文献（續き）

(6) Dirac, Principles of Quantum Mechanics, Oxford (1935), Chap. XII.
(7) Møller, ZS. f. Phys. 70 (1931), 786.

古典電気力学の基礎に就て、II、

湯川秀樹
谷川安孝
野間進

（昭和19年7月15日　講演）

§5. 電子に対する相対論的考察

前論文に於て吾々は古典的電磁場論を —— Lorentzの電子論ではなく —— 量子電気力学によって基礎づけることを試みた。その場合、電子に対する波動函数としてはスカラー函数をとり、スピン及び相対論的効果の影響を無視したのであった。この点は電子に対するDiracの波動方程式をとることによって容易に改良せられる。~~そして~~すると微視的電磁場から巨視的電磁場を導き出す手續きは前と同じ様に出来る譯であるが、こゝではvan Vleckに倣って(2)電磁ポテンシャルを使ふ方法を採用することにしよう。即ち微視的電磁場($\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$)を

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \\ \mathbf{h} &= \operatorname{curl}\mathbf{a} \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

~~で定義される~~なる関係にある微視的な電磁ポテンシャル$(\varphi, \mathfrak{a})$を導入することにすると、それ等は

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi &= -4\pi\sigma \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{a} &= -\frac{4\pi}{c}\mathfrak{i}\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

なる波動方程式及び Lorentz の條件

$$\operatorname{div}\mathfrak{a} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

を満足しなければならぬ。~~但し~~ (55)の右邊の電荷密度σ及び電流密度$\mathfrak{i}$としては、Dirac の電子論に従って

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= -e\tilde{\psi}\psi \\ \mathfrak{i} &= -ec\,\tilde{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

となる。但しψは四つの成分を持つた Dirac の波動函数で、$\tilde{\psi}$は~~その~~ψに複素共軛な函数である。$\boldsymbol{\alpha}$は四行四列の行列を成分とするベクトルで其の形はよく知れてゐる通りであ

る。ψ, $\tilde{\psi}$ 量の成分を

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(xyzt) &\equiv \psi_i\ , \quad \psi_i(x'y'z't) \equiv \psi_i' \\ \tilde{\psi}_i(xyzt) &\equiv \tilde{\psi}_i\ , \quad \tilde{\psi}_i(x'y'z't) \equiv \tilde{\psi}_i' \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{58}$$

と書くと、それ等は

$$\left.\begin{aligned} \psi_i \tilde{\psi}_j' + \tilde{\psi}_j' \psi_i &= \delta_{ij}\, \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z') \\ \psi_i \psi_j' + \psi_j' \psi_i &= \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_j' + \tilde{\psi}_j' \tilde{\psi}_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \tag{59}$$

等の交換関係を満足しなければならぬ。

そこで対応論的な方法によって(55)を積分し、電荷及び電流の分布が夫々ρ, $\boldsymbol{i}$で与へられた場合の電磁ポテンシャルを求めると(4)(5)(7) 古典電気力学の場合と全く同様~~な形~~にして遅延ポテンシャル

$$\left.\begin{aligned} \varphi_r(\boldsymbol{r}t) &= \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}'t')}{R}\, \delta(R - cT)\, dx'dy'dz'dt' \\ \boldsymbol{a}_r(\boldsymbol{r}t) &= \iiint \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}'t')}{R}\, \delta(R - cT)\, dx'dy'dz'dt' \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

が得られる。但し

$$\left.\begin{aligned} R &= |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \\ T &= |t-t'| \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

である。この他に更に外部電磁場が存在し、それ等がポ~~を表はすポ~~テンシャル φ_e, $\mathbf{a}_e$ ~~が存在してゐるとする~~で表はされるものとすると、

$$\left.\begin{aligned} \left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_e &= 0 \\ \left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{a}_e &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

が満足されねばならず、微視的電磁ポテンシャルは

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e+\varphi_r \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_e+\mathbf{a}_r \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

なる形~~を取ることになる~~で与へられる。

これに対して巨視的な場を表はすポテンシャル Φ, $\mathbf{A}$ を(54)と同形の関係で導入し、

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\,\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \mathrm{curl}\,\mathbf{A} \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

20×20　　株式会社 増進堂稿箋

及び(56)と同形の~~式~~関係

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad (65)$$

を満足するものとすると、Maxwellの場方程式(1)及び関係式(4)により、~~電~~波動方程式

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi &= -4\pi(\rho - \mathrm{div}\,\mathbf{P})\\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

が得られる。van Vleckに従って微視的ポテンシャルと巨視的ポテンシャルの間に

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \overline{\overline{\varphi}}\\ \mathbf{A} &= \overline{\overline{\mathbf{a}}}\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

なる関係を設定すると、§1の(2)及び(3)は当然成立することになる。従って~~問題は(67)~~ 吾々は(63)迄で定義されたφ, $\mathbf{a}$の平均値として定義されたΦ, $\mathbf{A}$が波動方程式(66)を満足することを証明すればよいのである。

