©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

YHAL N46

化粧品

~~株式会社~~

1935

Reference No. | Name | Subject | Date when Commenced | Date when Finished | Ref. No. of Previous File | Ref. No. of Succeeding File

TRADE HANABISHI (REGISTERED) MARK

HANABISHI BRAND FILE

No. 7 7

新案特許既製

c032-070

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所・湯川記念館史料室

Contemporary Theoretical Physics

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

N46

電磁気学

Introduction

電気的又は磁気的な現象と称せられるものは非常に広い範囲に亘ってゐて、その中には色々な種類の現象が含まれてゐる。

その中昔から知られてゐた極簡単な現象、(自論詳しく述べてゐれば決して単純な現象ではないが) 例へばエボナイト棒を絹布で摩擦すると、それが小さな紙片をひきつけるとか、電池の両極を針金で Galva につなげば それがふれるとかいふ様な現象は、帯電されたエボナイト棒と紙片、電流の流れてゐる針金と Galva の磁石といふ様に 離れた物体相互の間に ある種の力が働いて、それによつて 紙片や Galva の磁石が動かされるといふ風にして説明出来る。

今少し複雑な交流の場合でも、実際の電磁気(の流れ)てゐる導線 と磁石又は導線同志の間に瞬時電磁気的な力が働くとして説明出来る。

つまり 普通の静電気、静磁気、直流、交流 等 (Electrostatics, Magnetostatics, Steady or Direct Current, Alternating Current) に関する現象は大抵この様に 遠く離れた 物体の間に力が働くといふ仮定によつて説明出来る。かゝる方向の上に建てられた理論を 遠隔作用の理論 Fernwirkungstheorie (Theory of Action at Distance) と称する。

斯がもつと複雑な場合 例へば 導線を流れる電流の変り方が非常に速くなると、遠く離れた 他の導線に働く 電磁力は ある有限の時間を要すると考へねば実際が 合はなくなる。この作用の 遅延 Retardation of Action (Retardierung der Wirkung) を考慮せねばならぬ。かゝる retardation をも考慮した Fernwirkungs-

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

theorie を建設することも勿論可能であるが、それは非常に複雑になる。

のみならず、離れた物体の間にあって、電磁力を伝える媒質 Medium 内に起る色々な現象が却って重要な意味をもつことが段々わかって来た、例へば電磁とか光とかの伝播の現象は Medium 内の電磁力が周期的変化する現象に他ならぬ。

それで我々は見方をかへて、むしろ Medium 内の電磁力の空間的な変化とか時間的な変化とかを研究の主眼とするならば Faraday, Maxwell によって発展せしめられた所謂 Field Theory, 力の場の理論が出来ることになる。

~~この場合には ある点にある物体に働く力は~~ この考へ方によると ある点の力の場に変化があればその附近の力の場に変化が起り、この変化は段々と遠方へ及んで行くと考へられる。この意味で ~~所謂~~ 近接作用の理論 Nahewirkungstheorie と称せられる。

しかし Fernwirkungstheorie と Nahewirkungstheorie とは別物ではなく、全く同じ事が異った言葉で言ひ表はされてゐる、一方から他方を導くことが出来る。又後者の方が前者より遥かに新しくあり、取扱ひにも便利であるから、今日では専らその方から Maxwell の Field Theory が用ひられてゐる。

この理論では上述の如く力の場を取扱ふのであるが、力は Vector であるから Vector の場 Vector Field の理が対象となる。故に先ず Vector Field の理論を述べねばならぬ。

之等によって発達したものである ~~又~~ Potential Theory と

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~転移~~ であるから、それらの講義と全然色々な程度で両方
いずれとでもある。

Maxwell : Electricity and Magnetism Vol I, II, 1873.
Abraham : Theorie der Elektrizität Bd I, II.
Abraham-Becker : Bd I, 1932(訳); Becker : Bd II, 1934.
Jeans : The Mathematical Theory of Electricity and Magn.
Idearside : Electromagnetic Theory vol I, 1893, II, 1894, III, 1912
Frenkel : Lehrbuch der Elektrodynamik Bd I, 1926
Bd II, 1928.
J. J. Thomson : El. and Mg.
Planck : Einführung in die Theorie der El. und Mg. (訳)
Lorentz : Die Maxwellsche Theorie (英訳もあり)
Poincaré :
Schaefer : Einführung in die theor. Physik. Bd III.
Livens :
Moullin :
Poor :
Müller-Pouillets : Lehrbuch der Physik IV, I, 1932.
Gleizer : Handbuch der Physik

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Chapter I. Vector Fields

先 vector field の一般的な性質を述べてゐる.
空間の任意の点 (xyz) に $v(xyz)$ なる vector を対応させれば、一つの vector field が出来る. 更にこの vector が時間 t と共に変れば(場合には) $v(xyzt)$ によって vector field をあらはし得る.
$v_{(xyzt)}$ の x, y, z 方向の component を夫々 $v_x(xyzt)$, $v_y(xyzt)$, $v_z(xyzt)$ とおく.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

なる量は 座標軸の取方に independent な量即ち一つの scalar である. これを

$$\mathrm{div}\, v$$

と書き. Divergence と称する.
今空間に任意の closed surface S をとり, その上の一点 (xyz) における surface element を $df(xyz)$, その点における surface の outward normal の方向の v の component を $v_n(xyz)$ とおけば, closed surface S 全体についての面積積分

$$\iint_S v_n\, df$$

とかく. 大きさが df で方向が outward normal に一致する様な infinitesimal vector を df とかくと,

$$v_n\, df = v\, df$$

故に上の積分は又

$$\iint v\, df$$

とかかれる.
一方 S で包まれた空間 V の volume element を dV とし $\mathrm{div}\, v$ の V についての volume integral を

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\iiint_V \mathrm{div}\, v\, dV$$

とかくと、 Gauss の定理より後れば

$$\iint_S v\, df = \iiint_V \mathrm{div}\, v\, dV \qquad (\mathrm{I},\ 1)$$

が成立する。 例えば 電気の流れ 即ち電流密度

今 v をある流れをあらわす Vector とする。即ち単位時間に ~~ある面積を通って~~ df なる小面積を ~~貫く~~ 電気が 通って df 丈通り過ぎるとする。 ~~仕切ったもの~~ まず closed surface S についての積分、

$$\iint_S v\, df$$

は ~~surface S の包まれた~~ 空間 V から 単位時間に流れ surface S を通って 出て行く 電気をあらわす。 これが positive の時には全体として ある量が 流出してへることをあらわし、負なれば negative の時には 出て行くより入ってくるその方がふえることをあらわす。はじめの場合には 流れの源 source がこの空間 V 内にあり、後の場合には この空間は 流れの吸込口 sink であると考えられる。 ~~前後一般には~~

ある点を含む任意の小さな closed surface についての積分

$$\iint_S v\, df = 0$$

なる時、即ちその点が source でも sink でもない時には Gauss の定理より、その点を含む任意の小体積についての積分

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\iiint_V \operatorname{div} v \, dV = 0$$

であるから　各点その点において

$$\operatorname{div} v = 0$$

でなければならぬ.

至る所において $\operatorname{div} v = 0$ なる field を
sourceless field (quellenfreies Feld) と名附ける.

今 dV なる ~~volume element~~ 内に含まる一点 (xyz) における質の密度を $\rho(xyz)$ とする. 即ち (xyz) を含む volume element dV 内にある質量を $\rho\, dV$ とする.
さて V なる定積分(領域)内にある質量の時間的変化率は

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

である. 今質量は外て boundary surface を通って流入又は流出するとすると, それは

$$-\iint_S \rho v\, df = -\iiint_V \operatorname{div}(\rho v)\, dV$$

に等しくなければならぬ.
即ち質量の消滅又は発生がないならば, 任意の定積分(領域) V に対して

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V \operatorname{div}(\rho v)\, dV$$

が成立する筈. 故に各点において

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \qquad (I, 2)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

が成立せねばならぬ．逆にこの式が各点に於て成立するならば　電気の各点に消滅はないことになる．
一般にある点をついてかいた式が成立する場合にはその点は永久不変である．
之を連続の式 equation of continuity と称する．

次に一つの vector から

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

を作ると，之は ~~ve~~ が又一つの vector の component になってゐる．その vector を

curl v or rot v

とかき，Rotation と称する．

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を component とする vector operator を ∇ とかくと (nabla) 次の

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

とすると，

$$\text{curl } v = [\nabla v]$$

即ち ∇ と v の vector product になってゐる．
又 div を次の如くすると

$$\text{div } v = \nabla v$$

即ち ∇ と v と scalar product である．

今空間に任意の closed curve C をとり，その上の一点 $(x\,y\,z)$ に於ける line element を ds，その点に於ける v の tangential の方向の component を v_t とし，closed curve C に

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
・京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

1.5

ついての curvilinear integral を

$$\int_C v_t \, ds$$

とかく。curve のまわり方は二通りあるが、いづれの場合にしても dS の方向とは常に右まわりの方向を意味するものとする。

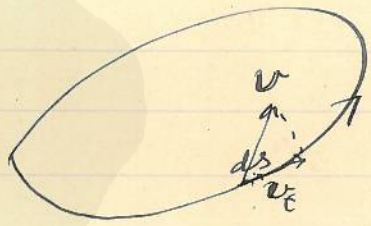
大いさが dS で方向が dS の方向と一致するような Vector を ds とかくと

$$v_t \, ds = v \, ds$$

であるから、上の面積分は又

$$\int_C v \, ds$$

とかきうる。



一方 C を boundary とおく任意の surface S について面積積分を

$$\iint_S \text{curl } v \; df$$

を作る。この場合 surface normal のとりかたに二通りあるが boundary curve をまわる方向と dS dr の間に右ねじの関係にあるようにとると Stokes の定理によって

$$\int_C v \, ds = \iint_S \text{curl } v \, df \qquad (I, 3)$$

が成立する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

そこで C を boundary とする 2 つの surface を S_1, S_2 とすると

$$\int_C v\,ds = \iint_{S_1} \mathrm{curl}\, v\, df$$

$$= \iint_{S_2} \mathrm{curl}\, v\, df$$

or $$\iint_{S_1} \mathrm{curl}\, v\, df - \iint_{S_2} \mathrm{curl}\, v\, df = 0$$

~~かくれ~~ S_1, S_2 を一つにまとめた一つの closed ~~curve~~ surface を S とする. その outward normal の方向は S_1, S_2 の一方とは一致するので一方とは逆向きになっている.

$$\therefore \iint_S \mathrm{curl}\, v\, df = (+ \text{ or } -)\left\{\iint_{S_1} \mathrm{curl}\, v\, df - \iint_{S_2} \mathrm{curl}\, v\, df\right\} = 0.$$

故に C なる curve はどんなにとれるから どんなの closed surface に対し

$$\iint_S \mathrm{curl}\, v\, df = 0 \qquad (I, 4)$$

これは Gauss の定理から $\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\, v = 0$ を意味している

すなわち $$\iint_S \mathrm{curl}\, v\, df = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathrm{curl}\, v\, dV$$

しかるに どんなの vector $\vec{v}$ に対し

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\operatorname{div}\operatorname{curl} v = 0$$

$$\therefore \iint_S \operatorname{curl} v \, df = 0.$$

さて多と同様に v をある流れの速さをあらはす vector とすると

$$\int_C v\,ds$$

は closed curve C に沿ふて、流れが定まるとしてどちらに向って循環するかをあらはす量である。その positive のばあいは curve をまはる方向に循環の流れがある negative のばあいは反対の方向に循環しているといふことになる。

Stokes の定理によれば任意の curve に沿ふて循環が0であるためには空間の各点において

curl v = 0

でなければならぬ。

逆に curl v = 0 なる場合 ~~各点~~ 一点からもみなして、各点の vector の方向に従って進んで行くならば決してそへどることはない。故に先程云ふた様な boundary surface は到底ない。∴ そへどるとするならば、その点に沿ふての循環は0でないことになる。故に line of vector に囲の如くなる、

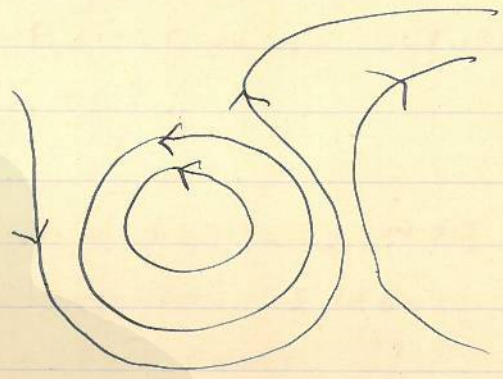
そこにおいて div v = 0 なる場合には line of vector は close ~~してゐる~~ ~~居るはずが~~ ない。論はどこにもない。∴ 論があれば、それをふくむ closed surface

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

† ~~curl v = 0 の場合には 任意の closed curve C について integral $\int_C v\,ds = 0$~~

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

vについての∇積分が0でないとしよう.



