

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

YHAL N45

清義 一十

物質の電磁的性質

1935 Oct → 1936 March

湯川

TRADE **HANABISHI** MARK
(REGISTERED)

**HANABISHI BRAND
FILE**

NO. 77

新案特許既願

c032-060

Reference No.

Name

Subject

Date when Commenced

Date when Finished

Rel. No. of Previous File

Rel. No. of Succeeding File

第二章 金属の電子論

§1. 自由電子

i) 古典論理想気体としての

ii) フェルミ・ガスとしての

§2. 周期的に変化する静電場中の電子

i) 一次元の問題

iii) Brillouin 帯の構成

ii) 三次元の問題

iv) 電子の回折

§3. 金属表面を通過する電子

i) 熱電子の放出

ii) 強電場中の電子放出

iii) 接点電圧電流中の電子の放出

iv) 二次電子の放出

iv) 外光電効果 接触電圧電流

§4. 光の吸収とX線の放射

§5. 電荷の移動の速度

i) 電子の移動速度

ii) 電子と振動の平衡状態

iii) 電場中の電子平衡状態の変化

iv) 電子の平均自由行程の算出

§6. 熱電効果の出現と磁場の影響

§7. 金属の磁気的性質

i) 自由電子の常磁性と反磁性

ii) 原子の磁気的性質

§8. 強磁性

§9. 金属の分子磁気性

§10. 超伝導現象

§11. 合金の構造

§12. 液体金属

§13. 半導体

第二章. P. Debye, Theorie der Elektrischen
Molekular Eigenschaften.

第二章 Honder, Magnetismus Matter 2

参考文献.

第一卷
第二卷

F. Bloch, Elektronentheorie der Metalle, 1933
(Handbuch der Radiologie VI, 1.)

F. Bloch, Molekulartheorie des Magnetismus
(VI, 2)

L. Brillouin, Les Statistiques Quantiques 1950
(物波)

R. Peierls, Elektronentheorie der Metalle
(Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften,
1932.)

Hume-Rothery, Metallic State, 1951

第二章. F. Bloch, Molekulartheorie des Magnetismus
(H. Rad. VI, 2) 1934.

E. C. Stoner, Magnetism and Matter, 1934

Magnetismus (小冊子)
Van Vleck, Theory of Electric and Magnetic
Susceptibilities. 1932.
(第二章 終)

Le Magnétisme, (Rapports du Sixième
Conseil de Physique, Solvay) 1930.
(W. Pauli, Les théories quantiques du
Magnétisme)

Magnetismus (Leipziger Vorträge 1933)

Handbuch der Physik, Elektrizität ...
24, Teil 2, 1954

第二章. Herzfeld, Größe und Bau der Moleküle

第一卷. Sommerfeld und Bethe, Elektronentheorie der
Metalle

Müller-Pouillet's, Lehrbuch der Physik,
Vierter Band - Vierter Teil. 1934.

尾尾. Becker, Theorie der Elektrizität, Band II,
一、二. J. C. Slater, Electronic Structure of Metals
(Rev. of Mod. Phys. Vol 6, Nr. 4, 1934)

第二, S. S. Bhatnagar, K. N. Mathur, Physical Principles
and Applications of Magnetochemistry (1935)

第一, Mott and ~~the~~ Lones, Theory of the Properties
of Metals and Alloys, 1936.
H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle, 1936.

第一
H.

第二, W. Klemm, Magnetochemie, (Physik und Chemie
in Einzeldarstellung Band I), 1936.

Superconductivity, F. London, Une Conception Nouvelle
de la Superconductibilité, 1937.
Slater, Phys. Rev. Aug. 1, 1937

§ Thermal and Mechanical Properties of Crystal

- i) Specific Heat 比熱
- ii) Compressibility
- iii) Crystal Structure and Brillouin zone
- iv) Cohesion
- v) Alloys, Phase Equilibrium

§ Self Consistent Fields

- i) Hartree-Fock Method
- ii) Thomas-Fermi Method

§ Superconductivity

$$\frac{du}{dx} \approx \pm \sqrt{F(x)} - \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}}$$

$$u \approx \pm \int \sqrt{F(x)} dx - \frac{1}{2} \log \sqrt{F(x)} + C$$

$$\psi \approx \frac{C}{\{-F(x)\}^{1/4}} \cdot e^{\pm \int_{x_0}^x \sqrt{F(x)} dx}$$

(21)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[F(x) - \frac{1}{4} \left\{ \frac{5}{4} \left(\frac{F'(x)}{F(x)} \right)^2 - \frac{F''(x)}{F(x)} \right\} \right] \psi = 0$$

この式の solution を求めよう。

若 $\frac{5}{4} \left(\frac{F'(x)}{F(x)} \right)^2 - \frac{F''(x)}{F(x)} = 0$ と仮定する

$$F(x) = (C_1 x + C_2)^{-4}$$

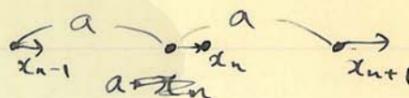
DEPARTMENT OF PHYSICS
 OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE _____
 NO. 5

One Dimensional Model of Lattice Vibrations

Potential Energy

$$V = \sum_n \frac{1}{2} A^2 (x_n - x_{n-1})^2$$



$$M \ddot{x}_n = - \frac{\partial V}{\partial x_n} = A^2 \{ (x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1}) \}$$

~~A~~
~~A^2 (x_n - x_{n+1})~~

$$= A^2 (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$$

$x_n = \sum_k b_k e^{i(kan) - 2\pi i \nu_k t}$
 ν_k is independent of n

$k \approx 0 \Rightarrow \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots, \frac{2(L-1)\pi}{L}$
 $0 < k < \frac{2\pi}{a}$
 $k = 0, \frac{\pi}{L}$

$$-4\pi^2 \nu_k^2 M = A^2 (e^{ika} + e^{-ika} - 2) = -4A^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\nu_k = \frac{A}{M\pi} \sin \frac{ka}{2}$$

$$E = \frac{MN}{2} \sum_k (2\pi \nu_k)^2 (\xi_k^2 + \eta_k^2)$$

$(MN 2\pi \nu_k)^2$

$\sqrt{2} b_k e^{-2\pi i \nu_k t} = \xi_k + i \eta_k !! \quad q_k = \xi_k \quad p_k = MN \dot{\xi}_k$

$$E = \sum_k \left\{ \frac{MN}{2} (2\pi \nu_k \xi_k)^2 + \frac{p_k^2}{2MN} \right\}$$

k is independent of n

$$\nu_k = \frac{Aka}{M\pi} \sin \frac{ka}{2}$$

is a prob. vel. ν

$$\bar{c} = \frac{aA}{M}$$

ν freq. is indep.

but k is not < π/a & dispersion exists.

11月22日

物質の電氣的及び磁氣的性質

Introduction

之から半年間講義の内容は物質の種類及び性質、特に電氣的、磁氣的、光學的性質と、その物質の原子構造との關係を明かにすることである。

これは電磁氣学、電子論の延長であると同時に、量子力学、統計力学の應用である。

Maxwellの電磁場の理論に於ては物質は凡そ連続的に考へ、その中に電磁場が出来る。field equationに於ては物質の種類に關係して電氣的、磁氣的、光學的性質を考慮する。

i) dielectric constant or electric susceptibility
 $\epsilon = 1 + 4\pi\chi$ (refractive index n)

ii) permeability or magnetic susceptibility
 $\mu = 1 + 4\pi\chi$

iii) electric conductivity σ (absorption coefficient)
の三つがある。

これらは物質の種類のみならず、温度、壓力、場の強さ、timeと共に變化する。(frequency) 等々 depends する。これは Maxwell の理論に於ける dependence の理由を立入つて考へる。最初から微分として導入する。

Lorentz の電子論、これら三つの物理的意味は、I が考へたのと違つては居るが、之を物質構造論と關係させて、之を説明する。これら三つを量子力学、量子統計力学の力を借りて説明する。

この講義に於ては、先 conductivity 及び物質、理論を述べる。尤も metal の場合、good conductor 及び光學に reflect する物質の電子論についてである。次に電磁氣学についての一一般論を述べる。最後に dielectrics 及び electrolyte の properties について述べて終了と爲す。時間的關係は、電磁氣学から始める。

$$A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

v は $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$; v electric field
 は isotropic である。

metal の free electron の数は N とする

$$N = 4\pi A \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = A \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2}$$

この A は constant である。 velocity distribution
 の平均値は v の平均値である。 v の平均値は v electron
 の平均値である。 v electron の平均値は v である。 v の平均値は v である。
 resultant current は v である。

ここで v 方向に electric field を apply するとする。

electron の v 方向に加速される。 x -direction への field を
 apply すると $m \dot{v}_x = -eE$

constant field だと t の間の v の x -direction の velocity は

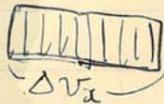
$$\Delta v_x = -\frac{e}{m} E t$$

変化する。

この x -direction での resultant current の density は

unit volume 中の n の free electron であるとする

$$S_x = -ne \Delta v_x = n \frac{e^2 E t}{m}$$



これは t の current の time とする

これは t の x -direction への field を apply すると
 する。 t の x -direction への field を apply すると

これは t の x -direction への field を apply すると

これは t の x -direction への field を apply すると

これは t の x -direction への field を apply すると

これは t の x -direction への field を apply すると

V の平均値
 $\langle v_x \rangle = -\frac{eFl}{m}$

→ electron が t 秒と電場 F の方向に v の速さで進む。このとき
 x 方向の速度 v_x は $\Delta v_x = -\frac{e}{m} F t$ だけ増える。これは v_x の平均
 atom と衝突して、運動エネルギーが $\frac{1}{2} m v_x^2$ だけ増える。平均自由時間
 τ の間の平均速度 v_x は

$$\Delta v_x = -\frac{e F t}{m}$$

no excess velocity が $v_x = 0$ になる。electron の mean
 free path を l とする。

$$\tau = \frac{l}{v}$$

$$\Delta v_x = -\frac{e F l}{m v}$$

この x -方向の current density は

$$S_x = n \frac{e^2 F l}{m v}$$

この v_x は electron の v の velocity と同じ
 方向に動く。これは velocity の average。これは
 Maxwell の distribution を用いて計算する。この
 平均 velocity v_x は v の x 成分の平均値である。

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{3}{2} k T = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle$$

v の平均値 v は v_x の $\sqrt{3}$ 倍である。 v は v_x の 1.73 倍である。

$$S_x = c e^2 F l \frac{n}{\sqrt{m k T}}$$

この c : 1.73 である。

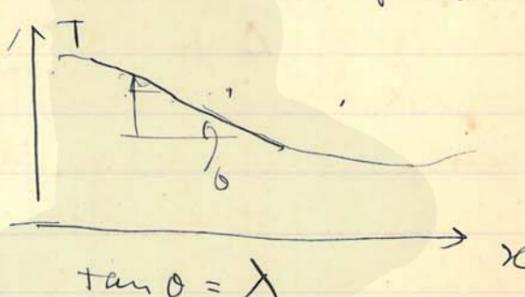
electric conductivity σ は $\sigma = \frac{S_x}{F} = \frac{c e^2 l n}{\sqrt{m k T}}$

この σ は $\sigma = \frac{4}{3} \frac{e^2 l n}{\sqrt{2 \pi m k T}}$

これは σ の式である。

この式は、mean free path l が v に依存する
 こと、 v が T に依存することから導かれる。

free electron の平均自由行程 l の温度
 勾配 $\lambda = -\frac{dT}{dx}$



ここで、 x での平衡状態の

electron の平均エネルギー $\frac{3}{2}kT(x)$

が energy ϵ である。ここで l の距離だけ x が進むと

$x+l$ での平衡状態の energy $\frac{3}{2}kT(x+l)$ である。

$$\Delta E = \frac{3}{2}k(T(x) - T(x+l)) \approx \lambda l \frac{3}{2}k$$

ここで v は、energy ϵ の electron の平均速度である。heat current density W は

$$W \approx n v \Delta E = c_v \lambda l k^2 T \frac{n}{\sqrt{m k T}}$$

ここで heat conductivity κ

$$\kappa = \frac{W}{\lambda} = \frac{c_v k^2 T n l}{\sqrt{m k T}}$$

これを整理すると

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{k^2 T n l}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

ここで heat cond. κ と elect. cond. σ の関係

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T = \text{const} \cdot T$$

これは、mean free path l が v に依存することから導かれる。Wiedemann-Franz の法則 $\kappa/\sigma = \text{const} \cdot T$

これは、Wiedemann-Franz の法則 $\kappa/\sigma = \text{const} \cdot T$ である。これは、mean free path l が v に依存することから導かれる。

絶対子18V 9

↑7x 2. n 小さいものから計算して200, 2-n 比10の常数のn

$$\text{const} = 2 \left(\frac{k}{e}\right)^2 = 2.12 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$$

この値. 2-n 定数と電圧の値を比較して200. 定数の計算
 1.5 程度大... (修正)

電圧の値を2. 定数と大電. -2x 2x 2x free electron
 の値は電圧の値より2x 程度大... 2x 程度大...

10-1. classical theory の定数は自由電子 gas, electron gas の
 specific heat 2R. 2x 2x → atom 1 mol 1/2 R 2x 2x. → free
 electron 1 mol 3/2 R 2x 2x.

→ solid body の定数は vibration (lattice) 2x 2x.

specific heat 6R 2x 2x. 2x 2x 2x 2x 2x 2x

10-12. Dulong-Petit の定数は 2x 2x. specific heat

2x 2x 2x 2x. free electron 2x 2x specific heat 2x 2x

2x 2x 2x 2x. free electron gas 2x 2x

2x 2x mean free path 2x 2x metal 2x 2x temp

2x 2x 2x 2x. 2x 2x. 2x 2x 2x 2x 2x 2x.

2x 2x 2x 2x. 2x 2x 2x 2x. 2x 2x 2x 2x.

mean free path の値は 2x 2x 2x 2x 2x 2x.

§2. Free Electrons as Forming a Fermi Gas.

自由電子 gas. electron は Fermi の statistics を従う.

2x 2x. 2x 2x 2x 2x 2x electron gas の 2x 2x

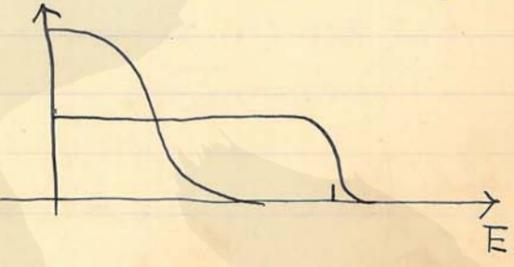
intensity (2x 2x 2x 2x. 2x 2x. electron の energy

distribution は 2x 2x Maxwell

の distribution. 2x 2x 2x 2x 2x 2x

2x. 10-12. free electron

2x 2x specific heat は 2x 2x 2x



$$\therefore \sigma = \frac{Sx}{T} = \frac{e^2}{3} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{e^2 l}{h} \sqrt{5}$$

Sommerfeld の自由電子模型は $\sqrt{5}$ の factor を含
 有.

\therefore 自由電子の conductivity は electron density n の $2/3$ 乗に
 比例し, λ に比例し, T に反比例する. T の explicit unit scale
 はない. $\therefore \lambda$ は 1st approximation として T に独立
 と見做す. Conductivity は 1st approximation
 として temperature に反比例する. λ は $1/3$ 乗に
 T に比例する metal の conductivity である. 理論的計算は
 正しい.

λ は Thermal Conductivity vector, ~~classical~~

~~$$W = n u \cdot \lambda l \frac{5k}{2}$$~~

~~$$u = \bar{v} \cdot \lambda l \frac{5k}{2}$$~~

自由電子の T の平均 energy は

$$\frac{E(T)}{N} = \frac{2\pi}{5} \frac{V G h^2}{N m} \left(\frac{3N}{4\pi G V} \right)^{5/3} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{(2\pi m k T)^2}{h^2} \right)$$

$$= \frac{4\pi n h^2}{5 m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{5/3} \left\{ 1 + \frac{5}{12} \frac{(2\pi m k T)^2}{h^2} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{-4/3} \right\}$$

$$= E_0 + \frac{\pi}{3} \frac{m^2 v^2}{h^2} (2\pi k)^2 \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} T^2$$

自由電子の $T(x)$ と $T(x+\lambda) \sim T(x) + \lambda \frac{dT}{dx}$ の energy は

$$\Delta E = E(T) - E(T - \lambda l) = \frac{2\pi}{3} \frac{m^2 v^2}{h^2} \lambda l T \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} (2\pi k)^2$$

$$W = n u \Delta E \quad \text{with } \Delta E \propto \lambda l \propto \lambda, \quad u \propto \lambda$$

$$\begin{array}{l|l} \varphi_1(x+a) = \lambda_1 \varphi_1(x) & \varphi_1'(x+a) = \lambda_1' \varphi_1'(x) \\ \varphi_2(x+a) = \lambda_2 \varphi_2(x) & \varphi_2''(x+a) = \lambda_2' \varphi_2''(x) \end{array}$$

$$\varphi_1' = \dots \varphi_1 + \dots \varphi_2$$

$$\varphi_2' = \dots \varphi_1 + \dots \varphi_2$$

H.A. Kramers,

©2022 YAMAYUIP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

an electron

a Particle

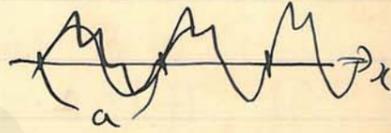
12

§3 ~~Motion Energy~~ Motion of the Electron in a Periodic Field of Force.

One dimensional periodic field U motion ψ & ψ' .

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E' - U')\psi = 0. \quad (1)$$

$$E' = \frac{2ME}{\hbar^2} \quad U' = \frac{2MU}{\hbar^2}$$



$$U(x+a) = U(x).$$

$\psi(x)$ or (1) a solution is $\psi(x+a)$ is a (1) a solution
is $\psi(x)$ a solution \Rightarrow linearly independent or
particular solution ψ_1, ψ_2 a linear comb c_1, c_2
is $\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$.

$$\psi_1(x+a) = \alpha_{11}\psi_1(x) + \alpha_{12}\psi_2(x)$$

$$\psi_2(x+a) = \alpha_{21}\psi_1(x) + \alpha_{22}\psi_2(x)$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} \psi_1(x+a) & \psi_2(x+a) \\ \psi_1'(x+a) & \psi_2'(x+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

(1) $\psi(x)$ is a solution.

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(x+a) & \psi_2(x+a) \\ \psi_1'(x+a) & \psi_2'(x+a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

(1) $\psi(x)$ is a solution. $\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \neq 0$ \Rightarrow ψ_1, ψ_2 are independent solutions.

$$\text{or } \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{22} & \\ & \alpha_{12} + \alpha_{21} \end{vmatrix} = 1$$

ψ_1, ψ_2 are linearly independent.

$$\psi(x+a) = \lambda \psi(x) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + 1 = 0$$

or $\lambda = \alpha_{11} + \alpha_{22} = \text{trace}$

$$\lambda = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 - 4}}{2}$$

$\xi \sim \text{real}$
 $f(E)$ is E or ∂ or ∂^2 or ∂^3 ($\because \varphi, \varphi'$ is real or ξ is real)

$\xi < x$

1) $|f| > 2$. ξ is real . λ_1, λ_2 : real $\lambda_1, \lambda_2 = 1$.
 \Rightarrow ξ is Eigenswert ξ is real

2) $|f| < 2$ $\lambda_1 = e^{i\mu}$ $\lambda_2 = e^{-i\mu}$ ξ is complex .
 $\varphi(x+a) = e^{i\mu} \varphi(x)$; $\varphi^*(x+a) = e^{-i\mu} \varphi^*(x)$

ξ is double degenerate Eigenswert ξ is real

3) $|f| = 2$ $\lambda = \pm 1$. ξ is real or complex .
 $\lambda = \frac{f \pm i \sqrt{4-f^2}}{2}$ $|\lambda| = 1$

$\varphi_{\pm}(x+a) = \pm \varphi_{\pm}(x)$
 $\varphi_{\pm}(x+a) = \pm \varphi_{\pm}(x) + \alpha \varphi_{\mp}(x)$

ξ is real . $\alpha \neq 0$.

\Rightarrow ξ is Eigenswert ξ is real .

$\alpha = 0$ \Rightarrow ξ is double degenerate Eigenswert ξ is real .

ξ is real $f(E)$ is real ξ is real ξ is real .

φ_1, φ_2 is basis ξ is real

$\varphi_k(x) = \sum \alpha_{kl} \varphi_l(\xi)$
 $\varphi_k'(x) = \sum \alpha_{kl} \varphi_l'(\xi)$
 $k, l = 1, 2$
 $\xi < x$

$\alpha_{11} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) \\ \varphi_2(\xi) & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix}$

$\alpha_{22} = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) \\ \varphi_1(\xi) & \varphi_1'(\xi) \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{vmatrix}$

$\alpha_{12} = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) \\ \varphi_1(\xi) & \varphi_1'(\xi) \end{vmatrix}$
 $\alpha_{21} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) \\ \varphi_2(\xi) & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix}$
 $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1$

$f(x, \xi; E) = \alpha_{11} + \alpha_{22}$

$f = \frac{1}{c} \left\{ \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(\xi) & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) \end{vmatrix} \right\}$

ξ is basis φ_1, φ_2 is basis ξ is real ξ is real .

$\rho \alpha \rho^{-1} \left\{ \sum_k \beta_{kl} \alpha_{lm} \rho_{mk}^{-1} \right\} = \sum_l \alpha_{ll}$

この式は ϕ_k のエネルギー E に対する固有値問題である。

この式は ϕ_k のエネルギー E に対する固有値問題である。

ϕ_{kE}

inhomog. ϕ_{kE}

$$f_E = \frac{\partial f}{\partial E}, \quad f_{EE'} = \frac{\partial^2 f}{\partial E^2}$$

(1) から $\phi_{kE}'' + (E' - U)\phi_{kE} = -\phi_k$

この式は ϕ_{kE} の固有値問題である。

~~$$\psi'' + (E' - U)\psi = -K$$~~

この式は ψ の固有値問題である。

~~$$\psi(\xi) = \psi(\zeta) = 0$$~~

この式は ψ の固有値問題である。

~~$$\psi = \frac{1}{c} \int \left| \begin{matrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| K(t) dt$$~~

この式は ψ の固有値問題である。

~~$$\phi_{kE}(x) = \frac{1}{c} \int \left| \begin{matrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \phi_k(t) dt$$~~

この式は ϕ_{kE} の固有値問題である。

~~$$\phi_{kE}'(x) = \frac{1}{c} \int \left| \begin{matrix} \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \phi_k(t) dt$$~~

~~$$\phi_{kE}''(x) = \frac{1}{c} \int \left| \begin{matrix} \phi_1''(x) & \phi_2''(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \phi_k(t) dt$$~~

~~$$+ \frac{1}{c} \left| \begin{matrix} \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \\ \phi_1(x) & \phi_2(x) \end{matrix} \right| \phi_k(x)$$~~

~~$$= \frac{1}{c} (E' + U(x)) \int \left| \begin{matrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \phi_k(t) dt + \phi_k(x)$$~~

この式は ϕ_{kE} の固有値問題である。

この式は ϕ_{kE} の固有値問題である。

~~$$f_E = \frac{1}{c} \int \left| \begin{matrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) \\ \phi_1(\zeta) & \phi_2(\zeta) \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} \phi_1(x) & \phi_2'(x) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \phi_1(\zeta) & \phi_2(\zeta) \\ \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) \end{matrix} \right| dx$$~~

$\psi_1 = c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2$
 $\psi_2 = c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2$
 $\int \psi_1 \psi_2' dt = 0$
 $\int \psi_1' \psi_2 dt = 0$

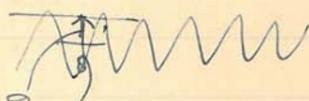
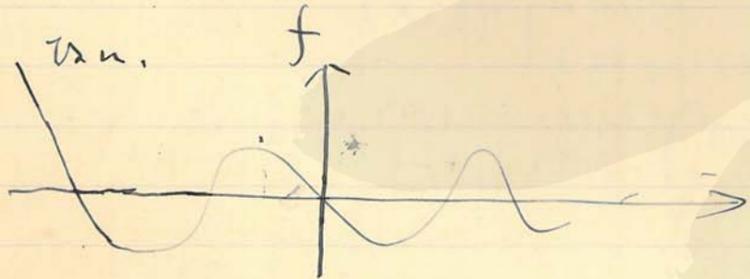
or $f_{E'} = -\alpha_{11} I_{11} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) I_{12} + \alpha_{22} I_{22}$

$I_{kl} = \frac{1}{c} \int \phi_k(t) \phi_l(t) dt$

$f_{E'E'} = -\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial E'} I_{11} + \dots - \alpha_{21} \frac{\partial I_{11}}{\partial E'} + \dots$
 $= -f (I_{11} I_{22} - I_{12}^2) - \alpha_{21} \frac{\partial I_{11}}{\partial E'}$
 $+ (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \frac{\partial I_{12}}{\partial E'} + \alpha_{12} \frac{\partial I_{22}}{\partial E'}$

7. $E' \gg 1$: $\phi_1(x) \cong \cos(x-3)\sqrt{E'}$
 $\phi_2(x) \cong \sin(x-3)\sqrt{E'}$
 $f \cong 2 \cos(x-3)\sqrt{E}$

$E' \ll -1$: $\phi_1(x) \cong e^{-(x-3)\sqrt{-E'}}$
 $\phi_2(x) \cong e^{(x-3)\sqrt{-E'}}$
 $f = e^{(x-3)\sqrt{-E}}$



1. α_{11}, α_{22} real
 $I_{12} = \frac{1}{c} \int \phi_1 \phi_2 dt = 0$ (orthogonal)
 α_{11}, α_{22} same sign
 $\therefore \alpha_{11} \alpha_{22} \geq 1$ (orthogonal)
 $(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 = 1 + \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2$
 $(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{11}\alpha_{22} \geq 4$, \therefore extreme minimum is $\frac{1}{2}$

↑ - 1/21/11.

