n^2 - 1 = \frac{Ne^2}{3\pi\hbar}\left(\;''\; \right)$$

$$\omega_{jk} = 2\pi\nu_{jk} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$n^2 - 1 = \frac{Ne^2}{m}\sum \frac{f_{jk}}{\omega_{jk}^2-\omega^2}$$

$$f_{jk} = \frac{2m}{3\hbar}\omega_{jk}|r_{jk}|^2$$

を取らねばならぬ

この計算に於て正確には 輻射ポテンシャル $\mathbf{A}$ として effective Field 即ち今考へて居る電子を除く他のすべての電子から~~[illegible]~~の生ずる場を入射波の外加はつたものを取らねばならぬ。これは結局に媒質中の各点の電子に対する Self-consistent Field を求める問題になる。~~時間的~~ しかもそれは時間的に変化する場である。Maxwell の偏方程式と各電子に対する運動方程式、或は Lorentz を仮定して、その解を求める問題である。

全て含む

○ 電磁場と古典電子論、~~式は全体を微分すれば~~
iに之れ論ず

(1) 入射場　$A^{(0)}$　$E^{(0)}$　$H^{(0)}$
電

(2) i番目の電子の強制振動によって生ずる電磁場

$$A^{(i)} \quad E^{(i)} \quad H^{(i)}$$

前)

(3) 媒質中の電磁場
4

$$A = A^{(0)} + \sum_i A^{(i)}$$

$$E = E^{(0)} + \sum_i E^{(i)}$$

$$H = H^{(0)} + \sum_i H^{(i)}$$

(4) i番目の電子に働く電磁場

$$A_i^{(e)} = A - A^{(i)} = A^{(0)} + \sum_{j \neq i}' A^{(j)}$$

§ 原子集團と電磁場の相互作用の理論に於ける Self-consistent Field の問題

各核の原子 — 従つてその中の電子 — が外部から入つて来た電磁場の影響の下に強制振動を行ひ、~~全体として媒質中の電磁場~~ その結果として発生する電磁場が入射波に重なつて媒質中の電磁場が成立する。この場合、各々の電子に働く電磁場としては局所

i) 入射波) 入射場による

ii) 他の原子の強制振動によつて生じた電磁場.

iii) 該電子の属する原子内の他の電子によつて生じた電磁場.

この他に勿論

iv) その電子の属する原子~~内の~~の核及び他の電子によ~~つて生ず~~る静電場.

v) 他の原子による静電場

がかかつてゐる。

~~i) + ii) + iii) を加へて~~ による ~~ポテンシャル及~~ 電磁場を

~~$A^{(e)}_{i}$ $E^{(e)}_{i}$ $H^{(e)}_{i}$~~

~~と書くことにする。但し i は今考へて居る電子の番號.~~

~~これに対して iv) + v) を~~

~~$V^{(s)}_{i}$ $E^{(s)}_{i}$~~

~~等と書く。~~

$$\longrightarrow \Phi^{(0)} a^{(0)}$$

$$\rightarrow \phi^{(i)} a^{(i)}$$

$$\rightarrow \phi_l^{(i)} a_l^{(i)}$$

そこで 統計的な意味に於て

i) 外部電磁場を

$\phi^{(0)}$ ~~$V^{(0)}$~~ $a^{(0)}$ $e^{(0)}$ $h^{(0)}$

と書くことにする。これは電子以外の物体を一切除いて了った時に存在する電磁場を意味する

ii) i番目の電子の運動によって生ずる電磁場を

$\phi^{(i)}$ ~~$V^{(i)}$~~ $a^{(i)}$ $e^{(i)}$ $h^{(i)}$

と書く

iii) i番目の電子に働く局所電磁場を

$\phi_l^{(i)}$ ~~$V_l^{(i)}$~~ $a_l^{(i)}$ $e_l^{(i)}$ $h_l^{(i)}$

iv) 全電磁場を

~~$\phi_l^{(i)}$~~ ϕ a e h

とすると

a)
$$\begin{cases} a = a^{(0)} + \sum_i a^{(i)} \\ \phi = \phi^{(0)} + \sum_i \phi^{(i)} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_l^{(i)} = a^{(0)} + \sum_{j \neq i} a^{(j)} \\ \phi_l^{(i)} = \phi^{(0)} + \sum_{j \neq i} \phi^{(j)} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_l^{(i)} = a - a^{(i)} \\ \phi_l^{(i)} = \phi - \phi^{(i)} \end{cases}$$