次に vector field vの div および rot の空間内の各点における値をもって、vの性質を決定する方法をのべる.
先ず次の場合として次の式が

$$\mathrm{curl}\, v = 0 \qquad (I,9)$$

で、$\rho(x,y,z)$ を x,y,z の与えられた函数として、

$$\mathrm{div}\, v = 4\pi\rho \qquad (I,6)$$

を満足する様な vector v を求める.
~~第一に (I,9) の仮定からしてこの場合には~~

$$v = -\nabla\varphi$$

φ を scalar function として

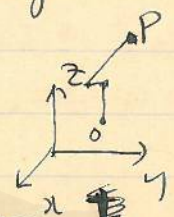
$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi$$

とかき、~~これ~~ φ の gradient と名付ける.
この場合

$$v = -\mathrm{grad}\,\varphi \qquad (I,7)$$

を満足する様な φ が求められる.
次の式は

$$(I,8)\quad -\varphi = \int_{x_0}^{x} v_x(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} v_y(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} v_z(x_0,y_0,z)\,dz + \varphi_0(t)$$



となればよい. 但し φ_0 は time x の与えられた函数である.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

すなわち ~~curl v = 0~~ なる場合には任意の closed curve C について ~~integral~~

$$\int_C v\,ds = 0$$

~~とる~~ (x₀ y₀ z₀) なる点から (x y z) ~~に~~ 至る二つの path C_1, C_2 について ~~integral を R とおく~~ (x₀ y₀ z₀) なる点から P(x y z) なる点迄の integral を

$$\int_{C_1} v\,ds \quad , \quad \int_{C_2} v\,ds$$

をとる。 ~~C_1, C_2~~ を一つの closed curve を C とおくと C を一周するのに ~~C_1, C_2~~ のいづれかを一度し、いづれかと反対向きに

$$\therefore \int_C v\,ds = (+ \text{or} -)\left\{\int_{C_1} v\,ds - \int_{C_2} v\,ds\right\}$$

従って curl v = 0 なる場合には closed curve C について

$$\int_C v\,ds = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} v\,ds = \int_{C_2} v\,ds .$$

~~これ~~ $\int_{0\,x_0y_0z_0}^{P\,xyz} v\,ds$ は path に indep なことを示す。従って (I, 8) なる式は ~~これ~~ の右辺の積分路を特に ~~$\int_{0\,x_0y_0z_0}^{P\,xyz} v\,ds$~~ の一つの特別の場合にとれば、これを書き

$$-\varphi = \int_0^P v\,ds + \varphi_0(t) \qquad (I,9)$$

~~とかいて~~ 差支なし。

~~かくして~~ (I, 9) を満足する二つの φ を φ_1, φ_2 とすると、$\frac{\partial(\varphi_1-\varphi_2)}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0$, then

$\varphi_1 - \varphi_2$ は t のみの函数、ゆえに空間の点 (I, 9) の式には入らない。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\therefore \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x \,,$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_x(xyt)}{\partial y}\, dx + v_y(x_0 y z)$$

$$(\text{I,5}) \text{ より} \quad = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_y(xyz)}{\partial x} dx + v_y(x_0 y_0 z)$$

$$= v_y(xyz) - v_y(x_0 y z) + v_y(x_0 y z).$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_x(xyz)}{\partial z}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v_y(x_0 y t)}{\partial z} dy$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v}{\partial z} + v_z(x_0 y_0 z)$$

$$(\text{I,5}) \text{ より} = v_z(xyz) - v_z(x_0 y z_0)$$

$$+ v_z(x_0 y z) - v_z(x_0 y_0 z)$$

$$+ v_z(x_0 y_0 z). \quad \dagger$$

(I,7),
$\dagger$を (I,6) より
$$\text{div grad}\, \varphi = -4\pi\rho$$
or
$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = -4\pi\rho \qquad (\text{I,10})$$
とは Poisson の式と名付けられたものである.
特に $\rho = 0$ なる場合には
$$\Delta\varphi = 0 \qquad (\text{I,11})$$
で、Laplace の式と称せられる.

であるから問題は Poisson の式 (I,10) を満足する φ を求めることに帰着する.

かくのごとくであるべきは、(I,7) を満たす φ は time の任意函数を除いて unique である. これその potential (scalar potential) と名付ける.*

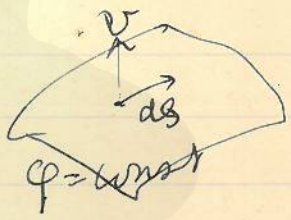
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

* Vector v とその potential φ との関係.

$v\,ds = -\mathrm{grad}\,\varphi \cdot ds$

$= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)$

ds を $\varphi = \mathrm{const}$ の surface 上における displacement とする. $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$



$P(x\,y\,z)$ の点の potential を φ.

$P'(x+dx, y+dy, z+dz)$ の点の

Potential を $\varphi + d\varphi$ とすると

$-(\varphi + d\varphi) = \int_{P'}^{P} v\,ds + \varphi_0(t)$

$\therefore d\varphi = \int_{P'}^{P} v\cdot ds = v_x dx + v_y dy + v_z dz$

displacement (dx, dy, dz) を $\varphi = \mathrm{const}$ の surface 上にとったとすると $d\varphi = 0$.

$\therefore v\,ds = v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$

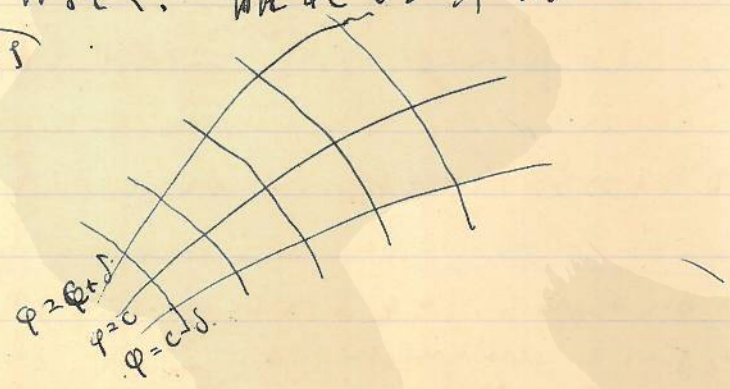
故に v の方向は常に $\varphi = \mathrm{const}$ の surface に対し normal である. ~~その大きさは $\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$~~. v その大きさは

n 上における infinit. displacement x,y,z を dn とすると,

$n+dn$ の点の Potential を $\varphi + d\varphi_n$ とすると

$-d\varphi_n = v\,dn = v\,dn \quad \therefore v = -\frac{d\varphi_n}{dn}$

であるから $\varphi = C$ の surface と $\varphi = C + d\varphi$ の surface とが ~~与えて~~ 作る field の大きさは, ~~与えられた~~ field の大きさに反比



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今 φ, ψ なる任意の二つの function から作った vector function

$$\varphi \operatorname{grad} \psi$$

に Gauss の定理を apply すると

$$\iint_S \varphi \operatorname{grad}\psi \, df = \iiint_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)\, dV$$

$$= \iiint_V (\varphi \nabla\psi + \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi)\, dV \qquad (I,12)$$

となる。

特に $\varphi = \psi$ とした φ が Laplace の eq. を満足する函数とすると、(I, 12) は

$$\iint_S \varphi \operatorname{grad}\varphi \cdot df = \iiint_V (\operatorname{Grad}\varphi)^2 dV \qquad (I,13)$$

となる、もしも ~~φ が~~ boundary surface S 上の各点で $\varphi = 0$ ~~or $\operatorname{grad}\varphi = 0$~~ とすると 左辺は 0. 従って 領域 V の各点において

$$\operatorname{grad}\varphi = 0$$

でなければならぬ、従って

$$\varphi = C(t)$$

しかも $C(t)$ の値は S の上では 0 であるから $C(t) = 0$,

$$\therefore \varphi = 0.$$

でなければならぬ。

なお boundary surface 上で 0 で内部の各点で Laplace の式を満足する様な函数は 0 の他ならぬ。

従って、boundary surface 上の各点において potential の値をあたえれば ~~Laplace~~ 内部の各点において Laplace の式を満足する函数は unique にきまる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

えん点の近傍では Grad φ は $\frac{1}{r}$ 以上の order で小さくなるとする

* boundary surface を限りなく大きくすれば (I, II) の左辺の surface integral は 0 になり，そして空間のあらゆる点で grad φ = 0 より φ = const．~~その点以外~~ grad φ が点の近傍で $\frac{1}{r}$ 以上の order で小さくなる ⇐ Laplace の eq a solution φ で，それは φ = const である．

† ~~これから~~ これを次のように考えることにする．
ある領域 V の各点に於る curl v，div v の値を与へれば curl v = が与えられた boundary 上の各点における v の値が与へられれば vector v は unique に定まる．

~~これは~~ boundary surface ~~を~~ を限りなく大きくしてゆけば

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

之を次のやく言ひかへることも出来る.

~~vector v~~ が或る領域 V の各点において

$$\operatorname{curl} v = 0$$
$$\operatorname{div} v = 0$$

を満足し、且 boundary S 上の各点において

$$v = 0$$

~~なるはかなる vector function v は 0 に外ならない~~, V の各点において $v = 0$ である.

∴ $v = -\operatorname{grad}\varphi$ とおけば

(I, 13) より

$$-\iint_S \varphi v \, df = \iiint_V v^2 \, dV$$

左辺は 0 であるから, 右辺も 0. 従って V の各点において

$v^2 = 0$ or $v = 0$ でなければならぬ. †

~~次に Poisson 式 (I, 10) の一つの solution を φ_0 とすると~~
~~他の solution φ において, $\varphi - \varphi_0$ は Laplace の式を満足する, 従って~~
次に boundary の各点において与えられた値をとり, 内部の各点において La Prisson の式 (I, 10) を満足する函数は unique である.

∴ 二つあると仮定して φ_1, φ_2 とすると. $\varphi_1 - \varphi_2$ は boundary の各点において 0 で, 内部の各点において Laplace の式を満足する.

∴ 内部の各点で $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. ∴ $\varphi_1 = \varphi_2$. †

次に Vector function

$$\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\varphi$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\iint_S \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi \, df$$

$$= \iiint_V \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\psi) \, dV$$

$$= \iiint_V (\operatorname{grad}\psi)^2 dV + \iiint_V \psi \Delta\psi \, dV$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

n gauss の定理 を apply すると

$$\iint_S (\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\varphi)\, df$$
$$= \iiint_V \operatorname{div}(\quad''\quad)\, dV$$
$$= \iiint_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV \qquad (I,14)$$

これを Green の定理と称する.

これを使っては ρ が与えられた時 Poisson の式を満足する solution を求めることが出来る.
但し ρ の 0 でない 範囲は ある finite の大きさの 領域 に限られてゐると仮定する.

それには先 $\frac{1}{r}$ なる函数を考へて

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad \text{for} \quad r \neq 0.$$

origine を中心とし 半径 r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ なる二つの球面 S_1, S_2 によって囲まれた region V に対して Green の定理を apply する. 但し $\psi = \frac{1}{r}$ とおく. 且 polar coordinate であらはす、すると、V の外では $\Delta\frac{1}{r} = 0$ なるから

$$-\iint_{S_1}\left\{\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$+\iint_{S_2}\left\{\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= -\iiint_V \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV = 4\pi \iiint_V \frac{\rho(xyz)}{r}\, dV$$

ここで φ を Poisson 式 (I,10) を満足する様のものとすると

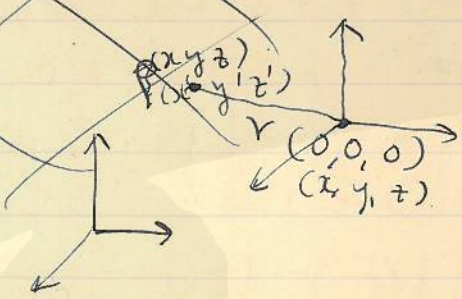
$$= 4\pi \iiint_V \frac{\rho(xyz)}{r}\, r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dV$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

coordinate の origin (0,0,0) は どこにとってもよい,
~~よい~~ ある coordinate system において, (x, y, z) なる
位置ベクトルで与えられる点 P の origin を始点とする
位置ベクトルを r とすれば P の点の φ は

$$\iiint \frac{\rho(x'y'z')}{R}\,dV'$$

で与えられる. ~~ただし~~



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

16
I, 13

そこで φ は r が非常に大きくなれば on converge し $\frac{1}{r}$ の order で小さくなり、~~従って~~ $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ は $\frac{1}{r^2}$ の order で小さくなると期待されて、有限 r_2 を充分大きくした球面に対して定点の S_2 についての integral は 0 になる。

又 $r=0$ において $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$: finite と仮定されて r_1 を充分小さくした球面に対して、定点の S_1 についての積分は

$$-4\pi\varphi(0,0,0)$$

となり、V は定点を含むことになって

$$\varphi(0,0,0) = \iiint \frac{\rho(x,y,z)}{r}\,dV \qquad (I,15)$$

となる。但し積分は全空間に亘ってとるものとする。

~~このようにして任意の coordinate transf. を行ってもよいので、例えば~~

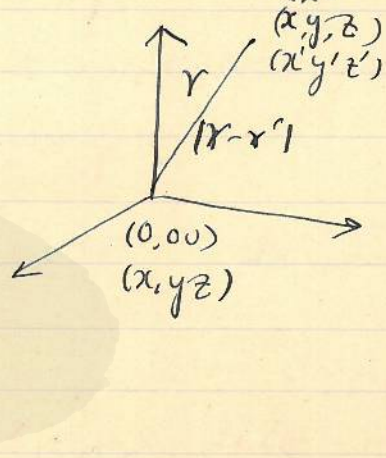
~~$x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$, $z = z' - z_0$~~

