

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

YHAL

N43

HANDY-NOTE

c032-040

Introduction

N43

電氣的乃至磁氣的と稱せしる現象は非常に多岐多岐に亘つて居る。

その中、最も古くから知られて居る現象、(これは決して字餘の現象ではない) 例へばエボナイト棒と絹布と摩擦して、これが小さな紙片をひきつけること、電池の兩極を針金で Galvanometer に結ぶと、これがふたつといふ様な現象は、共に帯電されたエボナイト棒と紙片、電流の流れたる針金と coil と Galva の磁石といふ様な離れた物体相互の間には力が働いて、これによつて、紙片や磁石が動かされること、同じく説明出来る。

ついで複雑な交流の場合に於て是れより電流の通るつて居る coil と磁石、又は coil 同士の間には所謂電磁的の力が働くこと説明出来る。

つまり、普通の静電氣 (Electrostatics) 静磁氣 (Magnetostatics) 直流 (steady current) 交流 (alternating current) に関する現象は大体、この様な遠く離れた物体の間には力が働くこと、を以て説明出来る。

かゝる考への上で述べられた理論を遠隔作用の理論 (Theory of Action at Distance, Fernwirkungs theorie) と稱す。

所が μ と ν の間に電線が流れる電流の流り方が非常に速くすると、遠く離れた他の電線に働く力は有限の時間まで遅れる。即ち作用の遅延 (Retardation of Action, Retardierung der Wirkung) を考慮せねばならぬ。

かゝる retardation を考慮すると理論は相當に複雑になる。

その上離れた物体の間に作用する力はその間に何様な媒質如何によつて変つてゐる。例へばそれが一気圧の空氣であるか、真空であるか或は又水の中を流つてゐる。そしてこの媒質自身の中にも色々な電磁的な現象がおこり、これが却つて重要性を持つ場合がある。

例へば絶縁体か、光とかの傳播物とか、或は、medium 内の電磁的な力が周期的に振動する現象に他ならぬ。

これに我々は見方をかへて、むしろ かの medium
内の電磁力の空間的分布とか、時間的の
変化とかの研究に重点を置くべきだ。Faraday
Maxwell 等によつて發展せしめられた所謂
力の場の理論 Field Theory, Feldtheorie
を採用する方が適當であるといふことである。
この場へ方々から各点の力の場の変化が
おこれる。その附近の力の場と変化がおこり
この変化は 假令と遠方へ及んで行くこと考へ
らる。即ち任意の点附近の極小の範囲を
力の場の同一性から一定の関数からして空間
全体の、又極小の範囲内の力の場の同一
性から一定の関数からして、空間的
時間的に 広い範囲の力の場が定ま
つてくる。この意味で近接作用の理論
Nahewirkungstheorie と稱す。
従つて Field Theory の側から見て、先
にしては、先づ任意の点附近の電磁力の場
の同一性の同一性から一般の理論、
即ち所謂 Field Equation 導き出さ
れて、後の特殊な場合に適用して得られ
る結果を誘導し、實際と比較してみよ
うが自然の通りである。

しかし、
Maxwell の Field Equation の方が Newton の Equation of Motion の如く、両子でなく、又 近似的に成り立つ。

所て 前者の如く Fermi 作用理論
と 後者の如く述べておられる Nahewirkungstheorie とは 別物でなく、後者のほうが
異なり、一方から他を導き出さう。

又 後者の方が 物理学の現象を systematic
に論ずるに役立つところがある。

このため、両者の関係を適用しうる 近似的
な Coulomb は Fermi 作用理論
の一方の方向から導き出さう。 familiar
Coulomb の法則、Biot-Savart
の法則等である。

以上を以て、前者の Fermi 作用理論
の familiar な法則から導き出し、これを
Nahewirkungstheorie の一方の方向から
導き出す。

一般に、前者の如く、後者の如く Maxwell
の Field Equation を用いる。

以上を以て、前者の Fermi 作用理論
の familiar な法則から導き出し、これを
Nahewirkungstheorie の一方の方向から
導き出す。

Faraday の Induction の法則 と 電磁誘起
の法則。

これら二つの法則は等価である。

参考文献。

Maxwell : Electricity and Magnetism
Vol I, II, 1873.

Abraham : Theorie der Elektrizität
Bd I, II.

Abraham-Becker : Bd I, 1952 (12)

Becker : Bd II, 1954 ()

Jean : The Mathematical Theory of
Electricity and Magnetism 1925

Heaviside : Electromagnetic Theory
Vol I, 1893 ; II, 1899 ; III, 1912.

Frenkel : Lehrbuch der Elektrodynamik
Bd I, 1926 ; Bd II, 1928

J. J. Thomson : Electricity and Magnetism.

Planck : Einführung in die Theorie
der Elektrizität und Magnetismus (12)

Lorentz : Die Maxwell'sche Theorie (英訳)

Poincaré :

Schaefer : Einführung in die theor. Physik
Bd. III, 1.

Livens ;

Moullin ;

Poor ;

Müller-Pouillet's ; Lehrbuch der Physik
IV. 1, 1932

Geiger ; Handbuch der Physik

Graetz ; Handbuch der Elektrizität und
Magnetismus

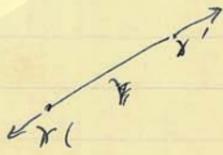
Chapter I, General Laws
of Electromagnetic Field. 4

©2022 YHAL YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

§1. Coulomb's Law

Fernwirkungstheorieの第一の法則はCoulombの法則である。これは isotropic, homogeneous) とする medium 中におかれた、二つの帯電された物体の間の力である。その距離に比して物体の大きさが negligible である point charge とする、その場合、力の向の(中心)距離の二乗に逆比例する。~~その方向は距離を結ぶ方向に~~ 引力があつたり、斥力があつたりする。(同種の charge は斥力、異種のは引力) 比例の定数は $1/4\pi\epsilon_0$ である。一方の帯電の量を加減すれば、力も同様に増減する。故に各の帯電の量を charge e, e' の積に比例すると考えられる。

~~これは charge の def. であるから、~~
この場合、力の向は距離を結ぶ方向に
引力があつたり、斥力があつたりする。



electric charge の意味は、
物に与つて電荷を結ぶ、2の意味は
charge の量を表す。

1) e, e' の charge が共に $x(x, y, z)$
 $x'(x', y', z')$ の点にあるもの、~~間~~ e
の作用力は

$$F = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{ee'(r-r')}{|r-r'|^3}$$

つまり、 e' の作用力は

$$F' = -F = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{ee'(r'-r)}{|r-r'|^3}$$

但し、charge 数 = 符号あり、この一方を正、
一方を負の値とする。
 ϵ は比誘電率の帯数であり、これは medium
によって異なる、この帯数も各 medium
によって異なる。他の medium の
帯数地帯を気取れば、他の medium の
帯数地帯を気取って、この constant の
とり方によって、地方 charge の帯数が
定まる。

真空帯数 $\epsilon = 1$ である。真空
charge の帯数を定める場合、これは
electrostatic unit とする。
真空帯数の $\epsilon > 1$ の medium の帯数として $\epsilon > 1$
である、これは ^{medium の} dielectric constant とする。

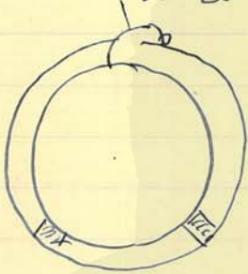
同じ ϵ の charge が帯数の帯数におかれた時
帯数の力が弱くなる。この charge 帯数の
帯数を帯数とする。帯数は帯数の
帯数である。

例として帯数を帯数とする。帯数の帯数の charge
帯数とする。

~~カズヤ~~

Coulomb の Torsion balance によってこの
inverse square の法則を見出し、この二つから、
Cavendish の実験による万有引力定数の値が求まり、
Maxwell は Cavendish の実験を特許として、この
如き装置を作った。

互に insulate された
二つの concentric
cylinder spherical
shell の外方のものを、



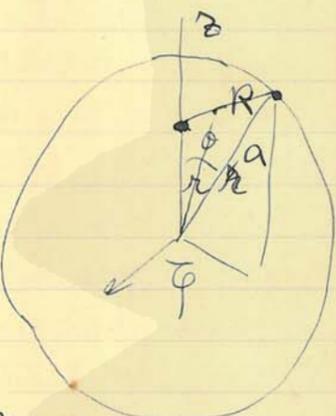
空にあり、外方に charge
し、内方に charge をつけ、空を隔てて
外方の sphere を discharge する。

各々の内方の sphere の charge が残ったか
を電圧計で検出して、
外に、charge をつけたら、これがわかった。

この二つの球の内方の charge が残ったか
を charge の間を測る力によって、
両方の球の間に電圧を測る。

外方の sphere を charge して、これを内方と接続し
て、この charge は内方の球から
外方の sphere の charge によって生じた力の場を

内外の sphere の両方とも σ が一定、 σ は r に依らず
 したがって force の potential は内外 equal である。
 内外の sphere の charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。内外の sphere の
 電位は σ が一定ならば内外共に σ の constant である。
 内外の sphere の charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。内外の sphere の
 charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。内外の sphere の charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。



内外の charge の分布は均一である。
 force の potential は内外 equal である。
 内外の sphere の charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。内外の sphere の
 charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。内外の sphere の charge は $4\pi r^2 \sigma$ である。

$V(r) = \phi(r) \phi(r)$

内外の charge の分布は均一である。
 charge の force の potential は $V = \int \phi(R) \sigma d\Omega \sin\theta d\theta d\phi$

内外の charge の分布は均一である。
 $R^2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$
 $\sigma = 2\pi\sigma \int_0^\pi \phi(R) a^2 \sin\theta d\theta$

$$RdR = a r \sin\theta d\theta$$

$$V = \frac{2\pi\sigma a}{r} \int_{R=a-r}^{a+r} \phi(R) R dR$$

上式より、 σV が r の関数であると仮定して、
 continuity condition より、

等しいから

$$V = \frac{2\pi\sigma a}{r} \{f(a+r) - f(a-r)\}$$

また、 $f(r) = \int \phi(r) r dr$

より $\frac{dV}{dr} = 0$ と仮定する。 V independent of r

より、 r が消えるように $f(a+r) - f(a-r) = \text{const}$ と仮定する。
 r independent と仮定する。

$$f(a+r) - f(a-r) = A + B r$$

より const と仮定する

$$f'(a+r) = f'(a-r)$$

より $f''(r) = \text{const}$, $f(r) = A + B r + C r^2$

より $A + B r + C r^2 = \int \phi(r) r dr$

$$B + 2C r = \phi(r) r$$

$$\phi(r) = \frac{B}{r} + 2C$$

すなわち、 e' による force は e' による field による。
 すなわち、 e' による force は e' による field による。

$$F' = e' E(r')$$

$$E(r') = \frac{1}{\epsilon} \frac{e(r'-r)}{|r-r'|^3}$$

これは r 点に e による charge がある点 r' 点の electric field である。
 すなわち、 r' 点に unit charge がある点 r 点の electric field である。
 この medium がある点 r 点の electric field である。
 電媒質。すなわち、

$$D = \epsilon E \quad (I, 1)$$

この vector ϵ は r 点の electric field である。
 independent である。

これは electric displacement である。
 上の ϵ は isotropic である。medium は homogeneous, isotropic である。
 electric disp. は ϵ である。medium は homogeneous である。

今 r 点に closed surface S がある。
 r 点の electric field E 及び displacement D

ある点 \$P\$ 上の \$df\$ の surface element
 を \$V_n df\$ とする。この \$df\$ の flux は

$$V_n df$$

である。これは \$V_n df\$ の flux の
 velocity \$V_n\$ である。

この \$V_n df\$ を \$df\$ の electric displacement の flux とする。
 \$Q\$ の point charge を \$Q\$ の closed surface \$S\$ の electric displacement の total flux は charge \$Q\$ の flux と等しい。

Flux charge \$Q\$ の surface \$S\$ の flux
 は \$Q\$ である。

$$\oint_S d\omega = 0$$

$$\oint_S D_n df = 0$$

charge の point \$Q\$ がある
 場合、\$Q\$ の flux は \$Q\$ である。

これは、open surface \$S\$ の flux は \$Q\$ である。

charge の \$Q\$ の flux は \$Q\$ である。
 \$Q\$ の charge の force は \$Q\$ の charge の
 force の vector sum である。これは electric

field \vec{E} , electric displacement \vec{D}
 and charge ρ and el. field, elect. disp.
 a vector sum $\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$

use a closed surface S and
 a el. disp. a total flux is $\oint \vec{D} \cdot d\vec{f}$ charge
 use el. disp. a total flux a sum ρ
 and. $\oint \vec{D} \cdot d\vec{f}$ surface S and
 charge a sum Q_{enc} is $4\pi e$.

~~$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi e$~~
 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi e$

e : surface S total charge,
 outward normal $d\vec{f}$ is $d\vec{f}$
 its vector $d\vec{f}$ is $d\vec{f}$

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi e, (I, 2)$

is it a point charge or
 charge or distributed
 in the medium or homog.
 isotropic is it a charge
 is it a charge or distributed
 charge or distributed (I, 2).