§ Motion in a Slowly Varying Field

finite dimension φ of electron ψ in φ . ψ is expanded in φ as $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$. φ_n is eigenfunction of H_0 .

$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ expand ψ in φ . φ_n is periodic function $\varphi(x+a) = \varphi(x)$.

$$\varphi(x+a) = \varphi(x)$$

the interval a . $L = Ga$ and G is integer.

for ψ , $\varphi(x+a) = \lambda \varphi(x)$ is the solution of $H_0 \varphi = E \varphi$.

$$\varphi(x+Ga) = \lambda^G \varphi(x)$$

$$\lambda^G = 1$$

(solution $\varphi = e^{ikx}$ is $\varphi(x+a) = e^{ika} \varphi(x)$)

the interval a . $\lambda = e^{i \frac{2\pi k a}{G}}$ for φ is $\varphi(x+a) = \lambda \varphi(x)$.

if $|\lambda| \leq 2$ of E is eigenvalue in L is $0, \pm 1, \dots, G-1$.

$$\lambda = e^{i \frac{2\pi k a}{G}} = 2 \cos \frac{2\pi k a}{G}$$

if $|\lambda| > 2$ of E is not eigenvalue in L .

$$\varphi(x) = e^{i \frac{2\pi k x}{G}} u_k(x)$$

$$u_k(x+a) = u_k(x)$$

the $u_k(x)$ is a periodic function in a .

for φ is $\varphi(x+a) = \lambda \varphi(x)$, E is eigenvalue in L is $0, \pm 1, \dots, G-1$.

G is integer. eigenvalue in L is $0, \pm 1, \dots, G-1$ continuous E is φ .

$$f(x) = \sum_k e^{\frac{2\pi i k x}{L}} [u_k]$$

©2022 YFAL, YITP, Kyoto University

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$u_{k_i} = 0, 1, \dots, G-1$$

$$\sum_n f(x+na) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} = \sum_k e^{\frac{2\pi i k x}{L}} [u_k] \sum_n e^{\frac{2\pi i (k-n) n a}{L}}$$

15

三次元の periodic field 中の自由電子の場合。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (E' - V') \psi = 0$$

格子の simple cubic lattice $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. $V' = \frac{2mV}{\hbar^2}$. a : lattice constant
 $V(x + n_x a, y + n_y a, z + n_z a) = V(x, y, z)$.

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

一般に n_x, n_y, n_z の数は無限大。

$$\psi_{\vec{k}} = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

\vec{r} が L^3 の cube 中の electron の ψ の eigenfunction の場合

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{\frac{2\pi i \vec{k}\cdot\vec{r}}{L}}$$

格子の simple cubic lattice. L^3 . $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 $\vec{n} = l\vec{G} + \vec{m}$ \vec{m} は \vec{n} の成分

\vec{L} . l_x, l_y, l_z は整数. m_x, m_y, m_z は $0, 1, \dots, G-1$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{n}} e^{\frac{2\pi i \vec{n}\cdot\vec{r}}{L}} \sum_{\vec{l}} a_{\vec{l}} e^{\frac{2\pi i \vec{l}\cdot\vec{r}}{L}}$$

$$= \sum_{\vec{m}} e^{\frac{2\pi i \vec{m}\cdot\vec{r}}{L}} \left\{ \sum_{\vec{l}} a_{\vec{l}} e^{\frac{2\pi i \vec{l}\cdot\vec{r}}{a}} \right\}$$

ψ は a の periodic かつ triply periodic field になる。

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\substack{\vec{n} \\ n_x, n_y, n_z=0}}^{G-1} e^{\frac{2\pi i \vec{n}\cdot\vec{r}}{L}} u(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{\frac{2\pi i \vec{k}\cdot\vec{r}}{L}} u$$

格子中の自由電子の Schrodinger equation を λ とする。

$$\sum_{\vec{k}} e^{\frac{2\pi i \vec{k}\cdot\vec{r}}{L}} \left[\Delta u_{\vec{k}}(\vec{r}) + 2i \left(\frac{2\pi \vec{k}}{L} \right) \text{grad} u_{\vec{k}} + \frac{2mV}{\hbar^2} (E' - V') - \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) u_{\vec{k}} \right] = 0$$

$f(x) \equiv$

もし V' は a の period かつ triply periodic function.

故に $[\quad]$ の π は a \dots
 故に $[\quad]$ の π は 0 かつ 2π かつ 4π である。

(\therefore 同様に)

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + ma) \cdot e^{-\frac{2\pi i (x+ma)}{L}}$$

$m, n, p \in \mathbb{Z}, -G-1$

もし $\langle \dots \rangle$ $[\quad]$ 以外の π は 0 かつ 2π かつ 4π である。
 \dots
 $[\quad] = 0$

もし V' は $U_\kappa(x)$ の periodicity の条件 $U_\kappa(x+ai) = U_\kappa(x+aj) \neq U_\kappa(x+ak) = U_\kappa(x)$ であるならば
 $e^{\frac{2\pi i x}{L}} U_\kappa(x)$

もし \dots の stationary state があるならば 2π かつ 4π である。
 \therefore \dots の energy の値は κ によらず 1 、 2π かつ 4π である。
 \dots の solution がある。

これは \dots の場合 \dots の eigenfunction の \dots の形
 \dots である。もし \dots ならば eigenwert, eigenfunction \dots
 \dots (もし \dots ならば \dots simple
 の場合がある) である。

i) Almost free electrons

potential $V(x)$ is small and periodic, $V(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V'_n e^{2\pi i n x/a}$

$$V'_n = V_n^*$$

$$\Psi = e^{i k x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x/a}$$

is differential equation in x .

$$a_n [E' - \hbar^2 (k + 2\pi n/a)^2] = \sum_{n'} V'_{n-n'} a_{n'}$$

We can neglect V for x .

$$\Psi = e^{i k x}$$

is a solution with energy E' . $k = \frac{2\pi}{L} \times \text{integer}$

$$E'_0 = \hbar^2 k^2 \quad E_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

is a solution. V is small and periodic. energy E' is eigenfunction is $E' = E'_0 + E'$

is $E' = \hbar^2 k^2 + E'$ is a solution.

$$k = \frac{2\pi}{L} (k + mG) = \frac{2\pi}{L} (k + \frac{m}{a})$$

is E' . initially a_n is zero approx. a_n is a_m is not zero. m is integer. m is integer.

$$E'_0 + E' - 4\pi^2 (\frac{k}{L} + \frac{m}{a})^2$$

$$E'_0 + E' - \hbar^2 (k + \frac{2\pi m}{a})^2$$

$$k \approx \frac{\pm \pi(n-m)}{a}$$
 , PPs, k or $\frac{\pi}{a}$ の整数

自由粒子のエネルギー $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ のように k の関数として energy の eigenfunction.

$$k = -\frac{\pi}{a} + \delta$$

$$E' = \frac{\pi^2}{a^2} + \epsilon'$$

$$\kappa = -\frac{G}{2}$$

$$a_1 \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} + \epsilon' - \left(-\frac{\pi}{a} + \delta + \frac{2\pi}{a} \right)^2 \right\} = v_1' a_0$$

$$a_0 \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} + \epsilon' - \left(-\frac{\pi}{a} + \delta \right)^2 \right\} = v_{-1}' a_1$$

自由粒子のエネルギー $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ のように k の関数として energy の eigenfunction.

$$a_1 \left\{ \epsilon' + \frac{2\pi\delta}{a} \right\} = a_0 v_1'$$

$$a_0 \left\{ \epsilon' + \frac{2\pi\delta}{a} \right\} = a_1 v_{-1}'$$

したがって、

$$\epsilon' = \pm \sqrt{|v_1'|^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}$$

$$\frac{a_0}{a_1} = -\frac{2\pi\delta}{a v_1'} \pm \sqrt{\frac{v_{-1}'}{v_1'} + \left(\frac{2\pi\delta}{a v_1'} \right)^2}$$

$$\therefore E' = \frac{\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{|v_1'|^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}$$

$$\Psi = e^{i\pi \left(\frac{n}{a} + \delta \right)} + \left[\frac{2\pi\delta}{a v_1'} \pm \sqrt{\frac{v_{-1}'}{v_1'} + \left(\frac{2\pi\delta}{a v_1'} \right)^2} \right] e^{-i\pi \left(\frac{n}{a} - \delta \right)}$$

自由粒子のエネルギー $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ のように k の関数として energy の eigenfunction.

energy の band structure

の Verbotener zones. PPs

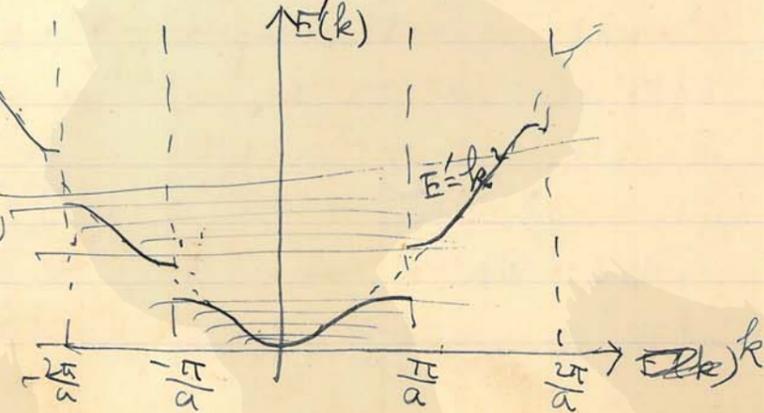
energy の band structure

spectrum

to band structure.

energy of perturbation

energy of perturbation



2nd order energy correction
 2nd order energy correction

$$k^2 = E_0 - V_{000}$$

perturbed

potential expansion constant term of 1st order energy
 is 0. 2nd order energy of perturbed potential is 0. 1st order perturbation energy is 0. 2nd order perturbation energy is 0.

second order energy

$$E_2' = \sum_n \frac{|\int_{\Omega} \psi_0 \psi_n^* V' d\mathbf{v}|^2}{E_0' - E_n'}$$

$$= \sum_{k_x, k_y, k_z} \frac{|\int_{\Omega} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} V' d\mathbf{v}|^2}{(E_k' - E_{k'}')^2}$$

$$\int_{\Omega} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} V' d\mathbf{v} \text{ or } 0 \text{ unless } \mathbf{k} = \mathbf{k}'$$

or

$$V' = \sum_n V_n' e^{i\frac{2\pi n x}{a}}$$

$$k' - k'' = \frac{2\pi n}{a}$$

n: nx, ny, nz

$$k = \frac{2\pi x}{L} + \frac{2\pi m}{a}, k' = \frac{2\pi x'}{L} + \frac{2\pi m'}{a}$$

$$(k' + m') - (k + m) = n \frac{2\pi}{a}$$

$$k' - k = \frac{2\pi}{a} (n - m' + m)$$

or

$$E_2' = \sum_n \frac{|V_n'|^2}{E_k' - E_{k+\frac{2\pi n}{a}}'}$$

$$= \sum_n \frac{|V_n'|^2}{k^2 - (k + \frac{2\pi n}{a})^2}$$

or

$$= -\frac{1}{2n} \frac{|V_n'|^2}{\frac{2\pi n}{a} (k + \frac{\pi n}{a})}$$

$$= -\frac{a}{4\pi} \sum_n \frac{|V_n'|^2}{n(k + \frac{\pi n}{a})}$$

if n is small compared to k, then the denominator is approximately k + pi n/a. If n is large, then the denominator is approximately pi n/a.

(81) Almost Strongly Bound Electron

Electron in metal + constant potential approximation
 free electron approximation
 periodic potential approximation

Electron in lattice atom (tight binding approximation)
 Bloch's theorem approximation

electron's eigenfunction is isolated atom's eigenfunction
 energy is energy of state

approximation of eigenfunction is linear combination of Bloch's functions

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{a}\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}} \psi_n(\mathbf{r}) \quad \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_z = 0, \dots, \mathbf{G}-1$$

the Bloch's eigenfunction is atom's eigenfunction
 energy is energy of state

$$E(\mathbf{k}) = E_0 + \alpha - 2\beta \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})$$

the state of energy is

$$E'(\mathbf{k}) = E_0 + \alpha - 2\beta \left(\cos \frac{2\pi k_x a}{G} + \cos \frac{2\pi k_y a}{G} + \cos \frac{2\pi k_z a}{G} \right)$$

where

$$\alpha = \int \psi_n^* V' \psi_n d\mathbf{v} \quad \beta = \int \psi_n^* V' \psi_n d\mathbf{v}$$

$$V'_n = \frac{2mV_n}{\hbar^2} \quad V_n: n\text{th lattice point}$$

electron field potential.

n' is the lattice point ϵ and n . p.p.s.

$$n'_x = n_x \pm 1, \quad n'_y = n_y, \quad n'_z = n_z$$

$$\text{or } n'_x = n_x, \quad n'_y = n_y \pm 1, \quad n'_z = n_z$$

$$\text{or } n'_x = n_x, \quad n'_y = n_y, \quad n'_z = n_z \pm 1.$$

consider the case.

electron of mass ion is bound in E_0 is energy of

ψ_n is state and ψ_n , $E_0' = \frac{2mE_0}{\hbar^2}$ is p.p.s.

$$\Delta \psi_n + (E_0' - V_n) \psi_n = 0.$$

1st electron of ion is bound in E_0 is energy state and p.p.s. G^3 is HV energy state and p.p.s.

is p.p.s. is linear comb. ψ_n is solution of the eqs. p.p.s.

$$\psi^{(0)} = \sum_n a_n \psi_n$$

is p.p.s.

$$V' = \sum_n V_n' \text{ is p.p.s.}$$

1st electron is bound in E_0 is energy state and p.p.s.

is p.p.s. is energy HV eigenfunction of perturbation.

$$E' = E_0' + \epsilon'$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$$

is p.p.s. perturbed equation

$$\Delta \psi + (E_0' - \sum_n V_n') \psi = 0$$

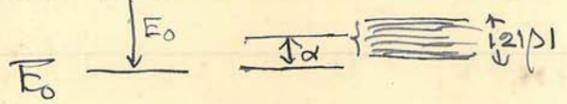
is p.p.s.

$$\Delta \psi^{(1)} + (E_0' - V') \psi^{(1)} = - \sum_n a_n \psi_n (\epsilon' - V' + V_n')$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\hbar i}{2m} \Delta \Psi - \Psi \frac{\hbar i}{2m} \Delta \Psi^* = \text{div} (\Psi^* \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Psi^*)$$

in a metal, the atomic energy levels E_0 and E_1 merge into a band structure. Metal energy level is E_0 and E_1 bands.



As the atomic distance a decreases, the energy levels merge into a band structure.

In a band structure, the energy levels are almost free. Qualitative behavior of the band structure in the limiting case is shown.

The distribution of energy eigenvalues in a band structure is shown. The energy distribution is shown in the limiting case.

Current Density

In a periodic field, the electron wave function satisfies the Schrödinger equation.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = -\text{div} \left\{ \frac{\hbar i}{2m} (\Psi^* \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Psi^*) \right\}$$

Let $\Psi = e^{i(kx - Et)}$ be a wave function with wave number k and energy E .

$$I = \frac{\hbar i}{2m} (\Psi^* \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Psi^*)$$

$$I = \frac{\hbar i}{2m} \left[\Psi^* \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Psi^* \right]$$

$$I = \frac{\hbar i}{2m} \left[(E_k - E_{k'}) + \text{div} \left\{ \frac{\Psi \Psi^*}{k k'} \right\} \right]$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} I_{kk'} dV = \frac{\hbar i}{2m \Omega} (E_k - E_{k'})$$

$RH - HR$

電流密度
 電流のエネルギー

$$\mathbf{I} = \frac{e\hbar i}{2m} \cdot \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\psi^* \text{grad} \psi - \psi \text{grad} \psi^*) d\mathbf{v}$$

1. 2. 3. 4.

1. 2. 3. 4. electron of state n - ψ_n

$$\psi_n(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_n(\mathbf{r})$$

1. 2. 3. 4. $\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{r}}{L}$ $k_x, k_y, k_z = 0, 1, \dots, G-1$

1. 2. 3. 4. $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ state n

$$\psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k} + \delta\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \{u_{\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}}\}$$

$$= e^{i\delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \{\psi_{\mathbf{k}} + v\}$$

1. 2. 3. 4. v is small

$$E'(\mathbf{k}') = E'(\mathbf{k}) + \delta E'(\mathbf{k})$$

$$\{\Delta + (E'(\mathbf{k}') - V')\} \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = 0$$

1. 2. 3. 4.

$$\{\Delta + (E'(\mathbf{k}) - V')\} u(\mathbf{r}) = -\delta E'(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} - 2i\delta\mathbf{k} \cdot \text{grad} \psi_{\mathbf{k}}$$

1. 2. 3. 4. $\psi_{\mathbf{k}}^*$ multiply \int_{Ω}

$$\delta E'(\mathbf{k}) = -2i\delta\mathbf{k} \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{k}}^* \text{grad} \psi_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}$$

1. 2. 3. 4. $\psi_{\mathbf{k}}^*$ multiply \int_{Ω}

$$\delta E'(\mathbf{k}) = 2i\delta\mathbf{k} \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{k}} \text{grad} \psi_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{v}$$

$$\therefore \delta E'(\mathbf{k}) = -i\delta\mathbf{k} \int_{\Omega} (\psi_{\mathbf{k}}^* \text{grad} \psi_{\mathbf{k}} - \psi_{\mathbf{k}} \text{grad} \psi_{\mathbf{k}}^*) d\mathbf{v}$$

1. 2. 3. 4. \mathbf{k} is state of electron

$$\mathbf{I}_{\mathbf{k}} = -\frac{e\hbar}{2m} \left(i \frac{\partial E'(\mathbf{k})}{\partial k_x} + j \frac{\partial E'(\mathbf{k})}{\partial k_y} + k \frac{\partial E'(\mathbf{k})}{\partial k_z} \right)$$

$$= -\frac{e}{m\Omega} \left(i \frac{\partial E'(\mathbf{k})}{\partial k_x} + \dots \right)$$

a) free electrons

$$I_{kx} = -\frac{e\hbar k}{m\Omega} \rho = -\frac{e\hbar v}{m\Omega}$$

almost free, $\hbar k/a = \rho$, or $\hbar k = \rho a$

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ k^2 + \left(k + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 \right\} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ k^2 - \left(k + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 \right\}^2 + (\hbar v_n)^2}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial k_x} = k_x + k_x + \frac{2\pi n x}{a} \pm \frac{\frac{1}{2} \left\{ k^2 - \left(k + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 \right\} \left(2k - \left(k + \frac{2\pi n}{a}\right) \right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \left\{ k^2 - \left(k + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 \right\}^2 + (\hbar v_n)^2}}$$

\therefore { ... } small, $\hbar v_n \ll \hbar v$

$$\frac{\partial E_k}{\partial k_x} = 2k_x + \frac{2\pi n x}{a} \approx 2k_x + \frac{\hbar v_n x}{a} \approx 2k_x$$

$$I_{kx} = -\frac{e\hbar}{m\Omega} \left(k_x + \frac{2\pi n x}{a}\right) \approx -\frac{e\hbar}{m\Omega} k_x$$

zps discontinuity plane is: $\hbar v_n \ll \hbar v$ free electron $\hbar v$.
 discontinuity in $\hbar v_n \ll \hbar v$.

$$\frac{\partial E_k}{\partial k_x} = k_x + k_x + \frac{2\pi n x}{a} \pm \frac{\hbar v_n x}{a} \approx 2k_x \pm \frac{\hbar v_n x}{a}$$

$$I_{kx} = -\frac{e\hbar}{m\Omega} \left(k_x + \frac{\pi n x}{a}\right) \pm \text{small}$$

$$n \left(k_x + \frac{\pi n}{a}\right) = 0 \text{ for } n=0$$

$$I_{kx} = -\frac{e\hbar}{m\Omega} \left(k_x + \frac{\pi n}{a}\right) \pm \text{small}$$

current density at $n=0$ is $\hbar v$.

$k_x = -\frac{\pi n}{a}$ for $n \neq 0$ the current density is 0.

c) strongly bound electron

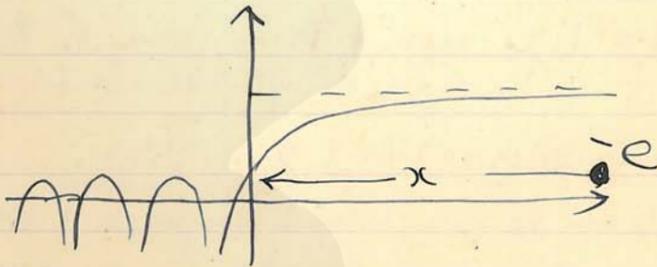
$$I_{kx} \approx \frac{e\hbar}{2m\Omega} \sin \frac{2\pi k_x}{a}$$

band \uparrow and \downarrow current density is 0.

§4. Passage of the Electron through the surface of the Metal.

以上 metal 中の free electron 運動の経路は
 大抵わかった。しかし、metal の表面に近づくと、
 電子の運動は boundary surface によって阻まれる。
 この boundary を越えて外へ飛ぶことは、又外から飛ん
 だり込む場合もある。

今 $x=0$ の plane を
 boundary とし、左方を metal
 右方を vacuum とする。potential
 の変化は大抵、図の如く
 である。boundary の付近に



この付近に atom の存在が原因で、
 近づくに従って Maxwell 流の phenomenological
 image force (Bildkraft)

$$\beta = -\frac{e}{4x^2}$$

potential $\frac{1}{2} \frac{e^2}{4x}$

と見られる。

この field potential は constant と見做すことができる。
 平衡値は 0 とおくと、(energy の origin を適當にとり
 置く) 外側の電位は $V = V_0$ とおくと、
 V_0 は positive である。

a) Electron emission from Hot metal, (Richardson effect)

以上 metal の中の free electron は Fermi statistics に従って equilibrium 状態にあり、
 (速度 v_x, v_x+dv_x) (速度 v_y, v_y+dv_y) (速度 v_z, v_z+dv_z)
 の velocity を持つ electron の数は unit volume 当たり

$$2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{dv_x dv_y dv_z}{\frac{1}{A} e^{\frac{mv^2}{2kT}} + 1}$$

この electron の flux を $v > v_0$ として $v < v_0$ として
 its energy $v < v_0$ である。これは
 $v > v_0$ である。これは $v < v_0$ である。これは
 reflect である。 reflection 係数 R 及び transmission
 Coefficient (Durchlässigkeit) D は velocity v
 depend する。この $v < v_0$ での transmission Coef. D は
 $D < 1$ である。

これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。

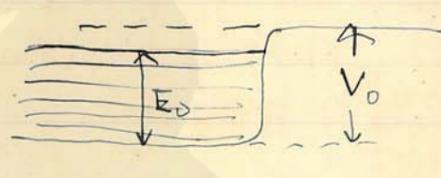
これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 2nd flux, with surface $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 electron の flux

$$Z = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 D \int_{v_0}^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_y dv_z}{1 + e^{\frac{mv^2}{2kT}}}$$

これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 $E_0 = kT \log A = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}$

これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 2nd flux, with surface $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。

これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 0 E_0 である。これは $v < v_0$ である。
 order の flux である。これは $v < v_0$ である。



$$Z = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 D \int_{v_0}^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_y dv_z}{e^{\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - E_0}{2kT}} + 1}$$

これは $v < v_0$ である。これは $v < v_0$ である。
 $E_0 \ll kT$ である。これは $v < v_0$ である。
 $Z = 4 \left(\frac{m}{h}\right)^3 D \int_{v_0}^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_y dv_z}{1 + e^{\frac{mv^2 - E_0}{2kT}}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{y^2} x}{x(x+B)}$$

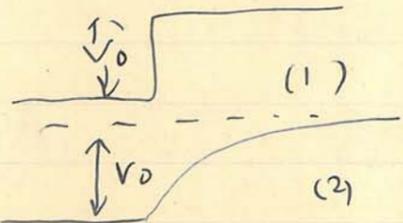
20512. current density J

$$J = -eZ$$

$\vec{E} \wedge \vec{S}$

23

Durchlässigkeit \bar{D} at surface $z=0$ potential $\phi(z)$ $\phi(0) = \phi_0$
 Nordheim's approximation (1) $\phi(z) = \phi_0 e^{-z/L}$



$$\bar{D} \approx 0.5$$

(1) approximation

$\bar{D} \approx 1$. (Bildkraft \vec{E} \rightarrow \vec{E} field)

21. Z of \vec{E} is $\vec{E} \cdot \vec{v}$

$$\rho^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$Z = 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \bar{D} \int_0^\infty v_x \rho^2 p dp \int_{v_0}^\infty \frac{v_x dv_x}{e^{\frac{mv_x^2}{2kT} + \frac{mv_y^2}{2kT} - \frac{E_0}{kT} + 1}}$$

$$B = e^{\frac{E_0}{kT} - \frac{m\phi}{2kT}}$$

$$x = e^{\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

$$Z = 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \bar{D} \int_0^\infty p dp \int_{x_0}^\infty \frac{\beta dx}{x(x+B)}$$

$$x_0 = e^{\frac{v_0^2}{2kT}}$$

$$C = e^{-\frac{m\phi}{kT}}$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \bar{D} \frac{kT}{m} \int_0^\infty p dp \log(1 + e^{-\frac{m\phi}{2kT} C})$$

$$= 2\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \bar{D} \int_0^\infty \frac{C e^{-\frac{m\phi}{2kT}} p^2 dp}{1 + C e^{-\frac{m\phi}{2kT}}}$$

$$\underline{Z} = \frac{m p^2}{2kT} = \frac{4\pi m}{h^3 (kT)^2 \bar{D}} \int_0^\infty \frac{z dz}{\frac{1}{2} e^z + 1}$$

$C \ll 1$ approximation

$$Z = \frac{4\pi m}{h^3 (kT)^2 \bar{D}} \int_0^\infty z dz \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} C^n e^{-nz}$$

$$= \frac{4\pi m}{h^3 (kT)^2 \bar{D}} \left(C - \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{3} - \frac{C^4}{4} + \dots \right)$$

$C \ll 1$ or $v_0 - E_0 \gg kT$ as 1st approximation

1. 1.1.1. 1.1.1. electrons of anode of a vacuum tube
 saturation current J is limited by space charge
 limiting case is. volt of anode is V_0

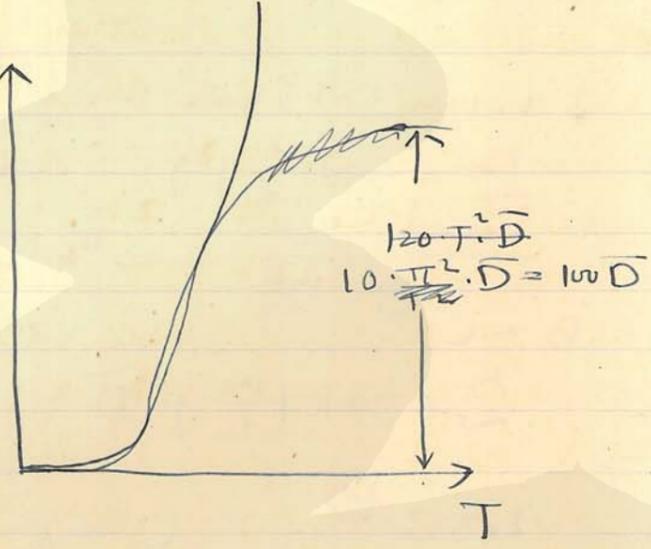
©2022 MHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$\psi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ energy of electron in space charge
 $\psi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ space charge
 $\psi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ space charge
 Volt (Anode Potential)

$\Sigma = \frac{4\pi m}{h^3} (kT)^2 \bar{D} e^{\frac{E_0 - V_0}{kT}}$

current $J = -\frac{4\pi m e}{h^3} (kT)^2 \bar{D} e^{\frac{E_0 - V_0}{kT}}$
 $|J| = 120 \cdot T^2 \bar{D} e^{\frac{E_0 - V_0}{kT} - \frac{V_0 - E_0}{kT}} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$

2. 2.1. 2.1.1. $V_0 - E_0 < kT$ の場合
 2. 2.2. $V_0 - E_0 > kT$ の場合
 approximation
 $V_0 - E_0 < kT$ の場合
 $V_0 - E_0 > kT$ の場合
 limit. $C = 1$ の場合



$\Sigma = \frac{2\pi^2 m^3}{6h^3} (kT)^2$

$J = -\frac{2\pi^2 m^3 e}{6h^3} (kT)^2 \bar{D} = \frac{\pi^2}{12} \cdot 120 \cdot \bar{D} \cdot T^2$

3. 3.1. correction of the above
 3. 3.2. Richardson's law of high vacuum tube of hot cathode
 free electron of classical Maxwell-Boltzmann statistics is used.