~~とおいて (x', y', z') を origin を (x_0, y_0, z_0) にもってくると~~

~~$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \iiint \frac{\rho(x', y', z')}{|r_0 - r|}\,dV'$$~~

~~別のかき方で (x, y, z) を (z, x, y) に置きかえて~~

~~$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(z', x', y')}{|r - r'|}\,dV' \qquad (I, 15)$$~~



(z, x, y) 方向の単位ベクトル

の φ を求めるには origin をこの方向へもってくればよい、という期待が実現されるとすれば φ は (I, 15) で与えられる、ということで期待されるとすれば

$$\varphi(x,y,z) = \iiint \frac{\rho(x',y',z')}{|r-r'|}\,dV' \qquad (I,16)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

↑ ρ≠0 の範囲を finite に限らなくても 適当で ρ が
えらく小さくなれば よい。その つぎ exponential に。
つぎに $\frac{1}{r^2}$ にとどく order で ρ が小さくなればよい。

↑ 後に述べる様に (I,16)×(I,17) は電荷を distribute
が ρ なる現象で distribute してみるとの電場をあらはし
従って (I,16) は ある場合の scalar potential を
あらはしてみる。

今に (x₁, y₁, z₁) なる点に e₁ なる point charge が
存在する場合は、(I,16) において ρ≠0 となる範囲を ΔV
(x₁, y₁, z₁) 点に converge させて、即

$$\iiint_{\Delta V} \rho \, d(x'y'z') \, dV'$$

を e₁ に converge させればよいから、potential は

$$\varphi(xyz) = \frac{e_1}{|r_2 - r_1|} \qquad (I,18)$$

field は $$v(xyz) = \frac{e_1 (r - r_1)}{|r - r_1|^3} \qquad (I,19)$$

となる。
更に一般に $(x_1, y_1, z_1) \cdots (x_n y_n z_n)$ 点に夫々 $e_1, e_2 \cdots e_n$ なる
point charge の存在する時の potential および field は夫々

$$\varphi(xyz) = \sum \frac{e_i}{|r - r_i|} \qquad (I,20)$$

$$v(xyz) = \sum \frac{e_i (r - r_i)}{(r - r_i)^3} \qquad (I,21)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

所で、$\rho \neq 0$ でない範囲が 点、或る finite な範囲に limited されてゐる時には、r が非常に大きい所では φ はその範囲内の任意点からの距離 r に比例して小さくなる。又 $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ は $\frac{1}{r}$ に比例して小さくなる。従って途中の段を満足されてゐます

従ってかゝる場合には (I, 16) が Poisson の式 (I, 10) の solution となる。

しかして、途方で $\varphi \to 0$、$\frac{\partial \varphi}{\partial r} < \frac{c}{r}$ といふ条件を満足する唯一の solution は之よりない。(かゝる条件を満す二つの solution の差は Laplace の式を満し、途方で $\frac{\partial \varphi}{\partial r} < \frac{c}{r}$ から const に limit され、しかもこの const は 0 でなければならぬ)

従って

$$v = -\operatorname{grad} \varphi = \iiint \frac{(r-r')}{|r-r'|^3} \rho(x'y'z')\, dV' \quad (I, 17)$$

特に $\rho \neq 0$ でない範囲が (x_1, y_1, z_1) なる一点の小体積 ΔV に limited されてゐるとし、この体積 ΔV を限りなく小さくする、従し

$$e_1 = \iiint_{\Delta V} \rho\, dV$$

は有限の値に converge するとし、之を e_1 とすると、この場合の potential φ は

$$\varphi(xyz) = \frac{e_1}{|r - r_1|} \quad (I, 18)$$

従って field

$$v(xyz) = \frac{e_1 (r - r_1)}{|r - r_1|^3} \quad (I, 19)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

すなわち Vector Ⅱ の 0 でない元は finite の和から
れてみると仮定する.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次n
$$\operatorname{div} v = 0 \qquad (I, 22)$$
なる special case を考へ．まへられた Vector Field Ⅱに對し．
$$\operatorname{curl} v = 4\pi \mathrm{II} \qquad (I, 23)$$
を満足する v をおもとめる．~~従て vector equation (I, 23)~~ 従て (I, 23) の両辺の div をとれば 0 となる．なん
$$\operatorname{div} \mathrm{II} = 0 \qquad (I, 24)$$
即ち vectorequation (I, 23) が solution をもつ為めには ~~I, 24~~ Ⅱの div が消える事 0 でなければならぬ．

この場合には
$$v = \operatorname{curl} A \qquad (I, 25)$$
を満足する様な Vector A がきまる．

即ち
$$\left.\begin{aligned} A_x &= \int_{z_0}^{z} v_y(xyz)\,dz - \int_{y_0}^{y} v_z(xyz_0)\,dy \\ A_y &= -\int_{z_0}^{z} v_x(xyz)\,dz \\ A_z &= 0, \end{aligned}\right\} (I, 26)$$

とすれば，
$$\therefore \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial v_x(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(xyz)}{\partial y}\right) dz + v_z(xyz_0)$$
$$= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v_z(xyz)}{\partial z}\,dz + v_z(xyz_0) = v_z(xyz)$$
$$\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = v_y(xyz)$$
$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = v_x(xyz).$$

~~これから~~ Vector 場 v の Vector Potential と称する．
これから Vector ~~ポテンシャル~~

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= -\iiint \frac{(y-y')I_z' - (z-z')I_y'}{|x-x'|^3}\, dV' \qquad \text{etc}$$

$$= -\iiint \frac{[(x-x'), \mathrm{II}(x'y't')]_x}{|x-x'|^3}\, dV'$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\mathrm{div}\, \mathbf{A} = 0 \qquad (\mathrm{I}, 27)$$

を満足するものがある.

∵ (I, 25) の一つの解を $\mathbf{A}_1$ とし, $\mathrm{div}\, \mathbf{A}_1 = \rho_1$ とすると, おのやつたおの $\mathrm{curl}\, \mathbf{A}'_\alpha = 0$

$\mathrm{div}\, \mathbf{A}'_\alpha = \rho_1$,

を満足するおなvector $\mathbf{A}'_\alpha$ が ∞ 多く存在する. その一つを $\mathbf{A}_2$ とおくと.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

はおのが (I, 25), (I, 27) の両方の関係を満足してる.

さて (I, 25) を (I, 23) のように

$$\mathrm{curl}\, \mathrm{curl}\, \mathbf{A} = 4\pi \mathrm{II}$$

しかるに

$$\mathrm{curl}\, \mathrm{curl}\, \mathbf{A} = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

(I, 27) の関係を用いると.

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathrm{II} \qquad (\mathrm{I}, 28)$$

この vector 方程式の各 component は Poisson の equation の形をしている. 従って その solution は (I, 16) と同じである. 即ち

$$\mathbf{A}(x\,y\,z) = \iiint \frac{\mathrm{II}(x'y't')}{|r - r'|}\, dV' \qquad (\mathrm{I}, 29)$$

~~この場合にも あとは おのの vector II の 0 でない 範囲が finite の有限の大きさにとどまっておらねばならぬ.~~

従って

$$v = \mathrm{curl}\, \mathbf{A}$$

$$= -\iiint \frac{[(r - r'), \mathrm{II}(x'y't)]}{|r - r'|^3}\, dV' \qquad (\mathrm{I}, 30)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

しかして (I, 22)(I, 23) を満足し、且つすべての r に対して小さくなるおのおのの解は之外である。

以上の二つの special case を綜合すると、一般の場合を例えば scalar 量 ρ 及び 発散 $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ の形式を満足する vector 量 $\mathfrak{v}$ があたえられた時、之を用いて

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{v} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{curl} \mathfrak{v} &= 4\pi \mathfrak{V} \end{aligned}\right\} \quad (I, 31)$$

を満足する vector $\mathfrak{v}$ は次のごとく、あらわされる
(但し $\rho, \mathfrak{V}$ の ∞ でなくて、充分早く 0 になるとする。) 即ち (I, 17) の如く (I, 30) であたえられた vector 量をおのおの $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ とおくと

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

は明かに (I, 31) を満足する。
しかして且つ r の一次式 (之より) 小さくなるおのおの solution は

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= -\operatorname{grad} \iiint \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' \\ \mathfrak{v}_2 &= \operatorname{curl} \iiint \frac{\mathfrak{V}(r')}{|r - r'|} dV' \end{aligned}\right\} \quad (I, 32)$$

之外である。

Stress Tensor の話

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

フランク？
Frank-Mises
p. 632

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Chapter V. Mechanical Action in Static Fields

今迄は主に静電場および静磁場それぞれ別個に取扱ってきたが、物質の像件のもとでは両者は field が存在するかぎり同時に考えねばならない。しかしながら field は物理的な実体であるか、いなかは別として、これを如何に取扱うかが次の問題となる。

~~これを取扱うには~~ 物質は mechanical action Fernwirkungstheorie においては一点の電場および磁場だけの量で表わされた unit charge, unit magnetic pole に及ぼす mechanic force という意味をもってみた。~~従って~~ 我々の Feldtheorie では単に電場、磁場だけしか、かかる mechanical な意味をもたない。

真空中および誘電体の energy は夫々

$\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\mathbf{D}\,d\tau$

および $\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}\mathbf{B}$

(この density で distribute されてあるという附言をなしておく。

これらから energy の定義から逆に field が mechanical な意味をもたねばならぬ。

さて電場による全 energy は

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}\mathbf{D}\,dV = \frac{1}{8\pi}\iiint \rho\varphi\,dV$$

~~or $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$~~

であるが、これは electric charge density の distribution および dielectric constant $\varepsilon(x)$ の如何に依るのである。

今各点の density および diel. const. をそれぞれ $\delta\rho(x)$, $\delta\varepsilon(x)$ と

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

かくて、energy $\overline{W}$ は $\delta\overline{W}$ だけかわるとすれば、これは
電荷だけかわったときの変化 $\delta\overline{W}_\rho$ と 電場だけかわったときの変化 $\delta\overline{W}_\varepsilon$
の和である。

即ち
$$\delta\overline{W} = \delta\overline{W}_\rho + \delta\overline{W}_\varepsilon$$

今 $\delta\overline{W}_\rho$ を計算してみよう。 ~~$\mathbb{D} = \varepsilon\mathbb{E}$ で~~

$$\delta\overline{W}_\rho = \frac{1}{8\pi}\iiint (\delta\mathbb{E}_\rho\cdot\mathbb{D} + \mathbb{E}\cdot\delta\mathbb{D}_\rho)\,dV$$

しかるに $\mathbb{D} = \varepsilon\mathbb{E}$ なるから、これをかくと
$\delta\mathbb{D}_\rho = \varepsilon\,\delta\mathbb{E}_\rho$ $\quad\therefore \delta\mathbb{E}_\rho\cdot\mathbb{D} = \mathbb{E}\cdot\delta\mathbb{D}_\rho$

$$\therefore \delta\overline{W}_\rho = \frac{1}{4\pi}\iiint \mathbb{E}\cdot\delta\mathbb{D}_\rho\,dV$$

~~しかるに $\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 4\pi\rho$~~

$\therefore$ $\mathbb{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$ である。

$$\delta\overline{W}_\rho = \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi\cdot\mathrm{div}\,\delta\mathbb{D}_\rho\cdot dV$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint \varphi\cdot\delta\mathbb{D}_\rho\,df$$

右辺第2項は0で 又 $\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 4\pi\rho$ から して
$\mathrm{div}\,\delta\mathbb{D}_\rho = 4\pi\,\delta\rho$ となり、結局、

$$\delta\overline{W}_\rho = \iiint \varphi\,\delta\rho\cdot dV$$

となる。しかるに $\delta\rho$ である charge を 左右に動かして $\rho_0(x)$ である charge
を δx だけ動かしたものだということをすると

$$\iiint_V \delta\rho(x)\,dV = -\iint_S \rho_0(x)\,\delta x\cdot df = -\iiint_V \mathrm{div}(\rho_0\,\delta x)\cdot dV$$

or $\quad\delta\rho(x) = -\,\mathrm{div}(\rho_0\,\delta x)$

$$\therefore \delta\overline{W}_\rho = -\iiint \varphi(x)\,\mathrm{div}(\rho_0(x)\,\delta x)\,dV$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\therefore \delta \overline{W}_p = \iiint \mathrm{grad}\,\varphi(r) \cdot \rho_0 \delta r \cdot dV$$