この電荷 ρ に対して,

$$e = \iiint_V \rho \, dv.$$

但し、積分の S は ∂V であり V は電荷を含む領域である。

Maxwell の Gauss の方程式 (I, 2) を用いて

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dv.$$

$$\therefore \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \iiint_V \rho \, dv$$

この (I, 2) の volume V に関する ∂V は任意である。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (\text{I, 3})$$

これは \mathbf{D} の方程式である。

すなわち、charge density ρ と el. displ. \mathbf{D} の関係は - 媒質中の \mathbf{D} が ρ によって決まる。

但し、媒質の medium の boundary での $\operatorname{div} \mathbf{D}$ の関係は ρ によって決まる。これは ρ の関係から導かれる。(I, 2) の積分式を deduce すればわかる。

medium of homogeneous ϵ_{ij} and μ_{ij} is a
 場が均一な場合。

又 isotropic in ϵ_{ij} and μ_{ij} . electric disp.
 電場が均一な場合。電場分散。
 電場分散。この場合 ϵ_{ij} の成分は
 一般に ϵ_{ij} の成分は ϵ_{ij} の成分は
 number ϵ_{ij} tensor, dielectric const

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

この場合

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$

etc

(I, 4)

この場合 ϵ_{ij} の成分は ϵ_{ij} の成分は

次に magnetic pole の間には force F 又
 磁極の二重の間に force F がある。

即ち m_1, m_2 の磁極を $m_1, m_2 \rightarrow$ magnetic
 pole として 2 極の間に force F の大小は

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

である。(吸引力)

μ の中身の medium によって F の大小が
 変わる。真空中では $\mu = 1$ である。
 この μ の磁極の間に electromagnetic
 static unit といい、

他の medium に対しては μ の値が他の
 medium に対して $\mu > 1$ 又は $\mu < 1$ の
 値になる。この μ を medium の
 magnetic permeability といい、

$\mu < 1$ の場合、medium は diamagnetic
 substance

$\mu > 1$: paramagnetic

電磁気学では CGS 系、elect. st. unit

磁気学では CGS 系、mag. st. unit

を用いるときは absolute unit

(Gauss' system) といい、今では CGS 系が
 標準である。

-59

57. Coulomb の法則からして、磁場のための
粒子の磁気力に似た force を与える。これは、 \vec{H} と
 \vec{M} とから成る。磁場の場は \vec{H} と \vec{M} の
和である。

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (I, 5)$$

この vector を定義する。これは magnetic
induction と呼ばれる。磁場の場
と関係する。すべての closed surfaces に対する
mag. induction の total flux をとる
とこれは 4π の \vec{M} の内積である。磁場の場
は 4π の \vec{M} である。

つまり

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{f} = 4\pi \vec{M} \quad (I, 6)$$

これは、磁場の場の \vec{M} の分布
に 4π の \vec{M} の内積である。磁場の場は、
 \vec{M} の分布に 4π の \vec{M} の内積である。

$$\text{div } \vec{B} = 4\pi \rho_m \quad (I, 7)$$

磁場の場の \vec{M} の分布に 4π の \vec{M} の内積である。

mediums homogeneous isotropic
i.e. paramag. or diamagnetic の場合

見えてくる。また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とする。

これより、(I, 6), (I, 7) から $\int_V \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (I, 8)

$$\int_V \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (I, 8)$$

閉曲面 S 内に、電荷点はない。

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (I, 9)$$

閉曲面 S 内に電荷点がないことを示す。

しかし、最初から磁石がないものとして、Coulomb の法則) の \mathbf{E} の \mathbf{E} とする。これから (I, 8), (I, 9) の式を導くことが可能になる。これは、 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。

(I, 8), (I, 9) が成立することを示す。これは、 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。29

磁石 \mathbf{B} として $\text{magnetostatic unit}$ とし、意味も $\mu = 1$ とする。また、 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。

また、磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。

磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。

磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる。

(磁石 \mathbf{B} の \mathbf{B} とは異なる)

電磁場の単位系

電磁場の単位系として作ることの dimension を加し、その大いさ作 3×10^{10} cm/sec

である、その電磁場の単位系は光の速度の 1/300000000 である。

さらに、及第に (H の単位系として $\sqrt{10}$)

C = 1 の単位系に電流の単位系を定めると、その電磁場の単位系は、

(electromagnetic unit) である。電磁場の単位系は、電磁場の単位系である。

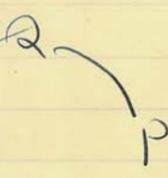
さて、上の Biot-Savart の法則は、 \vec{H} を電流の方向の unit vector とし、

から、電流の閉回路を流す導線 C' に電流を流すことによって生じた field を、

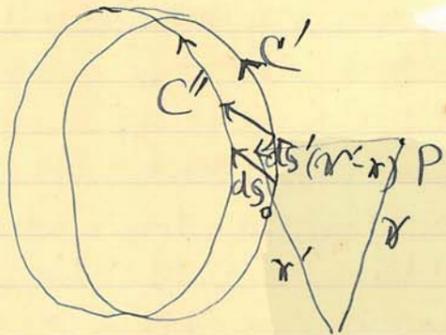
求めることができる。 magnetic

今、電流の curve PQ を取り、電磁場の unit vector の univilinear integral

$\int_P^Q H ds$



the boundary of the surface ...
 is the closed curve ...
 subtended ...
 solid angle ...
 unique ...



the curve ... ds' ...
 surface ...
 solid angle ...

normal ...

line element ds' ...

ds, ds' ... surface element ...

$$\{ds, ds'\} \cos \theta$$

solid angle ...

$$\frac{\{ds, ds'\} (r-r')}{|r-r'|^3} = \frac{ds' (r-r')}{|r-r'|^3}$$

$$= \frac{ds' (r-r')}{|r-r'|^3} ds$$

この面を S とし、その境界を C とする。
 又 C を closed curve C' とし、 C' の向きを C の向きと同じにする。

$$\text{net } d\Omega = + \int_{C'} \frac{[ds' (r-r')]}{|r-r'|^3} ds_0$$

したがって、 C' の circuit を J の電流
 の向きと同じ $P(r)$ 点における磁場は
 Biot-Savart の式で与えられる。

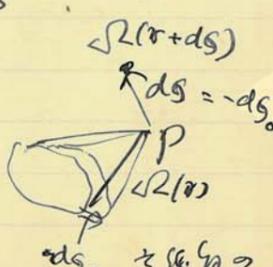
$$H = \frac{J}{c} \int_{C'} \frac{[ds' (r-r')]}{|r-r'|^3}$$

したがって、

$$\oint_C d\Omega = - H ds_0$$

したがって、

もし P を ds_0 支節から J の向きに移動すれば
 $d\Omega$ は C' を $-ds_0$ 支節から移動する
 の向きに C' の向きを反対にする。
 $\frac{J}{c} (\Omega(r+ds) - \Omega(r)) = \int_{C'} \frac{[ds' (r-r')]}{|r-r'|^3}$
 $= - H(ds_0) = + H ds_0$



したがって、 C の closed curve C' となる。

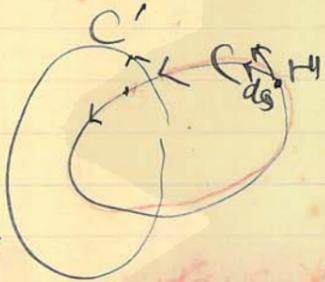
curvilinear integral

$$\int_C H \cdot ds$$



$\oint_C H \cdot ds$ の意味は、この閉曲線 C とその内部の領域 Ω の関係を示している。

別の見方として、 C と電流の環流回路 C' とが互いに交差する領域 Ω の場合、 C は C' の境界となる。



C を反時計回りに、電流の環流回路 C' を時計回りに進むと、 C は C' の境界となる。この場合、 C は C' の surface の表側 (外側) を進むことになる。この場合、 C と C' の向きは一致する。この場合、 C は C' の surface の裏側 (内側) を進むことになる。この場合、 C と C' の向きは逆になる。

$$\therefore \int_C H \cdot ds = 4\pi I$$

これは、 C が C' の surface を表側 (外側) を進むとき、 C と C' の向きは一致する。この場合、 C は C' の surface の裏側 (内側) を進むことになる。この場合、 C と C' の向きは逆になる。

電流の環流回路 C' (電流の環流回路 C' の向きは時計回り)

closed circuit or curve C

この二つの和を \mathcal{H} とする。この和は代数和である。

閉曲線 C 上の閉曲線 C の境界とある曲面 S を横切る (向きを正) 電流 J の総和 \mathcal{H} である。

$$\int_C \mathcal{H} ds = \frac{4\pi J}{c} \quad (I, 10)$$

電流が空間に連続的に分布しているとき、電流密度 \mathcal{C} とする。閉曲面 S 上の閉曲線 C を取り、この閉曲線 C を横切る電流 J の総和 \mathcal{H} を求める。

$$J = \iint_S \mathcal{C} d\mathbf{f}$$

ここで、 S は C の境界とある曲面 S の法線 \mathbf{n} を持つ。閉曲線 C を横切る電流 J の総和 \mathcal{H} を求める。

これは Stokes の定理である。

$$\int_C \mathcal{H} ds = \iint_S \text{curl} \mathcal{H} d\mathbf{f}$$

$$\text{curl} \int_C \mathcal{H} ds = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathcal{C} d\mathbf{f} \quad (I, 11)$$

C_f boundary

∴ 電流の surface S 上

$$\iint_S \text{curl } H \, d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \iint_S C \, d\mathbf{f}$$

これは電流。 volume V の取方 $\nabla \times E = -\dot{C}$ の
 か S の取方 $\nabla \times E = -\dot{C}$ である。 $\nabla \times \dot{C} = -\dot{C}$
 である。
medium of unit permeability

$$\text{curl } H = \frac{4\pi}{c} C \quad (I, 12)$$

この関係が成り立つのは S 上。

これは

$$\text{div } C = 0 \quad (I, 13)$$

これは V 上である。

これは current C , source & sink である。
 である。

これは total current J の surface
 S の取方 independent である。これは
 である。

即ち、

$$\iint_S C \, d\mathbf{f} = \iint_{S'} C \, d\mathbf{f}'$$

これは S, S' は volume V 上の closed surface $S+S'$

である。

$$\iint_{S+S'} C \, d\mathbf{f} = 0$$

Gauss の定理

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{C} \, dV = 0.$$

領域 V の境界 $S+S'$ を含む region.

C : 電場

$S+S'$: 電荷

V : 電体

\therefore 電場 \mathbf{C} は $\operatorname{div} \mathbf{C} = 0$ の closed surface S を満たす。

$$\iint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (I, 14)$$

又 $\operatorname{div} \mathbf{C} = 0$

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0.$$

電場 \mathbf{C} は $\operatorname{div} \mathbf{C} = 0$ を満たす。

以上は steady current によって生じた電場について (I, 10) 乃至 (I, 12) 節の内容。電場 \mathbf{C} と電流 \mathbf{j} の関係は $\mathbf{C} = \nabla \phi - \nabla \times \mathbf{A}$ のように表すことができる。電場と磁場の関係は Maxwell の方程式で表すことができる。

§3. Displacement Current

電場 \mathbf{C} と電流 \mathbf{j} の関係は $\mathbf{C} = \nabla \phi - \nabla \times \mathbf{A}$ のように表すことができる。電場と磁場の関係は Maxwell の方程式で表すことができる。

5.11-10

Conservation of charge,

この電路の回路図をみると、何処かにある
 some circuit 中の condenser の入った
 部分の導線は流れる電流が close
 されている。 \therefore conduction current
 condenser の電圧 source の
 sink となる。

任意の closed surface を空間の何処かに
 作ると、その surface 内に、
 charge の運動と電場の変化を I
 とする。

$$\iint_S I \, d\mathbf{f}$$

これは、
 空間の任意の region V
 中の charge の total
 変化

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

したがって、
 $\iint_S I \, d\mathbf{f} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$ (I, 15)
 Gauss の定理を用いて

$$\iiint_V \text{div } I \cdot dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

この任意の region V 内 \mathcal{H} での電荷の連続性
 方程式 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{or } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I, 16})$$

これは Maxwell の式。

2nd continuity の式, charge の conservation の式 である。

Eq (I, 1) より,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho.$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

つまり, したがって,

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

つまり,

これは 'total current' の連続性である。つまり
 conduction current \mathbf{J} の場合。

これは "displacement current"

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ と \mathbf{J} の resultant current

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I, 17})$$

を ρ と \mathbf{j} の source , sink と \mathbf{j} の
流入と流出 (I, 12) (I, 13) と矛盾しない
ことである。

電磁場の time と space の displacement
 $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ による disp による displacement

current of distribute \mathbf{j} と \mathbf{j} の displacement
による。

よって、(I, 12) の式は

$$\text{curl } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I}, 18)$$

と書きかえらる。

電磁場の 第一の基礎方程式
erste Hauptgleichung である。

この medium が電気の conductor である
とすると、Ohm の法則が 満たされる範囲に
おいて conduction current の \mathbf{j} は
電場の \mathbf{E} に $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E}$ である。

$$\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E}$$

κ は conductivity の constant である。
この medium の resistivity を \mathbf{I} とすると、 \mathbf{I} は \mathbf{j} の

for df is $\propto \mathbb{I} df$ the electric field \mathbb{E} is
the same. \mathbb{E} is the same everywhere.

$$\therefore \mathbb{I} df = \kappa \mathbb{E}$$

for \mathbb{E} : field of a charge q in a medium with permittivity ϵ

$$\kappa = \sigma df \quad \sigma: \text{const}$$

also.

$$\mathbb{I} = \sigma \mathbb{E} \quad (\text{I, 19})$$

also. σ : specific conductivity of
conductor of a system σ depends on constant
value. σ is the same for all conductors.
insulator (dielectrics) $\sigma = 0$.

insulator (dielectrics) $\sigma = 0$.

$$\sigma = 0 \quad \therefore \mathbb{I} = 0.$$

Gauss's system with σ is time of the dimension
of σ . ($\epsilon/\mathbb{I} = \sigma \frac{\mathbb{E}}{R}$)

Cu is a good conductor with σ of the order
 10^{19} sec^{-1} .

is a homogeneous isotropic medium with

$$\mathbb{E} = \frac{\mathbb{D}}{\epsilon}$$

also.