Richardson's law of hot cathode
 $J = \frac{e n}{\sqrt{2\pi m}} \sqrt{kT} e^{-\frac{V_0}{kT}}$

3. 3.3. temperature independent of the above
 constant of the above is the physical constant.

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r})$$

この state の electron の energy は $\hbar\omega$ であり volume Ω である。

$$Z = \frac{2\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{-\frac{E(\mathbf{k}) - E_0}{kT}}}{e^{\frac{E(\mathbf{k}) - E_0}{kT}} + 1}$$

この $\therefore \mathbf{p} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{2\pi} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{h} v$

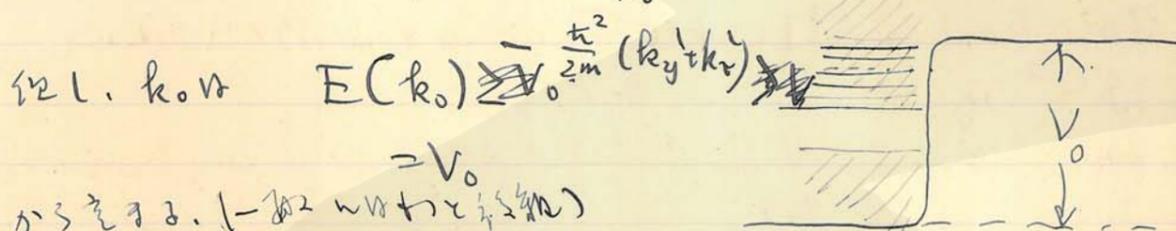
したがって、この state の electron の mean current density は

$$-\frac{e}{\hbar\Omega} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k_x} \text{ etc}$$

この

total current density は

$$J = -\frac{2e}{(2\pi)^3 \hbar} \int d^3k \int_{k_0} d^3k \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k_x} \frac{e^{-\frac{E(\mathbf{k}) - E_0}{kT}}}{e^{\frac{E(\mathbf{k}) - E_0}{kT}} + 1}$$



からわかる。1- μ の状態は k_x の方向に E の方向に流れる。
 したがって、この場合と結果は全く一致する。

$$y = \frac{e\sqrt{F}}{|V_0 - E_0|}$$

$$J = \frac{-e^3 F^2}{8\pi \hbar (V_0 - E_0)} e^{-\frac{8\pi\sqrt{m}(V_0 - E_0)^{3/2}}{3e\sqrt{F}} \varphi(y)}$$

$$= 1.55 \cdot 10^{-6} \frac{F^2}{(V_0 - E_0)} 10^{-2.98 \cdot 10^7 \frac{(V_0 - E_0)^{3/2}}{F}} \varphi\left(\frac{3.62 \cdot 10^{-4} \sqrt{F}}{V_0 - E_0}\right) \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$$

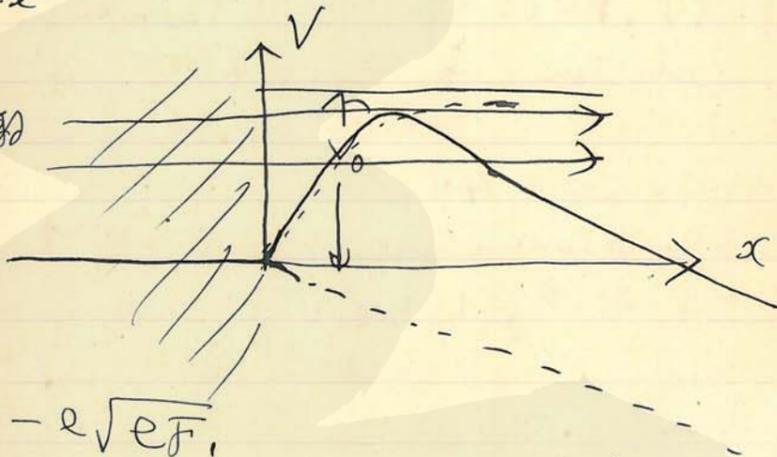
図1. F は volt/cm, $V_0 - E_0$ は volt $\sqrt{\text{cm}}$ である。

b) Electron Emission from Cold Metal

通常の冷金属では electron 金属から逸出せず、 2.1 eV の仕事関数がある。強電界を apply すると、 F の field が x 方向に存在すると、electron の effective potential の surface は相対的に外側に歪む。

$$V = V_0 - \frac{e^2}{4\epsilon} - eFx$$

この potential の山に electron が存在する。山の頂上より逸出する energy を $e\phi$ とする。この energy を $e\phi$ とする。



山の頂上の高さ $V_0 - e\sqrt{eF}$ 。この山は Richardson effect と呼ばれる。これは、 $J = J_0 e^{\frac{e\sqrt{eF}}{kT}}$ と表される。

J_0 : field の無いときの current density.

high temperature では field の効果は小さい。この場合、 $J \propto T^{-2} e^{-\frac{e\phi}{kT}}$ となる。

field の効果は ϕ が大きくなるにつれて、 J の値は急激に増加する。

この場合、current は

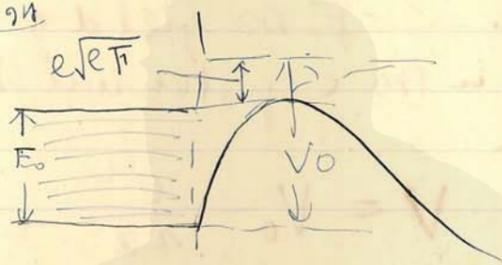
$$J = \frac{-e}{2\pi h} N_0 \left(\frac{E_0}{V_0 - E_0} \right)^{1/2} (eF)^2 e^{-\frac{8\pi\sqrt{2m}(V_0 - E_0)^{3/2}}{3eFh}} \phi$$

ここで、 ϕ は temperature の関数である。 $\phi = \phi \left(\frac{e\sqrt{eF}}{|V_0 - E_0|} \right) = 1$ for $e\sqrt{eF} \ll |V_0 - E_0|$
 $\phi = 0$ for $e\sqrt{eF} = |V_0 - E_0|$

冷電界 (field) の効果、その effect なる
 現象 (high temp cold emission ↓ temp 温度))

冷電界 cold metal の current の 現象

現象 $V_0 - E_0 \approx e\sqrt{eF}$



冷電界の現象 field による
 cold emission の 現象

Example $V_0 - E_0 = 4.4 \text{ Vol.}$
 $F \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ volt/cm}$

1.5 $\times 10^6 \text{ volt/cm}$ 冷電界の現象 (Milliken Eyring)

冷電界の現象 electron の 現象
 a factor なる現象、冷電界の現象

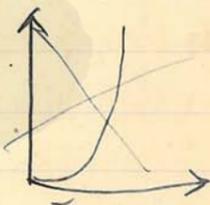
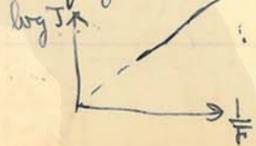
冷電界の現象

$V_0 - E_0$	10^6	10^7	$3 \cdot 10^7 \text{ volt/cm}$		F_0 (critical field)
2 volt	10^{-14}	100	$7 \cdot 10^8$	amp/cm ²	$2.8 \cdot 10^7$
3	10^{-144}	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^5$		$6.4 \cdot 10^7$
5	10^{-322}	$3 \cdot 10^{-24}$	0.18		$17.6 \cdot 10^7$

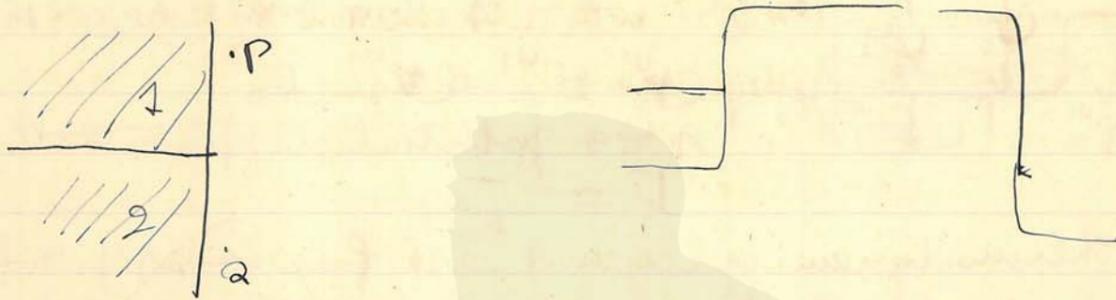
Milliken and Eyring の冷電界の現象 (冷電界の現象)
 冷電界の現象、冷電界の現象

しかし、 $\log J \propto \frac{1}{F}$

冷電界の現象の $\log J$ verify する。



c) Contact Potential



⇒ metal の 気持は p と n の 差 による。 Fermi level E_F と
 2 の 間 の potential difference がある
 ⇒ metal の Fermi level 平衡状態
 ⇒ metal 1 の Fermi level の electron の Fermi energy $E_0^{(1)}$ と
 2 の Fermi level の Fermi energy $E_0^{(2)}$ と
 両方の electron の distribution である

$$\Sigma_1(E) = \frac{N_1(E)}{\frac{1}{A_1} e^{\frac{E - E_0^{(1)}}{kT}} + 1} \quad \text{etc}$$

両方の Fermi level がある。

1 の Fermi level $E_0^{(1)}$ の potential と 2 の Fermi level $E_0^{(2)}$ との差がある
 である。

$$A_1 = e^{\frac{E_0^{(1)}}{kT}} \quad A_2 = e^{\frac{E_0^{(2)}}{kT}}$$

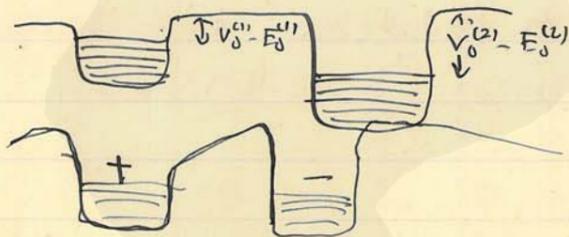
両方の Fermi level, electron の energy である。

$$-V_0^{(1)} < E < 0 < E_1 + V_0^{(1)} < E_0^{(1)}$$

$$0 < E_2 + V_0^{(2)} < E_0^{(2)}$$

この範囲にある。

両方の metal の
 帯電 (正負) の差による
 電位差がある。



両方の Fermi level と

d) Photoelectric Effect

金属の表面に ν の frequency の光が当たると、

$$h\nu \geq W$$

金属中の free electron が光の光子を吸収して外へ飛び出す。

このとき Einstein の説明は、

光が金属に当たると、金属中の free electron が

光を吸収して外へ飛び出す。

このとき、金属中の free electron は

光のエネルギーを吸収して、金属中の自由電子にエネルギーを伝える。

MS.

$$p' = p + \frac{h\nu}{c}$$

$$W' = W + h\nu$$

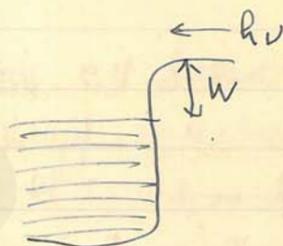
$$(W' - W)^2 - c^2(p' - p)^2 = 0$$

$$(W' - c^2 p'^2) + (W - c^2 p^2)$$

$$\Rightarrow 2(WW' - c^2 p p')$$

$$m^2 c^4 = m^2 c^4 + 2(W h\nu - c p^2 h\nu)$$

$W > cp$ のとき、2つの関係は $v=0$ となる。



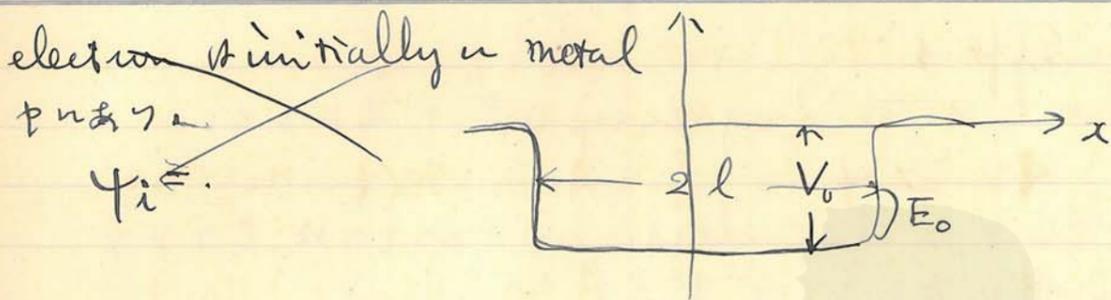
initial state
 $W, p, h\nu/c$
 final state
 W', p'

光は金属の表面に periodic field を与える。potential は急変し、自由電子は free になる。このとき、金属中の free electron は光を吸収して外へ飛び出す。このとき、金属中の free electron は potential の急変により、metal の block 内部から外部へ出る process が起こる。

~~このとき、光の frequency ν は、金属中の free electron の electric vector の x-成分に比例し、potential は~~

$$A_x = \frac{c \cdot A_0}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c}\right) \quad A_y = A_z = 0$$

~~ν と関係する。~~



metal p.p. potential a periodic change & neglect l. V_0
 average potential $\approx V_0$. metal surface is $x=0$
 electric vector E is \perp to surface
 electron is \perp to E .

\therefore Schrodinger eq

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi + \frac{e\hbar}{mc} (\mathbf{A} \cdot \text{grad } \psi)$$

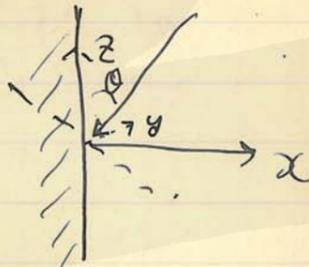
electric vector in xy plane
 vector Pot

$$A_x = 0, \quad A_y = A \cos 2\pi \nu (t - \frac{2\pi x}{c})$$

$$A_z = A \sin 2\pi \nu (t - \frac{2\pi x}{c})$$

$$A_x = A_z = 0$$

$$A_y = A \cos 2\pi \nu (t - \frac{2\pi x}{c})$$



div $\mathbf{A} = 0$ in z dir.

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad n_y = 0.$$

ψ to state ψ' to state - a transition probability
 is

$$\int \psi' \cdot \frac{e\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad } \psi \, dV$$

in xy plane. z is z . ψ', ψ state energy difference \approx
 $\hbar \nu$ in z dir.

consider electrons in initial state n at $t=0$, final state n' at $t=t$. y -direction free electron

$$\frac{e\hbar}{mci} A \text{grad } \psi = \frac{e\hbar}{mci} A \cos 2\pi \nu (t - \frac{n_x x + n_y y}{c}) \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} = p_y \psi \quad \therefore \approx \frac{e}{mc} A \cos 2\pi (\dots) p_y \psi.$$

where λ is the lattice constant and $\lambda \gg a$.

electron's initial final state & initial state of momentum are negligible & zero's.

$$|\langle \psi' | \frac{e\hbar}{mci} A \text{grad } \psi | \rangle|^2 = (\frac{eA}{mc})^2 |\int \psi' \psi dv|^2$$

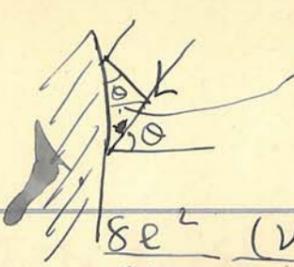
for $\lambda \gg a$, in orthogonality of the states. a is metal's potential's periodic change to neglect. λ is $\gg a$ in the limit $\lambda \gg a$ metal's surface is parallel to electric vector & the photo-electric effect is $\propto \cos^2 \theta$. θ is the angle between electric vector & surface normal. $\theta = 0$ is the maximum.

electric vectors

in surface normal is compared to $\cos^2 \theta$. All x or z is $\propto e^{-\kappa x}$. $x=0$ plane is electron's constant ψ . x -direction momentum is constant ψ .

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x \psi \quad \psi \text{ of constant multiple } \psi$$

transition prob. $\propto \sin^2 \theta$. photoelectric output (Aurbate) is $\propto \sin^2 \theta$. photoelectric current is $\propto \sin^2 \theta$. θ is the angle between photon's direction & surface normal.



Richardson effect
 ©2022 Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

	4.12	4.15	4.99	6.27	4.77	5.03
Photo						
Thermo	4.11	4.15	4.97	6.30	4.77	5.01

$$\frac{8e^2}{h^2c} \frac{(V-V_g)^2}{v^3} \cdot \frac{\sqrt{V_0-h\nu}}{\sqrt{V_0+\sqrt{\frac{1}{3}h(V-V_g)}}} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

for $W_0 > 1.5 h\nu$

$$\approx \frac{8e^2}{h^2c} \left(\frac{E_0}{R}\right)^2 \frac{V_0}{v^3} \frac{16}{15} \cdot \frac{\sqrt{\frac{E_0}{2}}}{\sqrt{E_0+2h\nu} + \sqrt{E_0+2(h\nu-V_0)}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

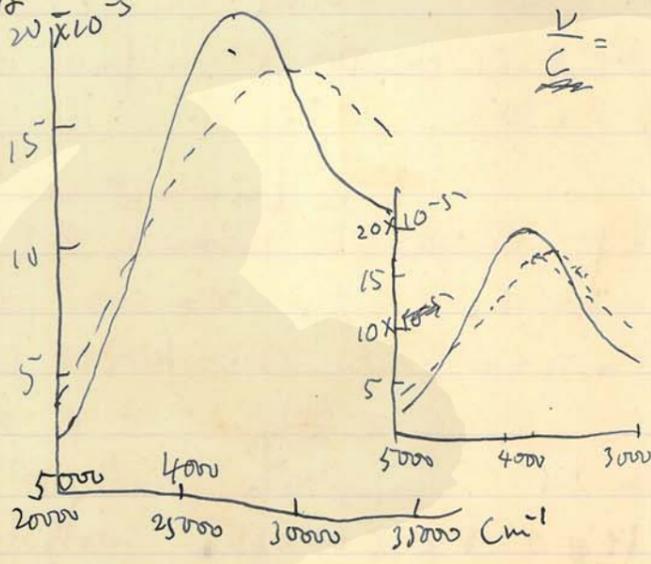
for $h\nu > W_0$
 但し $V_g = V_0 - E_0$; Langmuir's Grenz.
 long wave length limit ↑

θ is incident light's normal to surface normal
 の向きの角

ν の大きさは ν^{-2} 程度に Ausbente して vs.
 1.5 V_g まで 1.8 V_g の R_{max} まで
 短波長 Ausbente 大抵 10^{-4} 程度
 程度以下 (短波)

Alkali の Ausbente $\approx 2 h\nu_g$ と ν^{-2} とは
 一致せず、上の式から Ausbente して vs.
 とは (短波)

Kat R (短波) の Ausbente
 短波 (短波) と長波 (長波) の Ausbente
 〇 photoelectron の energy distribution と Ausbente とは
 (maximum energy の Ausbente
 maximum の Ausbente)



〇 以上は surface の Ausbente であるが、
 〇 surface photo-electric effect であるが、
 〇 volume effect であるが、
 (volume effect の Grenz frequency は surface effect の Grenz frequency とは異なる)

microscopic

$$\text{div } H_i = 0 \quad \text{curl } E_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t}$$

field equation in V is $\nabla \cdot E = 4\pi \rho$

$$\rho' = \sum_{j \neq i} \rho_j \quad , \quad I' = \sum_{j \neq i} I_j$$

total microscopic field E, H is $\sum E_i, \sum H_i$

$$\rho = \sum \rho_j \quad , \quad I = \sum I_j$$

入る式を満足するものは

光の電磁場

approximation \rightarrow 平均場

average field (self consistent field) ρ, V

one electron problem reduce

electron wave function ψ is flat out in V

charge density, current density is flat out in V

periodic charge density, current density of amplitude ρ, I

distribute in V . then E_i, H_i

of E, H of $\frac{1}{N}$ order is $E_i = E, H_i = H$

electron in V field of E, H

approx. \rightarrow Lorentz correction

electron + V field of ρ, V

one body problem reduce

potential ϕ

$$A = a e^{2\pi i \nu t} + a^* e^{-2\pi i \nu t}$$

$$\text{wave eq. } \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi - \frac{e\hbar}{2\pi i m c} A \text{ grad } \Psi - V \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi = e^{-2\pi i \nu t} \psi_k e^{i k \cdot r} \quad (\hbar \omega_k = \hbar \nu_k)$$

$$I^* = -\frac{e^2}{4\pi m v^2} \sum_k N_k \left(\psi_k \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\hbar}{4\pi m} \sum_l \left(\frac{\psi_k (t - \cos t) t}{v_{lk}} + \dots \right) \right) \int \psi_l \left(\frac{\partial E}{\partial t} \text{grad } \psi_k \right) d\tau$$

$$- \frac{\hbar v}{4\pi m} \sum_l \left(\frac{\sin}{v_{lk}} - \dots \right) \int \psi_l (E \text{ grad } \psi_k) d\tau \quad \left(\psi_k \text{ grad } \psi_l - \psi_l \text{ grad } \psi_k \right)$$

the state is a wave solution of

$$\psi_k e^{-2\pi i v_k t} + \sum_l \psi_l e^{-2\pi i v_l t} (C_{kl} e^{i(k-l)t})$$

the wave is
 $\psi_k e^{-2\pi i v_k t}$

$$C_{kl} = \frac{-1}{v_{lk} + v} \frac{e}{2\pi i m c} \int \psi_l^* (a \text{ grad } \psi_k) d\tau \times (e^{2\pi i (v_{lk} + v)t} - 1)$$

$$C_{kl} = \frac{-1}{v_{lk} - v} \frac{e}{2\pi i m c} \int \psi_l^* (a^* \text{ grad } \psi_k) d\tau \times (e^{2\pi i (v_{lk} - v)t} - 1)$$

$v_{lk} = v_l - v_k$ induced state
 ψ_k is real and v is current density

$$I_k = -\frac{e^2}{m c} A \psi_k^2 - \frac{e \hbar}{8\pi m^2 c} \left[\sum_l \left\{ \frac{1}{v_{lk} + v} + \frac{1}{v_{lk} - v} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\cos 2\pi (v_{lk} + v)t}{v_{lk} + v} - \frac{\cos 2\pi (v_{lk} - v)t}{v_{lk} - v} \right\} \int \psi_l (A \text{ grad } \psi_k) d\tau \right. \\ \left. + \sum_l \frac{1}{2\pi v} \left\{ \frac{\sin 2\pi (v_{lk} + v)t}{v_{lk} + v} - \frac{\sin 2\pi (v_{lk} - v)t}{v_{lk} - v} \right\} \int \psi_l \left(\frac{\partial A}{\partial t} \text{ grad } \psi_k \right) d\tau \right] \\ \times (\psi_k \text{ grad } \psi_l - \psi_l \text{ grad } \psi_k)$$

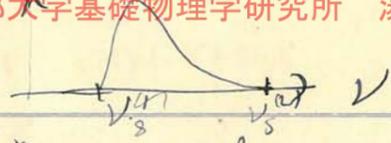
the state is electron's wave. N_k is the resultant induced current density.

$$I = \sum_k N_k I_k^*$$

the wave is $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi v^2}{c} A$

the general formulation is for a flat out metal solid body. k is continuous and v_{lk} is a continuous function of k . k is continuous and v_{lk} is a continuous function of k .