$\rho_0(r)$ のみで δr は任意であるから

$$= -\iiint \mathbf{E}(r) \cdot \rho_0(r) dV \cdot \delta r$$

之は r なる点 附近の $\rho_0 dV$ なる charge を δr だけ動かすに要するエネルギーである。

これによって field のエネルギーは

$$\mathbf{E}(r) \cdot \rho_0(r) \cdot dV \cdot \delta r$$

丈け減少すると考へねばならぬ。~~energy の減るから負を~~
~~負ねばならぬ。このenergy は~~ 之は $\rho_0 dV$ なる charge を
δr だけ大勢かすに要した仕事だけ出て行くからである。なほ
r 点におかれた $\rho_0(r) \cdot dV$ なる charge には

$$\mathbf{E}(r) \cdot \rho_0(r) dV$$ r 点におかれた

なる force が働く。従つて unit charge には

$$\mathbf{E}(r)$$

なる force が働くと考へねばならぬ。

従つて electric field は Fernwirkungstheorie において
かかる意味をもつ。

次に之の変化による項 $\delta \overline{W}_2$ の計算は複雑であるから
あとまはしにし、最初から n 個の conductor 1, 2, 3, .. n
ある場合の energy を考へてみると

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi} \iiint \mathbf{E}\mathbf{D}\, dV$$

$$= +\frac{1}{8\pi} \iiint \varphi \,\mathrm{div}\,\mathbf{D}\, dV - \frac{1}{8\pi} \iint \varphi \mathbf{D}\, df$$

茲で space charge がなければ第一項は 0 で、第二項は
conductor の surface について φ は const だから

$$= -\frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \iint \mathbf{D}_i\, df_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \varphi_j$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} e_j$$

$$\overline{W} = \sum_{i,j} e_i c'_{ij} e_{ij} = \sum_i c_{ii} e_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_{ij} e_i e_j$$

$$= \sum_i c_{ii} \varphi_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に (x,y,z) 点における $\rho(x)\,dV$ なる charge には

$$-\rho_0(x)\,dV\cdot \mathrm{grad}\,\varphi(x)$$

$$= -\rho_0(x)\,dV\cdot \mathbf{E}(x)$$

なる force が働いてみることになる。従って unit charge には $\mathbf{E}$ なる force が働くことになる。~~これは~~ このように (II, 27) 式を出すのも一応この仮定をしてみたのであるから ⟹ 多少とってくる事である。

~~次に~~ 空そやんなくの conducton 1, 2, ... n が存在する場合の energy は、~~conduction~~ 上式の右辺の volume integral は conductor 全体についてとればよく、potential は const であるから integration の外へ出すと ~~conductor~~ 各項は各 conductor の total charge をあらわすことになり 従って

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \varphi_i .$$

となる、即ち electrostatic field の energy は各導体の charge および potential によって unique にきまる。」

次に各導体の relative position をきめれば、$e_1, e_2 \cdots$ と $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ との間の linear な関係がきまって来、各導体の potential が、charge がいくつあたえられれば energy が unique にきまってくる。~~pot. は charge を一定にしておいて~~

そこで各導体の relative position をかえると ~~energy~~ potential と charge の間の関係がかわり、従って energy もかわってくる。

であるから ~~energy~~ ある多くの conductor の system が勝手な形で勝手に存在しているとき、その charge および potential は ~~relative position~~ をかえる仕方から、~~一般に何程かの力がかかって~~ 外から energy をかけ、または electric force がかかるようにして system ~~一般に~~ 各 conductor を何程か動かす

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

従って二つの charged sphere の間に働く force は Coulomb の force と考えてよく、これからして更に一般の charge を持った任意の charge をおのおのとが言える。

次に二つの sphere が遠く離れて存在する場合の全 energy を求めるために

$$\varphi_1 = c_{11}' e_1 + c_{12}' e_2$$
$$\varphi_2 = c_{12}' e_1 + c_{22}' e_2$$
$$e_1 = c_{11} \varphi_1 + c_{12} \varphi_2$$
$$e_2 = c_{12} \varphi_1 + c_{22} \varphi_2$$

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\{c_{11}' e_1^2 + 2 c_{12}' e_1 e_2 + c_{22}' e_2^2\}$$
$$\text{or} = \frac{1}{2}\{c_{11} \varphi_1^2 + 2 c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + c_{22} \varphi_2^2\}$$

から

$$c_{11}' = \frac{r_1}{r_1}, \quad c_{12}' = \frac{1}{R}, \quad c_{22}' = \frac{1}{r_2}$$

この逆は

$$c_{11} = \frac{r_1}{1 - \frac{r_1 r_2}{R^2}}, \quad c_{12} = \frac{r_1 r_2}{R}, \quad c_{22} = \frac{r_2}{1 - \frac{r_1 r_2}{R^2}}$$

$$\therefore \overline{W} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e_1^2}{r_1} + \frac{2 e_1 e_2}{R} + \frac{e_2^2}{r_2}\right\}$$

従って sphere の間に働く force は

$$-\frac{\partial \overline{W}}{\partial R} = +\frac{e_1 e_2}{R^2}$$

radius のおのおの

となる。

以上 R^{-4} 以上を neglect して!!

$$\overline{F} = \left\{\frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} \operatorname{grad} \varepsilon)\right\} dV$$

$$(\mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{E})_x = E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial E_x^2}{\partial x} + 2\frac{\partial E_x E_y}{\partial y} + 2\frac{\partial E_x E_z}{\partial z} - 2E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - 2E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}\right\}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\therefore (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E})_x = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + 2\frac{\partial E_x E_y}{\partial y} + 2\frac{\partial E_x E_z}{\partial z}\right\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~それらの relative position をかえる~~. 外からの mechanical force をかえてなければ釣合はくずれないということになる.
逆に釣合を保つ為する mechanical force を測ることによって, conductor の potential 又は charge を ~~きめる~~ 定めることができる.†

上述の如く (x, y, z) 点の dV なる elementary volume 中の $\rho(x)dV$ なる charge には $\mathbf{F} = \mathbf{E}(x)\rho(x)\,dV$ なる force が働く. 又

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}$$

であるから

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{D}\cdot dV$$

(uniform な) medium の dielectric constant を ε とすると

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\cdot dV$$

$$F_x = \frac{\varepsilon\,dV}{8\pi}\left\{\frac{\partial(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)}{\partial x} + 2\frac{\partial E_x E_y}{\partial y} + 2\frac{\partial E_x E_z}{\partial z}\right\}$$

etc

又は

$$T = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$$

従て $F_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\cdot(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)$ etc

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_y \quad \text{etc}$$

が symmetric tensor をなす.

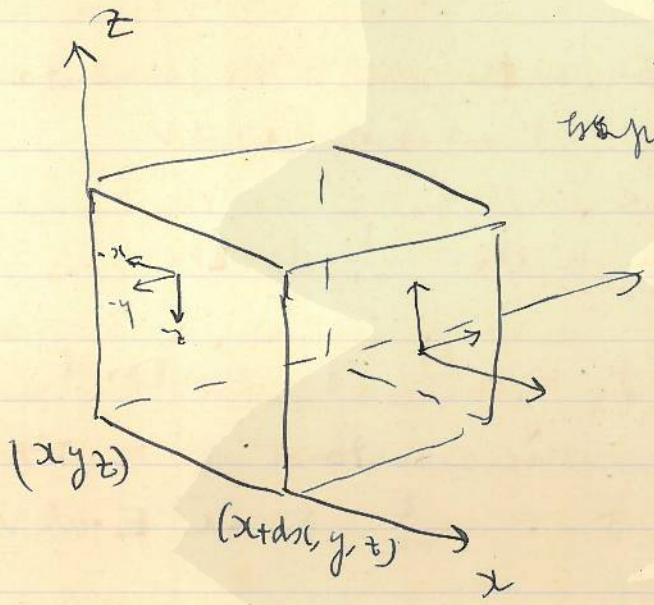
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

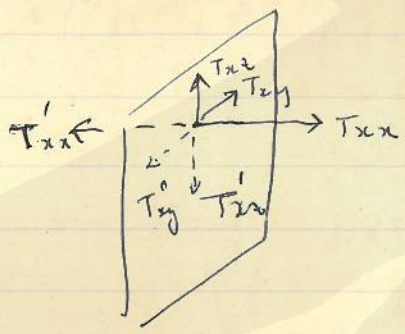
dV は 各々 $x=x$ $x=x+dx$

$y=y$ $y=y+dy$

$z=z$ $z=z+dz$

で plane で 囲まれている





©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$F_x = \int \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right) dV$$

$$F_y = \int \left(\frac{\partial T_{yxy}}{\partial x} + \cdots \right) dV$$

$$F_z = \int \left(\frac{\partial T_{zax z}}{\partial x} + \cdots \right) dV$$

なる force が働くことになる.

これは流体などでよく知られてゐる様に dV なる体積を囲んで surface に T なる tensor であらはされる様な tension が働くことで説明が生まれる.

この dV がそこで dx, dy, dz なる rectangular parallelepiped であるとすると, (xyz) を通る x-axis に垂直な面には positive normal の方向, この x-axis の positive 方向に $-T_{xx}\,dydz$ なる force が働き, tangential の方向, この +y-axis および +z-axis に垂直の方向にはそれぞれ $T_{yx}\,dydz$, $T_{zx}\,dydz$ なる force が働き, 又 $(x+dx, y, z)$ を通り x-axis に垂直な面には x, y, z 軸の方向にそれぞれ

$$dydz\,T_{xx}(x+dx, y, z) = \left(T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz,\ \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x}dx\right)dydz$$

$$\left(T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x}dx\right)dydz$$

なる力が働き, 同様にして他の面つの面にもそれぞれの方向に働くとすれば, 全体 x, y, z 方向の resultant force はそれぞれ

F_x, F_y, F_z $F_x\,dxdydz = F_x\,dV$, $F_y\,dV$, $F_z\,dV$

となる.

この stress tension T を Maxwell's stress と呼ぶ. stress T は symmetric であるから dV に働く resultant moment of force は 0 である.

かくの如く Maxwell の field theory では Coulomb force の如き遠く隔たるものを考えるかわりに, 周囲の surface を通して働く stress を考えればよいことになる.

Maxwell はこの様な analogy によって論を進めた.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

dielectric medium を一種の弾性体のあく方へ、これに stress が働いて、medium に生じた ~~strain~~ 量が electric displacement であると考えたが、この model を採用する必要はない。~~媒質の~~ 各場に働くカを取り扱うに ~~最も~~ stress として取扱うことを許されます。

今、媒質の各面に働く stress 成分を考へて見る。~~媒質の~~ ~~E~~ ~~E_{xy}~~ と此の面積 df の outward normal の方向を x-axis にとると此場は normal の方向にのみある、その強さを E とおくと、

$$E_y = E_z = 0 \qquad (E_x) = E$$

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} = E_x$$

surface charge の density を ω とおくと

$$\omega = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_x$$

従って、df に働く stress は

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi} E_x^2 = \frac{2\pi}{\varepsilon} \omega^2$$

$$T_{xy} = T_{xz} = 0$$

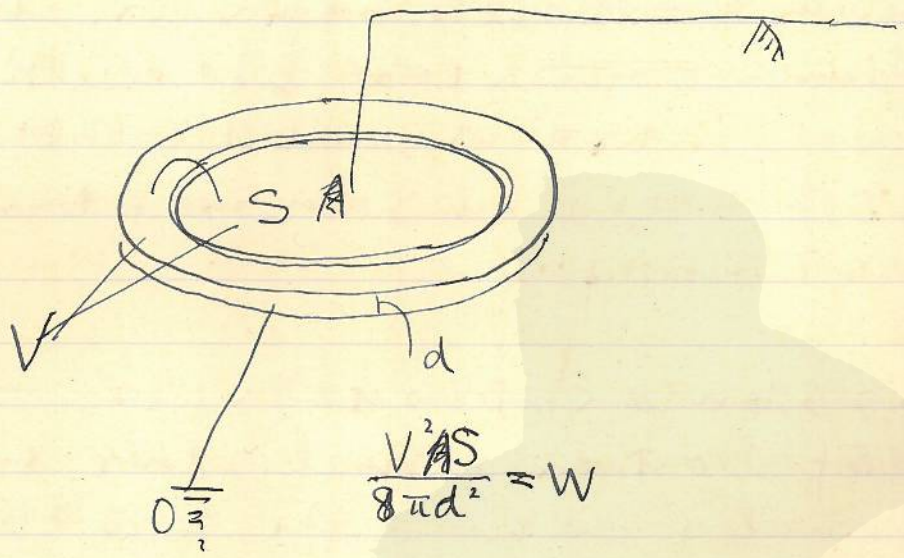
即ち 媒質の各面に働く stress は面に垂直で、しかも外方に向ひ、その大いさは surface charge の density の二乗に比例し、diel. const に逆比例してゐる。

媒質の内部では field は ~~ない~~ 一様だから、媒質の内(之)の面に働く stress は 0 で従って、媒質の df なる面積素に働く resultant force は

$$\frac{2\pi}{\varepsilon} \omega^2 df = \frac{\varepsilon}{8\pi} E_{\text{surface}}^2 df$$

である。但し、E は field の定常値

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$$\frac{V^2 S}{8\pi d^2} = W$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