なる関係が成立する。但し a) b) c) の中二つだけが独立である。

~~問題は与へられた物体に於て~~

一方に於て巨視的電磁場に対しては

I) 外部電磁場は

$$\Phi^{(0)} = \bar{\phi}^{(0)} \qquad A^{(0)} = \bar{a}^{(0)}$$
$$E^{(0)} = \bar{e}^{(0)} \qquad B^{(0)} = \bar{b}^{(0)}$$

で表され

II) 全電磁場は 同じ意味で如く

$$\Phi = \bar{\phi} \qquad A = \bar{a}$$
$$E = \bar{e} \qquad B = \bar{b}$$

に他ならぬ。

問題は個々の原子に a) 或は b) 或は c) で表される局所電磁場が働いて居るとして、中の原子系に於ける中心運動を求め、それから得られた微視的電荷密度及び微視的電流密度 i の平均値が E, B と如何なる関係にあるかを明かにすることである。

初等的な考へ方によれば（前節参照）局所電磁場を

$$E_l = E + \frac{4\pi}{3}P$$

と置く故

$$\frac{P}{N} = \bar{p} = \alpha E_l = \alpha\left(E + \frac{4\pi P}{3}\right) = \cancel{\alpha\left(E + \frac{4\pi}{3}P\right)}$$

故に

$$\frac{n^2-1}{4\pi N}E = \alpha\left(E + \frac{n^2-1}{3}E\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4\pi N\alpha}{3\rho}$$ が密度に関せない常数となる。

† 文献

van Vleck, 前出書.

或は dipole-dipole coupling の問題は

van Vleck, J. Chem. Phys. 5 (1937), 320, 556.

Kirkwood, ibid. 7 (1939), 911

$$\frac{M}{\rho}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi N\alpha}{3\rho} \quad \text{(Clausius-Mosotti)}$$ 59

これが所謂 Lorenz-Lorentz の公式である。

量子力学の量子電気力学の立場から問題をもつと厳密に一般的に取扱はねばならぬ。問題を「原子集団と電磁場の作用」の取扱ひの問題に還元せねばならぬ。結果は電磁場の方程式に外部的な影響を与へなし。原子集団に統計力学を適用してみれば、即ち電磁場の影響によつて集団のエネルギーがどうかはる。又それに伴うて状態和Zが変つて自由エネルギー

$$F=-kT\log Z$$

及エントロピー

$$S=-\frac{\partial F}{\partial T}$$

―がどうかはるか、を統計力学の立場から問題として来た。例へば van Vleck は統計力学的取扱ひに対してエネルギー、エントロピー等の概念が中心で、~~場~~的内'電磁場論といはれる概念は背後にかくれてゐる。

これに対してむしろ電磁場を正確に取扱ふには場の内部的問題としての扱ひ方が必要である。

両者の~~境界~~（問題）をどこまで認めるか、どこで妥協するかが問題によつて異なるのである。即ち

a) 原子的構造的 粒子間の相互作用を考慮した極限においては古典電気力学に類似な方法が有力であつた。現に分散の理論のやうなものもある。けれども光子的現象においては光子の数が少い場合に比して大きいな。この近似は許しかつた。

b) 反対の極限として、静電磁場の場合には、それは

寧ろ外部からの力として、原子核圏に強い力を適用し得る、
c) その中間の場合として、気体放電乃至電場と物質の相互作用の問題は統一的に取扱ふのが困難である。一方では原子核圏を統計的に取扱ふと共に、電場の作用は外部空間的場として取扱ふ必要がある。
更にもっと複雑な場合として
d) 遠く離れた場合と ~~[illegible]~~、速く変る場の共存する場合には更に困難である。