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{D}$$

$$= \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho$$

$$\therefore T = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \quad (> 0) \quad \tau \ll \tau_c,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{T}$$

$$\rho(t) = e^{-\frac{t}{T}} \rho(0)$$

T : time of relaxation

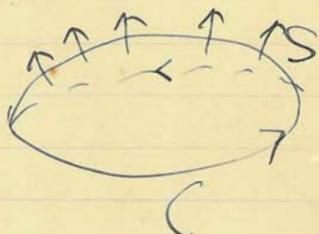
τ_c (or), conducting medium ρ charge density の緩和時間 time τ と τ_c の関係
 $\tau \ll \tau_c$ のとき, $\sigma \rightarrow \infty$ insulator のとき distribute of ρ は τ の τ_c 程度,
 - ρ は τ の時間 ρ charge density of 0 になる $\tau \ll \tau_c$ のとき, $\tau \ll \tau_c$.

conductivity of 媒質 medium ρ charge density の緩和時間 τ と τ_c の関係 $\tau \ll \tau_c$ のとき,
 $\tau \ll \tau_c$ の homogeneous isotropic medium の場合 ρ charge density の boundary surface での緩和時間 τ と τ_c の関係 $\tau \ll \tau_c$.

§4. Faraday's Law (of Induction)

Faraday の 現象の記述は、磁場の
 中におかれる導体回路に誘起電流を生ずる
 誘起起電力、induced electromotive
 force は C の boundary とする閉曲面 surface
 S を横切る magnetic induction の
 total flux の時間的変化の割合に等しい。
 例として、flux は E の向きと current の向きが同じ方向に
 (例として、§2 の $\nabla \times B$ の magnetic induction B は source of sink と見做す
 場合、surface S の total flux は surface S
 の向きに independent である)
 閉回路に electromotive force \mathcal{E} を生ずる
 導体回路に C を取り、 $\mathcal{E} = \oint_C E \cdot ds$
 とする。

$$\oint_C E \cdot ds$$



then

$$\oint_C E \cdot ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot df \quad (I, H)$$

この系. c は光の速度 $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec
の system での c である.

この系が静止している場合

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\mathbf{f} \quad (\text{I, 21})$$

Stokes の定理より,

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\mathbf{f}$$

この系 C の任意の S に対して, S の向き
は indep. である. 各点において

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{I, 22})$$

が成り立つのである.

これを電磁場の第二基本方程式
Zweite Hauptgleichung といふ.

電磁場が定常 (この系は c に比べて遅く動く) の
場合式 (I, 19) を適用せねばならぬ.

§5. Maxwell's Field Equations

以上二章に於ける電磁場の方程式を一まとりの関係式を以てする。

先づ電場の方程式を以てす。

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \iiint_V \rho \, dv \quad (I, 2)$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (I, 8)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} \quad (I, 10)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{f}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (I, 11)$$

$$\iint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dv \quad (I, 15)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f} \quad (I, 21)$$

以上二章に於ける電磁場の方程式を一まとりの関係式を以てする。
 先づ電場の方程式を以てす。
 In a medium of continuous matter

結晶の電磁気学

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{I} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{I, 23})$$

4つの方程式

電場の偏微分方程式の Maxwell の field equation と呼ぶ。

電場の4個から電荷の conservation 式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I} = 0 \quad (\text{I, 24})$$

が導かれる。

medium of homogeneous isotropic の場合、elect. displ. & el. field の間

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon &: \text{const.} \\ \mu &: \text{const.} \end{aligned}$$

媒質の性質から成る。ただし ϵ, μ は媒質の性質で

媒質の性質は 8 個の独立なパラメータで、indep. unknown 数は 6 個ある。

この場合、電場、電流、 $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho$ 、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

の 4 個の方程式から、電場の 2 成分、電流の 1 成分の

方程式を得る。残りの 2 成分の方程式は、電場の

方程式から導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi \rho) = \operatorname{curl} (\operatorname{curl} \mathbf{H})$$

$$-4\pi(\operatorname{div} \mathbf{I} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0$$

$$\text{又 } \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{P}_0) = 0$$

この時、 \mathbf{I} の形式は決まる。

次に、他の条件を満足する solution を
 求め、その内 \mathbf{I} の解を探る。 $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$
 $\operatorname{div} \mathbf{P}_0 = 0$ を満足する \mathbf{I} の解を探る。 \mathbf{I} と ρ
~~homog. and~~ Maxwell の eq の solution である。
 ρ の distribution

† 真空中の conductor である。

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I, 28})$$

この場合、未知数は \mathbf{E} である。
 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \rho$ の \mathbf{I} を reduce する。
 真空中の isotropic medium である。

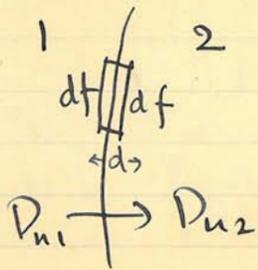
‡ Maxwell の field equations は medium である
 homogeneous isotropic である。 \mathbf{I} の場合
 場 \mathbf{E} と \mathbf{H} は continuous である。 ρ は
 点電荷に集中する。

以上の場合、 ϵ, μ, σ は場 \mathbf{E} の
 関数である。 \mathbf{I} は scalar である。 tensor
 function である。 \mathbf{I} は \mathbf{E} の関数である。

境界面上の medium の boundary 上の electric field の変化の計算に役立つ関係式は field quantity の derivative を用いて (I, 27) 式. この boundary 上の電荷密度を ω とし、これを integral form で表すこともできる。

dielectric loss

§6. Boundary Conditions (I, 27) 式. boundary 上の電荷密度 ω を用いて region を apply する



$$D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\omega d$$

ここで ω : surface density of charge

$$\omega = \lim_{d \rightarrow 0} \rho \cdot d$$

この electric displacement の normal component に関する

$$D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\omega \quad (I, 27)$$

この関係式は、boundary 上の電荷密度 ω を用いて $4\pi\omega$ の charge である。

式 (I, 8) から

$$D_{n2} - D_{n1} = 0 \quad (I, 28)$$

つまり、magnetic induction の normal component の boundary 上では continuous である。

式 (I, 10) を boundary 上で $d \rightarrow 0$ の極限で、
 \vec{D} と \vec{E} の有限性を仮定して、
 上の式に apply すると、



$$H_{t1} ds - H_{t2} ds$$

$$= 0,$$

(\because boundary 上では \vec{E}, \vec{D} は finite continuous である。また \vec{E} は finite であるから、
 この極限で $d \rightarrow 0$ となる。))

つまり、磁場の tangential component も continuous である。

式 (I, 21) から

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (I, 29)$$

問. (I, 21) から 電場の tangential component t conti.

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (I, 30)$$

「問.」

問. 10.

boundary of two media of medium of diel. const
 ϵ_1, ϵ_2 permeability μ_1, μ_2 ϵ_1, μ_1 ϵ_2, μ_2

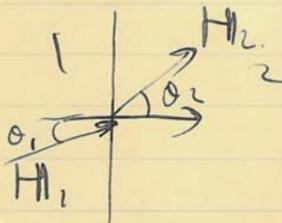
(I, 27), (I, 28) を用いて

$$\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = 4\pi w \quad (I, 27)'$$

$$\mu_2 H_{t2} - \mu_1 H_{t1} = 0 \quad (I, 28)'$$

「問.」

ϵ_1, μ_1 ϵ_2, μ_2 vector
 領域 1 → 2 の normal
 とする。 θ_1, θ_2 とする。



$$H_{n1} = H_1 \cos \theta_1$$

$$H_{n2} = H_2 \cos \theta_2$$

$$H_{t1} = H_1 \sin \theta_1$$

$$H_{t2} = H_2 \sin \theta_2$$

∴ (I, 28') (I, 29) より

$$\mu_2 H_2 \cos \theta_2 = \mu_1 H_1 \cos \theta_1$$

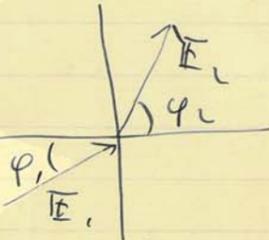
$$H_2 \sin \theta_2 = H_1 \sin \theta_1$$

$$\therefore \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} \quad (\text{I, 31})$$

この boundary surface における magnetic field の連続性。 磁界の接線成分は permeability の比で連続。

また surface charge の連続性。

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\tan \phi_2}{\tan \phi_1} \quad (\text{I, 32})$$



磁界の連続性。

この perm. (or diel. const) の違いは med. から来る medium \rightarrow λ と。 磁界 (or 電界) の tangential の連続性。 (図) を入る。

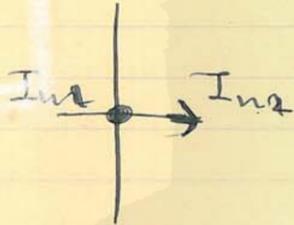
また charge の continuity の式 (I, 15) から (I, 2) の $\epsilon + \mu$ の boundary condition を得る。 この elect. displacement の連続性。

そのとあるようにして。

$$\textcircled{B} I_{n2} - I_{n1} = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (\text{I, 32})$$

これは、P.S. boundary of two media の電磁場の
 の normal comp の ϵ の surface density
 の time rate of change $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ である。

これは two media の
 conductivity σ_1, σ_2
 である。



$$I_{n1} = \sigma_1 E_{n1}, \quad I_{n2} = \sigma_2 E_{n2}$$

$$\therefore \sigma_2 E_{n2} - \sigma_1 E_{n1} = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (\text{I, 32}')$$

これ (I, 27)' と combine すると 2つのは
 一致する。

これは boundary surface へ
 charge が flow するから

$$\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = 0$$

これは、

$$\text{P.S. へ } \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \neq \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ である}$$

pp5 $\sigma_2 E_{n2} - \sigma_1 E_{n1} \neq 0$
 $-\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$

∴ time \times charge boundary surface
 in change of $\epsilon \rightarrow \epsilon < \epsilon$. $\epsilon \rightarrow \epsilon$

電場 $\sigma_2 E_{n2} - \sigma_1 E_{n1}$ 電荷 ϵ の変化による。

pp6 $\sigma_2 E_{n2} - \sigma_1 E_{n1} \quad I_{n1} = I_{n2}$

or $\frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

∴ charge $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$

pp8. boundary surface $\epsilon \rightarrow \epsilon$ charge ϵ
 (電場 $\epsilon < \epsilon$). ϵ の変化による charge ϵ

$$4\pi \omega_2 = \epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1}$$

$$= \left(\frac{\epsilon_2 \sigma_1}{\sigma_2} - \epsilon_1 \right) E_{n1}$$

or $= \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) I_{n1}$

電場の ϵ の変化による。電場の ϵ の変化による energy の変化による。

pp9 ϵ Dielectric loss ϵ の変化による。
 (電場の ϵ の変化による energy の変化による)

pp10 dielectric constant ϵ_1, ϵ_2 の変化による

= 板の間に V の電位を apply & apply σ .