簡単な例として Thomson の disc electrometer をあげる。
circular plate を金属で取り囲せておき、同心 concentric の guard ring を添え。下のおんなじ面に相対して circular plate をおく。下の plate を earth し、上の plate を V の potential に上げる。と下 plate 間の（及び guard ring）距離を d とすると field δ

$$E = \frac{V}{d}$$

従って plate の下2つに働く力は

$$\iint_S \frac{E^2}{8\pi} dS = \frac{}{}$$

従し、積分は Pの plate について である。~~integrand~~ 各 integrand は場所に independ ~~しない~~ ことを考えの力れをすると、

$$\frac{V^2}{8\pi d^2} S$$

となる。但し、S は plate の面積。

上述の力が ~~plate~~ plate を下へ引下げ力とする。之と釣合をくずれすには ~~この力と同じ量を~~ 金属の重さを之丈増さねばならぬ。その重さを W とすると

$$\frac{V^2}{8\pi d^2} S = W$$

$$\therefore V = d\sqrt{\frac{8\pi W}{S}}$$

∴ 重さを測ることによって、potential V を決定しうる。

~~charge を測るには plate の charge surface density を uniform とし~~

$$W = \iint_S \frac{2\pi\omega^2}{\epsilon} df =$$

total charge $e = \omega \cdot S$

$$\therefore W = \iint_S \frac{2\pi\omega^2}{S} df = \frac{2\pi e^2}{S}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\delta\bar{W}_\xi = \frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon}\,dV$$

$$\delta\bar{W}_\xi = \frac{1}{8\pi}\iiint\left\{\frac{2\mathfrak{D}\,\delta\mathfrak{D}_\xi}{\varepsilon} - \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon^2}\mathfrak{D}^2\right\}dV$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{D}_\xi\,dV - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{E}^2\delta\varepsilon\cdot dV$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi\cdot \operatorname{div}\delta\mathfrak{D}_\xi\,dV - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{E}^2\delta\varepsilon\cdot dV$$

しかるに
$\delta_\xi \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{div}\delta\mathfrak{D}_\xi = 0.$

$$\therefore \delta\bar{W}_\xi = -\frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{E}^2\delta\varepsilon\cdot dV$$

ある fluid の state ξ が matter medium の density ρ τ の function となっている場合

$$\delta\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\rho_\tau}\cdot\delta\rho_\tau$$

ρ_τ に関する $\delta\rho_\tau$ は $d\tau$ の volume element $d\tau$ の matter の δx と

$$\bar{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint\left\{m(x)\operatorname{grad}\int\operatorname{grad}''\frac{1}{|x''-x|}\,dV'' + m(x)\operatorname{grad}\int\operatorname{grad}''\frac{1}{|x''-x|}\,dV''\right\}^2$$

$\delta\bar{W} =$ $m(x)$

displace されることによって生ずる density の変化 $\delta\rho$ の場合と同様にして、

$$\delta\sigma = -\operatorname{div}(\sigma\delta x)$$

$$\delta\sigma = -\delta x\operatorname{grad}\sigma - \sigma\operatorname{div}\delta x$$

$$\therefore \delta\varepsilon = -\frac{d\varepsilon}{d\rho_\tau}\operatorname{grad}\rho_\tau\cdot\delta x - \rho_\tau\frac{d\varepsilon}{d\rho_\tau}\operatorname{div}\delta x$$

$$\therefore \delta\bar{W}_\xi = +\frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{E}\operatorname{grad}\varphi\cdot\delta x\,dV - \iiint$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iiint \rho_\tau\mathfrak{E}^2\frac{d\varepsilon}{d\rho_\tau}\operatorname{div}\delta x\,dV$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~$\delta r = \sqrt{\frac{W\delta}{2\pi}}$~~

次に dielectric constant の change による energy の変化 $\delta \bar{W}_\varepsilon$ を計算すると

$$\delta \bar{W}_\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\iiint \{ \mathbb{E}^2 \operatorname{grad}\delta\varepsilon - \operatorname{grad}\left(\mathbb{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho}\delta\right)\} \delta r\, dV$$

ここで δr だけ変った matter を δr 丈移すという事によって field の energy の減少は

$$\frac{1}{8\pi}\left\{-\mathbb{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{grad}\left(\mathbb{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho}\sigma\right)\right\} dV\cdot\delta r$$

∴ r 方向の体積 dV に働く force は

$$\frac{1}{8\pi}\left\{-\mathbb{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{grad}\left(\mathbb{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho}\sigma\right)\right\} dV$$

である。

~~fluid が electrostatic field において equilibrium にあるためには~~ 他の mechanical force と electric force とが釣合はねばならぬ。fluid の内部の一点の hydrostatic pressure を $p(r)$ とおくと、その体積 dV に働く force は

$$-\operatorname{grad} p(r)\cdot dV$$

であって、これにおいて

$$\frac{1}{8\pi}\left\{-\mathbb{E}^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{grad}\left(\mathbb{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho}\cdot\sigma\right)\right\} - \operatorname{grad} p = 0$$

~~~~

もしも dielectric constant が density のみの函数でなく、外の variables によっても変るような場合には次の項がかわる。
~~~~

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\frac{1}{8\pi}\left\{-E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(E^2\frac{d\varepsilon}{dp}\tau\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial(\varepsilon E^2)}{\partial x}\left(E^2\frac{dp}{d\varepsilon}\tau-E^2\varepsilon\right)+\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial x}\right\}$$

$$2\varepsilon\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}+E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$=2\varepsilon\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+E_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$=2\varepsilon\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial(E_xE_y)}{\partial y}+\frac{\partial(E_xE_z)}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{1}{8\pi}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{E^2\frac{dp}{d\varepsilon}\tau\right)+\varepsilon(E_x^2-E_y^2-E_z^2)\right\}+2\frac{\partial\varepsilon E_xE_y}{\partial y}+2\frac{\partial\varepsilon E_xE_z}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left\{2E_x^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+2E_xE_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+2E_xE_z\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-E_x^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-E_y^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-E_z^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+2\varepsilon E_x\frac{\partial E_y}{\partial y}+2\varepsilon E_x\frac{\partial E_z}{\partial z}\right.$$

$$=(E_x^2-E_y^2-E_z^2)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+E_xE_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+E_xE_z\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+2\varepsilon\frac{\partial(E_xE_y)}{\partial y}+2\varepsilon\frac{\partial(E_xE_z)}{\partial z}$$

$$+2\varepsilon E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}+2\varepsilon E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}-2\varepsilon E_y\frac{\partial E_x}{\partial y}-2\varepsilon E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

此の場合もまると同じ様に medium の中のどの様な surface を通しても同じ stress としてあらはれる.

この場合には ε を場所に indep な const として計算してあるから, この場合にはあてはまらぬ. なぬ面ぶーひにしておらにしめて計算しやす.

dV なる体積素に働く force は左の如くして

$$F = \frac{1}{4\pi} E \operatorname{div} D\, E\rho + \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right) - E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} E \operatorname{div}(\varepsilon E) + \frac{1}{8\pi}\left\{\operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right) - E^2 \operatorname{grad}\varepsilon\right\}$$

$$F_x = \frac{1}{8\pi}\left\{4E_x \operatorname{div}(\varepsilon E) - E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{2E_x \frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial x} + 2E_x \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial y} + 2E_x \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial z} - \frac{\partial(\varepsilon E_y^2)}{\partial x} + 2\varepsilon E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + 2\varepsilon E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{dp}{d\tau} \frac{1}{\rho}\right)\right\}$$

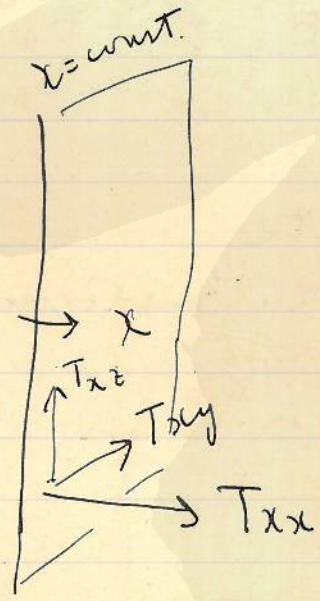
$$= \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E_x^2 - \varepsilon E_y^2 - \varepsilon E_z^2 + \tau \frac{dp}{d\tau}\frac{1}{\rho}) + \frac{\partial}{\partial y}(2\varepsilon E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(2\varepsilon E_x E_z)\right\}$$

etc

なるてあると計算して, medium の性質はこうなる.

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$E_x = E$
$E_y = E_z = 0$

$E_x = 0$
$E_y^2 + E_y^1 = E^2$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

The stress tensor をもつ x medium の dV である面に働く force は

$$F_x = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right) dV$$

etc

となる。

以上、 $T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) = \frac{2\varepsilon}{4\pi}E_x^2 - \frac{\varepsilon}{8\pi}E^2$

$+\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\varepsilon}{dt}\tau$ $\qquad +\frac{1}{8\pi}E^2\frac{d\varepsilon}{dt}\tau$

$= \frac{1}{8\pi}\left(2E_xD_x - \boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + E^2\frac{d\varepsilon}{dt}\tau\right)$

$T_{xy} = T_{yx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y = \frac{1}{4\pi}E_xD_y = \frac{1}{4\pi}E_yD_x$

etc

これが一般の場合の Maxwell の stress である。

従って例えば (x, y, t) 点を通る $x = \text{const}$ の ~~surface~~ plane ~~の unit area を垂直~~ の unit area の辺して、その方の ~~方~~ 部分の方向を向ける面の x, y 方向 component は

$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{E^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{dt}\tau$

$T_{xy} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y \qquad T_{xz} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_z$

~~である component を持つ force~~ である。

~~面の垂直 field の方向が x 方向なら面を plane の unit area を plane に働く tension は~~

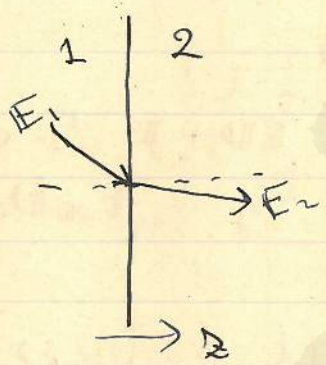
垂直な面。field の方向に垂直な plane には ~~field の方向に~~ $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ の tension が働く。

平行な面。field の方向に平行な 〃 〃 $+\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ の ~~tension~~ pressure が働く。

平行な面。各々の方向に一般に $\frac{E^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\tau$ の tension が働く。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

1.



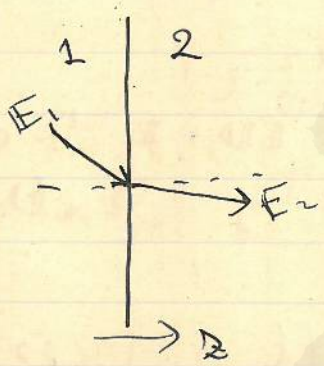
$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_2 E_{z2}^2 - \varepsilon_1 E_{z1}^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)(\varepsilon_1 E_{z1})^2$$

$$= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\varepsilon_1 E_{z1})^2$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

1.



$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_2 E_{t2}^2 - \varepsilon_1 E_{t1}^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)(\varepsilon_1 E_{t1})^2$$

$$= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\varepsilon_1 E_{t1})^2$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

例として見. dielectric constant Σ なる medium の中に conductor が存在する時、その表面に働く force を考へて見る. field は表面に垂直であるから

$$\frac{\Sigma E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}\tau\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial(\Sigma\tau)}{\partial \tau}$$

なる tension が unit area について作用する.

これは ~~dielectric~~ 異なる dielectric medium の boundary surface に働く force を与へて居る.

boundary surface 上の或る点の一点 O をとり, 1 から 2 への normal の方向を z-axis にとり. 又 O を通る electric field vector を含む plane を x-z plane にとる.

すると boundary condition により. $E_{y1} = E_{y2} = 0$

$$E_{x1} = E_{x2}, \quad \varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}$$

である.

さて, ~~2 から 1~~ 1 から 2 へ及ぼす ~~force~~ stress は

$$-\frac{\varepsilon_1}{4\pi}E_{x1}E_{z1}, \quad 0, \quad -\frac{\varepsilon_1}{8\pi}(E_{z1}^2 - E_{x1}^2) \sim \frac{E_{x1}^2+E_{z1}^2}{8\pi}$$

$$-\frac{E_{x1}^2+E_{z1}^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}\tau_1$$

なる comp をもつ. 2 から 1 へ及ぼす stress は

$$\frac{\varepsilon_2}{4\pi}E_{x2}E_{z2}, \quad 0, \quad +\frac{\varepsilon_2}{8\pi}(E_{z2}^2 - E_{x2}^2) + \frac{E_{x2}^2+E_{z2}^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}\tau_2$$

従って全 resultant force の x, y - comp は 0, 又 stress は ~~0~~ boundary surface の normal を z-方向の

$$\frac{\varepsilon_2}{8\pi}(E_{z2}^2 - E_{x2}^2) - \frac{\varepsilon_1}{8\pi}(E_{z1}^2 - E_{x1}^2)$$

$$\frac{\varepsilon_1 E_{z1}^2}{\varepsilon_2} - \varepsilon_1 E_{x1}^2 + \frac{\tau_2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}(E_{x2}^2 + E_{z2}^2) - \frac{\tau_1}{8\pi}\frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}(E_{x1}^2 + E_{z1}^2)$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\varepsilon_1 E_{z1}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)^2 + E_{x1}^2\right\}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{8\pi}\left(E_{z2}^2\frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}\tau_2 - E_1^2\frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}\tau_1\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\frac{1}{T}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\text{const.}$$

π ~~[illegible]~~ dielectrics の surface に normal に力 tension が働く．従って ~~diel~~ 系は parallel plate condensor の plate の間へ movable dielectric substance を挿入すると，それは plate の間へ引き込まれる．

$$E_1^2 = E_x^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_2^2$$

T gas, ~~fluid~~ liquid の場合 [illegible]

$$\frac{1}{T}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\text{const}=C \qquad \varepsilon-1=1-\varepsilon$$

[illegible]

$$\left(\frac{\varepsilon+2}{1-\varepsilon}\right)\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}=C \qquad 1-\varepsilon=\tau\,C\,\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\tau$$

$$\left(\frac{\varepsilon+2}{1-\varepsilon}\right)\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}=C\frac{3}{(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_x^2+E_2^2\right\}(\varepsilon-1)-\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_2E_2^2+\varepsilon_1E_x^2)(1-\varepsilon)$$
$$=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)^2\varepsilon_1E_x^2\,\mu>0$$

T は ~~[illegible]~~ 温度，dielectrics を apply する場合は [illegible]

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第一項は ε_1 そこに immersed body の volume, boundary surface は body の大きさおよびその形状に関係する量, 第二項は body の形状には関係せず, 場合によってのみ関係する.