第14α.

$$\Box A = -\frac{4\pi}{c}(\quad)$$

$$\Box \Phi = -4\pi\rho$$

$$\Box a = -\frac{4\pi i}{c}$$

$$\Box \varphi = -4\pi\sigma$$

$$\varphi = \iiiint \frac{\sigma}{R}\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$a = \iiiint \frac{i}{R}\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\sigma = -e(\tilde{\psi}\psi)$$

$$i = -e(\tilde{\psi}\alpha\psi)$$

$$\psi = \sum_{\alpha i} a_\alpha u_{\alpha i} + \sum_i b_i v_i$$

$$\sigma = \sigma_b + \sigma_f + \sigma_{bf} \qquad \sigma_\alpha$$

$$\sigma_b = -e\left\{\left(\sum_{\alpha i} n_{\alpha i}(\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha i}) + \sum_{\alpha_i, \alpha_j}^{i\neq j} a^*_{\alpha i} a_{\alpha j}(\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha j})\right)\right.$$

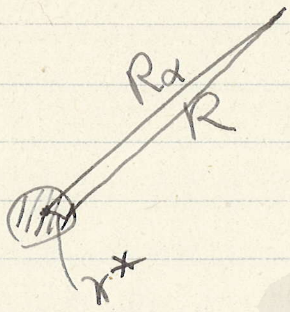
$$\left.\cancel{\alpha_\alpha}\ \sigma_{\alpha\beta} + \left(\sum_{\alpha i, \beta j}(\alpha\neq\beta)\, a^*_{\alpha i} a_{\beta j}(\tilde{u}_{\alpha i} u_{\beta j})\right)\right\}$$

$$\sigma_f = -e\left\{\sum_i n_i(\tilde{v}_i v_i) + \sum_{i\neq j} b^*_i b_j(\tilde{v}_i v_j)\right\}$$

$$\sigma_{bf} = -e\sum_{\alpha i, j}\left\{a^*_{\alpha i} b_j(\tilde{u}_{\alpha i} v_j) + b^*_j a_{\alpha i}(\tilde{v}_j u_{\alpha i})\right\}$$

$$\varphi = \varphi_b + \varphi_f + \varphi_{bf}$$

$$\varphi_b = \iiiint \frac{\sigma_b}{R}\delta(R-ct)\,dv\,dt$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_\alpha} + r^* \operatorname{grad} \frac{1}{R_\alpha} + \cdots$$

$$\mathbb{P}_\alpha(r) = \sigma_\alpha r^*$$

$$\sigma_f' = \sum_i n_i (\hat{v}_i v_i)$$

$$= \sum_\alpha \iiiint \frac{\sigma_\alpha}{R}\,\delta(R-ct)\,dv\,dt + \cdots$$

$$\cong \sum_\alpha \iiiint \left\{ \frac{\sigma_\alpha}{R_\alpha} + \mathbf{P}_\alpha \operatorname{grad} \frac{1}{R_\alpha} \right\} \delta(R_\alpha - ct)\,dv\,dt$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta}{}' \iiiint \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{R}\,\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\varphi_f = \iiiint \frac{\sigma'_f}{R}\,\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\varphi_{bf} = \iiiint \frac{\sigma_{bf}}{R}\,\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_b + \varphi_f + \varphi_{bf} \rangle$$

$$= \iiiint \Big[\sum_\alpha \Big(\frac{\langle \sigma_\alpha \rangle}{R_\alpha} + \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle \operatorname{grad} \frac{1}{R_\alpha} \Big) + \sum_{\alpha\beta}{}' \frac{\langle \sigma'_{\alpha\beta} \rangle}{R} + \frac{\langle \sigma'_f \rangle}{R} + \frac{\langle \sigma'_{bf} \rangle}{R} \Big]$$