$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$$

electrostatics of \vec{E} in \vec{r} in a plate \vec{r} is field at unit vectors

$$\epsilon_1 E_1 a_1 + E_2 a_2 = U$$

boundary \vec{r} ^{charge on surface} $\epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = 4\pi e U$

$$\therefore E_1 = \frac{U}{a_1 + \frac{\epsilon_1 a_2}{\epsilon_2}}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2}$$

for σ , $J_2 - J_1 = - \frac{de}{dt}$

$$\frac{(\sigma_2 \epsilon_1 - \sigma_1 \epsilon_2)}{(\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2)} \dot{U} = - \frac{de}{dt}$$

for σ

$$\sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1 = - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} - \epsilon_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} \right)$$

$$\sigma_2 \left(\frac{U}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} E_1 \right) - \sigma_1 E_1$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\epsilon_2 \left(-\frac{a_1}{a_2} \frac{dE_1}{dt} \right) - \epsilon_1 \frac{dE_1}{dt} \right)$$

2. 2. 2. } E_1, E_2 を消去して

$$(\sigma_2 \epsilon_1 - \sigma_1 \epsilon_2) E_1 = -\epsilon_2 \frac{\partial \omega}{\partial t} - 4\pi \sigma_2 \omega$$

$$(\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1) E_2 = 4\pi \sigma_1 \omega + \epsilon_1 \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$\frac{4\pi \sigma_2 \omega + \epsilon_2 \frac{\partial \omega}{\partial t}}{(\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1)} a_1 + \frac{4\pi \sigma_1 \omega + \epsilon_1 \frac{\partial \omega}{\partial t}}{(\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1)} a_2 = U$$

$$\frac{(\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2) \frac{\partial \omega}{\partial t} + 4\pi \omega (\sigma_2 a_1 + \sigma_1 a_2)}{\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1} = (\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1) U$$

$$\omega = \frac{U}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} \frac{\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1}{4\pi (\sigma_2 a_1 + \sigma_1 a_2)} U$$

$$+ C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$T = \frac{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2}{4\pi (\sigma_2 a_1 + \sigma_1 a_2)}$$

$t \rightarrow \infty$ ならば ω は

$$\omega = \frac{\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1}{4\pi (\sigma_2 a_1 + \sigma_1 a_2)} U \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

T 中 σ_1 or σ_2 が大きい程 $\epsilon < \epsilon_0$, surface charge の値が文字 ϵ max. value になる

通す. capacity \Rightarrow dielectric loss の
 ための増大です.

$\therefore t=0$ かつ $\epsilon_1 < \epsilon_2$

$$E_1 E_1 = + \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{U}{\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2}$$

逆の場合. $t \rightarrow \infty$

$$E_1 E_1 = + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} U$$

$\epsilon_1 > \epsilon_2$. $\sigma_2 \epsilon_2$

以上の電磁場と同じ一様な流が流れていく。
 之と同じ. energy, mechanical force
 等の同じ性質がある. 是 Matic field になる
 と考えれば、その結果は。

図1.12. boundary condition
+ electric field & magnetic field in
the region.

is an electrostatic field & magnetostatic
field in the region. The fields are
- static fields & are super-
position in the region.

is electrostatic potential field in
homogeneous isotropic medium. The
charge density ρ is zero. The
 $\text{div } \mathbf{E}_1 = 0$ $\text{curl } \mathbf{E}_1 = 0$

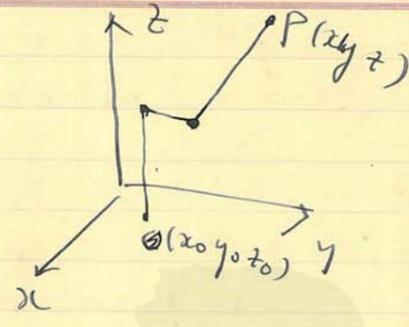
is

is electrostatic field in
the region. $\mathbf{E}_1 = -\text{grad } \phi$. The
scalar function ϕ is
electrostatic potential in the region.

$$-\phi_1 = \int_{x_0}^x E_{1x}(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y E_{1y}(x_0, y, z) dy \\ + \int_{z_0}^z E_{1z}(x_0, y_0, z) dz + \phi_0 \quad \phi_0 = \text{const}$$

$\text{div } \mathbf{E} = 0$
 ϵ_1 の媒質に於て
 $\Delta \phi_1 = 0$

すなわち ϕ_1 は medium 1 の
 ϵ_1 の Laplace の
 equation を満足せしむ
 べきである。



また ϕ_2 は homogeneous isotropic
 medium ϵ_2 の Laplace の charge density
 0 を満足し、potential ϕ_2 は ϵ_2 である。
 $\Delta \phi_2 = 0$

ϵ_1 と ϵ_2 の境界面を S とする。

1, 2 の boundary surface S 上の $(I, 2)$ である。

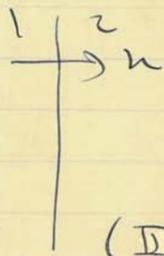
$$\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = 4\pi\omega \quad (I, 3)$$

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (I, 4)$$

ϵ_1 と ϵ_2 の境界面を S とする。

1 → 2 の surface
 normal の方向の $\frac{\partial}{\partial n}$
 である。(I, 3) である。

$$-\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} + \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 4\pi\omega \quad (I, 3')$$



$\phi = \text{const}$ 的 surface 是 equipotential surface
 是 conductor 的 surface 是 equipotential surface
 surface 的 $\nabla \phi$ 是 normal 的 tangent plane 是 $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$

©2022 VHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

surface 的 $\nabla \phi$ 是 normal 的 tangent plane 是 $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda} \quad (\text{II}, 4')$$

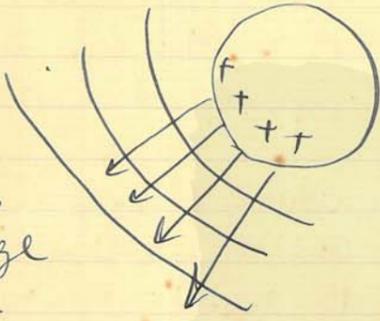
是 conductor 的 surface $\phi_2 = \phi_1$ 的 surface 的
 是 conductor 的 surface 的 value 是 ϕ_1 的
 是 boundary surface 的 potential 的
 是 constant 的. 是 conductor 的 medium
 的 contact potential difference 是 $\phi_1 - \phi_2$.
 是 conductor 的 surface 的.

medium 2 of conductor 的 field 是
 $\sigma_2 \neq 0$. 是 conductor 的 field 是 $\mathbf{E}_2 = 0$.
 $\therefore \phi_2 = \text{const}$. 是 boundary 的 $\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda} = 0$. $\therefore \phi_1 = \text{const}$.
 是 conductor 的 field 是 $\mathbf{E}_1 = 0$.
 是 conductor 的 field 是 $\mathbf{E}_1 = 0$.
 vector 的 $\phi_1 = \text{const}$ 的 surface 是 $\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n} = 0$
 是 $\therefore d\phi_1 = 0$ 的 $\nabla \phi_1 \cdot d\mathbf{s} = 0$.)

又 (III, 3), (II, 5) 是,

$\sim \epsilon_1 E_n = 4\pi\omega$ or $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 4\pi\omega$
 故に surface charge 密度 ω の存在は ϕ の存在。
 field は $\omega < \infty$, equipotential surface は
 存在する。

前章で述べた如く
 conductor の内部には
 charge は存在しないから
 conductor の total charge
 e は conductor
 surface S 上に存在する。
 surface charge ω の存在は ω である。



$$e = \iint_S \omega df = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \phi_1}{\partial n} df$$

$$= -\frac{\epsilon_1}{4\pi} \iint_S E_n df$$

$$= \frac{\epsilon_1}{4\pi} \iint_S E_n df$$

(従って、 E の方向が外、 ω は ω 、 ω は ω の方向に
 存在する)

dielectric \rightarrow

$\epsilon > 1$. \rightarrow medium 中の conductor の存在
 の場合. electrostatic potential
 は medium 中の ϵ による

$$\Delta \phi = 0$$

この条件を満足し. conductor の surface
 上 $\phi = \text{const}$ の条件を満足せねば
 ならぬ

medium が infinity まで ϵ の場合
 ならば $\phi = 0$ の条件を λ と
 potential は unique である. ($\frac{\partial \phi}{\partial n} < \frac{c}{\epsilon}$)

(\therefore conductor と ϵ を ϵ として ϵ の
 $\epsilon \rightarrow \infty$ の region ならば $\phi = 0$ の ϕ の
 ための surface integral を $\int \epsilon \text{ grad } \phi$

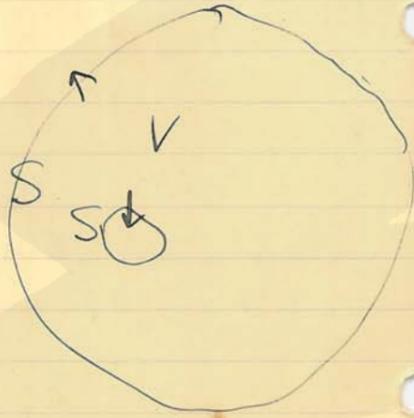
$$\int \epsilon \text{ grad } \phi \, d\mathbf{f}$$

Gauss の $\int \epsilon \text{ grad } \phi \, d\mathbf{f}$

$$= \int \text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi) \, dV$$

$$= \int (\text{grad } \phi)^2 \, dV$$

$$+ \int \phi \Delta \phi \, dV$$



2. ϕ は \vec{r} の関数 $\phi = \phi(\vec{r})$ である。左辺は
 左辺は $\nabla^2 \phi = 0$ (conductor の内部) である。
 (右辺は $\rho = 0$)
 右辺は $\rho = 0$ である。右辺は $\rho = 0$ である。
 $\nabla^2 \phi = 0$ である。 $\phi = \text{const.}$ である。
 conductor 上では $\phi = 0$ である。 ϕ は V である。
 (右辺は $\rho = 0$ である。)

例 2. ϕ は conductor の surface 上では
 constant value ϕ_0 である。
 例 2. conductor の total charge

$$e = \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau = -\frac{\epsilon}{4\pi} \iint_S E d\tau$$

例 2 ϕ_0 である。 2.9.12

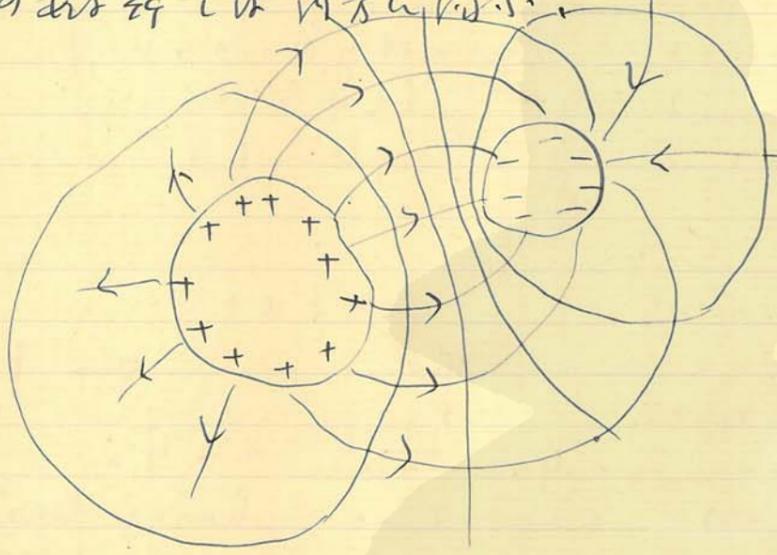
$$C = \frac{e}{\phi_0}$$

C は conductor の capacity である。
 conductor の potential ϕ_0
 unit potential である。
 charge e である。

C の dimension $[C] = [e]/[\phi_0]$ である。

Capacity は conductor の形状に依る。

Fieldの換付は同様の。 電位 V
Field 中の equipotential surface 電位
は V 。 conductor の表面は $V = 0$
Field は電位 V の。 又 positive charge
の電位 V は $V = \frac{q}{r}$ 。 negative
charge の電位 V は $V = -\frac{q}{r}$ 。



$$C = \frac{R^2}{4\delta} (1+k)$$

©2022 YHAI, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Examples.

(i) a gap between $\epsilon \sim \epsilon_1$ & $\epsilon_2 \Rightarrow$
 a plane of charge is conductor
 中間は diel. const ϵ for
 dielectrics.