↑ $\propto \frac{1}{v}$ $\propto \frac{1}{v^2}$ $\propto \frac{1}{v^3}$ (in volts)
 un-symmetrical ©2012 IHAL, ITP, Kyoto University 湯川記念館史料室



32

free electron $m^* = m$: electron mass, - $m^* \neq m$
 effective mass $\propto \frac{1}{v}$.

then conductivity is

$$\sigma = \frac{e^2 \hbar^0}{8\pi^3 m^* v G^3 a^3} \sum_k N_k \sum_l \left| \int \psi_l^* \frac{\partial \psi_k}{\partial x} d\tau \right|^2 \frac{\sin^2 \pi (v_{lk} - v)t}{v_{lk} - v}$$

$$= \frac{\pi m a e^2}{h^4} \frac{s_1^2}{s^3} V_{s_1 s_2 s_3}^2 \frac{(v_s^{(2)} - v)(v - v_s^{(1)})}{v^3}$$

≥ 0

for $v_s^{(1)} \leq v \leq v_s^{(2)}$
 otherwise +

then, $v_s^{(1)} \leq v \leq v_s^{(2)}$ or v with electron \propto damped
 other, $v < v_s^{(1)}$ or $v > v_s^{(2)}$ \propto transmission is.

12 L.

$$S^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad \text{unit } \frac{1}{a}$$

$$V(x, y, z) = \sum_{s_1, s_2, s_3} V_{s_1 s_2 s_3} e^{i(s_1 x + s_2 y + s_3 z)}$$

for simple cubic lattice.

$$v_s^{(1)} = \frac{h s}{2\pi m a^2} (\pi s - p_0)$$

$$v_s^{(2)} = \frac{h s}{2\pi m a^2} (\pi s + p_0)$$

$$\psi_{k_1, k_2, k_3} = \left\{ \begin{array}{l} \psi e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} \\ \psi e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z + \pi)} \end{array} \right.$$

in space $\propto \frac{N}{2}$ of lowest energy state of
 sphere $\propto \frac{4}{3} \pi r^3$ $\propto \frac{4}{3} \pi \left(\frac{h s}{2\pi m a^2} \right)^3$ $\propto \frac{4}{3} \pi \left(\frac{h s}{2\pi m a^2} \right)^3$

simple cubic lattice of silver - silver $a = 4.08 \times 10^{-10} \text{ m}$

$$v_s^{(1)} = 0.077 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

experimental value $0.9 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ \propto $\frac{1}{v}$ \propto $\frac{1}{v^2}$ \propto $\frac{1}{v^3}$

face-centered cubic lattice \propto $\frac{1}{v}$ \propto $\frac{1}{v^2}$ \propto $\frac{1}{v^3}$

$$\lambda = 3,300 \text{ \AA}$$

Transmission Band

Ag 3200 Å	Au 4900	Cu 3400	Li 2050	Na 2100	K 3150	Rb 3600	Cs 4400
--------------	------------	------------	------------	------------	-----------	------------	------------

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$v_s^{(1)} = \frac{h}{2\pi m a^2} \left\{ 3\pi - 3^{1/2} (12\pi)^{1/2} \right\} \approx 1860 \text{ cm}^{-1}$$

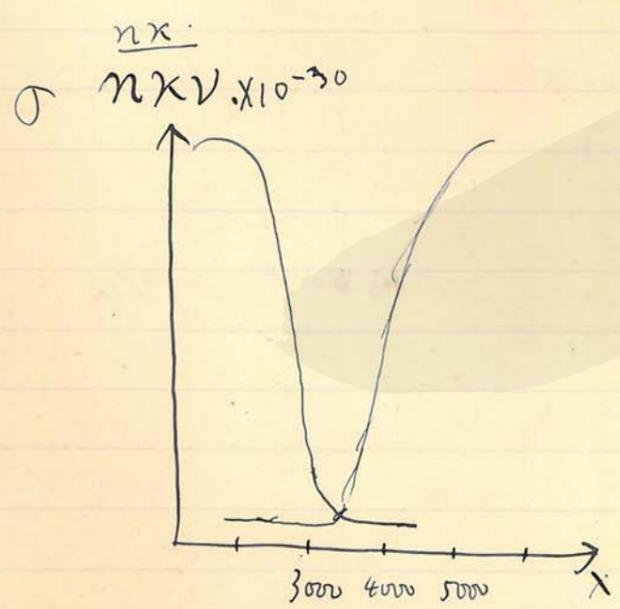
$$= 0.65 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

2nd order of correction
 2nd order of correction
 $v_s^{(2)}$ is the freq. of the 2nd order of correction. As ultraviolet
 is visible $v_s^{(1)}$ is the 1st order, so the bands are superposed
 as follows.

alkali metal is body centered 2nd $v_s^{(1)}$ of the lattice

Li 7.4×10^{14}	Na 4.8×10^{14}	K 3.3×10^{14}
----------------------------	----------------------------	---------------------------

1st, 2nd order of correction in face centered
 lattice.



Absorption band

Ag 3300 → 2000 (2 Volt) Au (5 Volt)

Cu 66700 → 2500 1st order of correction.

Selection Rule, Brillouin zone

Selection Rule.

metal 中の conduction electron の 2 次元格子 (2 次元格子) の period
 の oscillating current $e \mathbf{v} \cos \omega t$ の 2 次元格子 第一 energy conserv.
 の law による $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ transition 時 (

$$v_e - v_{k'} \approx v$$

に 対応する k -state の transition 時 ($\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$) である、
 第一 energy

の transition 時 $\int \psi_e (A \text{ grad } \psi_k) dV$, $\int \psi_e \left(\frac{\partial A}{\partial t} \text{ grad } \psi_k \right) dV$
 の transition 時 $\int \psi_e \text{ grad } \psi_k dV$
 2 次元格子 unit vector $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$. ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の direction による)

の transition 時 $\int \psi_e \text{ grad } \psi_k dV$

atomic dimension cell

$$\psi_k = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} u_k(\mathbf{r}) \quad k_x, k_y, k_z = 0, 1, \dots, G-1$$

$$\psi_e = e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} u_{k'}(\mathbf{r}) \quad \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$$

($L = G a$)

この volume $\Omega = L^3$ の volume Ω 中の transition 時 $\int \psi_e \text{ grad } \psi_k dV$
 である (nG ではない)

の transition 時 $k_x - \lambda_x = 0$ ($k_x = \lambda_x$) である。 $k_x = \lambda_x$ の transition 時 $\int \psi_e \text{ grad } \psi_k dV$
 band の 間の correspond する transition 時 $\int \psi_e \text{ grad } \psi_k dV$ である。

Dec. 3, 1957

§6. Theory of Conduction

前節に於て periodic field 中の electron の運動を論じた。
この結果、各 stationary state 中の electron は常に一定の
current を生ずる。もし ω の perturbation $\sin \omega t$ による
の electric field $E = E_0 \sin \omega t$ を加へ、一方 ω 程 electron の
速の方向 ω 程 electron の数が増へる。resultant current は
cancel する。これは次の如く、

もし ω 程の field を apply すれば、 ω 程の $\sin \omega t$ となる。
その方向 ω 程 electron の数が増へる。resultant current は流
れる。この current は field を ω 程の $\sin \omega t$ 流す。これは
平衡に於て ω 程の $\sin \omega t$ である。又 field を apply すれば
平衡の ω 程の current の max. value となる。

この ω 程の $\sin \omega t$ の metal の lattice の完全な periodic である。
その原因として、

- i) Thermal Vibration
- ii) Distortion
- iii) Impurity, Alloy.

等である。
ii), iii) は第一近似として、その ω 程の $\sin \omega t$ である。故に
Conductivity の ω 程の $\sin \omega t$ である。これは i) による ω 程の
振動である。もし electron の速 v の lattice vibration の
方向 ω 程 $\sin \omega t$ である。又 ω 程の $\sin \omega t$ である。故に resultant
current density は ω 程の $\sin \omega t$ である。その ω 程の
lattice vibration の ω 程の $\sin \omega t$ である。故に ω 程の $\sin \omega t$ である。

その ω 程の $\sin \omega t$ である。 i) は dynamical 的 perturbation である。
故に、 ii) iii) は static 的 perturbation である。
(energy change を伴ふ)

$$\text{or } M\omega_f^2 e_{fi} \cos(fna) = \sum_{nk} V_{mn}^{ik} e_{fk} \cos(fna)$$

$$M\omega_f^2 e_{fi} \sin(fna) = \sum_{nk} V_{mn}^{ik} e_{fk} \sin(fna)$$

この式より

$$M\omega_f^2 e_{fi} = \sum_{nk} V_{0n}^{ik} e_{fk} \cos(fna)$$

この関係が満たされておれば、この式は成り立つ。

$$\begin{aligned} (\because M\omega_f^2 e_{fi} \cos(fna) &= \sum_{nk} V_{0n}^{ik} e_{fk} \cos(fna) \cos(fna) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{nk} V_{m,m+n}^{ik} e_{fk} \cos\{f(m+n)a\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{nk} V_{m,m-n}^{ik} e_{fk} \cos\{f(m-n)a\} \\ &= \sum_{nk} V_{m,n}^{ik} e_{fk} \cos(fna) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\omega_f^2 e_{fi} \sin(fna) &= \frac{1}{2} \sum_{nk} V_{m,m+n}^{ik} e_{fk} \sin\{f(m+n)a\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{nk} V_{m,m-n}^{ik} e_{fk} \sin\{f(m-n)a\} \\ &= \sum_{nk} V_{m,n}^{ik} e_{fk} \sin(fna) \end{aligned}$$

この式は、lattice point i 及び j に関する式である。

この式は、 f に関する式である。

P.P.S. $\sum_{nk} V_{0n}^{ik} \cos(fna) = A_f^{ik}(f)$

$$A_f^{ik}(f) = A_f^{ki}(f) = \sum_n V_{0-n}^{ki} \cos(fna)$$

$$= \sum_n V_{0-n}^{ki} \cos(fna)$$

$$M\omega_f^2 e_{fi} = \sum_{nk} A_f^{ik} e_{fk}$$

$$\begin{vmatrix} A_f^{11} + M\omega_f^2 & A_f^{12} & A_f^{13} \\ A_f^{21} & A_f^{22} - M\omega_f^2 & A_f^{23} \\ A_f^{31} & A_f^{32} & A_f^{33} - M\omega_f^2 \end{vmatrix} = 0$$

この perturbation による electron 状態から別の状態へ
 の遷移は lattice vibration の方が多くなる。

(定常電場 electron 状態の distribution の変化)

lattice vibration の方が多くなるのはなぜか？

電子間の interaction を neglect (2nd, 3rd order)

この場合 perturbation による electron 状態の transition

は harmonic vibration の quanta (sound quantum)

の吸収・放出による transition prob. は

electron 状態 $\psi_{k'} = \left(\frac{V_{fj}}{f_j} \right) u_k e^{i k r}$ 状態から

$\psi_{k'} = u_{k'} e^{i k' r}$ 状態への transition 確率は

$$\int u_{k'}^* \left(\frac{V_{fj}}{f_j} \right) u_k e^{i(k-k'+f)r} dV$$

この integral は $u_{k'}^* V_{fj} u_k$ は a periodic function.

この integral は

$$k_x - k'_x + f_x = \frac{2\pi}{a} n_x \quad i = x, y, z, \quad n_i \text{ integer}$$

この条件は

electron wave 的

lattice vibration

の wave 的 elastic

wave 的: lattice phonon scatter 条件は $k = k' + f$

この条件は interference condition 的。 (phonon electron 散乱 $k = k' + f$)

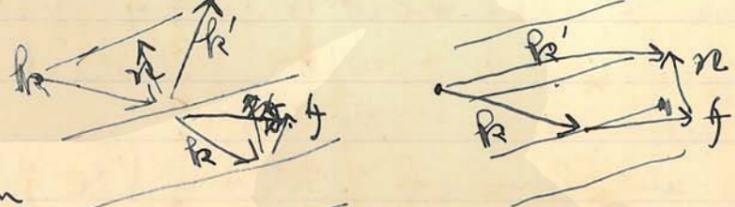
この条件は energy 的 condition.

$$E(k') = E(k) \pm \hbar \nu_f$$

この条件は lattice vibration 的 $\pm \hbar \nu_f$ 的。 (phonon 吸収・放出)

excite した phonon の

(phonon electron 散乱 $k = k' + f$)
 phonon 吸収・放出
 $\pm \hbar \nu_f$ 的



$$\hat{p}_x \psi = (\hat{H} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{H}) \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - eFx \right] \psi. \quad \psi = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} u_k(r).$$

$k_x \psi$
 electron's momentum is

$$\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi - \frac{2m}{\hbar^2} (V + eFx) \psi = 0$$

$$\psi(t) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(t) u_{\mathbf{k}}(r) e^{-\frac{iE_{\mathbf{k}} t}{\hbar}}$$

$$\Delta u_{\mathbf{k}}(r) - \frac{2m}{\hbar^2} (V - eFx - E_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} = 0$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \dot{C}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} e^{-\frac{iE_{\mathbf{k}} t}{\hbar}} = -\frac{i}{\hbar} eFx \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{C}_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{i}{\hbar} eFx \iiint \psi_{\mathbf{k}}^* x \psi(t) dv \\ &= \frac{eFx}{\hbar} \iiint \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}^*}{\partial k_x} \psi(t) dv \\ \frac{d}{dt} |C_{\mathbf{k}}|^2 &= -\frac{eFx}{\hbar} \frac{\partial |C_{\mathbf{k}}|^2}{\partial k_x} \end{aligned}$$

$$\sim |C_{\mathbf{k}}(t)|^2 = f\left(k_x + \frac{eFx}{\hbar} t, k_y, k_z\right)$$

$$C_{\mathbf{k}}^* \frac{eFx}{\hbar} \iiint \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}}{\partial k_x} \psi(t) dv$$

Simultaneous

(ii) Stationary Distribution of Electrons and Lattice Vibrational Sound Quanta.

absorb
 電子が \$k\$ の状態から \$k'\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を吸収し、
 \$k\$ の状態にある電子が \$k'\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を吸収する。
 \$k\$ の状態にある電子が \$k'\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を吸収する。

$$-W_{kf} N(f) n(k) (1 - n(k'))$$

これは \$|W_{kf}|\$ が遷移確率、
 $N(f)$ が音響量子または光量子の平均数、ボース統計に従う。
 $n(k)(1 - n(k'))$ が電子のパウリ排他原理に従う。

逆の遷移、\$k'\$ の状態にある電子が \$k\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を放出する。
 \$k\$ の状態にある電子が \$k'\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を放出する。

$$W_{k'f} \{N(f) + 1\} n(k') (1 - n(k))$$

この二つの遷移の確率が釣り合う。
 \$k\$ の状態にある電子が \$k'\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を吸収する。
 \$k'\$ の状態にある電子が \$k\$ の状態へ遷移する時、\$f\$ の音響量子を放出する。

\$\therefore\$ 平衡条件として
 $A_{fj} = A_{j'f}$ for \$f' = \frac{2\pi}{a} - f\$ etc

$$N(f) = N(f')$$

$$+ W_{kf} \{N(f) + 1\} n(k) (1 - n(k')) = W_{k'f} \{N(f) + 1\} n(k') (1 - n(k))$$

この式から
 $N(f) = N(f')$ となる。
 $W_{kf} n(k) (1 - n(k')) = W_{k'f} n(k') (1 - n(k))$



When lattice is interaction with electron, the number of electrons in k state is

$$\left(\frac{dn(k)}{dt}\right)_G = \sum_f W_{kf}^{f \rightarrow k} \{ [N(f) + 1] n(k') [1 - n(k)] - N(f) n(k) [1 - n(k')] \} + \dots$$

Then, the number of electrons in k state with electron is $n(k)$.
 The number of electrons in k state is $n(k)$ and the number of electrons in k' state is $n(k')$.
 The number of electrons in k state is $n(k)$ and the number of electrons in k' state is $n(k')$.

$$\left(\frac{dn(k)}{dt}\right)_A = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial n(k)}{\partial k_x} + \dots$$

electric field $\frac{\partial T}{\partial x}$ and temperature gradient $\frac{\partial T}{\partial x}$ are considered.
 $\frac{dk_x}{dt} = -\frac{2\pi e F}{h}$ (because k_x is the momentum and it is $\frac{2\pi}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}$)

$$p_x \psi = (\hbar k_x \psi + i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial x})$$

Stationary distribution of k and k' is $\left(\frac{dn(k)}{dt}\right)_G + \left(\frac{dn(k)}{dt}\right)_A = 0$.

$$-\frac{2\pi e F}{h} \frac{\partial n(k)}{\partial k_x} + v_x \frac{\partial n(k)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = -\sum \dots \quad (*)$$

Electric field and temperature gradient are considered. The number of electrons in k state is $n(k)$ and the number of electrons in k' state is $n(k')$.

$$N(f) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar v_f}{kT}} - 1}$$

$$n(k) = \frac{1}{A e^{\frac{E(k)}{kT} + 1}} = f(k)$$

12872 満足の。 $\frac{\hbar\omega}{kT}$

$$\left(\because \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{E'}{kT}} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{\frac{1}{A} e^{\frac{E'}{kT}}}{\frac{1}{A} e^{\frac{E'}{kT}} + 1} = \frac{\frac{1}{A} e^{\frac{E}{kT}}}{\frac{1}{A} e^{\frac{E'}{kT}} + 1} - \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{E'}{kT}} + 1} = 0 \right)$$

$F \neq 0, \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$ の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合

是れらの場合、 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 lattice vibrations の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 anharmonicity の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合

$$N(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \approx \frac{kT}{\hbar\omega} \gg 1$$

($\because \hbar\omega \ll kT$)

the equilibrium distribution is

この場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 electron distribution の stationarity の場合

$$-\frac{eF}{n} \frac{\partial n(k)}{\partial k_x} + v_x \frac{\partial n(k)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = -kT \sum_f \frac{W_{kf}}{\hbar\omega_f} \{n(k') - n(k)\}$$

この場合 classical の conductivity の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合

この場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 field の temperature gradient の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 $n(k)$ の場合

$$f(k) = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{E(k)}{kT}} + 1} \quad \text{at } F$$

この場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 $n(k) = f(k) + n_1(k)$

この場合 distribution の asymmetry の場合 k_x の場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合

$$n_1(k) = k_x \chi$$

この場合 $\epsilon \gg \hbar\omega$ の場合 χ の k -space での spherical symmetric.

in order

$$-\frac{eF}{n} \frac{\partial E}{\partial k_x} \frac{\partial f}{\partial E} + v_x \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = -kT \sum_{k'} \frac{W_{kf}}{\hbar\omega_f} \{f(k') - f(k)\}$$

almost free electron Brillouin zone a boundary etc etc etc

$$\frac{\partial E_k}{\partial k_x} = \frac{\hbar^2}{m} k_x$$

$$\chi(k') \approx \chi(k) \approx \frac{\partial \chi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial k_x} (k'_x - k_x)$$

$$-\frac{eF\hbar k}{m} \frac{\partial f}{\partial E} + v_x \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} = -kT \sum_{k'} W_{kk'} \frac{\partial \chi}{\partial E} (k'_x - k_x) \chi$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{eF\hbar k}{m} \sum_{k'} W_{kk'} (k'_x - k_x) \left(\frac{k'_x}{k_x} - 1 \right)$$

n kx is independent

$$\approx \frac{nT}{M \Theta^2}$$

M: mass of the atom

n: number of the atom per cm³

τ: relaxation time

$$k_x \chi = -\frac{eF\hbar \tau}{m} k_x \frac{\partial f}{\partial E}$$

Thermal equilibrium is a function of E only

∂f/∂x = 0 & F ∂χ resultant current density J

$$J = -e \int v_x d^3k_x d^3k_y d^3k_z \chi \frac{2}{(2\pi)^3} = -e \int v_x d^3k_x \chi \frac{2}{(2\pi)^3}$$

$$= -\frac{e^2 F M \Theta^2}{m T} \frac{n}{n} \frac{35}{2} 10^{-29} \text{ C} \approx 1$$

$$\sigma = \frac{J}{F} = \frac{e^2 M \Theta^2}{m T} = 1680 \frac{\text{A} \Theta^2}{\text{cm}^2 \Omega^{-1}}$$

c: effect number of electrons per atom

conductivity of various metals (see table below)

Fröhlich, S. 190

	Li	Na	K	Cu	Ag	Au	Mg	Ca	Zn	Al	Pb	Bi
$\sigma \cdot 10^{-4}$	12	24	16	65	67	69	25	24	18	40	5.2	0.9
$A \Theta^2 \cdot 10^{-5}$	9	5.8	6.2	3.5	3.5	6.0	20	21	36	41	17	25
Z	3	11	19	29	47	79	12	20	30	13	82	83
c	(0.07)	0.8	0.8	0.5	1	1	0.3	0.4	0.3	0.2	0.4	0.05

次に $\frac{\partial T}{\partial x}$ に対する thermal conductivity κ である。
 多くの場合 κ は T に対して temperature independent

$$\frac{\kappa}{\sigma} \approx \frac{\pi^2 k^2 T}{3e^2}$$

これは Sommerfeld の elementary theory である。Wiedemann-Freyer の law である。

これは $T \ll \Theta_D$ の場合 $\kappa \propto T^{-2}$

これは

iii) 以上より lattice vibration による resistance の寄与は小さい。次に lattice distortion による resistance の寄与を求めよう。原子 n の lattice point の atom n からの displacement Δu_n による lattice potential V

$$\sum_n \{ V(r - a_n) - \Delta u_n \text{ grad } V(r - a_n) \}$$

これは alloy の場合 Δu_n は impurity によるものである。これは V の n による atom の位置に dependent である。これは Δu_n による potential V

$$\sum_n \{ V_n(r - a_n) - \Delta u_n \text{ grad } V_n(r - a_n) \}$$

これは

これは pure metal 中の metal の impurity によるものである。
 V_n の平均値 V と見做す。これは distortion によるものである。ideal
 pure metal の V の deviation ΔV

$$\Delta V = \sum_n \{ V_n(r - a_n) - V^{(0)}(r - a_n) - \Delta u_n \text{ grad } V_n(r - a_n) \}$$

とある。
 この場合、 ΔE は time independent である。 lattice vibration の ν frequency の 振動は 大きくなる (これは ν と ν^{-1} とある)。

この ν の perturbation による electron の motion の 変化は energy が増える。 即ち lattice elastic scattering である。

この場合 ν は mean free path と ν^{-1} の概念を apply して、 Sommerfeld の elementary theory の 3 式に 結果が 出るとある。

* ρ は ν の resistance は ρ_T と ρ_L である。 ρ_T は thermal vibration による resistance であり additive である。 即ち

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \rho_T + \rho_L$$

とある。 Zusatzwiderstand ρ_L は temperature に independent である。 Zusatz thermal con. 抵抗は ρ_T である。 ρ_L は ν の amount に 依存する。 これは Matthiessen's Regel である。 Zusatzwiderstand

この場合 impurity による potential の 変化は ν の atom による atom と 関係がある。 即ち ΔE は ν の 振動である。 即ち Fröhlich (197) Cu の ν は atomic

	ΔE	ρ_L (in $10^{-6} \Omega \text{ cm}$)
Mg	-17	0.8
Al	-16	0.8
Cu	0	0
Zn	1	0.2-0.3
Ag	18	0.22
Au	50	0.6-0.64

これは 1874 年 12 月 15 日のこと。これは Ag と Au の anomalous work function
 のこと。 ↓

47% - 42% = 5% の metal の 同位体の割合は 42% である
 42% の concn. ϵ δ_a $\delta_b = 1 - \delta_a$ とすると
 $\delta_a \ll 1$ ならば $\rho_L \sim \delta_a$ $\delta_b \ll 1$ ならば $\rho_L \sim \delta_b$
 したがって $\rho_L \sim \delta_a$

$$\rho_L \sim \delta_a \delta_b = \delta_a (1 - \delta_a)$$

これは 2 次元の parabolic

である。

これは

銅と金との合金の

場合の 2 次元の parabolic

である。 Cu と Au の合金の

Compound である。 50% (Cu Au) 25% (Cu₃ Au) の

場合である。 これは regular lattice である。 periodic field

の存在による。 closed inner shell である metal

(transition metal である) の場合である。

これは 1874 年 closed inner shell である metal

(transition metal である) の場合である。

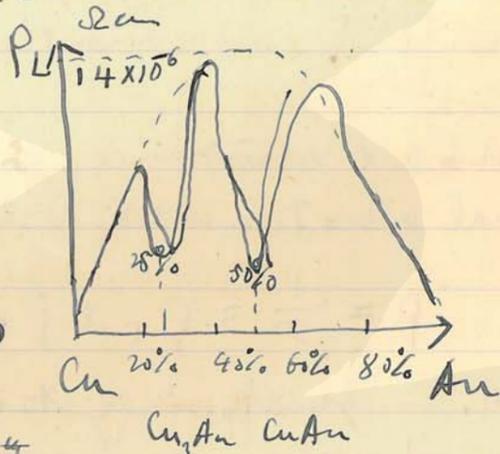
Thermal Conductivity の場合も $\frac{1}{\kappa}$ に impurity が入ると Zusatzglied がある。

これは $\frac{1}{\kappa}$ の場合も Zusatzglied がある。これは 1874 年のものである。

これは 1874 年のものである。

$$\frac{1}{\kappa} \sim \frac{1}{\rho} \sim T$$

これは Wiedemann-Franz の法則である。



temperature gradientの事

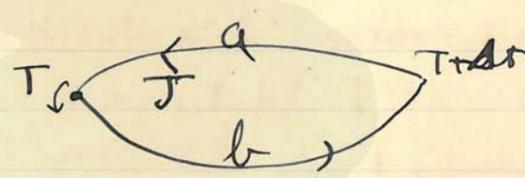
又 \vec{v} metal 中の electric current \vec{J} (電流) と, この current
 の 向き 温度 勾配 の 方向 逆 向きの 所 へ 進む? (これは Joule 熱
 の 向き 温度 勾配 の 方向 逆 向きの 所 へ 進む? (これは Joule 熱
 の 向き 温度 勾配 の 方向 逆 向きの 所 へ 進む? (これは Joule 熱

これは Thomson-effect である. elect-^{on} current の
 向き temperature gradient と 同 向きの 所 へ 進む.