$$\times \delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\langle \sigma(r) \rangle = \rho(r) - \operatorname{div} \mathbf{P}(r)$$

$$\rho(r) = \underline{\sum_\alpha \left(\sum Z e\,\delta(R^0_\alpha - r) + \langle \sigma_\alpha \rangle_{av} \right)}$$

$$+ \underline{\langle \sigma'_f \rangle} + \sum_{\alpha\beta}{}' \langle \sigma'_{\alpha\beta} \rangle + \langle \sigma'_{bf} \rangle$$

$$\mathbf{P}(r) = \underline{\sum_\alpha \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle}$$

$$\mathfrak{P}_\alpha = \sigma_\alpha r^*$$

$$\sigma_\alpha = \sum_i n_{\alpha i} (\tilde{u}_{\alpha i}\, u_{\alpha i}) + \sum_{i,j}{}' a^*_{\alpha_i} a_{\alpha_j} (\tilde{u}_{\alpha_i}\, u_{\alpha_j})$$

$$\dot{i} = \dot{i}_b + \dot{i}_f + \dot{i}_{bf}$$

$$a_b = \frac{1}{c}\sum_\alpha \iiint i_\alpha\left\{\frac{1}{R_\alpha} + r^* \operatorname{grad}\frac{1}{R_\alpha}\right\}\delta(R - ct)\,dv\,dt$$

$$+ \sum_{\alpha\beta}{}' \cdots$$

$$\mathbf{P}^\alpha = \iiint \mathbf{P}_\alpha(r)\,dv$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}^\alpha}{\partial t} = \iiint \frac{\partial \mathbf{P}_\alpha(r)}{\partial t}\,dv$$

$$= -e\sum_{ij}{}' a^*_{\alpha i} a_{\alpha j} \iiint \frac{\partial}{\partial t}(u^*_{\alpha i}\, u_{\alpha j})\, r^*\,dv$$

$$= -e\iiint \dot{i}_\alpha\,dv$$

$$k_\alpha = -e\iiint \sum_i n_{\alpha i}(\tilde{u}_{\alpha i}\, u_{\alpha i})\, r^*\left(r^* \operatorname{grad}\frac{1}{R_\alpha}\right)$$

$$+ \sum_{i,j}{}' a^*_{\alpha i} a_{\alpha j}(\tilde{u}_{\alpha i}\, u_{\alpha j})\, r^*\left(r^* \operatorname{grad}\frac{1}{R_\alpha}\right)$$

$$m_\alpha = \frac{1}{2c}\iiint [r^* \times \dot{i}_\alpha]\,dv$$

$$a_b = \sum_\alpha \int \frac{1}{cR_\alpha}\frac{\partial \mathbf{P}^\alpha}{\partial t}\,\delta(\cancel{R_\alpha}\, R_\alpha - ct)\,dt$$

$$+ \sum_\alpha \int \left[m_\alpha \times \operatorname{grad}\frac{1}{R_\alpha}\right]\delta(R_\alpha - ct)\,dt$$

$$+\frac{1}{2c}\sum_{\alpha}\frac{\partial R_\alpha}{\partial t}\delta(R_\alpha - ct)\,dt$$

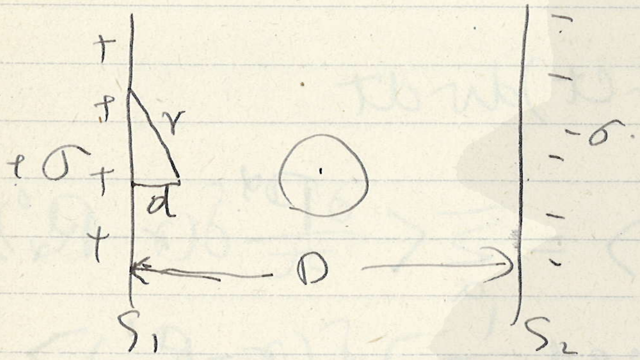
$$+\sum_{\alpha\beta}\iiint\frac{\dot{e}_{\alpha\beta}}{cR}\delta(R-ct)\,dv\,dt$$