§3と同じ様に媒質内の電子の状態は~~集~~

谷原子

乃至分子に束縛された状態と自由な状態とに一應区別し得るものとし、それ等の状態を表はす固有函数

$$u_{\alpha i}(r) \qquad v_i(r) \qquad \alpha=1,2,\cdots \quad i=1,2,\cdots \tag{68}$$

が近似的に直交する函数系を形成してゐるものとする。但しこれ等の函数自身が各々四つの成分を有してゐることは勿論であるが、$u_{\alpha i}$ は α 番目の分子の i 番目の状態を表はし、v_i は自由電子の i 番目の状態を表はすものと考へる。すると電子の波動函数は

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \sum_{\alpha i} a_{\alpha i} u_{\alpha i} + \sum_i b_i v_i \\ \tilde{\psi} &= \sum_{\alpha i} a^*_{\alpha i} \tilde{u}_{\alpha i} + \sum_i b^*_i \tilde{v}_i\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

なる形に展開出来る。但し $a_{\alpha i}$, b_i 等は

$$\left.\begin{aligned}a_{\alpha i} a^*_{\beta j} + a^*_{\beta j} a_{\alpha i} &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \\ a_{\alpha i} a_{\beta j} + a_{\beta j} a_{\alpha i} &= a^*_{\alpha i} a^*_{\beta j} + a^*_{\beta j} a^*_{\alpha i} = 0\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_i b_j^* + b_j^* b_i = \delta_{ij} \\ b_i b_j + b_j b_i = 0 \qquad a_{\alpha i} b_j^* + b_j^* a_{\alpha i} = 0 \end{array}\right\} \quad (70)'$$

等の交換関係を満足する演算子で、

$$n_{\alpha i} = a^*_{\alpha i} a_{\alpha i} \qquad n_i = b_i^* b_i \qquad (71)$$

~~等はいづれも~~の固有値~~(0又は1)~~はいづれも0及び1で、夫々~~α分子~~α番目の分子の中でi番目の状態にある電子の数及びi番目の状態にある自由電子の数を表はしてゐる。

(69)を(57)の初めの方の式に代入すると、電荷密度は

$$\sigma = \sigma_b + \sigma_f + \sigma_{bf} \qquad (72)$$

なる三つの部分に分れる。但し

$$\sigma_b \equiv -e\Big\{ \sum_{\alpha i} n_{\alpha i} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha i}) + \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} a^*_{\alpha i} a_{\alpha j} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha j}) + \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{i,j} a^*_{\alpha i} a_{\beta j} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\beta j}) \Big\}$$

$$\sigma_f \equiv -e\Big\{ \sum_i n_i (\tilde{v}_i v_i) + \sum_{i \neq j} b_i^* b_j (\tilde{v}_i v_j) \Big\} \qquad (73)$$

$$\cancel{\sigma_{fb} \equiv}$$

$$\sigma_{bf} \equiv -e \sum_{\alpha i} \sum_j \Big\{ a^*_{\alpha i} b_j (\tilde{u}_{\alpha i} v_j) + b_j^* a_{\alpha i} (\tilde{v}_i u_{\alpha i}) \Big\}$$

である。これを(60)に代入すると遅延ポテンシャル φ_r も亦

$$\varphi_r = \varphi_b + \varphi_f + \varphi_{bf} \qquad (74)$$

なる三部分に分れる。但し

合への擴張には特別な困難は伴はなかつた。所が遷子力學に於ては，次の如き新しい問題が發生する。即ち外部電磁場が定常的な場合には，媒質中の各電子は原子核乃至は内部軌道に束縛された電子による靜電場及び外部電磁場の作用の下に夫々一定のエネルギーの定常狀態に落着いてゐると考へてよい。これに反して時間的に變化する外部電磁場が作用する場合には，各電子は一つの定常狀態に止ることが出來ず，輻射を放出，或は吸收しつゝ，異なる狀態間の轉移を繰返すであらう。かゝる場合に對しても，前節までに行はれたと~~全く同じ~~同様な議論が~~進め~~並行して進め得るためには，~~§3で述べたKlein(4)やHeisenberg(5)の方法よりもむしろ~~攝動論に於ける定常的方法の延長である所のSommerfeldの方法(8)を採用するのが最も都合がよい。それは勿論，§3で述べたKlein(4)やHeisenberg(5)の攝動論的方法と本質的には同じものである。

今 ν なる振動數で x 方向に進む平面波を外部電磁場として考

へ、その偏りの方向を y 方向とすれば、電子に働く電磁場の(ベクトル)ポテンシャルは

$$\left.\begin{aligned} a_{0y} &= a_0 \cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ a_{0x} &= a_{0z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

と取れる。これを Dirac の波動方程式(54)に代入すると

$$\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\varphi_0 + i c\hbar\, \alpha\, \mathrm{grad} - \beta mc^2 \right\}\psi = e a_0 \alpha_y \cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)\psi \quad (83)$$