又 thermoelectric current を 流 した 時 へ junction へ 付 いて
 Joule's heat 以外 の 熱 が 発生 する こと が あり 得 る. これは Peltier effect
 である. (これは Joule's heat 以外 の 熱 が 発生 する こと が あり 得 る.)

これは 電流 の linear な 関 係 である.
 これら 3 つ の effect の 間 の 関 係 は 一 般 的 関 係 である.

thermo-couple を 用 いて 温度 の
 変化 を ΔT として 検 出 する こと が
 でき ます. Thermoelectromotive force



これは $\Phi(T) \Delta T$
 であり. この 場合 T は junction へ 生 じる heat を
 $P(T) J$

であり. $P(T)$ は Peltier Coefficient.
 a -metal の Thomson coeff heat (係数) を

$$- \mu_a J \Delta T$$

であり. μ_a : Thomson Coeff.
 b -metal の 場合
 $+ \mu_b J \Delta T.$

$T + \Delta T$ の junction へ 生 じる heat の 向き 逆 向きの 所 へ 進む
 $- P(T + \Delta T) J$

Joule's heat は $J^2 R$ であり. J が 小 さい 所 へ 無 視 可 能.
 Energy Conservation Law を 用 いて 検 出 する こと が でき ます.
 検 出 される 熱 $J \Phi(T) \Delta T$

Work done by the heat current J is $J \phi(T) \Delta T$.
 Lattice vibration energy $\propto T^3$ and electron kinetic energy $\propto T$.
 Heat current J is related to the temperature gradient $\frac{dT}{dx}$ and the Peltier coefficient π .

$$- P(T+\Delta T) J + P(T) J - (\mu_a - \mu_b) J \Delta T$$

in the limit $\Delta T \rightarrow 0$, limit is $\pi = \frac{dP(T)}{dT} + \mu_a - \mu_b$

$$\pi + \phi(T) = \frac{dP(T)}{dT} + \mu_a - \mu_b$$

For Peltier or Thomson effect, reversible processes, Entropy is constant $\frac{dS}{dt} = 0$.

$$-\frac{P(T+\Delta T) J}{T+\Delta T} + \frac{P(T) J}{T} + \frac{\mu_a J \Delta T}{T} + \frac{\mu_b J \Delta T}{T} = 0$$

in the limit $\Delta T \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{P(T)}{T} \right) + \frac{\mu_a - \mu_b}{T} = 0$$

$$\pi + \phi(T) = \frac{P(T)}{T}$$

$$\frac{d\pi}{dT} = \frac{\mu_a - \mu_b}{T}$$

Then, Thomson coefficient τ is derived from the above relation.

For homogeneous metal, heat current J and electric current I flow in the same direction. The density of heat current is J and the density of electric current is I . For unit time and unit volume, the work done is W .
 The field is independent of J . $\tau = \frac{1}{I} \frac{dW}{dJ}$

$$W = JF - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\tau = \frac{1}{I} \frac{dW}{dJ}$

$$W = JF - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

temperature gradient $\frac{\partial T}{\partial x}$ and electric field F are related by $F = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$W = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{J^2}{e^2} \left(\frac{1}{T} \frac{L_1}{L_0} - \frac{\zeta}{T} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

これは Joule's Heat, Thomson Heat
 Heat Conduction である。これは \$v\$

Free Fermi gas の \$v\$ は Thomson Coef. \$v\$
 mean free path \$= \frac{1}{\tau} \frac{L_1}{L_0}\$

$$\mu \approx \frac{k^2 T \pi^2}{e^3} \frac{\partial \log(L_1/L_0)}{\partial E} \Big|_{E=E_0} \approx \frac{k^2 T \pi^2}{e^3} \frac{1}{E_0}$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_0}{kT}} + 1}$$

これは \$E_0\$: Fermi の cutoff Energy
 Thomson Coef. \$v\$ は \$T\$ による。金属の \$E_0\$ は \$T\$ による。

\$a, b\$ 金属の thermoelectromotive force \$v\$

$$\varphi_{ab} = \frac{k^2 T \pi^2}{e^3} \left(\frac{1}{E_{0a}} - \frac{1}{E_{0ba}} \right)$$

$$P_{ab}(T) = - \frac{k^2 T^2 \pi^2}{e^3} \left(\frac{1}{E_{0a}} - \frac{1}{E_{0b}} \right)$$

\$E_0\$ は volt の order である。
 $\varphi_{ab} \sim 10^{-5}$ volt/degree
 の order である。

Thomson Coef. は \$150^\circ\$ abs. である。

Alkali Metal の Thomson Coef. は \$v\$

	Li	Na	K	Rb	Cs
Th. in Mikrovolt/degree	+0.016	+0.023	+0.036	+0.041	+0.048
Em.	-0.05	+0.048	+0.045	+0.085	+0.076

1.1. 条件.

$$\frac{m v c}{f_k e H} \gg v \tau$$

or $H_0 = \frac{m c}{e f_k \tau} \gg H$

か弱い場合もある。反転は

$$H_0 \frac{m c}{e f_k \tau} \ll H$$

trans with saturation effect があるから

$$\sigma = A \sigma_0 \quad A > 1 ?$$

trans 条件下.

$$A = \frac{(\overline{f_k^{-1}})^2}{\tau \cdot (\tau \overline{f_k^2})^{-1}} < 1.$$

$$\begin{aligned} \therefore (\overline{f_k^{-1}})^2 &\leq \tau (\tau \overline{f_k^2})^{-1} \\ \tau \overline{f_k^2} &\leq \frac{\tau^2 \overline{f_k^2}}{\tau \overline{f_k^2}} \\ &= \sum (\tau x - \frac{1}{\tau f_k^2})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

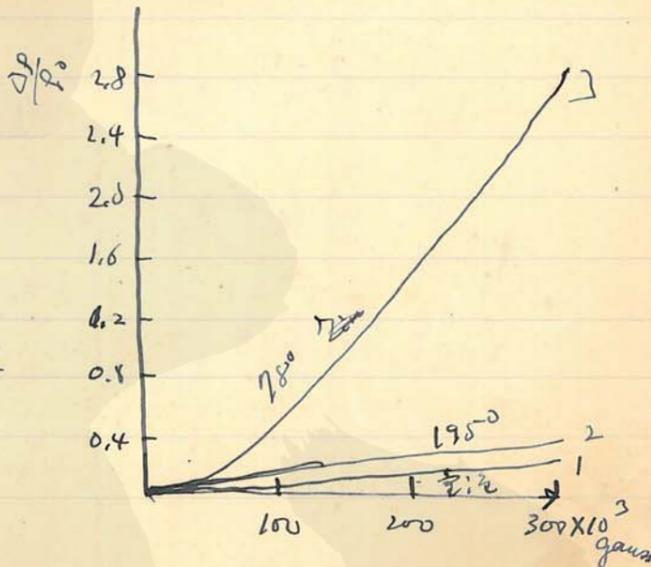
10⁵ - 10⁶ gauss 程度であるから H₀ >> H の場合もあるかも知れない。

Kapitza 効果 Mg について

H の値が小さいとき H² になる
 大きいとき linear

Hall Constant と Resistance の変化
 の場合

$$\frac{\Delta P}{P_0} = R^2 \sigma_0^2 \cdot C \cdot H^2$$



同周の平均

$$C^2 = \frac{f_{kT}^2 \bar{v} - f_{kT}^2}{\bar{v}^2 \tau_{mf}^2} > 0$$

Li Ca

② 2E 平均の値 9212 R2x

Zn Cd Al Pb Bi

Li Na K Cu Ag Au Mg ~~Al~~ ~~Pb~~

$\cdot R \cdot 10^4$ 17 21 42 6.1 8.4 7.4 9.4 -10 -6 3.4 -0.9 $5 \cdot 10^4$

f_m 0.9 0.8 0.3 0.4 0.4 0.5 0.2 -0.3 -0.2 0.06 -0.2 120

C 1.3 ~~1.2~~ 1.2 1.8 7 4 13 3 - 1.3

③ f_k の平均

mean

electron unit の 5 の 平均 172 R2x

the state の current density J / one-dimension case

$$I_n = \frac{e}{h} \frac{\partial E}{\partial k}$$

同周. v の effective velocity v

$$v = \frac{1}{h} \frac{\partial E}{\partial k}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \pm \sqrt{v_i^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2} \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \delta}{\pm \sqrt{v_i^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}} = \frac{\hbar}{m} J_k$$

$$f_k = \pm \frac{v_i}{\sqrt{v_i^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}} = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}}$$

$$f_k = \frac{\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \delta}{\pm \sqrt{v_i^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{ka} \right)$$

	Li	Na	K	Cu	Ag	Au	Al	Pb	Bi
$-R \cdot 10^4$	17	21	42	6.1	9.4	7.4	3.4	-0.9	$5 \cdot 10^4$
$\frac{n_F}{n}$	0.7	0.95	0.85	0.5	0.8	0.7	0.2	0.4	0.05
f_{eff}	0.9	0.8	0.8	0.4	0.7	0.5	0.06	-0.02	1.20

② f_{eff} の意味, mean

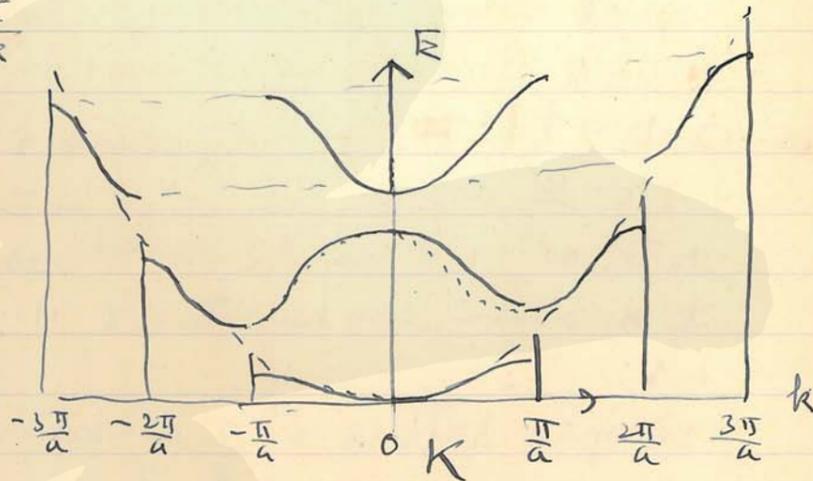
the state a current density is one-dimensional 1D system
 electron or $\vec{I}_k =$ unit length of the system

$$\vec{I}_k = \frac{-e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$$

is the effective velocity v

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$$

almost free and with energy level E and k



k wave number k

$$k = K - \frac{2\pi}{a} n$$

n : integer

is the wave number $|K| \leq \frac{\pi}{a}$

the K is the reduced wave number K (i.e.) K is the energy E band (n is the energy level)

the K is the energy E band (n is the energy level)

the K is the energy E band (n is the energy level)

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

is the energy E band (n is the energy level)

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{2\pi\delta}{a}\right)^2} \right)$$

$$\therefore v = \frac{\hbar k}{m} \pm \frac{2\pi\delta}{a} = \frac{\hbar k}{m} \pm \frac{2\pi\delta}{a}$$

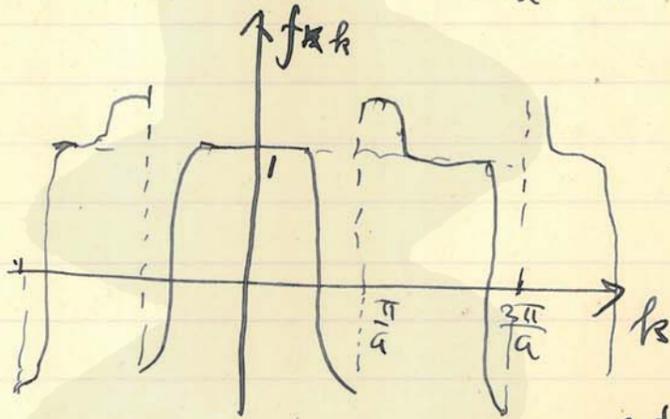
$$f_k = \frac{\hbar k}{m} \pm \frac{2\pi\delta}{a}$$

$$\approx \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} \pm \dots \left(|v'|^2 \right) + \frac{(\frac{\pi}{a})^2 \delta^2}{|v'|^4} \right\}$$

$$E = \text{const} + \frac{\hbar^2}{2m} f_k \delta^2$$

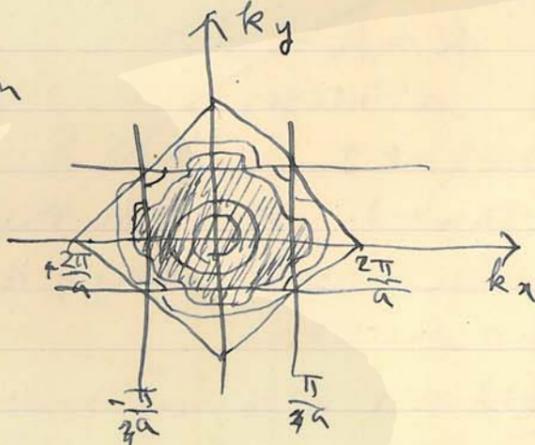
$$f_k = \pm \frac{(\frac{\pi}{a})^2}{|v'|^2}$$

$+$: $-\frac{\hbar}{2a} + v$
 $-$: $\frac{\hbar}{2a} + v$

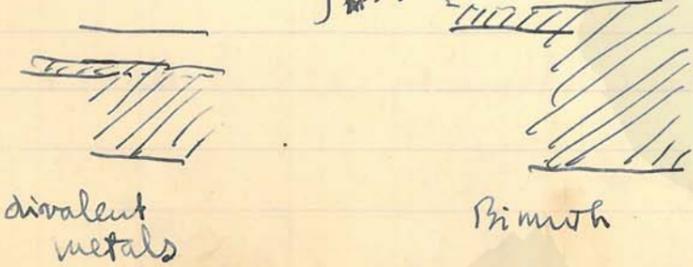


○上の金属元素は 2 価の Mg, Zn, Cd, Al 等の
 小さな正の帯電状態 negative 状態の filled
 state の 1st band と 2nd band の間に空の状態が
 ± の差を compensate (2) する状態をとる

simple lattice の 2 dimension
 の場合の energy levels
 の図の如くである。



Brillouin の場合の相違点を示す
 図の如く



divalent metals

Bismuth

この物質の susceptibility per mol

$$\chi_L = \frac{M}{H}$$

ここで \$V\$ は mol volume

と \$M\$ は \$T\$ と \$H\$ の関数

$$M = M(H, T)$$

この問題を Thermodynamics の 適用する

として, 1 unit volume の magnetise した substance

の energy content を \$U\$, entropy を \$S\$, magnetic

field を \$H\$ とする. energy を \$U\$ とし \$T dS\$

と magnetic field による work \$H dM\$

を考慮する. すると

$$dU = T dS + H dM$$

Maxwell's field eq. である

$$-\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) d\mathbf{v} = \int (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\mathbf{v} + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) d\mathbf{f}$$

これを unit volume として \$dt\$ の変化を

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B})$$

とすると, \$\mathbf{E} = \mathbf{D}\$, \$\mathbf{H} = \mathbf{B}\$ であるから \$d(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi})\$ である.

したがって

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{H dM}{T}$$

\$M, T\$ を indep. variable とする

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M \quad \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - \frac{H}{T}$$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial M \partial T} = \frac{\partial}{\partial M} \left\{ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M \right\} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \right\} - \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{H}{T} \right\}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = H - T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$$

したがって, \$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M = \delta_M\$ である. 2nd magnetisation eq. は

$$dQ' = T dS = dU - H dM \quad !!! = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - H\right) dM$$

$dU = T dS - H dM$
 $dQ' = T dS = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H dT + T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH$
 $H \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T + T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H = \left(\frac{\partial U}{\partial H} \right)_T$

γ_H , unit volume of substance の specific heat
 energy, γ_H の specific heat

$$dQ' = T dS = \gamma_H dT - T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M dM$$

adiabatic $(dS = 0)$ substance の magnetisation
 caloric effect

H, T indep. variable
 $dQ' = T dS = \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H - H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \right\} dT$
 $+ \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial H} \right)_T - H \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T \right\} dH$

$$\gamma_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H - H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

field is const.

unit of specific heat
 U of M, T

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

$$\therefore \gamma_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H - H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

$$= \gamma_M - T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

magnetisation specific heat anomaly
 Ferromagnetism Curie point

volume of substance の volume

field κ , pressure p unit and volume V and charge Q

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{H^2}{2} \left(\chi \kappa - \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)$$

$\frac{\partial \chi}{\partial p} \approx \chi \kappa - \frac{1}{2}$
 $\frac{\partial \chi}{\partial p} \approx \chi \kappa - \frac{1}{2}$

in substance χ is the susceptibility χ and κ is

$$dU = TdS + HdM + \sum \lambda dl$$

var. χ , \sum mass of the l is the force F is

var

$$\left(\frac{\partial l}{\partial H} \right)_Z = \left(\frac{\partial M}{\partial Z} \right)_H$$

of the force, χ is N_i of the force F is field κ ,
 Z is the force F .

$$M = \frac{CH}{Z}$$

the force F is

$$\therefore \left(\frac{\partial l}{\partial H} \right)_Z = \frac{CH}{Z} \left(\frac{\partial l}{\partial Z} \right)_H - \frac{l}{Z}$$

Young's modulus $D = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial Z}$

var

$$-\frac{\Delta l}{l} = \frac{CH^2}{2Z^2} (1 - 2D)$$

var.

in the phenomenological friction of the force F is

var. $\frac{\partial M}{\partial p} \approx \frac{\partial M}{\partial Z}$ is the force F is

in the force F is the force F is

この \$M\$ の mean value polarization

この \$M\$ は magnetic moment の microscopic property から deduce して \$\vec{M} = \sum \vec{m}_i\$ となる。
 この \$M\$ は stationary state の \$M\$ の mag. moment を \$M_s\$, energy を \$E_s\$ とする。Maxwell-Boltzmann の分布に従って、この state の 確率 \$P_s\$ は

$$P_s = \frac{e^{-\frac{E_s}{kT}}}{\sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}}}$$
 mag. moment の平均値は

$$M = \frac{\sum_s M_s e^{-\frac{E_s}{kT}}}{\sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}}}$$

この \$M\$ は \$N\$ 個の particle による。それぞれの charge を \$e\$ とし、\$e_1, e_2, \dots, e_N\$ である。その momentum を \$p_1, p_2, \dots, p_N\$ とする。\$x_i, y_i, z_i, \dots, p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, \dots\$ とする
 magnetic field の中の total energy は Hamiltonian である。

$$E = E(x_1, y_1, z_1, \dots, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, \dots)$$

この \$E\$ は vector potential \$\vec{A}\$ による Hamiltonian

$$E = E(x_1, y_1, z_1, \dots, p_{xi} - \frac{e_i}{c} A_{xi}, \dots)$$

この \$E\$ は \$H\$ の field による。
 粒子の運動方程式は Lagrange の方程式である。この \$H\$ は Hamilton の方程式に従う。
 この \$H\$ は uniform field による。

$$A_x = -\frac{H}{2} y, \quad A_y = +\frac{H}{2} x, \quad A_z = 0$$

$$\text{curl } A = H \hat{z}$$

ε < μ < μ₀ ... か S.

$$E = E(x_i, y_i, z_i, p_{x_i} + \frac{He_i}{2c} y_i, p_{y_i} - \frac{He_i}{2c} x_i, p_{z_i})$$

∴ $\frac{\partial E}{\partial H} = \sum_i \left(\frac{e_i y_i}{2c} \frac{\partial E}{\partial p_{x_i}} - \frac{e_i x_i}{2c} \frac{\partial E}{\partial p_{y_i}} \right)$

Hamilton の eq. により, $\dot{x}_i = \frac{\partial E}{\partial p_{x_i}}$ $\dot{y}_i = \frac{\partial E}{\partial p_{y_i}}$

$$\therefore -\frac{\partial E}{\partial H} = \sum_i \frac{e_i}{2c} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

∴ 磁気 moment の期待値 $\langle M \rangle = -\frac{\partial E}{\partial H}$ の magnetic moment を得る.

$$\therefore M = -\frac{\partial E}{\partial H}$$

or magnetic moment の operator \hat{M} により, $\langle M \rangle = \int \Psi^* \hat{M} \Psi d\tau$ の mean value M_s は

$$M_s = \frac{\int \Psi^* \hat{M} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} = \int \Psi^* \hat{M} \Psi d\tau$$

∴ $M_s = \int \Psi^* \frac{\partial E}{\partial H} \Psi d\tau$ (∵ H の parameter χ / c だけ変化するから $M_s = \int \Psi^* \frac{\partial E}{\partial H} \Psi d\tau$)

$$E_s(H) = \int \Psi_s^*(H) E(H) \Psi_s(H) d\tau = -\frac{E_s}{kT} = -\frac{\partial}{\partial H} \int \Psi_s^* E \Psi_s d\tau$$

$$\therefore M = \frac{-\sum_s \left(\frac{\partial E_s}{\partial H} \right) e^{-\frac{E_s}{kT}}}{\sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}}}$$

$$= kT \frac{\partial}{\partial H} \log \left\{ \sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}} \right\}$$

$$= kT \frac{\partial \log Z}{\partial H} \quad Z = \sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}}$$

$$dU = Tds + HdM$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_S \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T + T \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T$$

$$\frac{\partial S}{\partial H} d(U - ST - HM) = -SdT + MdH \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H !!$$

a) Diamagnetism,

2. Diamagnetism of Atoms and Molecules
 classical theory - all atom, molecule of electron in
 magnetic fields \rightarrow Larmor precession \rightarrow induced
 magnetic moment

$$M = - \frac{e^2 H}{8\pi m c^2} \sum_i r_i^2$$

これは、Larmor precession の原因である。

1. r_i は各電子の nucleus からの距離。

— は平均値、 e は電荷。

この式は、Larmor precession による誘起磁化を示す。

2. r_i^2

これは、核磁場の potential

average $V(x_i, y_i, z_i)$, H の magnetic field に対する
 vector potential $\left(\frac{H}{2} y_i, -\frac{H}{2} x_i, 0\right)$ に対する
 atom/molecule の nucleus からの距離 r_i を neglect して

$$E = \sum_i \left\{ \frac{1}{2m} \left(p_{xi} + \frac{He}{2c} y_i \right)^2 + \left(p_{yi} - \frac{He}{2c} x_i \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2m} p_{zi}^2 + V(x_i, y_i, z_i) \right\}$$

とすると、

この式は

$$E = \frac{p_i^2}{2m} + V - HM + H^2 \frac{e^2}{8\pi m c^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

これは、Larmor precession による

この式は、perturbation theory による、perturbation theory
 による energy の approximate value $E^{(0)}$ に対して、 H^2 の order
 の修正を示す。

0. order $(E^{(0)}, \psi^{(0)})$ である。

normalized

$$E_s = E_{s0} - HM_{ss} + H^2 \frac{e}{4mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} - H^2 \sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r - E_s}$$

$M_{rs} = \int \tilde{\Psi}_r M \Psi_s dv$
 $M_{ss} = \int \tilde{\Psi}_s M \Psi_s dv$
 $M_{ss} = \int \tilde{\Psi}_s (x_i^2 + y_i^2)_{ss} \Psi_s dv$

state with its mean mag. moment is

$$M_s = -\frac{\partial E_s}{\partial H} = M_{ss} - \frac{He}{4mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} + \frac{2H}{\sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r - E_s}}$$

field with its

state with its mean moment of the field is

the normal state with its

atom, molecule or electron or normal state with its
 or degenerate states

$$M_{ss} = 0$$

the moment of the state is

atomic or ion of the nuclear field

$$M = -\frac{e}{2mc} \text{ ang. mom.}$$

ang. mom. in H=0 and with const. vs E commutes

故、 ψ の non-diagonal element $M_{rs} (r \neq s) = 0$ の故、
 \therefore 平均磁化は

$$M_s = -\frac{Ne^2}{4mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_s$$

この場合の平均値、 $(x_i^2 + y_i^2)_s = \frac{2}{3} (r_i^2)_s$

$$\therefore M_s = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_i (r_i^2)_s$$

故より、susceptibility は unit volume ϕ の atom の数 N として

$$\chi = N M_s / H = N \frac{\partial M_s}{\partial H}$$

$$= -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_i (r_i^2)_s$$

これは classical theory の結果と一致する、原子核の位置
 の平均値を考慮して、

molecule の場合でも、nuclear field は central
 symmetric である、 M は constant である。故より上の
 平均値を neglect 出来る。故に diamagnetic
 susceptibility である。electron orbit の mean dimension
 は定数である。よって χ は positive である

$$\chi > -\frac{Ne^2}{48mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_s$$

より、この場合でも、^{higher} excited state への thermal
 excitation による寄与は、diamagnetic suscepti-
 bility は temperature に independent である。

Diamagnetic atom の最も簡単な例は Helium である。この場合
 の 2 つの s electron は 球対称的な spherical symmetric
 charge distribution である。これは Hartree の計算から得られる。
 Ex: Uranium mol の χ の susceptibility は

$$\chi = -1.86 \times 10^{-6}$$

つまり、 χ_M は $\chi = -1.88 \times 10^{-6}$ と計算される。これは、

ion の Alkali ion である。例として Na^+ の場合の計算。

ion の K^+ は Halogen ion K^+, Cl^- の場合の計算。

計算値は -13.5 Cl^- 40 (23)

2. Noble Gas A: 25 (18) の場合の計算はより複雑である。

これは

$$\chi_M = -2.83 \times 10^{10} \int_0^\infty r^4 \left(\frac{dN}{dr} \right) dr$$