$$\langle \dot{i}\rangle = \langle -e(\tilde{\psi}\alpha\psi)\rangle = \sum_{\alpha}\left\langle \frac{\partial P^\alpha}{\partial t}\delta(r-R_\alpha^0)\right\rangle$$

$$+\sum_{\alpha}\left\langle \left[m_\alpha \times \operatorname{grad}\frac{1}{R_\alpha}\right]\delta(r-R_\alpha^0)\right\rangle$$

$$+\sum{}'\langle \dot{e}_{\alpha\beta}\rangle + \langle \dot{e}_f\rangle + \langle \dot{e}_{fb}\rangle$$

Debye, Polare Molekeln



$F = F_1 + F_2 + F_3$

$F_1 = 4\pi\sigma$

$$V = \int_{S_1} \frac{\cancel{4\pi}\sigma}{r}\, df - \int_{S_2} \frac{\cancel{4\pi}\sigma}{r}\, df$$

$$= \int_{S_1} \frac{\cancel{4\pi}\sigma}{\sqrt{\rho^2 + d^2}}\, \rho\, d\rho \cdot 2\pi - \int_{S_2} \cdots$$

$$= 2\pi\sigma \sqrt{\rho^2 + d^2}\Big|_0^\infty - 2\pi\sigma \left\{\sqrt{\rho^2 + d'^2}\right|_0^\infty$$

$$= \cancel{4\pi\sigma d - 2}\ 2\pi\sigma(d' - d)$$

$$+ 2\pi\sigma \left\{\rho\left(1 + \frac{d^2}{2\rho^2}\right) - \rho\left(1 + \frac{d'^2}{2\rho^2}\right)\right\}$$

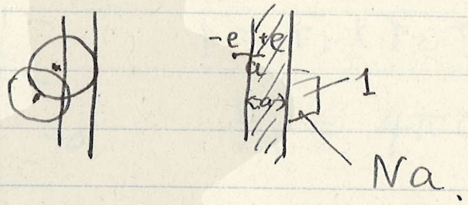
$$= 4\pi\sigma\, \cancel{\left(d - \frac{D}{2}\right)} \left(\frac{D}{2} - d\right)$$

$F_1 = 4\pi\sigma.$

§ Berechnung des inneren Feldes 71

$$\Gamma_2 = -4\pi J + \frac{4\pi}{3} J$$

$$J = N \cdot ea$$



$$\cancel{4} D = 4\pi\sigma$$

$$u' = -\sum e_i [(\xi_i + u_i)X + (\eta_i + v_i)Y + (\zeta_i + w_i)Z]$$

$$u = u' + Q \quad = -\sum (e_i \xi_i X + \cdots)$$

$$- Q$$

$$m_x = \sum_i e_i (\xi_i + u_i) \qquad \delta$$

$$\sum e_i (u_i X + v_i Y + w_i Z) = 2Q = 2Q^*$$

$$= X \frac{\partial Q^*}{\partial X} + \cdots \qquad \cancel{=} \; u_i \frac{\partial Q}{\partial u_i} +$$

$$Y = Z = 0; \qquad \sum e_i u_i = \frac{\partial Q^*}{\partial X}$$

$$X \sum_i e_i u_i = (a_{11} X + a'_{12} Y + a'_{13} Z) X \quad {}^{Y=Z=0}$$

$$Y \sum_i e_i v_i = (a'_{21} X + a_{22} Y + a'_{23} Z) Y$$

$$Z \sum_i e_i w_i = (a'_{31} X + a'_{32} Y + a_{33} Z) Z$$

$$2Q^* = (a_{11} X^2 + \cdots) + (a'_{12} + a'_{21}) XY + \cdots$$

74

$$\left.\begin{aligned} p\ \xi_i &= a_{11}X + a_{12}'Y + a_{13}'Z \\ q\ \eta_i &= a_{21}'X + a_{22}Y + a_{23}'Z \\ r\ \zeta_i &= a_{31}'X + a_{32}'Y + a_{33}Z \end{aligned}\right\}$$