平面電荷は x -axis
 対称性 y, z 方向
 field は x 方向
 Laplace の式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\phi = bx + c$$

$$x=0 : \phi = \phi_0 \quad x=a : \phi = \phi_a$$

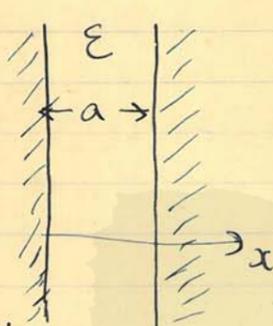
$$\phi = \frac{\phi_a - \phi_0}{a} x + \phi_0$$

したがって $x=0$ の平面の charge density は

$$\omega_0 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\phi_a - \phi_0}{a}$$

$$\omega_a = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\phi_a - \phi_0}{a}$$

したがって両平面には反対の符号の charge
 charge of $\pm \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\phi_a - \phi_0}{a}$ がある。



Circular plate condenser

$$C = \frac{R^2}{4\delta} + \frac{R}{4\pi} \left(\log \frac{8R}{\delta} - 1 \right)$$

両方の平板が有限であるとき、その dimension は半径 a であり、これを考慮に入れなければならない。以上の式は、円板の中心から距離 r 離れた点での電位を計算する。このとき、平板の面積を F とすると、その total charge の長さは Q である。

$$Q = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{(V_a - V_0) F}{a}$$

これは、これは両板の potential difference $(V_a - V_0)$ である。このとき、

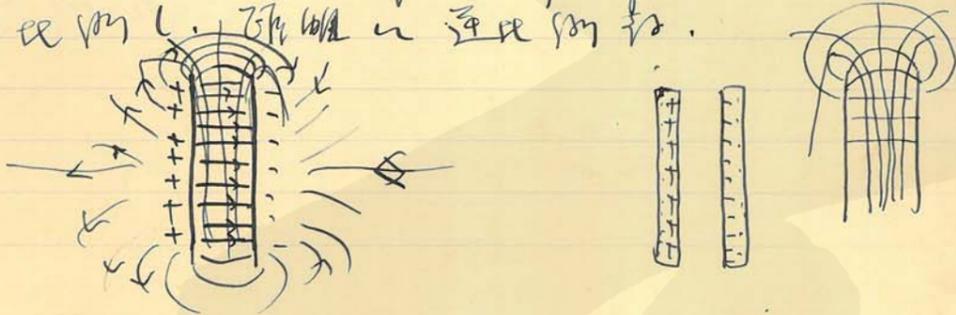
$$C = \frac{Q}{V_a - V_0}$$

これは parallel plate condenser の capacity と等しい。

これは、これは

$$C \approx \frac{\epsilon F}{4\pi a}$$

これは、これは、capacity は plate の面積に比例し、半径 a に逆比例する。



(ii) 二つの半径 R_1, R_2 の concentric cylinder の間の field を求めよ

→ cylindrical coord. を用い、 z -axis の方向に電場を求めよ。

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta$$

r と θ の field は z 方向の電場を求めよ。

Laplace の方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

はずす。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

一般解は

$$\phi = C_1 \log r + C_2$$

$$r = R_1 \quad \phi = \phi_1$$

$$r = R_2 \quad \phi = \phi_2$$

境界条件を代入する。

$$\phi = \frac{(\phi_1 - \phi_2) \log r - \phi_1 \log R_2 + \phi_2 \log R_1}{\log R_1 - \log R_2}$$

$$= \frac{\phi_1 \log \frac{R_2}{r} + \phi_2 \log \frac{r}{R_1}}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

とす。

また、field は $-\frac{C_1}{r}$ の形をとる。

内円場と外円場の field の差は、 $r \rightarrow 0$ の limit での field は $-\frac{C_1}{r}$ の形をとる。これは、 $r \rightarrow 0$ の limit での field は $-\frac{C_1}{r}$ の形をとる。これは、 $r \rightarrow 0$ の limit での field は $-\frac{C_1}{r}$ の形をとる。これは、 $r \rightarrow 0$ の limit での field は $-\frac{C_1}{r}$ の形をとる。

また、両円場間の charge は、

$$W_1 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\phi_1/r_1 - \phi_2/r_2}{\log \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{\epsilon}{4\pi}$$

$$W_2 = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \frac{-\phi_1/r_1 + \phi_2/r_2}{\log \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{\epsilon}{4\pi}$$

とす。

今 cylinders の長さを有限とすると、この本屋の $r_2 - r_1$ の形をとる。これは、 $r_2 - r_1$ の形をとる。これは、 $r_2 - r_1$ の形をとる。これは、 $r_2 - r_1$ の形をとる。

近頃の電場は均一で、径 r_1 の円筒面を考えた

$$e_1 = 2\pi r_1 h \omega_1 = \frac{\epsilon h}{z} \frac{q_1 - q_2}{\log r_2/r_1}$$

$$= -2\pi r_2 h \omega_2 = -e_2$$

to change or ~~the~~ r_2 \rightarrow r_1 の場合

r_2 \rightarrow cylindrical condenser の capacity は r_1 \rightarrow r_2 の場合

$$C = \frac{\epsilon h}{z} \frac{1}{\log r_2/r_1}$$

r_2 \rightarrow r_1 の場合

$r_2/r_1 \rightarrow \infty$ の場合、 C は r_1 のみに依存する

(iii) 次のような spherical conductor

の電場は $r > R$ の場合 $E = \frac{Q}{4\pi r^2}$ である

電場の原点を $r=0$ の spherical coord. (r, θ, ϕ) とする、Laplace

の eq. は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

$$+\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

∵ s.s. symmetry ∴ $\vec{E} \sim r$, potential φ r のみ
に depend するから.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

$$\varphi = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

∵ 無限大 r での potential 0 であるから, $C_2 = 0$
球の半径 r_1 , 球上の potential φ_1

$$\varphi_1 = \frac{C_1}{r_1} \Rightarrow C_1 = \varphi_1 r_1$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 r_1}{r}$$

球上の total charge Q は

$$4\pi \epsilon_0 r^2 E_r = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

∴ sphere の capacity は

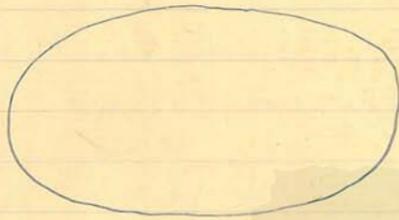
$$C = 4\pi \epsilon_0 r_1$$

球の半径 r_1 に比例する。

(iv) 2-ellipsoid の capacity と 4-ellipsoid,
 ellipse の 焦点の性質.

軸長 a, b, c と 焦点
 の距離 $2c$

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0$$



2-ellipsoid, $a < b < c < b < a$.

B 焦点の一点を原点とする confocal
 coordinate と 扱ふ. u, v, w .

任意点の座標を (x, y, z) とす.

$$F(u) = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0$$

を満足する u は real u の 3 根

\exists 順序あり. z と $\lambda > \mu > \nu$

とす.

$$+\infty > \lambda \geq -c^2 \geq \mu \geq -b^2 \geq \nu \geq -a^2$$

2-ellipsoid.

$$\begin{aligned} (\because & -\infty < u < -a^2 & -1 > F > -\infty \\ & -a^2 < \dots < -b^2 & +\infty > F > -\infty \\ & -b^2 < \dots < -c^2 & +\infty > \dots > -\infty \\ & -c^2 < \dots < \infty & +\infty > \dots > -1) \end{aligned}$$

$$2x = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

~~$+ b^2 z^2 - c^2 \lambda = \text{const}$~~ : Ellipsoid
 $\mu = \text{const}$: Hyperboloid of one sheet
 $\nu = \text{const}$: ... of two sheet

この場合 (x, y, z) は (λ, μ, ν) の -1 次
 の変数。
 したがって (λ, μ, ν) の -1 次変数 (x, y, z) の
 値は (λ, μ, ν) の値に依存する。

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$$

$$= \frac{-(u - \lambda)(u - \mu)(u - \nu)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}$$

この identity から u を消去する。 $u + a^2$ と $u + b^2$

$$u = -a^2 \frac{x^2}{a^2 + \lambda} < x^2$$

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \lambda) \dots}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

この場合 (x, y, z) は (λ, μ, ν) の -1 次変数である。
 したがって (λ, μ, ν) の値に依存する。 P.S. 8 (4) の
 場合 (λ, μ, ν) の値に依存する。

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\Lambda^2}$$

©2020 YHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$\Delta \varphi = \Lambda M N \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\Lambda}{M N} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{M}{N \Lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{N}{\Lambda M} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \right\}$$

例 1. $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2} \Delta_\lambda}{\sqrt{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}}$

$$M = \frac{\sqrt{2} \Delta_\mu}{\sqrt{(\mu - \lambda)(\lambda - \mu)(\mu - \nu)}}$$

$$N = \frac{\sqrt{2} \Delta_\nu}{\sqrt{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}}$$

$$\Delta_\lambda = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

$$\Delta_\mu = \sqrt{-(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}$$

$$\Delta_\nu = \sqrt{(a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu)}$$

$$\Delta \varphi = \frac{4 \Delta_\lambda \Delta_\mu \Delta_\nu}{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ (\mu - \nu) \frac{\Delta_\lambda}{\Delta_\mu \Delta_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (\lambda - \nu) \frac{\Delta_\mu}{\Delta_\lambda \Delta_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ (\lambda - \mu) \frac{\Delta_\nu}{\Delta_\lambda \Delta_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} \right\}$$

例 2. $\Delta \varphi = 0$

$$\mu (\mu - \nu) \Delta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + (\lambda - \nu) \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\Delta_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + (\lambda - \mu) \Delta_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\Delta_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0$$

is particular solution λ, μ, ν depends on t, τ, r .

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = 0.$$

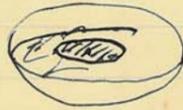
$$\therefore \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{A}{\Delta_\lambda} \\ \varphi = A \int \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda} + B$$

is $\lambda = \omega r t$ ellipsoid or cofocal to ellipsoid or equipotential surface $\omega r t$.

$$\lambda = -c^2 r^2 + \omega r t \quad z=0 \quad r \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2}} = 1$$

is $\lambda = c^2 r^2$ elliptic disc $\omega r t$.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\lambda} - 1 = 0$$



is $\lambda = 0$ sphere $\omega r t$. $z=0$ ellipsoid $\perp r$ $\varphi = \varphi_0$

$r \rightarrow$ infinity $\rho \rightarrow \lambda = r \rightarrow \infty$ $\varphi = 0$ $\ln r$ $\ln \infty$
 $\sim \ln$

$$\varphi = A \int_{r_0 - c}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = 0 + B = 0$$

~~$$A \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = B =$$~~

$$A \int_{-c}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} + B = \varphi_0$$

20512.

$$A \left(\int_{-c}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} - \int_{-c}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \right) = \varphi_0$$

$$A = \frac{-\varphi_0}{\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}, \quad B = \frac{+\varphi_0 \int_{-c}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}{\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}$$

> 0

$$\therefore \varphi = \frac{-\varphi_0}{\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}} \left\{ \int_{-c}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} - \int_{-c}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \right\}$$

$$= \frac{\varphi_0 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}{\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_0^2}{b^2+\lambda} + \frac{z_0^2}{c^2+\lambda} = 1 \quad \frac{x_0 x}{a^2+\lambda} + \frac{y}{b^2+\lambda} + \frac{z}{c^2+\lambda} = 1$$

$$\frac{(x_0+\Delta x)^2}{a^2+\lambda} + \frac{(y_0+\Delta y)^2}{b^2+\lambda} + \dots = 1 \quad \frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\lambda} + \dots = 0$$

\Rightarrow ①. Tangent plane is $lx + my + nz = p$
 ②. (l, m, n) is tangent plane's normal & direction cosine
 ③. Tangent plane is $-x$

$$\frac{x_0 x}{a^2+\lambda} + \frac{y_0 y}{b^2+\lambda} + \frac{z_0 z}{c^2+\lambda} = 1$$

$$\frac{x_0}{(a^2+\lambda)l} = \frac{y_0}{(b^2+\lambda)m} = \frac{z_0}{(c^2+\lambda)n} = \frac{1}{p}$$

$$p^2 = \frac{(a^2+\lambda)l^2}{p^2} + \dots$$

④. $(\lambda+d\lambda, u, v)$ is tangent plane's direction cosine & (l, m, n)
 ⑤. Tangent plane's distance is p
 $\frac{dp}{d\lambda} = \dots$

$$dp = \frac{d\lambda}{\Lambda}$$

$$2p dp = \frac{d\lambda}{\Lambda}$$

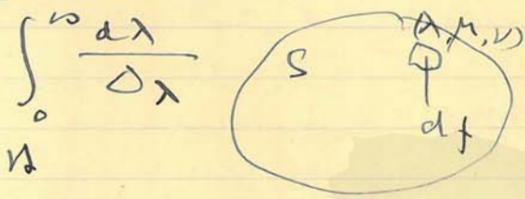
$$\Lambda = 2p$$

$$\omega = \frac{4\pi p}{2\pi abc} \int_0^\infty \frac{p}{\Lambda} d\lambda$$

\therefore limit
 $= \frac{z_0^2}{(a^2+\lambda)}$
 $= \frac{(a^2+\mu)(a^2\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$
 glo. u, v, w
 (λ, μ, ν) 's normal
 $(\lambda+d\lambda, \mu, \nu)$ is normal
 $(\lambda+d\lambda, \mu, \nu)$ is normal

半径 a, b, c ellipsoid の total charge は

$$e = \frac{2\epsilon_0 \varphi_0}{4\pi abc} \iint_S p \, df$$



従って $\iint_S p \, df$ は

ellipsoid の volume の $2/3$ である。
 $\therefore 4\pi abc$

$$\therefore e = \frac{2\epsilon_0 \varphi_0}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}}$$

$$\therefore C = \frac{e}{\varphi_0} = \frac{2}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

これは (capacity) としてよく知られている。

\therefore 電位 φ の定数 λ の項を $\sqrt{\lambda}$ と置き換えて

potential は

$$\varphi = \frac{\varphi_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}} = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}}$$

$c=0$: circular disc,

$$C = \frac{2a}{\pi},$$



(iii) $a > b = c$, $a^2 + \lambda = x^2$

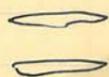
$$C = \frac{2 \int_a^\infty dx}{\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2 - a^2 + c^2)}} = \frac{2d}{\int_a^\infty \left(\frac{dx}{x+d} - \frac{dx}{x-d} \right)}$$

$$d = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$C = 2d / \log \frac{a+d}{a-d}$$

$c \ll a$ or $d \approx a$: circular wire

$$C = \frac{2a}{\log \frac{2a + \frac{c^2}{2a}}{\frac{c^2}{2a}}} = \frac{a}{\log \frac{2a}{c}}$$



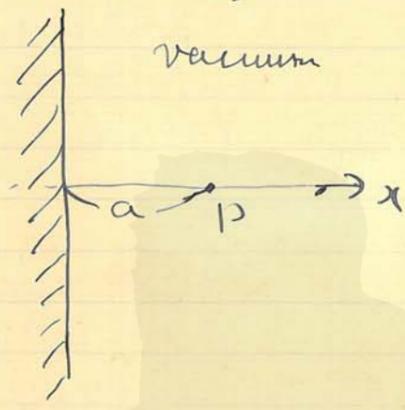
5月11日

§ 2. Electrostatic Induction

Simple Model of Dielectrics

$x=0$ is plane of
 conducting medium
 ϵ_1 .