($\frac{dN}{dr}$ は unit radial distance での charge)
 の計算は r^4 の積分が必要である。

塩化物の salt の 1 mol の susceptibility は

cation と anion の 1 mol の susceptibility の和である

alkali halogen	F^- 10	Cl^- 18	Br^- 36	I^- 54
Na^+ 10	19.6	29.6	(42.9)	(60.8)
K^+ 18	25.7	35.8	48.2	67.2
$(\text{NH}_4)^+$ 10	(24.5)	34.2	47.4	66.0

() : solution

$$- \chi_M \times 10^6$$

1% salt of solid の solution の χ の比の相違は

	solid	dissolved	ratio
NaCl	30.1	30.8	1.023
KCl	39.1	39.6	1.013

molecule の χ_m の値

$\chi_m \times 10^{-6}$: H_2 : 4.00 ± 0.05

N_2 : 12.00 ± 0.5

CO_2 : 20.8 ± 0.4

H_2 の場合 Van Vleck-London の理論から計算した値と Van Vleck の計算結果との差は Van Vleck の計算結果と一致する

$\chi_m = -4.15$

この値は H_2 の場合、

$(H+H) \dots - 2 \times 2.37 = 4.74$

$(N+N) \dots - 2 \times 7.89 = 15.78$

この値は H_2 の dia. suscep. の値と一致する

Diamagnetism は atom molecule にも存在するが、
 通常、この場合の paramagnetic effect より大きい。従って
 ほとんどの paramagnetic substance にも存在する。

§ 2. Diamag. of Metals

(atomic rest にも存在する)

metal の場合 free electron にも存在するが、
 通常、この場合の paramagnetic effect より大きい。従って
 ほとんどの paramagnetic substance にも存在する。
 Alkali metal の場合 valence electron を含んだ closed shell を作り、
 ほぼ central symmetric to charge distribution であり、
 従って diamagnetic suscep. に contribute する。
 従って atomic number が増えるに従って atomic radius
 も増える。従って 1 mol 当たりの χ_m の neg. value は大きくなる。

この free electron にも存在するが、classical theory
 での Zustandssumme $\sum \epsilon$ により H に依存する
 磁気 moment は 0 となる。
 resultant

quantum mechanics ψ \rightarrow free electron
 & mean mag. moment μ

$$M = \frac{-\sum_s \frac{\partial E_s}{\partial H}}{\sum_s \frac{1}{e^{\frac{E_s - \mu}{kT} + 1}}}$$

$$= kT \frac{\partial}{\partial H} \log \sum_s (1 + e^{\frac{\omega - E_s}{kT}})$$

unit volume ρ of free electron $\rho = N/V$ suscep. χ

$$\chi = \frac{NkT}{H} \frac{\partial}{\partial H} \log \sum_s (1 + e^{\frac{\omega - E_s}{kT}})$$

$\psi \sim \psi_0$

field H in z -dir \rightarrow apply $\vec{A} = H y \hat{x}$ $A_z = 0$
 ψ $E = \frac{1}{2m} [(p_x + \frac{e}{c} H y)^2 + p_y^2 + p_z^2] + V(y)$

metal block in y -axis \rightarrow $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ \rightarrow ψ \rightarrow ψ_0

mag. moment $M = -\frac{\partial E}{\partial H} = -\frac{e y}{m c} (p_x + \frac{e}{c} H y) = -\frac{e}{c} v_x y$

ψ a Hamiltonian ψ

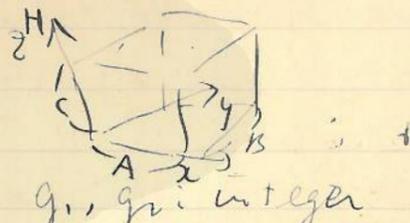
$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} H y \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] + V(y) \right\} \psi = E \psi$$

$$\psi = e^{i \frac{m \omega}{\hbar} (w x + p z)} v_w(y)$$

$$w = \frac{q_1 \hbar}{A} \quad p = \frac{q_2 \hbar}{C}$$

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\left(w + \frac{e}{c} H y \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] + V(y) \right\} v_w(y) = \epsilon v_w(y)$$

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + \epsilon$$



q_1, q_2 integer

in z direction y -axis motion $V = \frac{1}{2} m \omega^2 (y - y_0)^2$

$$y_0 = \frac{wc}{eH}$$

potential harmonic force $\omega = \frac{eH}{mc}$

$$E = (2n + 1) \hbar \omega$$

$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc} \quad \text{Bohr magneton}$$

discrete energy level $E = (2n + 1) \hbar \omega$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{e}{2c} H y \right)^2 + \left(p_y + \frac{e}{2c} H x \right)^2 + p_z^2$$

cylindrical coord. r, ϕ, z . wave eq

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{H e \hbar}{4\pi m c} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \left(\frac{e^2 H^2 r^2}{8m c^2} - E \right) \psi = 0$$

ϕ , z -axis motion

$$\psi = e^{i n_1 \phi} e^{i n_2 z} \phi(r)$$

n_1, n_2 integer

z axis motion harmonic oscillator $\omega = \frac{eH}{mc}$

$$E = \frac{p_z^2}{2m} + (2n_2 + |n_1| + 1) \hbar \omega$$

$$\omega = \frac{eH}{mc} \quad \mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc} \quad (2n_2 + |n_1| + 1) \mu_0 \cdot H$$

discrete energy level $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc}$ (Bohr magneton)

stationary state $\frac{\partial E}{\partial H}$ magnetic moment is

$$-\frac{\partial E}{\partial H} = -(n_1 + |n_1| + 2n_2 + 1) \mu_0$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{eHv}{c} \quad \frac{mcv}{eH} = r$$

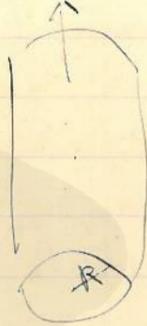
∴ discrete level is classical electron spiral orbit of boundary \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3}$. boundary of electron is classically no spiral orbit \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$.

∴ classical radius of orbit is

$$r = \sqrt{2mc^2 E} / eH = \frac{mcv}{eH}$$

∴ electron gas is

$$E_0 = \left(\frac{h^2}{8m} \right) \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$



∴ energy $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$: $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$: unit volume of electron

∴ free electron is state of μ . i) inner state (classical orbit of metal \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$) \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ magnetic moment contribution \rightarrow ii) boundary state (\rightarrow orbit of boundary \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$) \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$.

iii) outer state (orbit \rightarrow ...)

ii) iii) \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ boundary of \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ current \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$.

i), ii), iii) \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$ \rightarrow $\left(\frac{N}{V} \right)^{1/3}$.

∴

$$\bar{M} = \frac{kT}{h^2} \frac{eV}{h^2 c} \frac{\partial}{\partial H} \int_{-\infty}^{\infty} H dp \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + e^{\frac{1}{kT} (\omega - 2n+1) H \mu_0} \right)^{-1} \left(-\frac{p^2}{2m} \right)$$

$$\chi = \frac{4}{h^2} \frac{m \mu_0^2}{h^2} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3}$$

$$= \left(\frac{2e}{24\pi mc} \right)^2 \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3}$$

§5. Paramagnetism of Atoms and Molecules

Electron Spin

Paramagnetism of K^{II} & quantum theoretically $\sim \text{K}^{\text{II}}$. K^{II} is
 electron of K^{II} magnetic moment $\frac{eh}{4\pi mc}$ (Bohr magneton)
 of K^{II} is spin, \uparrow or \downarrow $\sim \text{K}^{\text{II}}$.

Dirac's ψ

$$\left\{ \frac{\nabla^2 + \frac{2E}{c^2} V}{c^2} + \sum_{k=1}^3 \alpha_k (p_k + \frac{e}{c} A_k) + \beta mc \right\} \psi = 0$$

$\therefore \psi \left[\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 (p_k + \frac{e}{c} A_k)^2 - eV + \mu_0 (\sigma H) + \frac{\mu_0}{2} (\sigma [E \cdot \frac{v}{c}]) \right] \psi = 0$

$$\left[\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 (p_k + \frac{e}{c} A_k)^2 - eV + \mu_0 (\sigma H) + \frac{\mu_0}{2} (\sigma [E \cdot \frac{v}{c}]) \right] \psi = 0$$

where $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc}$

where $v = \frac{1}{m} (p + \frac{e}{c} A)$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

where electron spin angular momentum $\sim \hbar$,
 $\mu_0 \sigma$ is magnetic moment $\sim \mu_0 \sigma$.

ψ function $\psi \Rightarrow$ comp. $\psi_1, \psi_2 \in \text{K}^{\text{II}}$. $|\psi_1|^2, |\psi_2|^2$
 is a electron or K^{II} , spin of z-axis is parallel or
 antiparallel orientation $\sim \text{K}^{\text{II}}$.

Orbital motion is angular momentum $\sim \frac{\hbar}{2\pi} R$
 is K^{II} , mag. moment $\sim \frac{e}{2mc} \frac{\hbar}{2\pi} R = \mu_0 R$

where total mag. moment $\mu_0 (R + 2S)$

where mag. moment & ang. momentum $\sim \text{K}^{\text{II}}$ - K^{II} is K^{II} ,
 \therefore is anomalous Zeeman effect of K^{II} (anomalous Zeeman effect)
 susceptibility of K^{II} is K^{II} .

各 electron の system の eigenfunction は electron の
 coordinate x_i, y_i, z_i 及び r_i の argument と θ_i, ϕ_i である。
 各 electron の total angular momentum は

$$\sum_i \left\{ \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i + \frac{\hbar}{4\pi} \mathbf{0}_i \right\}$$

したがって total orbital momentum magnetic moment は

$$\frac{e}{2mc} \sum_i \left\{ \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i + \frac{\hbar}{4\pi} \mathbf{0}_i \right\}$$

$$= \mu_0 \sum_i (\mathbf{L}_i + 2 \mathbf{S}_i)$$

この場合 total magnetic moment operator は
 $M = -\frac{\partial E}{\partial H}$ である。

§5: Paramagnetism of Atoms and Molecules

各 atom or molecule の state の energy は $E_s^{(0)}$ と H の field による
 2 次摂動 energy である。

$$E_s = E_s^{(0)} - H M_{ss} + \frac{H^2 e^2}{8mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} - H^2 \sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}}$$

各 state の Zustandssumme は $Z = \sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}}$ である。

$$Z = \sum_s e^{-\frac{E_s}{kT}} = \sum_s e^{-\frac{E_s^{(0)}}{kT}} \left\{ 1 + \frac{H M_{ss}}{kT} - \frac{H^2}{kT} \left[\frac{e^2}{8mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} - \sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} - \frac{(M_{ss})^2}{2kT} \right] \right\}$$

したがって $\sum_s e^{-\frac{E_s^{(0)}}{kT}} M_{ss} = 0$ である。これは magnetic field がない
 9 Z-comp. の state の energy の 0 次 state の M_{ss} が 0 であるからである。

$$\log Z = \log \sum_s e^{-\frac{E_s^{(0)}}{kT}} + \log \left[\sum_s e^{-\frac{E_s^{(0)}}{kT}} \left(1 + \frac{H M_{ss}}{kT} - \frac{H^2}{kT} \left[\frac{e^2}{8mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} - \sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} - \frac{(M_{ss})^2}{2kT} \right] \right) \right]$$

$$= \log Z_0 + \frac{H^2}{2_0 kT} \sum_s e^{-\frac{E_s^{(0)}}{kT}} \left[\frac{e^2}{8mc^2} \sum_i (x_i^2 + y_i^2)_{ss} - \sum_{r \neq s} \frac{|M_{rs}|^2}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} - \frac{(M_{ss})^2}{2kT} \right]$$

↑ の場合の M_z は z 成分 constant ではない。
 ↓ の場合も 第二項 $\frac{1}{2} \mu_B g_L$ がある。
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

従って mean magnetic moment \bar{M}

$$\bar{M} = kT \frac{\partial \log Z}{\partial H} = \frac{2H}{Z_0} \sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}} \left[\sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}} \right]$$

磁気 susceptibility χ

$$\chi = \frac{n}{\sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}}} \sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}} \left[\frac{(M_{SS})^2}{kT} + 2 \sum_r \frac{|M_{Sr}|^2}{E_r^{(0)} - E_S^{(0)}} - \frac{e^2}{4\pi c^2} (x_i^2 + y_i^2)_{SS} \right]$$

軌道磁気モーメント

↑ の場合 χ の分子は $\sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}}$ である。rigid nucleus の relative orientation $kT \ll E_r^{(0)} - E_S^{(0)}$ $\bar{p} = \frac{1}{2} \mu_B g_L$ である。

i) atoms or ions

atom の場合 χ の分子は normal energy level である。excited state level があるが $kT \ll E_r^{(0)} - E_S^{(0)}$ である。従って $\sum_S e^{-\frac{E_S^{(0)}}{kT}}$ の summation は normal level である。また $\sum_r \frac{|M_{Sr}|^2}{E_r^{(0)} - E_S^{(0)}}$ は negligible である。また $\frac{e^2}{4\pi c^2} (x_i^2 + y_i^2)_{SS}$ は negligible である。これは paramagnetic である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の magnetic moment M_S である。spin & orbital motion の coupling がある。Russell-Saunders の coupling である。resultant spin ang. mom. $\frac{h}{2\pi} S$ & resultant orb. ang. mom. $\frac{h}{2\pi} L$ の vector sum である。total ang. mom. $\frac{h}{2\pi} (L+S) = \frac{h}{2\pi} J$ である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の inner g. n. j である。normal state の excitation energy ϵ $kT \ll \epsilon$ である。normal state j である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の inner g. n. j である。normal state の excitation energy ϵ $kT \ll \epsilon$ である。normal state j である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の inner g. n. j である。normal state の excitation energy ϵ $kT \ll \epsilon$ である。normal state j である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の inner g. n. j である。normal state の excitation energy ϵ $kT \ll \epsilon$ である。normal state j である。

↑ の場合 χ の分子は normal state の inner g. n. j である。normal state の excitation energy ϵ $kT \ll \epsilon$ である。normal state j である。

$$\begin{aligned}
 & j_x^2 - l_x(l_x + s_x) \\
 &= j_x^2 - l_x^2 - j_x s_x + s_x^2 \\
 &= j_x^2 - l_x^2 + s_x - j_x s_x \quad 60
 \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{n}{2j+1} \frac{1}{kT} \sum_{m=-j}^j M_m^2$$

ここで M_m は Bohr の磁気モーメント, j は l, s 以外の constant of motion

$$M = \frac{eH}{2mc} \sum_i (x_i p_{yi} - y_i p_{xi}) + \frac{h}{2\pi} \sigma_{zi}$$

これは Hamiltonian の perturbation energy である。これは σ_{zi} である。

$$M = \frac{eH}{2mc} \frac{h}{2\pi} \left(m j_z + s_z \right)$$

これは j_z の diagonal である。diagonal element は m, s である。

$$S_z (j_x^2 + j_y^2 + j_z^2) = j_z (s_x j_x + s_y j_y + s_z j_z)$$

$$+ (s_z j_x - j_z s_x) j_x + (s_z j_y - j_z s_y) j_y$$

$$S_z (j^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} j_z \{ (j_x^2 - l_x^2) j_x + j(j+1) - l(l+1) + s(s+1) \}$$

$$- (\sigma_y j_x - \sigma_x j_y)$$

$$\text{etc. } \sigma_x = s_z j_y - j_z s_y = s_z l_y - l_z s_y = l_y s_z - l_z s_y$$

$$(j^2 - j^2) = 0$$

$$j_z \sigma_x - \sigma_x j_z = -i \sigma_y$$

$$j_z \sigma_y - \sigma_y j_z = +i \sigma_x$$

$$j_z \sigma_z - \sigma_z j_z = 0$$

これは angular momentum の j である。これは j の diagonal element である。

j は diagonal element である。これは diagonal element である。

$$M = \frac{eH}{2mc} \frac{h}{2\pi} \left(m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{j(j+1)} \right) \right)$$

試.

$$\therefore M_m = \mu_0 g m$$

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

Landé の g factor

(orbital angular momentum)

$$\sum_{m=-j}^j m^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{3}$$

paramagnetic ions

$$\therefore \chi = \frac{n}{3kT} \mu_0^2 g^2 j(j+1)$$

classical theory

$$\mu = \mu_0 g \sqrt{j(j+1)}$$

試.

orbital angular momentum $l=0$ の場合. $j=s, g=2$

$$\mu = \mu_0 2\sqrt{s(s+1)}$$

試.

(for all ions)

$$\chi = \frac{n}{H} \frac{\sum M_{ml} \frac{H M_{ml}}{kT}}{\sum l \frac{H M_{ml}}{kT}}$$

試. Langevin の理論と同様の saturation effect がある.)

この理論の application (rare earth の磁気的性質)

従って magnetic moment の単位は μ_B , Weiss の magneton

Z	K	L	M	N	O	P
57 La	2	26	26	10	26	1
58 Ce	2	26	26	10	26	2
...
71 Cp	2	26	26	10	26	1
72 Hf	2	26	26	10	26	2

	S	L	J	
La ⁺⁺⁺	0	0	0	5 ₀
Ce ⁺⁺⁺	1/2	3	5/2	2F _{5/2}
Pr ⁺⁺⁺	1	5	4	3H ₄
Nd ⁺⁺⁺	3/2	6	9/2	4J _{9/2}
Il ⁺⁺⁺	2	6	4	5J ₄
Sm ⁺⁺⁺	5/2	5	5/2	6H _{5/2}
Eu ⁺⁺⁺	3	3	0	7F ₀
Gd ⁺⁺⁺	7/2	0	7/2	8S _{7/2}
Tb ⁺⁺⁺	3	3	6	7F ₆
Dy ⁺⁺⁺	5/2	5	15/2	6H _{15/2}
Ho ⁺⁺⁺	2	6	8	5J ₈
Er ⁺⁺⁺	3/2	6	15/2	4J _{15/2}
Tm ⁺⁺⁺	1	5	6	3H ₆
Yb ⁺⁺⁺	1/2	3	7/2	2F _{7/2}
Cp ⁺⁺⁺	0	0	0	1S ₀

$\chi = \frac{\mu_B}{3kT} \frac{M'}{N(Z\mu')^2}$
 $M' = 4.97$
 $Z = 4.97 \cdot g \sqrt{j(j+1)}$

Atom	El.	l	s	j	g	Z _{cal}	Z _{exp} Cabrera	S. Meyer
58	Ce ⁺⁺⁺	3	1/2	5/2	6/7	12.5	11.4	13.8
59	Pr ⁺⁺⁺							
60	Nd ⁺⁺⁺							
61	Il ⁺⁺⁺	6	3/2	9/2	5/5	13.4		
62	Sm ⁺⁺⁺	5	5/2	5/2	2/7	4.2	8.0	7.0
63	Eu ⁺⁺⁺							

	K	L	M	N	O	P
La	2	26	26	10	26	1
Ce	2	26	26	10	26	2
Cp						14

70	Yb ⁺⁺⁺	3	1/2	7/2	8/7	22.5	21.9	22.5
71	Cp ⁺⁺⁺	0	0	0	0	0,0	diag.	diag.

Rare earths of 4f electrons \rightarrow incomplete shell
 $n=4, l=3 \rightarrow$ 4f orbitals, s or p orbitals.
 Van Vleck & Miss Frank's theory of temperature independence.
 Example: Samarium, Eu shows discrepancy.

$$\sum_{-s}^{+s} S^2 = \frac{S(S+1)(2S+1)}{3}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Ca ⁺⁺	d ²	Fe ^{d⁵}
Sc ⁺⁺	d ¹	Ni ^{d⁷}
V ⁺⁺	d ²	Na ^{d⁸}
Cr ⁺⁺	d ³	Cu ^{d⁹}
Mn ⁺⁺	d ⁴	Zn ^{d¹⁰}

Transition elements

溶液中 Sulphate, solution of ... 2 Fe⁺⁺ 2 Ni⁺⁺

in a Iron Group 20 Ca⁺⁺ ... 28 Ni⁺⁺ n=3, l=2

of incomplete shell etc.

この場合 n は multiplet separation of d-s-orbit

この atom の field により spin と orbit の coupling の結果として ... 上の n は simple ではない

よって ... 20 Ca ... 28 Ni ... asymmetric field ... orbital mag. moment ...

ii) Molecule

diatomic molecule の場合 ...

nuclear spin ...

angular momentum l_z, s_z

は constant である



→ stationary state ...

Σ Π A (L component is l_z or s_z)

multiplet separation >> kT ...

$$M = \mu_0 \cos \theta (l_z + 2s_z)$$

$$\chi = \frac{n \mu_0^2}{kT} (l_z + 2s_z)^2 \cos^2 \theta$$

$$= \frac{n \mu_0^2}{3kT} (l_z + 2s_z)^2$$

l_z と s_z は independent

multisep. << kT ... S vector is

nuclear spin ... orientation ...

... S_z ... 2S+1 ...

prob. ... equal ...

$$\therefore \chi = \frac{n \mu_0^2}{kT} (l_z^2 \cos^2 \theta + \frac{4}{2S+1} \sum_{S_z} S_z^2)$$

$$= \frac{n \mu_0^2}{3kT} (l_z^2 + 4S(S+1)S(S+1))$$

$$= \frac{n \mu_0^2}{kT} (l_z \cos \theta + 2S_z)^2$$

§ 6. Paramagnetism of Free Electrons

自由電子の金属中の diamag. 効果は spin だけ。orbital motion による diamagnetism と spin orientation による paramagnetism とは indep. である。superpose して total になる。free electron の spin-orbit coupling はない。この場合の electron の Hamiltonian は Schrödinger の

$$\left\{ \frac{1}{2m} p^2 + \mu_0 \sigma_z H \right\} \psi = E \psi$$

mag. field の効果は energy の perturbation $\pm \mu_0 \sigma_z H$ for $\sigma \parallel H$ or $\sigma \text{ anti} \parallel H$. $E^{(0)} = \frac{1}{2m} p^2$

金属中の自由電子の total mag. moment は $M = N \mu_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\beta \mu_0 H}}{1 + e^{-\beta \mu_0 H}} \right)$

$$M = N \int \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z \left\{ \frac{-\mu_0}{e^{\frac{E_0 + \mu_0 H - \mu_0}{kT}} + 1} + \frac{\mu_0}{e^{\frac{E_0 - \mu_0 H - \mu_0}{kT}} + 1} \right\}$$

$$\int \left\{ \frac{1}{e^{\frac{E_0 + \mu_0 H - \mu_0}{kT}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{E_0 - \mu_0 H - \mu_0}{kT}} + 1} \right\} dp_x dp_y dp_z$$

通常の自由電子 gas は degenerate である。

$$M = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \mu_0^2 \frac{1}{2} H$$

よって $N = \frac{8\pi V (2m)^{3/2}}{3 h^3} \cdot \frac{E_0^{3/2}}{2}$

$$\therefore \chi = 12 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{\mu_0^2 n^{1/3} m}{h^2}$$

例1. $n = \frac{N}{V}$.

この場合 free electron による paramagnetism の値は温度に独立である。これは Curie の法則と一致する。
 例2. Alkali metal Na, K, Rb の場合、温度に独立な paramag. の値を算出すると、これらは、
 自由電子による diamag. の値と一致する。

$$\chi = 8 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \mu_0^2 n^{\frac{1}{3}} m$$

	Na	K	Rb	Cs
算出値 $\times 10^7$	5.8	5.1	0.6	-0.5
実験値 $\times 10^7$	4.88	3.4	3.26	3.02

例3. この場合 Pauli の理論の算出値と実験値 - 自由電子による、
 自由電子による valence electron による ion による diamagnetism
 は 1 mol につき、

	Na	K	Rb	Cs
χ_{Pauli}	15.6	23.6	27.2	34.7
$\chi_{\text{diamag.}}$	-4.2	-16.7	-31.3	-45.7
$\chi_{\text{diam. London}}$	-625.2	-7.9	-9.0	-10.8
χ	6.2	-1.0	-13.1	-24.2
Exp. Lane	15	21	18	29

この場合、算出値と実験値は一致する。

自由電子による valence electron の自由電子による ion による diamagnetism
 は 1 mol につき、quantitative に一致する。

2	16-23	6	-13
14	19	17	28
14	20	6	-3

$\times 10^{-6}$

T - 2nd order transition
 $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ resultant spin
 $\vec{L} \rightarrow$ mag. moment μ $g \mu_B$ $g = 2$ 64

Ferromagnetism & classical theory - 定常状態 (Steady state) の場合
 P. Weiss (1907) の仮定より

ferromagnetic substance 中の external field H の場合, internal field H' は H と M の和である. resultant field H'

$$H' = H + \nu M$$

結果として,

classical theory with $2j+1$ states in ferromag. substance の mag. spin μ の場合

$$M = n \mu_0 \left(e^{\frac{H' \mu_0}{kT}} - e^{-\frac{H' \mu_0}{kT}} \right) / \left(e^{\frac{H' \mu_0}{kT}} + e^{-\frac{H' \mu_0}{kT}} \right)$$

$$M = n \mu_0 \left\{ \frac{2j+1}{2j} \coth \left(\frac{2j+1}{2j} \frac{H' \mu_0}{kT} \right) - \frac{1}{2j} \coth \left(\frac{H' \mu_0}{kT} \right) \right\} = n \mu_0 \tanh \frac{H' \mu_0}{kT}$$

$$= 2 \coth \frac{2j+1}{2j} \frac{H' \mu_0}{kT} - \coth \frac{H' \mu_0}{kT} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

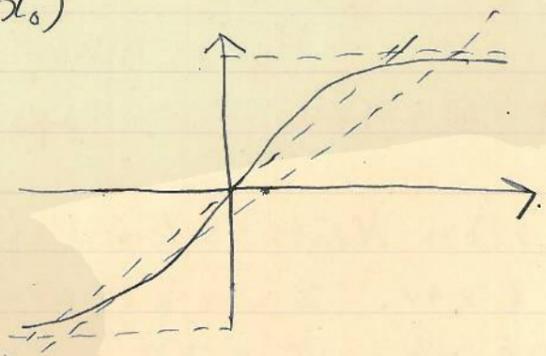
$x = \frac{H' \mu_0}{kT}, x_0 = \frac{H \mu_0}{kT}$

$$y = \frac{M}{n \mu_0} = \tanh x$$

$$y = \frac{kT}{n \mu_0^2 \nu} (x - x_0)$$

定常状態, magnetic field

$H = 0$ の場合
 $\frac{kT}{n \mu_0^2 \nu} < 1$ or $T < \frac{n \mu_0^2 \nu}{k} = \Theta$



spontaneous magnetisation

Curie point Θ $\Theta = 1040^\circ$ (Fe)

saturation magnetisation M_s

$n \mu_0 = 1700$ G $\nu \approx 0.9 \cdot 10^4$

classically μ の場合

$T < \Theta$ $x_0 = \frac{H \mu_0}{kT}$ の場合, 定常状態 magnetisation は Θ の値をとり得る.