$$u^* = u' + Q$$
$$= -\sum(e_i\xi_i)X + \cdots$$
$$-\frac{1}{2}\sum e_i u_i X + \cdots$$
$$= -(\sum e_i\xi_i)X + \cdots$$
$$-\frac{1}{2}(pX + qY + rZ)$$

$$Q = pX + qY + rZ$$
$$= b_{11}p^2 + b_{12}pq + \cdots$$
$$= Q^* = a_{11}X^2 + a_{12}XY + \cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum e_i u_i &= -\frac{\partial Q^*}{\partial X} + c_{xy}Y + c_{xz}Z \\ \sum e_i v_i &= -\frac{\partial Q^*}{\partial Y} + c_{yx}X + c_{yz}Z \\ \sum e_i w_i &= -\frac{\partial Q^*}{\partial Z} + c_{zx}X + c_{zy}Y \end{aligned}}$$

$c_{xy} = -c_{yx}$ etc

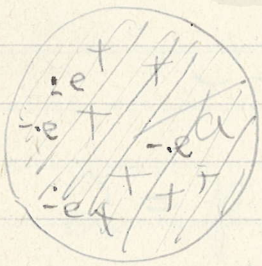
1) Darwin, Refractive Index of an Ionized Medium
(Proc. Roy. Soc. 146 (1934), 17)

+ Maxwell-Sellmeyer-Drude 式

$$S = \mu^2 - 1$$

ho Mossotti-Clausius-Lorenz-Lorentz 式

$$L = \frac{3(\mu^2-1)}{\mu^2+2}$$



§ 電離した媒質の屈折率[1)]

Darwinのdiscussionによれば free electronを含む mediumに於て、Lorentzによるの internal fieldの考察から Sellmeyer式とLorentz式[†]の区別を判別することは困難である。

そこで実際に電子とpositively charged mediumの全体を一つの原子と考へる。今電媒質が μ^2 なる半径 a の球が下なる強さの靜電場に[illegible]とすると

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}\,a^3 F$$

なる電気能率を生ずることがよく知られてゐる。

電場が時間的に変化する場合にも

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}\,a^3 F \sin\nu t$$

となる。但し μ は一般に[illegible]である。

そこで吾々の問題は、電気能率に[illegible]を求め、これを上式と等値することによって解決される。

そこで n 個の電子が半径 a なる uniformly charged (positively) spherical の中で動いてゐるとすると運動方程式は

$$m\ddot{x}_f = -\frac{ne^2}{a^3}x_f - \frac{\partial}{\partial x_f}\sum_{g\neq f}\frac{e^2}{|x_g-x_f|} + eF\sin\nu t$$

$$\therefore\ m\sum\ddot{x}_f = -\frac{ne^2}{a^3}\sum_f x_f + neF\sin\nu t$$

$$e\sum_f x_f = \frac{ne^2F\sin\nu t}{-m\nu^2+(ne^2/a^3)}$$

$$\therefore\ \frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}\,a^3 = \frac{ne^2}{-m\nu^2+(ne^2/a^3)}$$

~~従て~~ 従って

$$\mu^2 - 1 = \frac{-4\pi N e^2}{m v^2} \qquad \cancel{N}n = \frac{4\pi}{3} a^3 N.$$

それ故 S-式がないことになる.

80

(1) J. C. Slater, Electrodynamics of Ponderable Bodies (Journal of Franklin Institute 225 (1938), 277)

媒質の電気力学(1)

image force $\propto e^2$

operator field $\rightleftarrows$ average field

Hartree-Fock approximation

$\rightleftarrows$ Lorentz-Drude Theory