$x=a, y=0, z=0$
 is point charge q 's
 name of field E
 is.



For $x > 0$ the potential
 is 0. conductor is at
 constant $\phi = 0$ is
 the solution.

total potential is

is the solution. P is image

$P' (-a, 0, 0)$ is $-q$ point charge

is the solution.

Frank-Mises
 例 2.2

$$\phi = C + \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}$$

is the solution, $C=0$.

is the solution is when $x=0$ is equipotential
 surface $\phi=0$ is the solution

for $x > 0$ the potential is a potential
of two charges.

is a conductor, so the electric
field is zero for $x < 0$.

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= e \left\{ \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

$$= -\frac{2ea}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}}$$

∴ surface charge density is

$$\omega = -\frac{1}{4\pi} \frac{2ea}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}}$$

$$y = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta$$

$$\omega = -\frac{ea}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

then induce the total charge

$$e' = -\frac{ea}{2\pi} \iint \frac{r dr d\theta}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ϕ_0

$$= -ea \frac{-1}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -e$$

もし e の point charge が $x=0$ にあると
 すると $x=0$ で $\phi=0$. $x > 0$ での ϕ は
 potential は $\phi > 0$ となり $x < 0$ での ϕ は
 $\phi < 0$. 導体面での charge が $+e$ である
 ことがわかる。

したがって $x=a$ には e の point charge
 が誘起される。導体面には $+e$ の charge
 $-e$ の charge が induce され、charge
 density は point charge 単位で $\pm \frac{e}{2a}$
 である。

$x > a$ での ϕ は charge distribution
 である。導体面での charge distribution
 が $x=a$ での ϕ に対して electrostatic
 induction による。

もし $x > a$ の ϕ が uniform field である
 ならば、その spherical conductor に対して
 半径 R の場合を考えると radius R ,
 field E が x -axis 上に ϕ が ϕ_0 である

この θ の r 依存性を決定する

これは ϕ の solution である

$$\phi = \frac{C_1}{r} + \frac{C_2 \cos \theta}{r^2}$$

と assume すると、これは $\Delta \phi = 0$ である

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

これは満たす。

また、 $r = r_1$ かつ $r = r_2$ の境界で満たす必要がある。

$$-E r_1 \cos \theta + \phi_0 + \frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2 \cos \theta}{r_1^2} = \phi_1$$

また θ の r 依存性を決定する必要がある

$$C_2 = E r_1^2 \quad C_1 = r_1 (\phi_1 - \phi_0)$$

$$\therefore \phi = -E r \cos \theta + \phi_0 + \frac{r_1 (\phi_1 - \phi_0)}{r} + \frac{E r_1^2 \cos \theta}{r^2}$$

$$r = r_2 \quad E r_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = E \cos \theta + \frac{r_1 (\phi_1 - \phi_0)}{r^2}$$

$$+ \frac{2E r_1^3 \cos\theta}{r^2}$$

故に 球面上の total charge は

$$e = -\frac{e}{4\pi} \int \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)_{r=r_1} r_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{e}{2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta (E r_1 \cos\theta + \frac{r_1(\phi_1 - \phi_0)}{r_1} + 2E r_1 \cos\theta)$$

$$= r_1 (\phi_1 - \phi_0)$$

従って, $\phi_0 = -\frac{e}{r_1} + \phi_1$

$$\phi = -E r \cos\theta + \phi_1 + \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1} + \frac{E r_1^3 \cos\theta}{r^2}$$

又、

$$\phi_1 = \phi_0$$

よって total charge $e=0$ となる
$$\phi = -E r \cos\theta + \phi_1 + \frac{E r_1^3 \cos\theta}{r^2}$$

電場の charge density は

$$\omega = + \frac{3}{4\pi} E \cos\theta$$

電場 $\sim 3 \cos\theta$

= 0 charge density は

は field の 方向

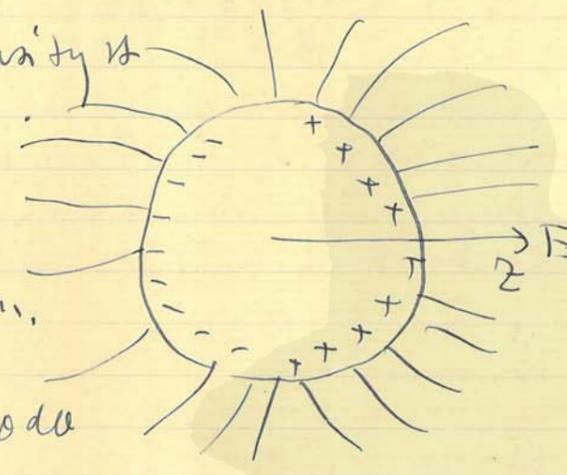
の 方向 子, 球

の 方向 球

の 方向 球

の density は 球

の 方向



$$\frac{3}{4\pi} E \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{4} R^2 E \quad \text{の charge を induce する}$$

この induced charge は sphere の radius の 2乗に比例する。(球の面積)
 其 potential の方は 球の radius の 2乗に比例する。(球の体積)

§3. Model Doublet Theory of Dielectric Medium.

今電位の中 外部の点電荷 q による
 conducting sphere of radius a 上の電荷は
 uniform に distributed して q となる。
 従い、外部の電場は $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ となる。
 外部の電場 \vec{E}_0 である。

この \vec{E}_0 による uniform field \vec{E}_0 を apply
 したとき \vec{E}_0 の sphere 中の induction による
 polarization \vec{P} による \vec{E}_0 の \vec{E} の \vec{E}_0 による field,
 potential は sphere の \vec{E}_0 による field potential
 $-\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \text{const}$

からなる。この \vec{E}_0 による sphere 中の \vec{E}_0 による
 電場は \vec{E}_0 である。sphere 中の
 電場は \vec{E}_0 である。sphere 中の
 sphere の \vec{E}_0 による \vec{E}_0 の negligible である
 である sphere の polarization の effect は
 外部の \vec{E}_0 による \vec{E}_0 である。この sphere の
 電場 \vec{E}_0 による polarization による potential は
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

この \vec{E}_0 による \vec{E}_0 - resultant potential
 は $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ である

$$\varphi = -Ez + \varphi_0 + \sum_{i=1}^n E r_0^3 \cos \theta_i$$

$$+ E r_0^3 \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_i}{r_i^2}$$

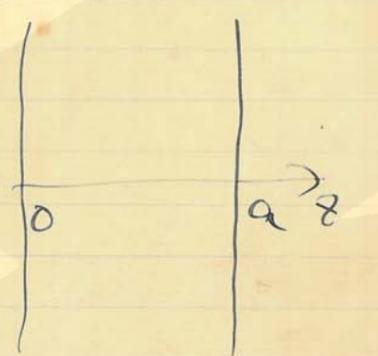
where r_0 is the radius of the sphere.

Let r_i be the radius vector of the i -th charge, θ_i is the angle between r_i and the z -axis.

Let the sphere be uniformly charged with density ρ .

$$\sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_i}{r_i^2} = \iiint \frac{\rho(x'y'z')(z-z')}{|r-r'|^3} dx'dy'dz'$$

A sphere of radius a is uniformly charged with density ρ . The volume is $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. The total charge is $Q = \rho V$.



The volume V of the sphere is $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

$$\therefore \rho = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{V_e}{V}$$

したがって、
 上の結果より、

$$\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{V_e}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a \frac{z-z'}{|r-r'|^3} dx' dy' dz'$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \iiint_{r'' < z} \frac{z-z'}{|r-r'|^3} dx' dy' dz'$$

$$\frac{z-z'}{|r-r'|^3} = \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{|r-r'|} \right)$$

$$= \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{V_e}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \right) dx' dy'$$

$$= \frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{V_e}{V} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{r''=0}^b \left\{ \frac{1}{\sqrt{r''^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r''^2 + z^2}} \right\} r'' dr''$$

$$= \frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{V_e}{V} \left\{ \sqrt{b^2 + (z-a)^2} - (z-a) - \sqrt{b^2 + z^2} + z \right\}_{b \rightarrow \infty}$$

$$= \frac{3}{\epsilon_0} \frac{V_e}{V} \left(z - \frac{a}{2} \right) \quad \text{for } z > 0 < z < a$$

$$\varphi = \varphi_1 - E z \left(1 - \frac{3V_e}{V}\right) + \text{const.}$$

for $0 < z < a$

then field E in sphere of free charges is
 $E' = \left(1 - \frac{3V_e}{V}\right) E$ in reduced state $z < a$.

五/廿四日

3 dielectric medium

↑ of sphere of radius a is

conducting sphere ϵ

in z to z . dielectric

medium of field E

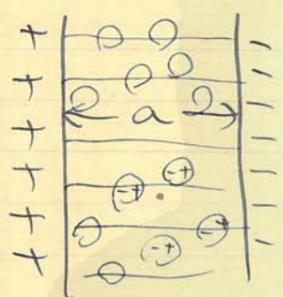
field E is $\left(1 - \frac{3V_e}{V}\right) E$ in $z < a$

is electric displacement D in field E is ϵE in $z < a$. electric displacement is charge distribution with z macroscopic

then, $D = E = \frac{E'}{\left(1 - \frac{3V_e}{V}\right)}$

then, medium of dielectric const.

$$\epsilon = \frac{1}{1 - \frac{3V_e}{V}}$$



some He-gas etc. 10²⁰ atoms
 normal state etc.

$$\rho = \frac{6.0 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^3} = 0.27 \times 10^{20}$$

$$\therefore \frac{3Ve}{V} = 4\pi r_0^3 \rho \approx 3.2 \times 10^{20} \cdot r_0^3$$

$$\epsilon = 1.00074 = 1 + 0.74 \times 10^{-4}$$

$$\therefore r_0^3 \approx \frac{0.74 \times 10^{-4}}{3.2 \times 10^{20}} = 0.23 \times 10^{-24}$$

$$\therefore r_0 \approx 0.6 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

etc. 1/2 He-atom 9th 1/2 quantum
 "He atom" 10⁻⁸ cm order
 $r_0 = \frac{a_n}{2} = 0.6 \times 10^{-8} \text{ cm} \cdot \frac{2}{2}$

etc. simple gas model 527
 dielectric constant 529
 etc. etc.

liquid, solid 529 dense etc. etc.
 simple etc. etc. etc. etc. etc.
 etc. etc. etc. etc. etc. etc.
 etc. etc. etc. etc. etc. etc.

$|S| \ll r \ll \lambda$. e^+ & e^- finite vector
 converge \pm (in limit $r \ll \lambda$) e^+ , $-e^-$ is
 doublet (dipole) $\vec{p} \approx q \vec{r}$.
 m is moment \vec{p} .

for doublet use potential ϕ

$$\phi = \frac{m \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{m \cos \theta'}{r^2}$$

$$= -m \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= m \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \begin{matrix} r \cos \theta' \\ -e^+ / r, e^- \end{matrix}$$

is the uniform field \vec{E} inside sphere
 use field \vec{E} is doublet use field
 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$.

$$m = E r^3$$

in dielectric medium \vec{E} is (of) \vec{E}_0 is the
 doublet \vec{p} is $\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} V$.

§4.3 System of Conductors

→ a dielectric medium of permittivity ϵ contains conductors in various shapes. Each conductor is connected to a terminal.