以上第一次までをもってするならば dielectric const ε_1 なる substance が dielectric const ε_2 なるより小さい medium 内に存在する場合には, その body は field の強い所へ引き込まれる.

例へば parallel plate condensor の間へ movable insulating body を入れ, 手をはなしておけば, それは自然に plate の間へ引き込まれてしまうであろう.

次に第二項をも考慮する. 特別の場合として 第二の medium を vacuum とすると stress は

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\varepsilon_1 E_3^2 + E_t^2\right\}(\varepsilon_1 - 1) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{8\pi}\left(E_x^2 + \frac{E_z^2}{\varepsilon_1}\right)\frac{d\varepsilon}{d\rho}$$

但し, $\varepsilon_1 \to \varepsilon$, $E_{x2} \to E$, $\tau_1 \to \tau$, ↑

$\frac{d\varepsilon}{d\rho} > 0$ なる場合には 第一項と第二項のうち小さい数字をもって insulat dielectric は expand 又は contract しようとする.

$\frac{d\varepsilon}{d\rho} < 0$ なる時には dielectric は常に expand しようとする傾向あり,

この外に 電場に置かれた dielectric substance には 変形としてそれを動かさうとするカのみならず, それを変形しようとする力が働く. かかる変形のおこることは実験的に確められておりこれを electrostriction と云ふ. ↑

すなわち, dielectric の内部に於ける stress のために内部に deformation を生ずる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

† $\frac{1}{4\pi}\iiint \delta H_1 \cdot H_1 \, dV = -\frac{1}{4\pi}\iiint \delta H_1 \, \mathrm{grad}\, \varphi \, dV$

$= +\frac{1}{4\pi}\iiint \delta \,\mathrm{div}\, H_1 \cdot \varphi \, dV = \frac{1}{4\pi} - \iiint \delta \,\mathrm{div}\, \delta m \cdot \varphi \cdot dv$

$= -\iiint \delta m \cdot H_1 \cdot dV$

$= -\iiint m \delta H_1 \cdot dV$

$\therefore \delta W = 0$

$t = \frac{1}{8\pi}\left(2 H_x B_x - H_1 B + H_1^2 \frac{d\tilde{\mu}}{dc}\tau\right)$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Chapter IV. Magnetostatics

magnetostatic field においては $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{H}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0 \quad ,$$
$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=0$$

を満足せねばならぬ．$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係は物質，等方な medium においては普通の場合

$$\mu\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$$

の関係がある．しかし，μ の値はこのほか 1 よりも大きいことも小さいこともある，

$\mu>1$ ： paramagnetic substance　Pt, O_2, N_2

$\mu<1$ ： diamagnetic substance　Bi, Cu, H_2O, H_2

又は Fe, Ni, Co 等の Ferromagnetic substance においては $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の関係は複雑である．

$\boldsymbol{H}$ の小さい間は $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{H}$ に比例するが，$\boldsymbol{H}$ が大きくなると $\boldsymbol{B}$ の増すのは少くなり $\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{H}$ は一定値に近づいてゆく．

又 hysteresis なる現象があって $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{H}$ の値のみならず $\boldsymbol{B}$ はそれまでの変化によって色々な値をとりうる．

さて，おおから我々は先ず $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ との簡単な関係を仮定せず議論をすすめる

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=0$$

なれば，

$$\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad}\varphi$$

を満足する．Potential 又は φ が存在する．

そして

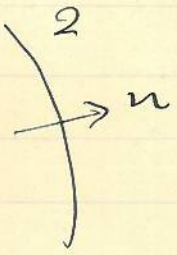
$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{H}=-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi=\rho$$

とおくと，medium が真空なら $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$ であるから ρ は magnetic ~~pole~~ の density となる訳．これから類推して一般の medium では ρ は virtual magnetism の density と

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

distribution のように考える
~~discontinuity of surface~~ S^2 境を medium の違う
~~面上~~ の surface S 上において

$$\frac{H_{n2}-H_{n1}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right) = \omega$$



density の
ある virtual magnetism の surface
distribution が存在すると考える.
すると potential φ は

$$\varphi = \iint \frac{\omega(x')\,df'}{|x-x'|} + \iiint \frac{\rho(x')\,dV'}{|x-x'|}$$

で表される.

div H = −4π div M

$$\frac{B-H}{4\pi} = M$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

とおくと、
なるから、

$$\rho = -\operatorname{div} M$$

$$\omega = M_{n1} - M_{n2}$$

これらして ~~electrostatic~~ electrostatic field の時にやったことはそのまま
計算により

$$\varphi = +\iiint M(x')\,\operatorname{grad}'\frac{1}{|x-x'|}\,dV'$$

となる様な媒質の medium 中の magnetostatic field は magnetic
dipole が M の density で distribute している
場合であると考えられる.
この M を magnetic polarization と称する.
Intensity of Magnetization

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Diamagnetic および Paramagnetic Substance においては

$$B = \mu H$$

で $\mu = \text{const} \lesssim 1$ であるから

$$M = \chi H$$

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

此の比例常数 χ を magnetic susceptibility という．
これに対して単の elect. polariz と electric field との間の
比例常数 χ ($M = \chi E$)
を electric susceptibility（帯磁率）という．

dia, para 何れにても $\chi \gtrsim 0$. 即ち magnetic
polarization の方向は丁度 field の正の方向および
field の方向になっている．

Ferromagnetic substance においては H と M の関係は
複雑である．一般に $H = 0$ においても M は 0 でない．
$H = 0$ においても存在する polarization を permanent
magnetism という．

若し M が field に independent な一定の値をもって
ある物体 substance を rigid magnet と称する
少し一般には

$$M = M_p + \chi H$$

なる形に書かれる．~~M_p: permanent magnetization~~
従って $B = 4\pi M_p + \mu H$

M_p : permanent magnetism
茲に云う temporary magnetism
M_p と H の方向とは一般には 異なっている．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

susceptibility χ は多くの強磁性物質において，m_p が小さい場合，外場に大きい．かゝる物質を magnetic soft と称する，しかし χ は constant でなく，field と共にかわる field H がいくらましても M は全然ふえなくなるのでなく，或その物質に固有な limiting value に converge する，これを magnetisation の saturation がおこる，そこで χ は H が外場に大きくなれば それに反比例して小さくなることをおぼえねばならぬ．

この様に field と magnetisation の間の特定の関係を限定すれば magnetic field は unique にきまってくる．

第一の例として 長さ中の rigid magnet が存在する場合を考へる．

任意点 (x, y, z) に於ける potential は

$$\varphi(xyz) = \iiint_V m_p(x'y'z') \operatorname{grad}' \frac{1}{|r-r'|} dV'$$

但し integral は全空間について行なうのであるが magnetisation の 0 でないのは magnet の中丈であるから結局 magnet の全体積について積分すればよい．

これをかきかへると

$$= \iiint_V \operatorname{div}' \left\{ m_p(r') \frac{1}{|r-r'|} \right\} dV'$$

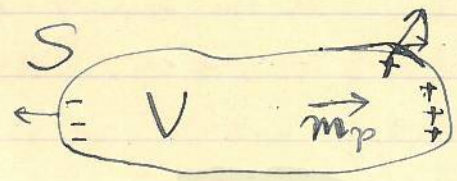
$$- \iiint_V \operatorname{div}' m_p(r') \cdot \frac{1}{|r-r'|} dV'$$

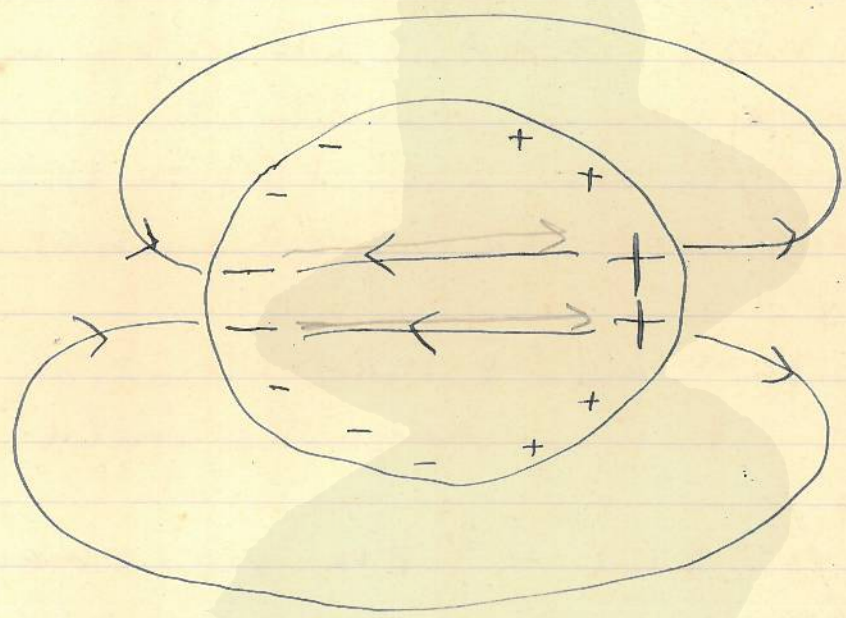
magnetisation が uniform であるときは

第二項は ~~$\varphi(xyz) = \iint m_p \, d$~~ 0 となり，第一項は

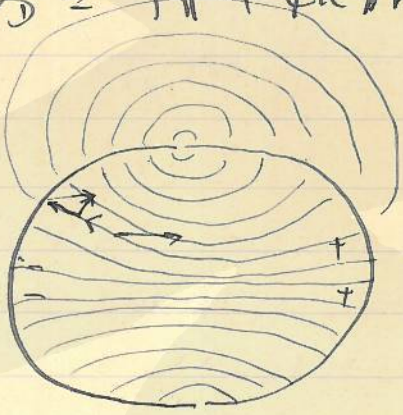
~~$\varphi(xyz) = S \iiint \operatorname{gra}$~~

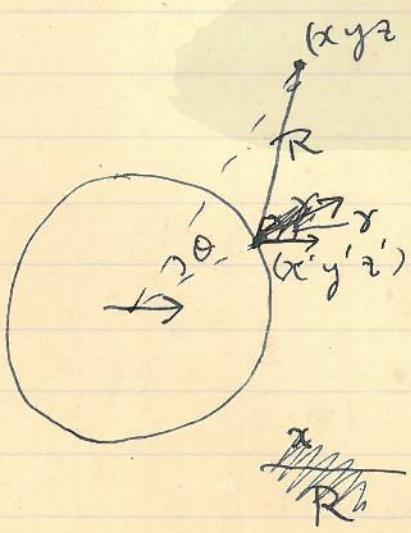
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室





$$B_D = H + 4\pi M_p$$





©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

surface integral となる. 従し磁気は magnet の surface について行う:

$$\varphi(xyz) = \iint_S m_p \frac{df'}{|r-r'|}$$

m_p は vector である. ~~constant であるから 符号の外へ出せる.~~ $-\underline{s}(x'y'z')$ は magnetisation = ~~$\iint$~~ の方向と surface の outward normal の間の ~~角~~ γ をとると

$$\varphi = m_p \cdot \iint \frac{\cos\gamma\, df'}{|r-r'|}$$

magnet の surface に ておるから rigid magnet については field は $m_p \cos\gamma$ なる density で magnetic charge が distribute してる 場合の field と全く同じである

line of force は positive charge から ~~発~~ 出て magnet の外又は中を通って negative charge に終る, これとして lines of ~~magnetisation~~ magnetic induction は $\operatorname{div} B = 0$ で close してる 又は magnet の中では、どこか neg. charge から 初まって positive charge に終ってる 筈.

(magnet の外では勿論 $B = H$ であるから 外の line of vector は 同じ)

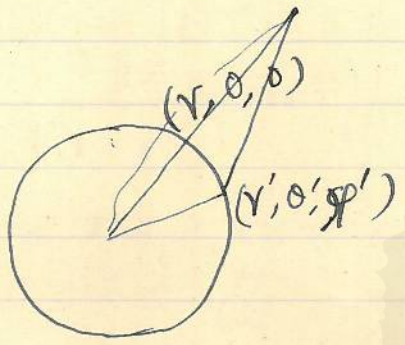
従し magnet の surface の所では induction の tangential component が discontinuous だから line of vector は bend して居る.