©2022-YHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$M_0 = n\mu_0 \left(1 - 2e^{-\frac{2\mu_0}{T}}\right)$$

$$\approx n\mu_0 \left(1 - 2e^{-\frac{2\mu_0}{T}}\right)$$

これは hysteresis の現象を説明する式である。

これは、上の磁気分子の molecular field
 $\mu M = 1.5 \cdot 10^7$ gauss

これは hysteresis の現象が起るには約 100 gauss の field
 である。これは非常に小さい。これは、この rotation + M の結果、
 磁気的 stable 状態にある。

field の方向を逆にすると M も反転する。この現象は、単結晶、
 single crystal での時間経過、磁気的 remanent magnetization
 である。

(Hyst. による磁気的安定)
 Spontaneous Mag. の場合、
 $T \ll \Theta$ の場合、

$$M_0 \approx n\mu_0 \left(1 - 2e^{-\frac{2\mu_0}{T}}\right)$$

spontaneous magnetization
 の temp dep は、
 $j = \frac{1}{2}$ の場合、
 磁気的安定、
 electron spin の
 相互作用による。

T が大きくなるにつれて、 M_0 は、 $T = \Theta$ まで減少する。
 $T \approx \Theta$ の場合、

$$M_0 \approx n\mu_0 \sqrt{3\left(1 - \frac{T}{\Theta}\right)}$$

$T > \Theta$ の場合 $M_0 = 0$ 。paramagnetic case.

これは Weiss の理論は ferromag. の場合、
 磁気的安定、
 $M_0 \approx n\mu_0 (1 - cT^{-2})$

$$M_0 \approx n\mu_0 (1 - cT^{-2})$$

である。

これは Weiss の理論は molecular field の origin である。

これは、classical 磁気分子、magnetisation による force
 の結果である。これは 1 の order である。

これは、metal 中の block 磁気分子の Curie point である。
 これは、magnetise した状態である。これは、
 elementary magnet である。これは、
 resultant である。

Quantum
 §2. Heisenberg's theory of Ferromagnetism

電子間の相互作用を説明する材料がある。

電子の spin の orientation が同じ方向を向く \rightarrow ferromagnetic, spin-spin の coupling が Weiss の intermolecular force となる。この magnetic interaction は $\propto \frac{1}{r^3}$ 。Electron exchange による Kraft が $\propto \frac{1}{r^2}$ 。これは classical である。mag. interact は $\propto \frac{1}{r^3}$ 。

He atom の場合 \rightarrow He atom 2 個, 2 個の Ortho- (Triplet) Para- (singlet) の状態。この間の intercomb. は許される。spin は 1/2, 2 個の spin は anti-1/2。

Ortho の方は Pauli principle による electrons の場所を同じにする。その eigenfunc は anti, 2 個の spin は syn. 故に electrons の mean distance が 2 個の spin が anti である level は低くなる。この level は mag. dipole による \rightarrow 遷移が許される。

この相互作用が ferromagnetic metal 中の電子の electron を apply したのが Heisenberg, & Dorfman, & Frenkel である。

↑ 2 個 level 間の electron Austausch の integral $\int \psi_1 \psi_2$ の total spin S の \rightarrow state の \rightarrow multiplicity の separation である。

metal block 中の N 個の electron (ferromagnetic) を \rightarrow 2 個 \rightarrow 2 個。 \rightarrow 2 個の electron 中 γ 個の spin が up \rightarrow 残りの $N - \gamma$ 個は spin が down, resultant の spin は

$$m = \gamma - \frac{N}{2}$$

である。

① $Z(S)$ は S のエネルギー準位の和 $\sum e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$ である。
 ② $Z(S)$ は S のエネルギー準位の和 $\sum e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$ である。
 ③ $Z(S)$ は S のエネルギー準位の和 $\sum e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$ である。

例 1. N 個の electron の resultant spin は $0, \dots, \frac{N}{2}$
 の値をとり得る。各 S の multiplicity は $2S+1$ である。
 各 S の energy level は $\epsilon(S)$ である。
 multiplicity $2S+1$ の energy level $\epsilon(S)$ の state の数を $Z(S)$ とする。

④ $Z(S)$ は S のエネルギー準位の和 $\sum e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$ である。
 ⑤ $Z(S)$ は S のエネルギー準位の和 $\sum e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$ である。

$$Z = \sum_{S=0}^{\frac{N}{2}} \sum_{m=-S}^{+S} (2S+1) e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$$

例 2. 例 1. magnetic field H を apply したとき。

S の summation に対して S, m の分布は sharp になり、
 set sharp の max. value になる。
 $H \approx \frac{kT}{N\mu_0}$ の order である。
 field H が $m = -S$ になる。

$$\bar{m} = -S = \frac{1}{2S+1} \sum_{m=-S}^{+S} m e^{-\frac{\epsilon(S)}{kT}}$$

例 3. H が 0 のとき $\bar{m} = 0$ である。

$$\bar{m} = 0$$

例 4. H が 0 のとき $\bar{m} = 0$ である。
 この場合 $\bar{m} = 0$ である。

$$y = \frac{N}{2} \tanh \frac{x}{2}$$

$$y = \dots$$

66

$\bar{z} = \bar{s}$ かつ $\bar{z} < z$, \bar{z} の max 是

$$z(s) e^{-\frac{z(s)}{kT} + 2H\bar{s}/\mu_0} = W(\bar{s})$$

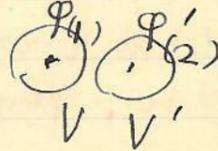
$$W(\bar{s} + 1) = W(\bar{s})$$

解の条件からなる。

解 v : 1 個あたりの

$$z(s) = \binom{2n}{n+s} \frac{2s}{n+s}$$

$$n = \frac{N}{2}$$



$$\bar{z}(s) = J \cdot K \cdot \frac{n^2 - s^2}{4n} \quad \text{for } n \gg 2, s \gg 1,$$

解 z の条件からなる。12C,

$$F = \frac{1}{2} \int \varphi(1) \varphi'(2) \varphi(2) \varphi(1)$$

$$\left(\frac{2\theta^2}{r_{12}} + V(1) + V(2) + V'(1) + V'(2) \right) d^3r_1 d^3r_2$$

φ, φ' はそれぞれ atom n bound state electron の eigen-fn

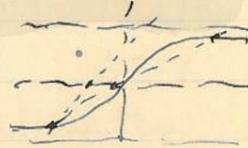
は V, V' は electron n に対する screened nuclear field

pp 3 個あたりの electron の electron n の exchange integral.

K は $\sigma = \pm$ の electron n 個 atom の間。

解 z : 2 個あたりの

$$\bar{s} = \frac{N}{2} \tanh \frac{1}{kT} \left(\frac{JKN\bar{s}}{2N} + H\mu_0 \right)$$



と解。

N is unit volume of atom n 個

1 個 n magnetisation 是

$$M = +2\mu_0 \bar{s}$$

解 M :

$$M = \frac{N}{2} \mu_0 \tanh \left(H + \frac{JKN}{4N\mu_0^2} \right) \frac{\mu_0}{kT}$$

= 4H Weiss の理論から \pm 状態を区別 μ_0 2. 4H

$$V = \frac{JK}{4N\mu_0^2}$$

$$\bar{s} = \frac{N}{2} \tanh \frac{1}{kT} \left(\frac{JKN\bar{s}}{2N} + H\mu_0 \right)$$

1936年12月

67

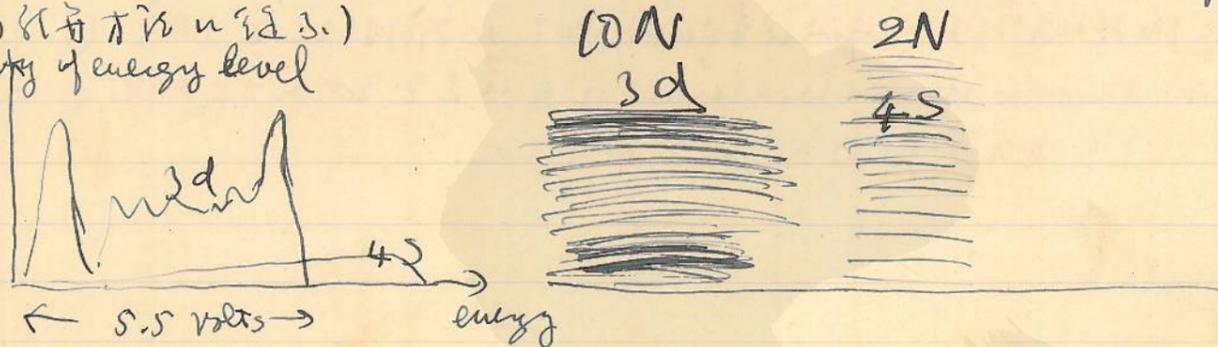
Slater 等は、Fe Co Ni 等の 3d 金属は metal or ferromagnetic
 なる理由を quantitative に説明しようと試み、Heisenberg の
 bound electron の exchange による、金属中の free
 electron の distribution の間を比較した。

原子	K	L	M	N
Sc	2	8	2	1
Ti	2	8	2	2
V	2	8	3	2
Cr	2	8	5	1
Mn	2	8	5	2
Fe	2	8	6	2
Co	2	8	7	2
Ni	2	8	8	2
Cu	2	8	10	1
Zn	2	8	10	2

} transition metal

原子中の 3d の level は Ni まで 2 つ空いてる。その distribution
 2 個の metal 中の 3d の level と 4s の level とを
 比較すると、3d の level の分布は 4s と、(Bloch-Wigner

密度 of energy level



図の如く、3d の level の 2 個の空位を 4s の level に 10 個

有誤

68

Block 解の方程式

$$M_0 = N\mu_0 \left[1 - \sigma \left(\frac{T}{\theta} \right)^{3/2} \right] \quad \theta = \frac{J}{k}$$

この式は Weiss 理論の empirical 式

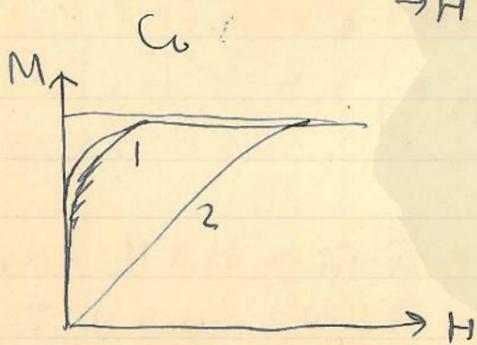
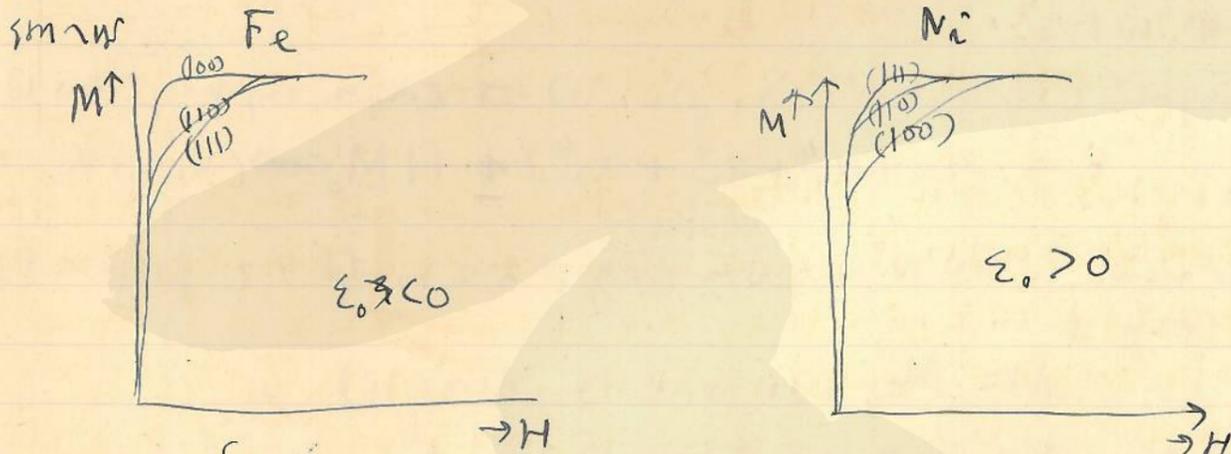
$$M_0 = N\mu_0 (1 - CT^{-2})$$

と異なる。... 磁化率の温度依存性 - 磁化率の温度依存性

§ Magnetic Anisotropy, Remanence, Hysteresis

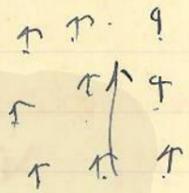
以上の材料は、metal の single crystal には自発的に spontaneous magnetization を示す。これを説明するには、この magnetization の方向に依存して field を apply すれば、この方向を向くように磁化される。

この場合、^{容易軸} crystal axis の方向に容易に magnetize (磁化) される。この方向は異なる。



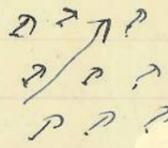
2nd magnetisation direction and crystal axis direction angle energy dependence.

i) spin & orbital motion angular momentum direction magnetic force



ii) spin direction oscillation magnetic force

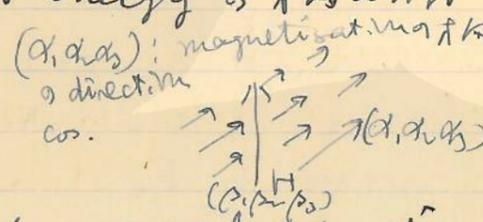
oscillation Einstein-de Haas effect remnant orbital magnetic moment is 0 (g=2)



Fe, Ni in cubic crystal energy dependence

dependence of energy on magnetization direction

$$E = E_0 (\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4)$$



magnetic field direction (beta_1, beta_2, beta_3) applied

$$E = E_0 (\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4) + HM_0 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)$$

min. energy direction and magnetic field direction

$$M = M_0 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)$$

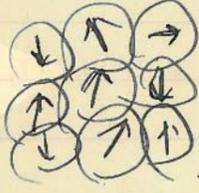
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ for $E > 0$
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ for $E < 0$

for $E_0 > 0$ (111) direction, for $E_0 < 0$ (100) direction

for $E_0 > 0$ case $M \rightarrow 0$ limit is not reached

M_0 is constant (100), (111) direction comp is $\frac{1}{\sqrt{3}}$

deformation energy single crystal is
 rotation with energy inner
 stress and magnetic field is zero.
 cubic single crystal magnetic anisotropy
 remanence is zero.
 block is used in metal block
 elementary region is small.
 magnet is in the region, orientation is different.



spin of the region, the direction
 of the region is different.
 single crystal of the crystal axis is different.
 energy is different.
 magnetic field is different, the direction is different.
 energetically stable is the magnetized elementary region.
 the direction of the spin is different.

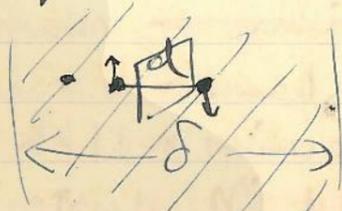
boundary of energy
 field is different. uniaxial magnetism is different.
 poly crystal of the internal stress is different.
 boundary of elementary region is different.
 surface energy of the region is different.
 the direction of the field is different.
 boundary is different.

energetic hindrance

anisotropy effect $\mu \times \sigma \times \gamma \times \delta$

① surface energy σ (単位長さあたり) $\sim \delta$. \rightarrow 交換力 $\mu \times \sigma$ による. \rightarrow elementary magnet $\mu \times \sigma$ volume force $\mu \times \sigma$ magnetic interaction $\mu \times \sigma$. \rightarrow boundary surface $\sigma \times \delta$

~~$\frac{\sigma}{d^2} J d^2 + \frac{A \delta}{d^3} = \min$~~
 unit surface energy

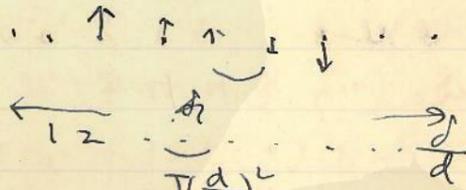


$(\frac{\sigma}{d}) \cdot \frac{1}{d^2} J (\frac{d}{\delta})^2 + \frac{A \delta}{d^3} = \min$

~~$(\frac{\sigma}{d}) \frac{J d^2}{d^2 \delta} + \frac{A \delta}{d^3} = \min$~~

for min $\mu \times \sigma$ for μ, σ

$\delta \approx d \sqrt{\frac{J}{A}}$



② $\mu \times \sigma$ の効果

① $\mu \times \sigma$ の効果. \rightarrow $\mu \times \sigma$ の効果. \rightarrow anisotropy energy. \rightarrow Weiss's inter field $\mu \times \sigma$ 10^6 Gauss order $\mu \times \sigma$. Weiss's inter field 10^6 Gauss order $\mu \times \sigma$.

$\frac{J}{A} \approx 10^5$

$\frac{300 A}{d^3}$

$\delta \approx 30 d$

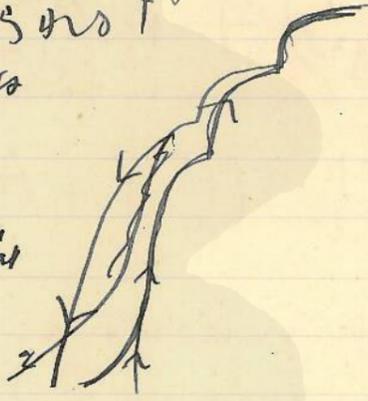
order $\mu \times \sigma$. \rightarrow unit surface area $\mu \times \sigma$ min. energy μ

$\Delta E \approx \frac{\sigma A}{d^3}$

polycrystal $\mu \times \sigma$ の磁気的障壁 $\mu \times \sigma$ の効果. \rightarrow Thermal $\mu \times \sigma$ heat treatment $\mu \times \sigma$ の効果 $\mu \times \sigma$

ある。ある種の field χ の存在は、Hindernisse の
 打破に有利である。その elementary region の χ の存在は
 打破に有利である。また χ の Hindernis
 打破に不利である。この Hindernis の打破は
~~irreversible~~, magnetization の jump である。

2nd Barkhausen の jump とは、その
 局所 Hindernis の打破に有利である
 局所 field の hysteresis の
 存在を示す。



この χ の anfangs susceptibilität
 は、inneren Störungen の存在
 による χ の存在を示す。
 material の χ の存在を示す。
 材料の χ の存在を示す。

External or deformation による χ の存在を示す。
 $\chi \sim \frac{const.}{\Sigma}$

Σ : 磁石

この hysteresis と jump とは、
 single crystal の存在を示す。
 材料の impurity, strain による secondary effect
 による。

Demagnetisierung の現象

以上の elementary region の boundary の存在は
 示す。これは、 χ の存在を示す。
 Sixtus と Jönko とは、Fe-Ni の合金の wire による steady
 の mag. field による χ の存在を示す。- χ の存在を示す。
 1951年12月

field to apply for mag. reversal of ϵ . ϵ is observed
for $\epsilon < 2 \times 10^4$ observe (in)

$$v = A(H - H_0)$$

for (2) $A \approx 2.5 \times 10^4 \text{ cm}^2 \cdot \text{Gauss}^{-1}$
 H_0 is tension of ϵ

Bankhausen discontinuity of

elementary region of ϵ . $\frac{dB}{dt}$ is estimate of ϵ is 10^8
max. value of $10^{-8} \rightarrow 10^{-9} \text{ cm}^3$ of order 10^8 .

ρ is density & charge errors

($r < a$)

'if a sphere has potential φ at $r=0$ & r is distance

$$\frac{2\pi\rho}{3}(a^2 - r^2)$$

$$\varphi_+ = \frac{2\pi\rho}{3} \{a^2 - (x+z)^2 - y^2 - z^2\}$$

$$\varphi_- = \frac{2\pi\rho}{3} \{-a^2 + (x-z)^2 + y^2 + z^2\}$$

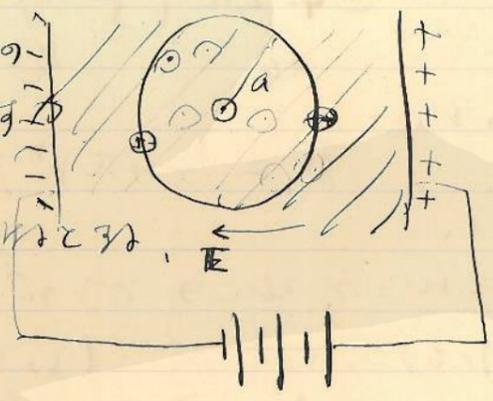
$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{8\pi\rho}{3}xz \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{8\pi}{3}\rho z = \frac{4\pi}{3}\rho$$

Chapter III. Electric Properties of Non-Metals

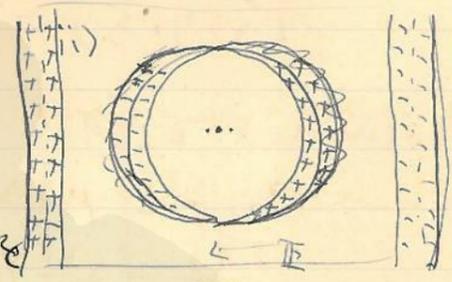
§1. Phenomenological Considerations

Maxwell-Lorentz の理論に於て electric field E の中
 にある分子は誘電体 polarization P を生ずる。この unit
 volume 中の dipole moment である P の値は E に比例し、
 E と P の関係は、電場 E が誘電体に入射する時、その
 分子が電場 E に応じて P を生ずる。この dipole
 moment を生ずる分子は、 E と P の関係は、 $P = \epsilon_0 \chi E$ である。
 この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。この E は E の平均値である。
 (この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。)

この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。



この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。



- この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。
- i) condenser plate 上の charge である $E_0 = E + 4\pi P$
 - ii) sphere 中の matter 中の E_1
 - iii) sphere 中の E_2

この E は macroscopic field である。この E は microscopic field の
 平均値 \bar{E} である。この E は E の平均値である。

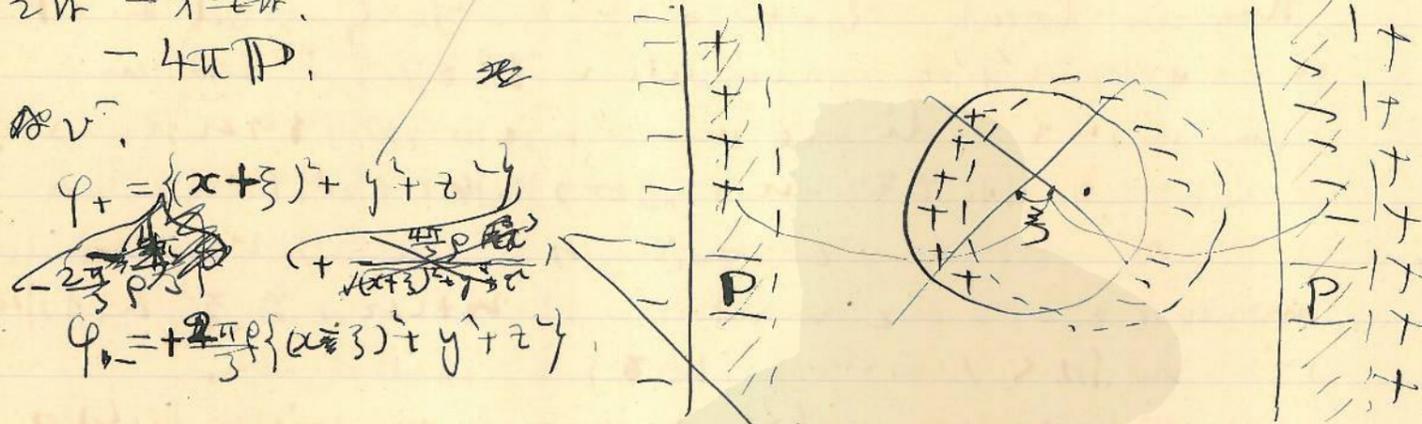
この (ii) の $\pm \rho$ の charge density $\sigma = \pm \frac{P}{2\epsilon_0}$ である。

$$2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{6+3-8}{6} = \frac{1}{6}$$

©2020 IHAL, YITP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

displace (tr. => charged matter) & potential force in \vec{E} ,
 $\sum \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$.