となる。但し φ_0 は電子に働く──原子核や内部電子による──静電場に対するスカラー・ポテンシャルを意味する。この式の右邊を擾動項と見做し、擾動論の第一近似で論ずることにすれば、ψ ~~は一般に~~ 及び $\tilde{\psi}$ は(60)と同様、一般に

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha i} a_{\alpha i} u'_{\alpha i} + \sum_i b_i v'_i \\ \tilde{\psi} &= \sum_{\alpha i} a^*_{\alpha i} \tilde{u}'_{\alpha i} + \sum_i b^*_i \tilde{v}'_i \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

なる形に書ける。但し $u'_{\alpha i}$, v'_i 等は夫々

$$\left.\begin{aligned} u'_{\alpha i} &\equiv u_{\alpha i} + \Big\{\sum_{j\neq i} c^{(1)}_{\alpha ij} u_{\alpha j} + \sum_j d^{(1)}_{\alpha ij} v_j\Big\} e^{-2\pi i\nu t} \\ &\quad + \Big\{\sum_{j\neq i} c^{(2)}_{\alpha ij} u_{\alpha j} + \sum_j d^{(2)}_{\alpha ij} v_j\Big\} e^{2\pi i\nu t} \\ v'_i &\equiv v_i + \Big\{\sum_{\alpha, j} e^{(1)}_{i\alpha j} u_{\alpha j} + \sum_{j\neq i} f^{(1)}_{ij} v_j\Big\} e^{-2\pi i\nu t} \\ &\quad + \Big\{\sum_{\alpha, j} e^{(2)}_{i\alpha j} u_{\alpha j} + \sum_{j\neq i} f^{(2)}_{ij} v_j\Big\} e^{2\pi i\nu t} \end{aligned}\right\} \quad (85)$$

等を意味してゐる。(85)を(84)に代入すると

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha i} a'_{\alpha i} u_{\alpha i} + \sum_i b_i v_i \\ \tilde{\psi} &= \sum_{\alpha i} a'^{*}_{\alpha i} \tilde{u}_{\alpha i} + \sum_i b'^{*}_i \tilde{v}_i \end{aligned}\right\} \quad (84)'$$

とも書ける。但し

$$\left.\begin{aligned} a'_{\alpha i} &\equiv a_{\alpha i} + \Big\{\sum_{j\neq i} c^{(1)}_{\alpha j i} a_{\alpha j} + \sum_j e^{(1)}_{j\alpha i} b_j\Big\} e^{-2\pi i\nu t} \\ &\quad + \Big\{\sum_{\alpha, j} c^{(2)}_{\alpha j i} a_{\alpha j} + \sum_j e^{(2)}_{j\alpha i} b_j\Big\} e^{2\pi i\nu t} \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

$$b'_i \equiv b_i + \Big\{\sum_j d^{(1)}_{\alpha ji} a_{\alpha j} + \sum_{j\neq i} f^{(1)}_{ji} b_j\Big\} e^{-2\pi i\nu t} + \Big\{\sum_j d^{(2)}_{\alpha ji} a_{\alpha j} + \sum_{j\neq i} f^{(2)}_{ji} b_j\Big\} e^{2\pi i\nu t}$$

である。尚(85), (86)の右辺の $c^{(1)}_{\alpha ij}$, $d^{(1)}_{\alpha ij}$ 等はいづれも複素常数を係数とする四行四列の行列を~~意味する~~表はす。(84)は形に於ては(60)の展開と似てゐるが、その係数である $a'_{\alpha i}$ 等の演算子は、最早(61)の如き簡単な交換関係を満さない。ことを注意せねばならぬ。

そこで(84)'を(58)に代入すると、先づ電荷密度は

$$\sigma = \sigma'_b + \sigma'_f + \sigma_{bf} \qquad (87)$$

なる三部分に分けられる。但し

$$\sigma'_b \equiv -e\Big\{\sum_{\alpha i} a'^*_{\alpha i} a'_{\alpha i} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha i}) + \sum_\alpha \sum_{i\neq j} a'^*_{\alpha i} a'_{\alpha j} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\alpha j}) + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{ij} a'^*_{\alpha i} a'_{\beta j} (\tilde{u}_{\alpha i} u_{\beta j})\Big\}$$

$$\sigma'_f \equiv -e\Big\{\sum_i b'^*_i b'_i (\tilde{v}_i v_i) + \sum_{i\neq j} b'^*_i b'_j (\tilde{v}_i v_j)\Big\}$$

$$\sigma'_{bf} \equiv -e\sum_{\alpha i}\sum_j \Big\{a'^*_{\alpha i} b'_j (\tilde{u}_{\alpha i} v_j) + b'^*_j a'_{\alpha i} (\tilde{v}_i u_{\alpha i})\Big\} \qquad (87)'$$