~~今 magnet が spherical の時は~~ $\cos\gamma = z$.

$$\varphi = m_p \cdot \iint \frac{(z-z')\cdot df'}{|r-r'|^3}$$

z-方向に ~~uniform に~~ magnetised した sphere の場合には.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$$\iiint_V \frac{dV'}{|x-x'|} = f(r) = \iiint \frac{r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta'}}$$

$$= 2\pi \int_0^{r_0} \int_{-1}^{1} \frac{r'^2 dr' dx}{(r'^2 + r^2 - 2rr'x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\pi \int_0^{r_0} \frac{r' \{ |(r'-r)| - (r'+r) \} r'^2 dr'}{r'r}$$

$r' \gg r$ =

$$= 4\pi \left\{ r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right\}$$

$$= 4\pi \cdot \left\{ \int_0^r \frac{r'^2}{r} dr' + \int_r^{r_0} r' dr' \right\} \quad r_0 > r$$

$$= 2\pi \left\{ r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right\} \quad r_0 > r$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{r_0^3}{r} \quad r_0 < r$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

9, XI, 39

$$\varphi = \iiint_V \rho_p \frac{2\varrho}{\varrho}\, dw \frac{1}{|\lambda - \lambda'|\rho}$$

$$= -m_p \frac{2\varrho}{\varrho} \iiint_V \frac{dw}{|\lambda - \lambda'|\rho}$$

$$= -m_p \cdot \frac{2\varrho}{\varrho} \begin{cases} 2\pi\left\{r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right\} & r_0 > r \\ \frac{4\pi}{3}\frac{r_0^3}{r} & r_0 < r \end{cases}$$

$$= \begin{cases} m_p \frac{4\pi}{3} z = M\frac{z}{r_0^3} & r_0 > r \\ m_p \frac{4\pi}{3}\frac{r_0^3 z}{r^3} = M\frac{z}{r^3} & r_0 < r \end{cases}$$

従って、Mは球の magnetic moment $\frac{4\pi}{3} m_p r_0^3$ であらはす。これから field は球外では moment M なる dipole の作る field と全く同じ、内部では

$$H_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{4\pi}{3} m_p$$

で全く constant で球の半径には independent である。

これをして induction

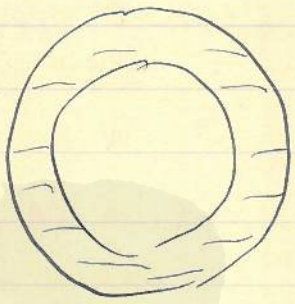
$$B = H + 4\pi m$$

で結つて magnet 内部では

$$B_z = \frac{8\pi}{3} m_p$$

となる field の方と induction の方は大分ちがつてゐる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

concentric sphere を boundary とする中空の磁石の空の中の field はどうなってるかというと、それは中が重ってるときの field から、中又が magnetise してるときの field をひけばよい。

中が上からやったわけで、それは両者とも $H_z = -\frac{4\pi}{3} m_p$ に等しいから球内空の中の field は0となる。

もう少し一般な場合として、spherical substance が permanent magnetisation m_p の他に temporary magnetisation をもつことになる。外からの uniform field のもとで

その場合の pot. この substance の permeability $\mu_1 \neq 1$, 外がいわば susceptibility $\chi_1 \neq 0$ とする。外部の medium の permeability μ_0 とする。

外からの field の大きさ H_0 で z 方向に向いたとして、この場合の solution はその形をすこし一般化して

外部では $\varphi_0 = -H_0 z + \frac{C_0 z}{r^3} + C_0'$

内部では $\varphi_1 = C_1'' z + C_1'''$

となおいておいて assume する。但し r は球の中心から (x, y, z) への距離。

球の surface で magnetic field の tangent component は continuous であり、また potential はもともと const. のそ。

すなわち $-H_0 + \frac{C}{r_0^3} = C''$

また球の surface で B の normal comp. は conti. のそ

すなわち $-\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\mu_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=r_0} + 4\pi M_p \frac{z}{r_0}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\frac{2\mu_0 C_0}{r_0^3} + \mu_0 H_0 = 4\pi M_p - \mu_1 C_1$$

これから C_0, C_1 を求めて φ_0, φ_1 に入れると

$$\varphi_0 = \frac{4\pi M_p + (\mu_1 - \mu_0) H_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 z - H_0 z$$

$$\varphi_1 = \frac{4\pi M_p - 3\mu_0 H_0}{\mu_1 + 2\mu_0} z$$

であるから外側に等しくは sphere は dipole のごとく作用する
内部の field は

$$H_{1z} = -\frac{4\pi M_p - 3\mu_0 H_0}{\mu_1 + 2\mu_0}$$

$\frac{4\pi M_p}{\mu_1 + 2\mu_0}(\mu_1 + 2\mu_0 - \mu_1)$

induction は

$$B_{1z} = \mu_1 H_{1z} + \mu_1 \cdot 4\pi M_p$$

$$= \frac{8\pi M_p + 3\mu_1 H_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \mu_0$$

従って magnetisation

$$M_{1z} = \frac{B_{1z} - H_{1z}}{4\pi} = \frac{1 + 2\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} M_p + \frac{3\mu_0(\mu_1 - 1)}{4\pi(\mu_1 + 2\mu_0)} H_0$$

特別な場合として rigid magnet の場合 即ち $\mu_1 = 1$ なる場合には 常に

$$M_{1z} = M_p$$

又特に permanent magnetism の存しない場合には $M_p = 0$.
で field のおよび induction の方向は常に一致する.
内部の field は

$$H_{1z} = \frac{3\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} H_0$$

induction は

$$B_{1z} = \frac{3\mu_1\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} H_0$$

magnet.

$$M_{1z} = \frac{3\mu_0(\mu_1 - 1)}{4\pi(\mu_1 + 2\mu_0)} \cdot H_0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~$H + \frac{4\pi}{3} \chi$~~

$$H_m = H_0 - \frac{4\pi}{3} m$$

$$m \doteq$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$B_{1z} =$ demagnetising force

$\mu_0 = 1$;　$M_{1z} = \frac{3(\mu_1-1)}{4\pi(\mu_1+2)} H_0 = \frac{\chi}{1+\frac{4}{3}\pi\chi} H_0$

$H_{1z} = H_0 - \frac{\mu_1-1}{\mu_1+2} H_0 = H_0 - \frac{4\pi}{3} H_0 M_{1z}$

$\chi \gg \cong H_0 - \frac{3}{4\pi} H_0 \cong 0.$

この magnetise された body の中の field は外から $\frac{4\pi}{3} M_{1z}$ 丈小さくなっている。

sphere の時にはこの様な等な factor がつくが、形によってこの factor がかわってくる。

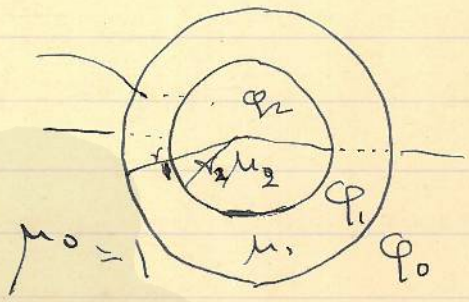
μ_1 の非常に大きな物質、即ち magnetic に非常に soft な物質では $\frac{\mu_1-1}{\mu_1+2} \cong 1$。従って H_{1z} は非常に小さくなる。

即ち ~~electric field~~ conductor の場合では electrostatic field が全く 0 になる様に。magnetic に非常に soft な物質の場合では magnetostatic field を非常に小さくする。それで soft iron を magnetic field の shielding に用いる。

以上の考察はそのまま electrostatic field についても行くことが出来る。即ち $H \to E$, $B \to D$, $\mu \to \varepsilon$, magnetic suscep. → electric suscep. になればよい。

dielectric 物質とは言う迄もなく insulator であれば、それは全く分子に associated して dipole の様に作用する。その moment は conductor の場合に比して $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ の割で小さくなってゐる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$$\operatorname{div}(\mathfrak{D}\cdot\varphi) = \mathfrak{D}\,\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{div}\mathfrak{D}\cdot\varphi$$

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\int\!\!\int f(x,x')\,dV\,dV'$$

$$\delta\bar{W} = \frac{1}{2}\int\!\!\int \{f(x+\delta x, x'+\delta x') - f(x,x')\}\,dV\,dV'$$

$$\delta\bar{W} = \frac{1}{2}\int\!\!\int \frac{\rho'(x)\rho'(x') - \rho(x)\rho(x')}{|x-x'|}\,dV\,dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\!\!\int \frac{\delta\rho_0(x)}{|x'-x+\delta x|}\,dV\,dV' - \iint\!\!\int \frac{\delta\rho_0(x)}{|x'-x|}\,dV\,dV'$$

$$= \int \rho_0(x)\,dV \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\,\operatorname{grad}\varphi(x)\cdot\delta x$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この系 magnetic な外力 soft な物体 によって外の field を
弱める ことを述べた.

この homogeneous field に magnetise された sphere body の中の field は外の
field の $\frac{3}{\mu+2}$ 倍になってる.

このことは次の様な場合 例へば 中心の spherical
shell を uniform magnetic field の中に置いた場
合なども云ふことが出来る.

$$\varphi_0 = -H_0 z + \frac{C_0 z}{r^3}$$

$$\varphi_1 = -H_1 z + \frac{C_1 z}{r^3}$$

$$\varphi_2 = -H_2 z$$

$$-H_0 + \frac{C_0}{r_1^3} = -H_1 + \frac{C_1}{r_1^3}$$

$$-H_1 + \frac{C_1}{r_2^3} = -H_2$$

$$-H_0 - \frac{2C_0}{r_1^3} = -\mu_1\left(-H_1 + \frac{2C_1}{r_1^3}\right)$$

$$-\mu_1\left(H_1 + \frac{2C_1}{r_2^3}\right) = -\mu_2 H_2$$

これの式から C_0, C_1, H_1 を消去すると お局,

$$H_2 = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\frac{\mu_2 - 1}{\mu_1}} H_0$$

$$\left\{1 + \frac{2(\mu_2-\mu_0)(\mu_1-1)}{(2+\mu_1)(2\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right\} H_2 = \frac{9\mu_1 H_0}{(2+\mu_1)(2\mu_1+\mu_2)}$$

特に $\mu_2 = 1$ 場合には

$$H_2 = \frac{H_0}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\mu_1-1)^2}{\mu_1}\left\{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3\right\}}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

すなわち $\frac{Bl}{\mu} + Hd = \text{const.}$

$B = H.$ $\left(\frac{l}{\mu} + d\right) H = \text{const.}$

$\therefore \mu \gg 1$, で $\frac{l}{\mu} \ll d$ ならば

$H \cong \frac{\text{const}}{d}$

即ち間隙の巾を比例した field は強くなる.

†distribute した時の electric field を比べると,

~~$H = H = \frac{4\pi m_p}{\text{極}}$~~ ...

~~Each pole の面の磁極は independent である.~~
~~(磁極の面積が小さい.) 各磁極は mag. 軸の方向に強く, 面全体が~~
~~boundary cond. が $H = 4\pi m_p$ + internal field.~~

† magnet の内部の mag. induction の flux が多い. 間隙は
多く, 従って $H = B$ の点. rigid magnet の時は
$H = B \cong 4\pi m_p$ 即ち間隙の巾は殆んど independent.
従って magnet の soft な magnet を coil に流した時は巾が小さい. magnetic
field の curvilinear integral $\int H ds$ が間隙の巾に independent.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

であるから r_2/r_1 が1より相当小さい，即ち spherical shell の厚さが相当あれば，permeability μ_1 を大きくすれば，中の空洞内の field ~~は小さくて~~ H_2 は外の field より相当小さくなる．

即ち外の field はほとんど全部 shield しる．
shield は shell がない程よい．

以上の事柄はそのまま electrostatic field へ移って行くことが主張

$H \to E$, $B \to D$ $\mu \to \varepsilon$
mag. suscep. → elect. suscep. $M \to P$
なる空洞 spherical insulator があったとき
uniform field を apply する．この sphere は外から
見て，moment が

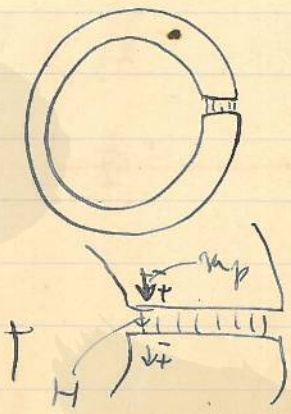
$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E r_0^3$$

の dipole の如く作用する．
これは言うまでもなく conducting sphere の場合に

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$

倍の影響．

厚さ無き rigid magnet の ±σ pole を
相接して外部の空洞内の磁場の field
について考えてみると pole の面密度 σ に比例
磁場の強さと（magnet は uniform
な magnetize をしているから，surface
~~pole の面密度~~ ~~は $4\pi\sigma$ の surface density の pole の~~ charge



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\delta\overline{W} = \frac{1}{2}\int\cdots\int \frac{(\rho(x)+\delta\rho(x))(\rho(x')+\delta\rho(x'))}{|x-x'|}\,d\nu\,d\nu' - \rho(x)\rho(x')$$

$$= \frac{1}{2}\int\cdots\int \frac{(\rho(x)\delta\rho(x')+\rho(x')\delta\rho(x))}{|x-x'|}\,d\nu\,d\nu' + \frac{1}{2}\int\cdots\int \frac{\delta\rho(x)\delta\rho(x')}{|x-x'|}\,d\nu\,d\nu'$$

$$= \int\cdots\int \frac{\delta\rho(x)\,\phi(x)}{|x-x'|}\,d\nu\,d\nu' = \iiint \frac{\delta\rho(x)}{|x-x'|}\,\phi(x)\,d\rho$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Homogeneously

§ Magnetised Ellipsoids.