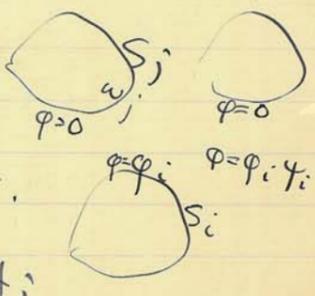
Let us consider a system of conductors in a dielectric medium. Let the potential of the i -th conductor be ϕ_i and the potential of the earth be 0. The potential of the medium is ϕ . The charge density on the j -th conductor is ω_j .

$$\omega_j^{(i)} = - \frac{\epsilon \phi_i}{4\pi} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j}$$

∴ total charge on S_j is $e_j^{(i)} = - \frac{\epsilon \phi_i}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} df_j$

Let $\frac{\partial}{\partial n_j}$ be the outward normal derivative on S_j .

$$C_{ji} = - \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} df_j$$



$$= - \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_{S_j} \text{grad}_j \psi_i d\mathbf{f}_j$$

~~これは~~ ϵ が ∞ である

$$e_j^{(1)} = \sum_i C_{ji} \varphi_i$$

$\epsilon \gg 1$ $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi_i(x, y, z)$

φ_i : const.

この function を ϵ として、この medium の
 各導線 Laplace の式を満足し、 i 番目の
 導線に φ_i

この i の j 番目の導線面上の charge
 density は

$$w_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon \varphi_i}{4\pi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_j}$$

$\therefore j$ 番目の導線の total charge は

$$e_j = \sum_{i=1}^n C_{ji} \varphi_i$$

$$= \sum_{i=1}^n e_j^{(i)}$$

これは j 番目の導線に induce された charge

取 n 個の導体. を共に $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ の potential での n 個の charge e_1, e_2, \dots, e_n となる. $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ の linear fun である. その係数, 求める.

C_{ji}
 は i 番目の導体 ϕ_i を unit potential u_i , 他を 0 -potential u_j として, j 番目の導体 ϕ_j の charge Q_j である. この場合 $i=j$ の時は, C_{ii} は i 番目の導体の charge Q_i である. C_{ii} を Capacity coefficient といい, $i \neq j$ の時は, 他 $n-1$ 個の導体 ϕ_k に induce した charge Q_j である. C_{ij} を induction coefficient

この場合, $C_{ji} = C_{ij}$

の 関係が成り立つ.

$\therefore \psi_i, \psi_j$ は $\Delta \psi = 0$ を満たす Green の theorem を apply すると,

$$\sum_{k=1}^n \iint_{S_k} (\psi_j \text{grad } \psi_i - \psi_i \text{grad } \psi_j) \cdot d\mathbf{f}_k = 0$$

設 ψ_j は j 番の conductor 上の電位 S_j 上
対して、 ϵ_0 の電束 Q_j の電束、 S_j 上の第一
項の電束 Q_j である。

$$\iint_{S_j} \text{grad } \psi_i \cdot d\mathbf{f}_j$$

と等しい。又 第二項の電束 Q_i

$$- \iint_{S_i} \text{grad } \psi_j \cdot d\mathbf{f}_i$$

と等しい。

$$\therefore \iint_{S_j} \text{grad } \psi_i \cdot d\mathbf{f}_j = \iint_{S_i} \text{grad } \psi_j \cdot d\mathbf{f}_i$$

$$\therefore C_{ji} = C_{ij}$$

上式を n 個の $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ に対して適用する

$$\varphi_i = \sum_j C_{ij}' e_j$$

$$\text{即ち、} C_{ij}' = \frac{\partial \Delta}{\partial e_j} / \Delta.$$

($\Delta \neq 0 \therefore e_i$ と e_j に対する ϕ_j は unique
 な値をとる)

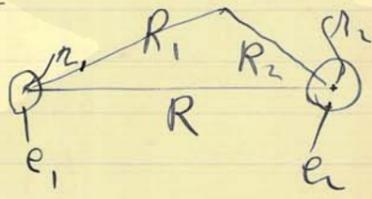
$$\Delta = \|C_{ij}\|$$

従って又 $C_{ij} = C_{ji}$
 故に n 個の conductor 上に q_1, q_2, \dots, q_n の
 charge があるときの potential は e_i の
 線形関数 ϕ である。
 C_{ij} : coefficient of potential ϕ である。

Example. \Rightarrow sphere 半径 R_1, R_2
 中心 O 半径 R ($R_1 > R, R_2 < R$) 上に
 charge q_1 と potential ϕ_1 がある。

$$\begin{cases} \phi_1 = C_{11}q_1 + C_{12}q_2 \\ \phi_2 = C_{21}q_1 + C_{22}q_2 \end{cases}$$

$\phi_1 = 0$ とする。
 e_1 の potential ϕ_1 である。
 $\phi_1 \approx \frac{q_1}{R_1}$



e_2 による ϕ_2 の potential ϕ_2
 $\phi_2 \approx \frac{q_2}{R}$

このとき q_2 の charge 誘起 \Rightarrow 電荷
 ϕ_2 の potential である。 ϕ_1, ϕ_2

R: 球面 $\frac{e_1}{R^2}$ の field 及び uniform
 polarization による potential である $\Phi = 0$
 球の中心から R_2 の距離 r 及び R_2 に対する angle
 θ である

$$\frac{e_1}{R^2} \frac{R_2^3 \cos \theta_2}{R_2^2}$$

球面 e_1 の field の potential $\sim R^{-1}$
 であるから $\Phi = 0$ である。

e_1 の charge e_1 の sphere R_1 上の uniform
 分布 $\Phi = \frac{e_1}{R_1}$

R_2 の sphere R_2 の
 potential Φ

$$\frac{e_1}{R_1} = \frac{e_1}{\sqrt{R^2 + 2R R_2 \cos \theta_2 + R_2^2}}$$

$$= \frac{e_1}{R} \left\{ 1 \mp \frac{R_2 \cos \theta_2}{R} \right\} + O(R^{-3})$$

球面 R_2 の sphere R_2 の equipotential
 surface である。

$$\Phi = \frac{3}{4\pi} \frac{e_1}{R^2} \cos \theta_2 + O(R^{-3})$$

charge distribution ρ R_2 上の $\rho = \rho(\theta_2)$ である。

より、 $\varphi_2 = \frac{Q}{R} + O(R^{-3})$

これは、 r_1 の sphere の charge は Q である
 かつ r_2 の sphere の total charge は $O(R^{-2})$
~~である~~、 O order O である。

これは r_1 の sphere の total charge
 potential の O である。

$$O(R^{-3}) + O(R^{-3})$$

O order O である。

より ~~R^{-2} order O である~~

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{r_1} + O(R^{-3})$$

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + O(R^{-3})$$

$$\therefore C_{11} = \frac{1}{r_1} \quad C_{21} = \frac{1}{R}$$

$$\text{また } C_{12} = \frac{1}{R} \quad C_{22} = \frac{1}{r_2}$$

$$\text{よって } \Delta' = \begin{vmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{r_2} \end{vmatrix} = \frac{1 - \frac{r_1 r_2}{R^2}}{r_1 r_2}$$

$$e_1 = \frac{r_1}{1 - \frac{r_1 r_2}{R^2}} \varphi_1 - \frac{r_1 r_2}{R} \varphi_2$$

$$e_2 = -\frac{r_1 r_2}{R} \varphi_1 + \frac{r_2}{1 - \frac{r_1 r_2}{R^2}} \varphi_2$$

2. 1. $R_1 < R_2$ 第1の sphere の capacity C_1
第2の sphere の capacity C_2 の比

$$\frac{1}{1 - \frac{R_1 R_2}{R^2}}$$

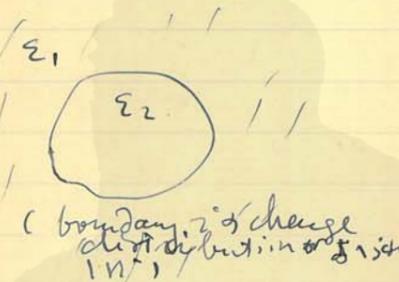
又 $1 < R_2 < R_1$ の時

~~Frank-Mises?~~

§6. Contact Potential

異なる媒質の境界面において、各媒質の境界面でのポテンシャルが一定である。この条件を境界条件として用いる。

(例として ϵ_1 の媒質
 ϵ_2 の媒質がある
 境界面での ϵ_1 のポテンシャル

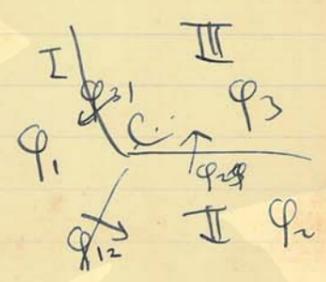


は ϵ_2 のポテンシャルと等しい。 (境界面に電荷分布がある場合)
 この条件を境界条件として用いる。

境界面に電荷分布がある場合、境界面でのポテンシャルの連続性は保たれない。この場合、境界面でのポテンシャルのジャンプは電荷密度に比例する。

3つの媒質が曲線に接している場合、境界条件は以下のようになる。

- I から II へのポテンシャルのジャンプ ϕ_{12}
- II から III へのポテンシャルのジャンプ ϕ_{23}
- III から I へのポテンシャルのジャンプ ϕ_{31}



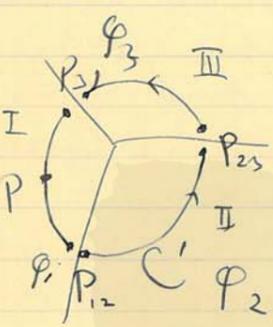
Let \mathcal{R} be a region in \mathbb{R}^2 with boundary C and a path C' inside \mathcal{R} .

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

$$= - \int_{P_{12}}^{P_{23}} \nabla \phi_1 \cdot d\mathbf{s} - \int_{P_{23}}^{P_{31}} \nabla \phi_2 \cdot d\mathbf{s} - \int_{P_{31}}^P \nabla \phi_3 \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \phi_1(P_{23}) - \phi_1(P_{12}) + \phi_2(P_{31}) - \phi_2(P_{23}) + \phi_3(P) - \phi_3(P_{31})$$

$$= \phi_{12} + \phi_{23} + \phi_{31}$$



Thus, the curve C' is a field of singularity.

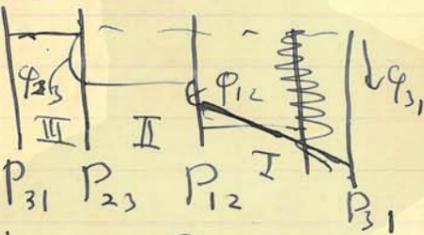
Let $V = \phi_{12} + \phi_{23} + \phi_{31} \neq 0$.
 Then C' is a field of singularity.
 The curve C' is a field of singularity.

57

in fig. 2 potential of actual boundary C is mathematical boundary C. It is not the same as the field of the field of the field.

if II, III are conductor I is insulator
 and C. II, III of potential is const
 for the P_{12} & P_{31} potential $\phi_{12} + \phi_{23} + \phi_{31}$

insulator I of electrostatic field is C in the field (I, II) (I, III)



boundary surface is independent. (II, III) boundary of the field is independent. \therefore II, III of the field is independent.

I is constant. $V = \phi_{12} + \phi_{23} + \phi_{31}$
 is the conductor's electrostatic contact potential.

例として

$$V = \text{air} | C_1 + C_2 | \sum u + \sum u | \text{air} > 0.$$

is the field of I of the field of potential

1) II, III の boundary 上の potential
 共に φ_2, φ_3 とする。

$$\varphi = f_2 \varphi_2 + f_3 \varphi_3$$

$\nabla^2 \varphi = 0$, $\int_V \rho \nabla^2 \varphi = 0$

例 1. f_2 は II の boundary 上 1,
 III の boundary 上 0. $\rho = 0$

上の 1 の function

又 f_3 の 1 は III ... 1

φ_2, φ_3 はそれぞれ (I, II) 或 (I, III) の ~~potential~~ ^{charge}
 density ρ . Vstatic Potential $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$
 ... 1 の 1 ...

これは I の field と一致する。 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$
 の combination が 1 ...
 2) electrostatic field の 1 ...