$\phi_+ = \frac{4\pi\rho}{3} \left[(x+\xi)^2 + y^2 + z^2 \right]$

$\phi_- = +\frac{4\pi\rho}{3} \left[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \right]$

$$\phi = \phi_+ + \phi_-$$

$$= \frac{4\pi\rho}{3} \xi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{x^2} \right)$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = +\frac{4\pi}{3} \rho \xi = \frac{4\pi}{3} P$$

of \vec{F} , $\vec{F}_1 = -4\pi P + \frac{4\pi}{3} P$

is a sphere of radius a with dipole moment \vec{p} .
 The potential $\phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{p_x(\zeta - z) + p_y(\eta - y) + p_z(\xi - x)}{r^3}$

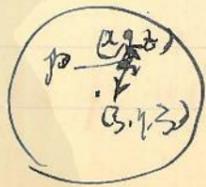
is potential at \vec{r} . At origin \vec{r}

$$E_z = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial \zeta}\right)_{x,y,z=0} = -\frac{p_x}{r^3} + \frac{3}{r^5} (p_x a^2 + p_y a y + p_z a z)$$

is field \vec{E} of \vec{p} . is molecule of \vec{p} & \vec{E} force.

$$\vec{F} = p_x \left(-\sum_k \frac{1}{r_k^3} + \sum_k \frac{3x_k^2}{r_k^5} \right) + 3p_y \sum_k \frac{x_k y_k}{r_k^3}$$

$$+ 3p_z \sum_k \frac{x_k z_k}{r_k^3}$$

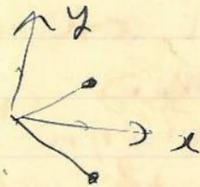


13 molecule in regular crystal lattice & $\vec{r}_k = r_k \hat{e}_k$
 for k .

$$\sum_k \frac{1}{r_k^3} = \sum_k \frac{x_k^2}{r_k^5} + \sum_k \frac{y_k^2}{r_k^5} + \sum_k \frac{z_k^2}{r_k^5}$$

$$= 3 \sum_k \frac{x_k^2}{r_k^5}$$

$$\sum_k \frac{x_k y_k}{r_k^5} = 0$$



$\therefore (\vec{F}_2)_x = 0$

又 \vec{r}_k in molecule of $k < \infty$ irregular in distribute
 (randomly, \vec{r}_k is not regular)

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} \overline{r^2} \quad \overline{xy} = 0$$

for $2 < k < \infty$ the \vec{r}_k is not regular.

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P}$$

local internal field \vec{H} , Clausius-Mossotti's formula

for molecule of permanent magnetisation \vec{m} & \vec{r}_k
 for $k < \infty$, $-\vec{r}_k$

$$\vec{p} = \alpha \vec{H}$$

for \vec{H} or \vec{E} , unit volume in N of molecules
 for $k < \infty$.

$$\vec{P} = N \alpha \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right)$$

for susceptibility χ

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$$\chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$$

define \vec{H} as

$$\therefore N \alpha = \frac{\chi}{1 + \frac{4\pi}{3} \chi}$$

$$\therefore \frac{4\pi}{3} N \alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

M is molar mass, L is Loschmidt's number at STP, $\frac{M}{L}$ or
 STP density, $d = N \frac{M}{L}$ or density

$$\therefore \frac{M}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} L a = P$$

at STP $\frac{M}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$ is the density of the density of the gas.

is the refractive index n at STP. $\mu = 1.05$
 $n^2 = \epsilon$ is the molar refraction

$$\frac{M}{d} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = P_L$$

is density independent of ϵ .

classical Clausius-Mosotti's law. etc.,

PPS, $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$ or density is constant.

Lorentz-Lorentz law.

at STP gas of density $\rho = \frac{1}{d} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$ at 1000 atm pressure
 is constant or STP or STP

Van Vleck

air pressure	1	14.84	42.13	123.04	176.27
$\frac{1}{d} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \times 10^7$	1953	1947	1959	1956	1953
$\frac{1}{d} \frac{n^2 - 1}{3} \times 10^7$	(1953)	(1953)	(1976)	(2005)	(2023)

ϵ at STP 1 — 100 atm. press for 3 km

H₂O- vapor $\mu = 1.85 \times 10^{-18}$

- In a gas at temperature T and in an external electric field E , the dipole orientation is given by the Boltzmann distribution. In a liquid, the dipole orientation is given by the Boltzmann distribution. The dielectric constant ϵ is related to the dipole moment μ and the refractive index n by the following equation:

H₂O -

liquid μ is the dipole moment of the molecule.

the internal field is $E_{int} = E + \frac{4\pi}{3} N \mu$.

the dielectric constant ϵ is given by $\epsilon = 1 + \frac{4\pi N \mu^2}{kT}$.

the refractive index n is given by $n^2 = 1 + \frac{4\pi N \alpha}{3}$ (for non-polar molecules).

for non-polar molecules, the dielectric constant is given by $\epsilon = 1 + \frac{4\pi N \alpha}{3}$. (perchlorate ethylene) Temperature dependent.

Temp. °C	$P(\text{cm}^3)$
25	32.261
90	32.276

benzene $\mu = 0.338$ at 278 K, $\mu = 0.343$ at 353 K.

H₂O dielectric constant is 80, molecular refractive index is 3.7 cm^3 , dipole moment is 0.9×10^{-18} esu.

In a gas, the dipole moment is 0.9×10^{-18} esu.

In a liquid, the dipole moment is 0.9×10^{-18} esu.

In a non-polar solvent, the dipole moment is 0.9×10^{-18} esu.

In a polar solvent, the dipole moment is 0.9×10^{-18} esu.

dilute solution ϵ is $\epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} N_1 \alpha_1$. ~~of the~~ polarization
 of ϵ is $\epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} N_1 \alpha_1$.

PPS solvent is a solution of polarization P_1, P_2 &
 to liquid dielectric association $\epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} N_1 \alpha_1$,
 for internal field E

$$E = E + \frac{4\pi}{3} (P_1 + P_2)$$

for ϵ :

$$P = P_1 + P_2 = \left\{ N_1 \alpha_1 + N_2 \left(\alpha_2 + \frac{M_2^2}{3kT} \right) \right\} E$$

mole fraction $f_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$ $f_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$

to introduce f_1, f_2 :

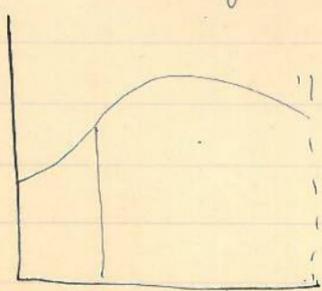
$$N_1 = \frac{f_1 L \rho d}{f_1 M_1 + f_2 M_2} \quad N_2 = \frac{f_2 L \rho d}{f_1 M_1 + f_2 M_2}$$

or $(; \text{with volume } V \text{ of } f_1 M_1 + f_2 M_2$
 $\frac{M_1 N_1 + M_2 N_2}{L} = \rho d$. $M_1 N_1 + M_2 \frac{f_2 N_1}{f_1} = L \rho d$ etc)

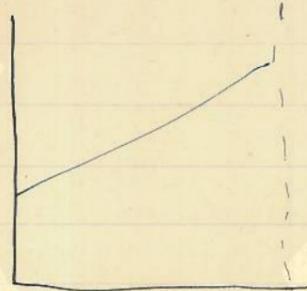
$$\therefore \kappa_{12} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2}{d} = f_1 \kappa_1 + f_2 \kappa_2 = f_1 (\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2$$

$$\kappa_1 = \frac{4\pi L \rho \alpha_1}{3} \quad \kappa_2 = \frac{4\pi L \rho}{3} \left(\alpha_2 + \frac{M_2^2}{3kT} \right)$$

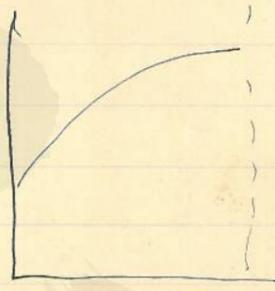
so that ϵ is ϵ (molar polarizability of the mixture) is
 f_1 linear f_2 is ϵ .



f_2 f_1
Ethyl Alcohol in Benzene



ethyl ether in Benzene



Nitrobenzene in Benzene

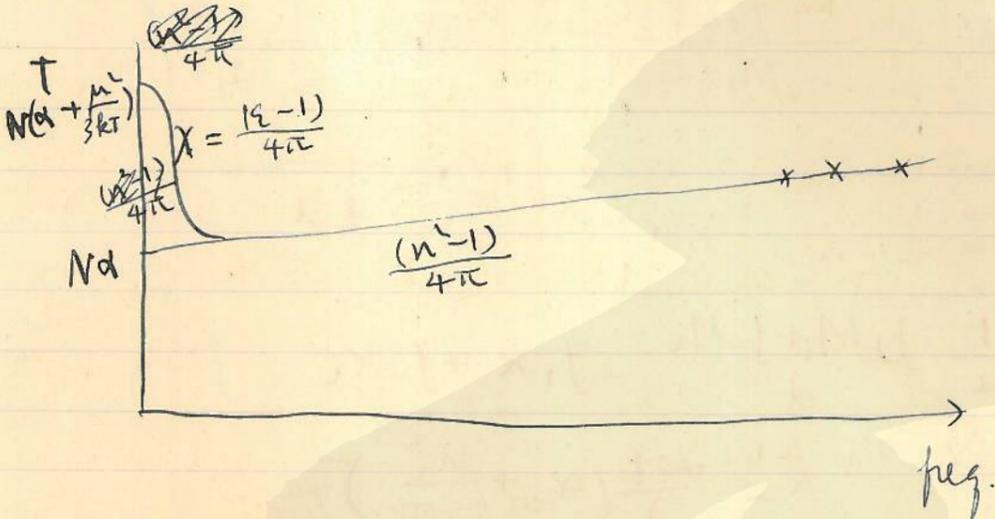
- non-polar molecule n in gas & liquid n^l molar polarizability $\frac{(n^l-1)M}{(n+2)d}$ $n^l \approx n$

	O_2	N_2
gas	3.869	4.395
liquid	3.878	4.396

polar molecule n in gas & liquid n^l $\frac{(n^l-1)M}{(n+2)d}$ $n^l \approx n$

	H_2O	H_2O
gas	4	$\frac{(n^l-1)M}{(n+2)d}$
liquid	18	10% of gas

polar molecule n in gas association of n molecules n^l $\frac{(n^l-1)M}{(n+2)d}$



$$\left(-\frac{\hbar^2 \partial^2}{8\pi m \partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi = E \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi = 0$$

$$n_b = \epsilon a, n_a = b$$

$$n' = n - ik$$

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$n = \sqrt{n^2 + k^2} e^{-i\psi}$$

$$\tan \psi = \frac{k}{n}$$

$$E_y = a e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cos(\omega(t - \frac{nx}{c}))$$

$$H_z = a \sqrt{n^2 + k^2} e^{-\frac{\omega k x}{c}} \cos(\omega(t - \frac{nx}{c}) - \psi)$$

n : refractive index
 k : extinction coef.
 ω : angular frequency of electromagnetic wave
 γ : damping constant
 \mathbf{x} : mag. vector of electric vector by $\sqrt{n^2 + k^2}$

$\omega < \omega_0$: transparent to ω rays, $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \gamma^2 \omega^2$
 $\omega > \omega_0$: region n has refractive index n & k

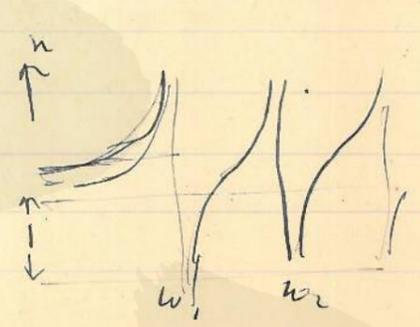
$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

bound electron of ligand frequency ω_0 of ω or ω_0

$$n^2 = 1 + \sum_r \frac{4\pi e^2 N_r}{m} \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

$\omega \ll \omega_r$: $n \approx 1 + \sum_r \frac{2\pi e^2 N_r}{m} \frac{1}{\omega_r^2}$

$$n = 1 + \sum_r \frac{2\pi e^2 N_r}{m} \frac{1}{\omega_r^2}$$



Work

©2022 HAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 + 湯川記念館史料室

ω is a complex number with a real part ω_r and an imaginary part ω_i .
If $\omega_i < 0$, the wave is damped. If $\omega_i > 0$, the wave is amplified.
If $\omega_i = 0$, the wave is undamped.

$\omega \rightarrow \omega_1, \omega_2, \dots$
$$n = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \sum_r N_r$$

$N_r = N f_r$

$$n - 1 = N \sum_r \frac{4\pi e^2}{m} \frac{f_r}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

Quantum theory \rightarrow electron \rightarrow absorption \rightarrow $\omega_r = 2\pi \frac{E_r - E_0}{h}$

f_r is a transition characteristic \rightarrow oscillator strength.

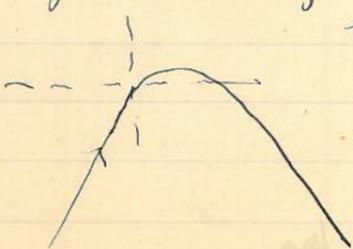
Examples: i) continuous absorption band, ii) excited level \rightarrow electron transitions, negative dispersion ($f < 0$) or resonant (Kramers-Heisenberg's formula)

Dispersion \rightarrow phase velocity v_p

free electron (or free ion) \rightarrow $\omega_0 = 0$

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \frac{1}{3} \frac{e^2 N}{m})}$$

long wave length (radio-frequency) \rightarrow wave \rightarrow negative dispersion \rightarrow propagation velocity c



density of atmosphere \rightarrow wave \rightarrow bent \rightarrow Earth's magnetic field \rightarrow ionosphere

共振 scattering の n の 振動 ϵ 及び χ
 $n-1 \leftarrow \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{d\omega}$ 及び χ

$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$k = \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad *$$

$\eta = \omega - \omega_0$ 及び χ , $\eta = \omega - \omega_0$ の 2 次式 2 次

$$n-1 \approx \frac{\pi N e^2}{m \omega_0} \frac{-\eta}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$k = \frac{\pi N e^2}{2m \omega_0} \frac{\gamma}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

$\frac{\gamma}{2}$ or half line breadth.

$\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2} \approx \gamma < \chi$

$$n-1 \approx \frac{2\pi N e^2}{m \gamma \omega_0} \frac{-\chi}{2\chi^2 + 1}$$

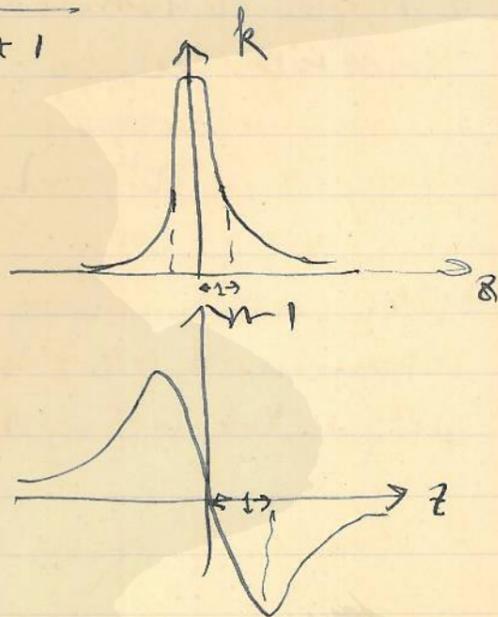
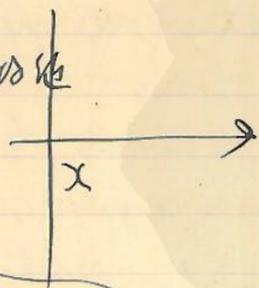
$$k = \frac{2\pi N e^2}{m \gamma \omega_0} \frac{1}{2\chi^2 + 1}$$

\Rightarrow the refractive index of ω
 increases χ 及び n 減少する
 及び、 χ の anomalous
 dispersion χ 及び n .

χ の 振動

Polymer vector の 振動
 ϵ 及び χ

$$S = \frac{c}{4\pi} a^2 \sqrt{n^2 + k^2} e^{-\frac{2\omega k x}{c}} \frac{1}{2} \cos \psi$$



$$= \frac{c}{8\pi} a^2 n e^{-\frac{2\omega k}{c} x}$$

from dx of the energy flow density is

$$- \frac{dS}{dx} dx = \frac{2\omega k}{c} S dx = \frac{2nk\omega}{8\pi} a^2 e^{-\frac{2\omega k}{c} x} dx$$

又 Δ' として, nk の値を代入する.

$$= \frac{Ne^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2 a^2 e^{-\frac{2\omega k}{c} x}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} dx$$

この γ は γ の forced oscillation である. γ の
 Oscillator の energy は $\frac{1}{2} m \gamma \omega^2 x_0^2$

$$\frac{1}{2} m \gamma \omega^2 x_0^2$$

である. x_0 は oscillation の amplitude

$$x_0 = \frac{-e}{m} a \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

これは γ の field energy である. $N dx$ の oscillator の energy である.

この energy は damping (γ) による radiation の energy である.

これは ^(gas) medium or dense である. energy は atom 中の kinetic energy (熱) である.

これは incident wave or monochromatic である.

$$S = \int_0^\infty S(\omega) d\omega$$

である.

$$-dS = dx \int_0^\infty \frac{2\omega k}{c} S(\omega) d\omega$$

これを代して * の式が成り立つ。 媒質 medium に対して

$$= \frac{4\pi N e^2 \gamma}{m c} dx \int_0^\infty \frac{\omega^2 S(\omega) d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

この積分の中 $\omega = \omega_0$ 付近の小さな範囲が contribute することを示す。 その範囲で $S(\omega)$ を constant と見做す。

$$-dS = dx \frac{4\pi N e^2 \gamma}{m c} S(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\eta}{4\eta^2 + \gamma^2}$$

$$= dx \frac{2\pi^2 N e^2}{m c} S(\omega_0)$$

$\omega_0 \rightarrow \infty$

is a continuous spectrum かつ ω_0 の energy の line breadth γ is independent of ω_0 .
 この γ の k の curve の γ is independent of ω_0 (width)

この γ は electron の $\frac{2\pi^2 e^2}{m c} S(\omega_0)$ の energy を absorb した γ の意味である。

この γ は \rightarrow atom の energy density of

$$u = \int_0^\infty u(\nu) d\nu$$

is the distribution of radiation $u(\nu)$ (は ν の u , at the point $u(\nu) d\nu = u(\omega) = \frac{1}{c} S(\omega) d\omega$)

$$\frac{2\pi^2 e^2}{m c} S(\omega_0) dt \quad \therefore \frac{u(\nu)}{2\pi} = \frac{1}{c} S(\omega)$$

is energy of absorb is $= \frac{\pi e^2}{m} u(\nu) dt$

radiation

oscillator

7

atom & linear oscillator & field, radiation field or isotropic & isotropic, $\frac{1}{3}$ (absorb (emit) ... P.S)

$$\frac{\pi e^2}{3m} u(\nu) dt$$

etc.

Hohlraumstrahlung & linear harmonic oscillator & energy & equilibrium state & oscill. or energy & frequency

$$E = \frac{2e^2 (2\pi\nu)^2}{3mc^3} dt$$

energy emit & absorb energy & equilibrium state

$$u_\nu = E \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

etc.

quantum classical is Boltzmann or statistical mechanics & equipartition & energy

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Rayleigh-Jeans formula

Planck, Einstein & dispersion of A

$$n^2 - 1 = \frac{8\pi N}{3h} \sum_n \frac{V_{n0} |f_{n0}|^2}{\nu_n^2 - \nu^2}$$

(Kramers Heisenberg)

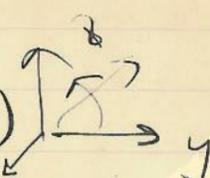
§4. Faraday Effect. Kerr Effect

i) Faraday # 1848 in ~~the~~ magnetic field & apply
 in the x direction polarized light & field is along
 z direction polarization of the wave is along y , the amount
 of rotation of the field is $\propto \chi$ & $\propto z$ & $\propto \omega$.
 This is the same as the Zeeman Effect
 but ω is the Larmor frequency.

Faraday effect is a x -direction propagate wave
 wave \vec{E} , $x=0$ at $t=0$, $E_z=0$

$$E_y + iE_z = a \cos\left(t - \frac{nx}{c}\right)$$

\vec{E} in yz plane of polarization or
 y -axis or z -axis of the wave
 is \vec{E}

$$E_y + iE_z = a e^{i\chi x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right)\right)$$


$$= \frac{1}{2} a \left\{ e^{i\omega\left[t - \frac{x}{c}\left(n - \frac{\chi c}{\omega}\right)\right]} + e^{-i\omega\left[t - \frac{x}{c}\left(n + \frac{\chi c}{\omega}\right)\right]} \right\}$$

the wave is positive ω rotate the wave
 propagates with

$$n_+ = n - \frac{\chi c}{\omega}$$

$$n_- = n + \frac{\chi c}{\omega}$$

the wave is ω

this is circular double refraction

Zeeman effect is the splitting of the \vec{E} into \vec{E}_+ & \vec{E}_- in
 x -direction magnetic field & apply the atom's
 electron's motion is Larmor frequency

$$\omega_L = + \frac{e}{2mc} H$$

→ order of the effect is small. → anomalous
 Zeeman effect is observed in the case. (g-factor)
 此の理由は $\frac{dn}{dx}$ refractive index of electron
 motion is small. infrared of the absorption line
 is due to atom, molecule vibration, rotation is
 its contribution is small. 故に $n = \bar{n} + \frac{(n-n)}{2}$, 此
 の n は Lorentz formula を用いて記述される。

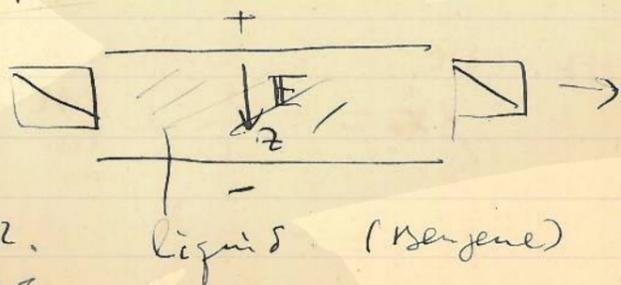
上の式は anschaulich to say the velocity of the electron
 is very small, internal field is small.

$$\chi_l = \frac{e^2 \lambda}{2mc^2} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2} \right)^2 \frac{n}{n} \frac{dn}{d\lambda} H$$

この \bar{n} : electron is small. †

ii) Kerr effect 説明

→ Nicol prism
 of the liquid crystal
 in liquid on the
 condenser plate is used.



charge is in liquid is used.
~~the plane of the~~ Nicol prism is used to observe
 light.

in electric field of the liquid is anisotropic
 way. light polarization is due to field of the
 direction of the ^{molecular} polarization of the liquid is used.
 故に $n = \bar{n}$ refractive index is used to observe
 the effect. 此は

$$n_p - n_s = B \lambda E^2 \quad B: \text{Kerr constant}$$

$n_p - n_s$: vacuum wave length,

n_p : Schwingung of the $E \parallel$ direction. n_s : $E \perp$ direction.

永久双極子モーメント μ の存在

誘電率 $n_p - n_s = \frac{1}{5} \frac{n_0 - 1}{n_0} \left(\frac{\mu}{kT}\right)^2 E^2$

~~$n_p - n_s = \frac{1}{5} \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{\alpha}{kT} E^2$~~

$n_p - n_s = \frac{1}{5} \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{\alpha}{kT} E^2$

*

Benzol : $0.6 \cdot 10^{-7}$

Nitrobenzol : $22 \cdot 10^{-6}$

↑ 正電荷の領域に於て double refraction の内は ionized layer の電場と関係して
 電場と電流とが関係する。 Nicols-Schelling, Appleton 等の研究から, frequency ω の
 wave が x-方向に propagate するとき, earth magnetic field H は xy plane
 に平行にあり, x-comp H_L , z-comp H_T となる

free electron の equation of motion は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e(E_x + \frac{4\pi}{3}Px) - \frac{e}{c} H_T \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -e(E_y + \frac{4\pi}{3}Py) + \frac{e}{c} H_T \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -e(E_z + \frac{4\pi}{3}Pz) + \frac{e}{c} H_L \frac{dy}{dt}$$

or $\dot{P}_x = -eN\dot{x}$ etc となる。

$$m\omega^2 P_x = -Ne^2(E_x + \frac{4\pi}{3}Px) + \frac{ie\omega}{c} H_T P_y$$

$$m\omega^2 P_y = -Ne^2(E_y + \frac{4\pi}{3}Py) - \frac{ie\omega}{c} H_T P_x + \frac{ie\omega}{c} H_L P_z$$

$$m\omega^2 P_z = -Ne^2(E_z + \frac{4\pi}{3}Pz) - \frac{ie\omega}{c} H_L P_y$$

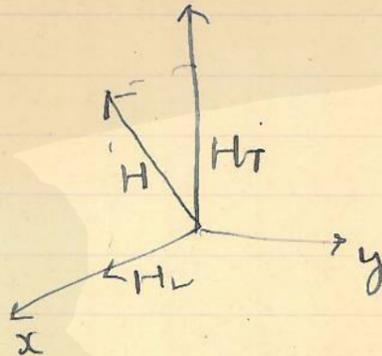
- ∇ field equation は x-方向に wave
 となる

with

$$0 = \frac{4\pi I_x}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi I_y}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{4\pi I_z}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$



$$E_x + \frac{4\pi}{3}Px = 0$$

$$H_x = 0$$

$$0 = \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

where

$$I_x = -eN\dot{x} = i\omega P_x$$

$$\alpha = \frac{-2\beta}{2(1+\frac{\beta}{3}) - \frac{\sigma_T^2}{1-\frac{2}{3}\beta} \pm \sqrt{\frac{\sigma_T^4}{(1-\frac{2}{3}\beta)^2} + 4\sigma_L^2}}$$

$$\text{then } \epsilon = 1 + \alpha = 1 - \frac{2\beta}{2(1+\frac{\beta}{3}) - \frac{\sigma_T^2}{1-\frac{2}{3}\beta} \pm \sqrt{\dots}}$$

$$\text{then } \frac{P_z}{P_y} = \frac{-i\sigma_L}{1+\frac{\beta}{3}+\frac{\beta}{\alpha}} = -\frac{H_y}{H_x} = \frac{E_z}{E_y}$$

$$= \frac{-2i\sigma_L(1-\frac{2}{3}\beta)}{\sigma_T^2 \pm \sqrt{\sigma_T^4 + 4\sigma_L^2(1-\frac{2}{3}\beta)^2}}$$

2.2.2
 2つの ϵ が \rightarrow の場合 \rightarrow 2つの polarization の異なる波の
 存在 wave の存在 \rightarrow ϵ の propagation velocity の異なる。
 2つの double refraction の存在。 \rightarrow の存在 \rightarrow reflect して
 戻って来る wave の polarization の異なる \rightarrow の存在。
 2 critical frequency \rightarrow の存在 \rightarrow の存在。
 2 wave の存在 \rightarrow transverse wave. E_x (or P_x) の存在 \rightarrow の存在。