2) I の conductor 上の ρ とする。

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

これは I の conductor 上の field
 が 1 ...

static field is the same as if

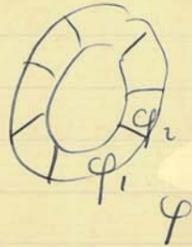
n conductors $1, 2, \dots, n$ are in a medium with permittivity ϵ . The potential on the surface of conductor i is ϕ_i . The potential in the medium is ϕ .

$$\phi = \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \dots + \phi_n f_n$$

where

$$\phi_2 - \phi_1 = \phi_{01} + \phi_{12} + \phi_{20}$$

$$\phi_3 - \phi_2 = \phi_{02} + \phi_{23} + \phi_{30}$$



$$\phi_n - \phi_{n-1} = \phi_{0, n-1} + \phi_{n-1, n} + \phi_{n, 0}$$

where $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ are given. The potential ϕ is unique in the region.

where $\phi_{20} = -\phi_{02}$ etc.

$$\phi_n - \phi_1 = \phi_{01} + \phi_{12} + \phi_{23} + \dots + \phi_{n0} = V$$

where n is the number of conductors.

$$\varphi_{01} = \varphi_{10} = -\varphi_{n0},$$

$$\therefore \vec{E} = \varphi_{12} + \dots + \varphi_{n-1,1}$$

例. \vec{E} は medium の性質 ϵ と n 個の n 個の conductor の series of galvanic potential と 等しい。
 Daniel cell の Galvanic Potential
 $\vec{E} = \text{Cu} | \text{Zn} + \text{Zn} | \text{ZnSO}_4 \text{ aq} + \text{ZnSO}_4 \text{ aq} | \text{Zn} | \text{Cu}$
 $\text{CuSO}_4 + \text{CuSO}_4 | \text{Cu}$.

conductor 1 と n とを接続して $\vec{E} = 0$

これは static field である。2 個の conductor 間の電位差 ϵ は conductor の性質に dependent である。これは conductor 1 類 (first class) である。

これは 2 類 (second class) の conductor である。

1 類 (first class) の conductor は $1, 2, \dots, n$ とする。

$$\varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

§5. Potential due to general charge distribution

- (i) Volume Charge →
- (ii) Surface Charge → field a jump
- (iii) Volume Doublet →
- (iv) Surface Doublet → Potential a jump.

この場合 $\rho = 0$ の boundary condition を満たす。
 medium の内部 $\rho = 0$ の Laplace の equation

$$\Delta \phi = 0$$

この場合 $\rho = 0$ の solution を求める。
 この場合 $\rho = 0$ の boundary surface 上の surface charge density を求める。
 あるいは $\rho = 0$ の medium $\rho = 0$ の boundary surface 上の charge を distribute (この場合の potential を求める)。

charge density $\rho \neq 0$ の field equation は

$$\Delta \phi = -4\pi \rho / \epsilon$$

この medium の $\rho \neq 0$ の boundary condition は $\rho \neq 0$ の場合と同じ。
 一般の general solution は、この particular solution u 、 $\Delta \phi = 0$ の general

$$\therefore 4\pi \epsilon_i \varphi(0) = 4\pi \iiint_{V_i} \frac{\rho \, dv}{r} \quad (A)$$

$$+ \iint_{S_i} \left\{ \frac{\epsilon_i \text{grad} \varphi}{r} - \epsilon_i \varphi \text{grad} \frac{1}{r} \right\} d\mathbf{f}$$

これは i 番目の medium i に関する
 式である。 j 番目の medium j についても

$$0 = 4\pi \iiint_{V_j} \frac{\rho \, dv}{r} + \iint_{S_j} \left\{ \frac{\epsilon_j \text{grad} \varphi}{r} - \epsilon_j \varphi \text{grad} \frac{1}{r} \right\} d\mathbf{f} \quad (B)$$

これら 2 つの medium i と j を sum up
 すると、2 つの medium の boundary S_{ij} 上で

$$S_{ij} \text{ 上 } n = \mathbf{0} \text{ である。}$$

よって S_{ij} 上の charge ρ は i 番目の medium
 及び j 番目の medium 両方に属する。 $\epsilon_i \text{grad} \frac{1}{r}$ と $\epsilon_j \text{grad} \frac{1}{r}$ は

S_{ij} 上で連続である。

$$+ \iint_{S_{ij}} \left\{ \frac{\epsilon_k}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_{kl}} - \epsilon_k \varphi \frac{\partial}{\partial n_{kl}} \frac{1}{r} \right\} d\mathbf{f}$$

$$-\int_{S_{kl}} \frac{\epsilon_l}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n_{kl}} d\tau$$

$$-\epsilon_l \phi \int_{S_{kl}} \frac{\partial}{\partial n_{kl}} \frac{1}{r} d\tau$$

Loos boundary conditions

$$-\epsilon_l \frac{\partial \phi}{\partial n_{kl}}$$

$$+ \epsilon_k \frac{\partial \phi}{\partial n_{kl}} = 4\pi \omega_{kl}$$

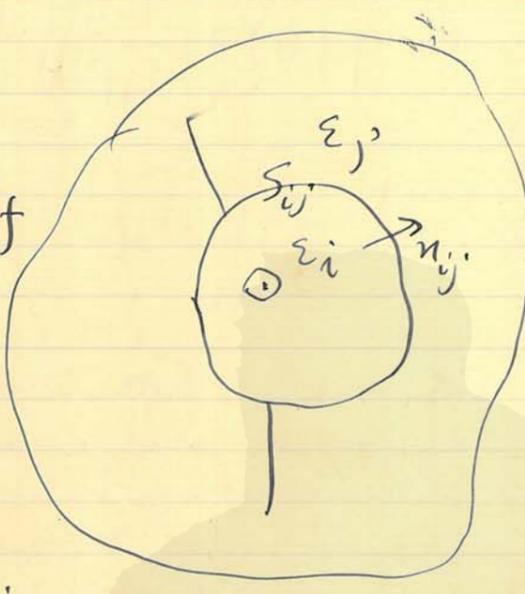
又 $k \rightarrow l$ の contact potential ϵ

$$\phi_{kl} = \phi_l - \phi_k$$

より

$$4\pi \epsilon \phi(0) = 4\pi \int \frac{\rho d\tau}{r}$$

$$+\int_{S_{kl}} \frac{4\pi \omega_{kl} d\tau}{r} + \int_{S_{kl}} \frac{\partial}{\partial n_{kl}} \left(\frac{\epsilon_l \phi_l - \epsilon_k \phi_k}{r} \right) d\tau$$



$$\text{or } \varphi(0) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i \in V_i} \int \frac{\rho_i dV_i}{r} + \sum_{k \in S_{kl}} \int \frac{\omega_k dV_k}{r} \right)$$

$$+ \sum_{k \in S_{kl}} \int \frac{\partial}{\partial n_{kl}} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot (\epsilon_l \varphi_l - \epsilon_k \varphi_k) dA_{kl}$$

origin $r=0$ \rightarrow $r=2$ \rightarrow $r=1$ \rightarrow $r=2$, $r < 1$
~~is~~ φ is a potential φ is a scalar,
 ρ is charge density ρ , ω ,
 S_{kl} boundary n_{kl} is potential ϵ
 \rightarrow n_{kl} . ($\epsilon_l \varphi_l - \epsilon_k \varphi_k$ is a order 1
 small ϵ is a φ) unique n_{kl} is.

ρ_i is $\rho \rightarrow$ charge density $\rho_{\text{eff}} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$
 $\frac{\rho_{\text{eff}}}{\epsilon_0} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \rho = \rho' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho$

with $\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}}$ \rightarrow ρ_{eff} is ρ_i \rightarrow ρ_i is ρ_i
 \rightarrow ρ_{eff}

$$\varphi(0) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i \in V_i} \int \frac{\rho_{\text{eff}} dV_i}{r} - \sum_{i \in V_i} \int \frac{\rho_{\text{eff}} dV_i}{r} \right)$$

$$+ \sum_{S_i} \int \left(\frac{\text{grad } \varphi}{r} - \varphi \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \cdot d\mathbf{f}$$

cons u.

$$\iiint_{V_i} \frac{\rho' dV_i}{r} =$$

$$\text{div } \mathbf{D}_E = 4\pi \rho_E$$

$$\text{div } \mathbf{E}_E = \frac{4\pi \rho_E}{\epsilon}$$

$$\text{div } \mathbf{D}_E = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \rho = \rho'$$

$$\text{def. } \mathbf{D} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi}$$

∴ \mathbf{D} is electric polarisation & ρ' is,

ρ' is,

$$\iiint_{V_i} \frac{\rho' dV_i}{r} = \iiint_{V_i} \frac{\text{div } \mathbf{D} \cdot d\mathbf{V}}{r}$$

using -

$$= - \iiint_{V_i} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{D} dV$$

$$+ \iint_{S_i} \frac{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}}{r}$$

$$\therefore \varphi(0) = \iiint_{V_i} \frac{\rho dv}{r} + \iiint_{V_i} (\text{grad } \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{P} dv$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_{S_i} \left(\mathbf{P} \cdot \text{grad } \frac{1}{r} + \varphi \text{ grad } \frac{1}{r} \right) d\mathbf{f}$$

$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$

同様にして (B) について

$$0 = \iiint_{V_j} \frac{\rho dv}{r} + \iiint_{V_j} (\text{grad } \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{P} dv$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_{S_j} \left(\mathbf{P} \cdot \text{grad } \frac{1}{r} + \varphi \text{ grad } \frac{1}{r} \right) d\mathbf{f}$$

上記の A と B を合わせると、 $\varphi(0)$ の式が得られる。

$$\varphi(0) = \iiint \frac{\rho dv}{r} + \iiint (\text{grad } \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{P} dv$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{S_{kl}} \int \frac{\omega d\mathbf{f}}{r} + \frac{1}{4\pi} \sum_{S_{kl}} \int \left(\frac{\partial}{\partial n_{kl}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \varphi_{kl} d\mathbf{f}$$

この式は水中の連続体の電場を記す。
 媒質は均質、各向同性の
 媒質 ϵ の電場 E の
 電位 ϕ であり、その中に電荷の
 体積密度 ρ と表面
 密度 σ が分布し、 $z=0$ の
 境界面上に接触電位 ϕ_c
 と L の媒質中の電場
 電位 ϕ と D との関係は
 連続性より D_{\perp} は連続である。
 したがって、 $z=0$ の境界面上に
 電荷の体積密度 ρ が分布し、
 $z=0$ の媒質中に双極子の
 体積密度 ρ_D が分布し、
 境界面上に $\frac{1}{4\pi} \phi_c \delta(z)$ の
 表面双極子密度が分布し、
 $z=0$ の電位 ϕ は
 ϵ の媒質中の電場 E の
 電位 ϕ と D との関係は

$$D = \epsilon E + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \nabla \phi_c$$
 の密度 ρ_D が分布し、
 $z=0$ の電位 ϕ は

場を equivalent として,

又 medium の 境界面 Σ 上の ϕ_{el} の contact potential を σ として $\sigma = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$, \mathbf{E} は Σ 上の normal \mathbf{n} 上の $\frac{1}{4\pi} \phi_{el}$ の uniform 分布 density \hat{v} の doublet or distribute $\mathbf{v} = \mathbf{v}$, equivalent として, σ は Σ 上の uniform 分布 density \hat{v} の doublet or distribute \mathbf{v} の surface Σ の double layer (Doppelschicht) である。

又 Σ の Ferrowirkungstheorie の Σ 上の dielectric medium ϵ の σ の doublet の space distribution \mathbf{v} は σ の contact potential difference の boundary double layer or σ の \mathbf{v} である。

ϕ_{el} の uniform double layer $\mathbf{v} = \sigma$ の potential \mathbf{v} は Σ 上の solid angle Ω の $\frac{\phi_{el}}{4\pi}$ である。
 Σ 上の double layer \mathbf{v} の solid angle Ω は 4π である, \mathbf{v} の potential \mathbf{v} は ϕ_{el} である。

Book

59

上の ϵ の ϵ 中 ϵ 同様に ϵ 同様に
 isotropic ϵ 中 ϵ 同様に ϵ 同様に

PPS. $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{M}$,

\mathbf{M} : electric polarization

ϵ 同様に ϵ 同様に ϵ 同様に isotropic ϵ 中

$\mathbf{M} = \chi \mathbf{E}$

χ : const, electric susceptibility
 の同様に ϵ 中 ϵ 同様に isotropic ϵ 中

PPS. $M_x = \chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z$
 etc

の場合 ϵ 同様に ϵ 同様に ϵ 同様に ϵ 同様に

$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi (\rho - \text{div } \mathbf{M})$

$\text{curl } \mathbf{E} = 0$

1.5.17. $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$

ϵ 同様に ϵ 同様に

$$\iiint \left\{ \varphi \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta \varphi \right\} dv$$

$$= \iiint \left\{ \frac{1}{r} \text{grad } \varphi - \varphi \text{grad } \frac{1}{r} \right\} df$$

$$\text{grad} \varphi = -E = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right) = -4\pi \left(\frac{\rho}{r} + \text{grad} \varphi \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

$$-4\pi \iiint \frac{\rho}{r} dv = \iiint \left\{ -\frac{\rho}{r} + \frac{4\pi M}{r} \right\} dv$$

$$- \varphi \text{grad} \frac{1}{r} \Big|_{df} - 4\pi \varphi(0)$$

$$\therefore \varphi(0) = \iiint \frac{\rho}{r} dv - \iiint \frac{\omega}{r} df$$

$$+ \iiint (M \text{grad} \frac{1}{r}) dv$$

$$+ \sum_{k \in R} \iiint \varphi_{kR} \text{grad} \frac{1}{r} df$$

$$\begin{aligned} & \frac{D_{n1} \omega}{r} \\ & \frac{D_{n2} \omega}{r} \\ & -D_{n2} + D_{n1} = -\omega \end{aligned}$$

$$\therefore \iiint \frac{\text{div} M}{r} dv = \iiint \frac{M}{r} df - \iiint M \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv$$