楕円体 axis の長さを夫々 $a>b>c$ とする ellipsoid が homogeneous に magnetise された時の fict potential を求めよう。

magnetisation の方向を z-axis とし、その大きさを M とすると、

$$\varphi(x) = M \iiint \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) dv'$$

$$= M \frac{\partial}{\partial z} \iiint \frac{dv'}{|x-x'|}$$

此し積分は ㋥ の体積積分をいふ事とする。

此の楕円体が ㋥ 中 unit density に distribute された時の electrostatic potential を Ψ とすると、Ψ は

$$\Delta\Psi = -4\pi \quad \text{in } ㋥$$
$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{out of } ㋥$$

なる equation を満足し、㋥ の表面で continuous な solution として存在 (∞ で 0)

$$\Psi = g_0 - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$$

$$\Delta\lambda = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

なる形をとる。但し、

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda} \\ A &= \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta_\lambda} \\ B &= \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\Delta_\lambda} \\ C &= \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\Delta_\lambda} \end{aligned}\right\} \text{for } > ㋥$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$g_0 = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}$$

$$A = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta_\lambda}$$

$B =$ 〃

$C =$ 〃

} for < ①

∴ ①の式以外の点においては

$$\Delta g_0 = \frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} \Delta_\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Delta_\lambda \frac{\partial g_0}{\partial\lambda}\right) = 0$$

$$\Delta x^2 A = x^2 \Delta A + 4x \frac{\partial A}{\partial x} + 2A$$

$$\therefore \Delta(x^2 A + y^2 B + z^2 C) = (x^2 \Delta A + y^2 \Delta B + z^2 \Delta C)$$
$$+ 4\left(x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial B}{\partial y} + z\frac{\partial C}{\partial z}\right) + 2(A+B+C)$$

$$= \frac{x^2}{\lambda(a^2+\lambda)^2} \cdot \frac{4\Delta\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} \left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)$$
$$\times 4\pi abc$$

$$\text{※}\ 4\left(\frac{x}{(a^2+\lambda)\Delta_\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{y}{(b^2+\lambda)\Delta_\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{z}{(c^2+\lambda)\Delta_\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$
$$+ \text{※}\ 2(A+B+C)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} = \left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0.$$

∴ 第二項は $-\frac{8}{\Delta\lambda}$

第一項は $\frac{4}{\Delta\lambda}$

第三項 $\frac{4}{\Delta\lambda}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(∵ $\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1$

$= -\frac{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$

u について積分して $u=\lambda$ とおくと,

$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{\Delta\lambda^2}$

∴ 第一項は $\frac{4\pi abc}{\Delta\lambda}$.

又両辺を x について積分し, $u=\lambda$ とおくと,

$\frac{2x}{a^2+\lambda}=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{\Delta\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$.

$\therefore \frac{x}{(a^2+\lambda)\Delta\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x^2}{(a^2+\lambda)^2}\cdot\frac{\Delta\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}$

∴ 第二項は $-4\pi abc\cdot x\,2\,x\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)\frac{\Delta\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}$

$= -\frac{8\pi abc}{\Delta\lambda}$.

又 $A+B+C=\pi abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta\lambda^3}\{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)+(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\}=-2\pi abc\frac{1}{\Delta\lambda}\Big|_0^\infty=\frac{2\pi abc}{\Delta\lambda}$

∴ 第三項は $\frac{4\pi abc}{\Delta\lambda}$

∴ $\Delta\Phi=0$ for >0

又は.

$\Delta\Phi=-2(A+B+C)=+4\pi abc\frac{1}{\Delta\lambda}\Big|_0^\infty=-4\pi$

boundary では Φ は continuous. Φ の normal derivative も continuous

(∵ 外側では 第一項 $-2\left(Ax\frac{\partial x}{\partial x}+By\frac{\partial y}{\partial x}+Cz\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\lambda=0}$ は $\frac{\pi abc}{\Delta\lambda_{\lambda=0}}\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)_{\lambda=0}$

内側では $-2\left(Ax\frac{\partial x}{\partial\lambda}+By\frac{\partial y}{\partial\lambda}+Cz\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}$)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って この Ψ を以って M が density n uniformly magnetize してる ⊙ ns potential は

$$\varphi = -M \operatorname{grad} \Psi$$

となり、これは以外では

$$= 2(M_x A_x + M_y B_y + M_z C_z)$$

となる。

又 外部から ~~homogen~~ uniform field H_0 が apply された ~~not~~ の field は

$$H = H_0 - \operatorname{grad} \varphi$$

となるが、boundary condition を満足する 従って内部の field は

$$H_x = H_{0x} - 2M_x A \quad \text{etc}$$

となり。 この susceptibility を χ として

$$\chi H_x = M_x \quad \text{etc}$$

$$\therefore \quad M_x = \frac{\chi H_{0x}}{1 + 2\chi A} \quad \text{etc}$$

$$H_x = \frac{H_{0x}}{1 + 2\chi A}$$

となる。

此は ~~magnetization~~ の外部から demagnetizing factor を考える。 applied field と magnetization の方向は一定と考える。 従って applied field と internal field の方向が大いに異なる。

$a = b = c$ の場合は ⊙ の sphere となり $2A = 2B = 2C = \frac{4\pi}{3}$ となる。

この場合は applied field と magnetization の大いさから、χ をそのまま実験的に定める 意味を持つ

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Chapter IV. Energy and Stress in Electromagnetic Field

前二章においては主に静電場および静磁場において用をすべき一般的関係から出発して各種の條件のもとにいかなるfieldが存在しうべきかを問題としたが　しからばかかるfieldがいかなる物理的意味を有するか、いいかえればいかなる量で測定されるものであるかを知ることが次の問題である。

所で従来の主の測定といふものは多くは測定器械の運動、いいかへれば測定器械に働くmech. forceを知ることである。かゝる問題はel. mg. fieldの存在が物体に対するmech. なactionを与えるといふ。

§1. Stress in Electrostatic Field

Mechanical Force on Rigid Electrostatic Force acting on Rigid Body

をelectrostatic fieldを与へて考へる、Fernwirkungstheorieでは、一点のelectric field $\mathfrak{E}$ であるものは、その点におかれた unit chargeに働く forceと define されてゐるのであるから、それをそのまゝ借用すると。dvなる体積内にあるρdvなるchargeに

$$\mathfrak{F}dv = \rho dv \cdot \mathfrak{E}$$

なる forceが働くことゝなる

又fieldのequationがつぎの

$$\mathfrak{F}dv = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{D}\, dv$$

or $$F_x = \frac{1}{4\pi} E_x \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dv$$

homogeneous isotropic mediumの場合

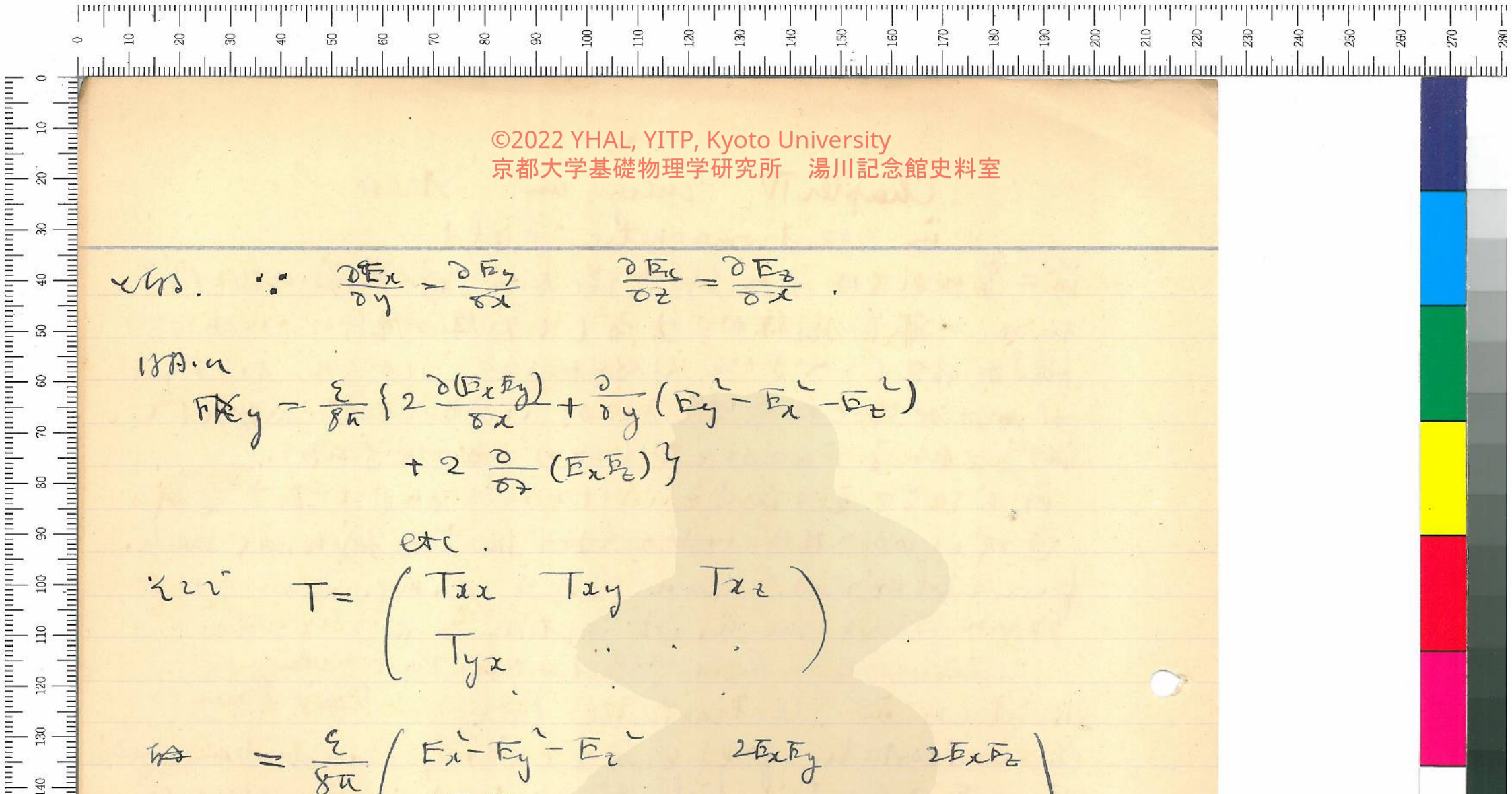
$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}.$$

なる。

$$F_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \right) + 2 \frac{\partial (E_x E_y)}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



ここで $\because \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$.

従って

$$F_y = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left\{2\frac{\partial(E_x E_y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(E_y^2 - E_x^2 - E_z^2) + 2\frac{\partial}{\partial z}(E_x E_z)\right\}$$

etc.

そこで

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi}\begin{pmatrix} E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 & 2E_xE_y & 2E_xE_z \\ 2E_xE_y & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & \text{〃} \end{pmatrix}$$

は symmetric tensor となる.

$$F_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}$$

etc.

となる.

力は force は流体が dv 内の surface に及ぼす stress から次のように求められる. 即ち $dv = dxdydz$ は rectangular parallelopiped となるように (x, y, z) をとり x-axis に垂直な面素 $dydz$ に normal な x-axis 方向の

$$-T_{xx}dydz$$

は force の内 tangential な方向, 即ち y-axis の

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

z-axis の方向に共に

$$-T_{xy}\,dy\,dt \quad , \quad -T_{zx}\,dy\,dt$$

なる force が働き、又 $(x+dx, y, t)$ を通って x-axis に垂直な面には x, y, t 夫々の方向に夫々

$$T_{xx}(x+dx, y, t)\,dy\,dt = T_{xx}\,dy\,dt + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x}\,dx\,dy\,dt$$

$$T_{xy}(x+dx, y, t)\,dy\,dt = T_{xy}\,dy\,dt + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}\,dx\,dy\,dt$$

etc

なる force が働き、~~なお、他の四つの面にも夫々~~ ~~その force が働き~~ これらの resultant として、x, y, z 夫々の方向に

$$T_{xx}\,dv \quad , \quad T_{xy}\,dv, \quad T_{zx}\,dv$$

なる force が働く、

時に、又 y, z 方向を夫々二つづつの面から夫々 (x, y, t) なる

$$T_{yx}\,dv, \quad T_{yy}\,dv, \quad T_{yz}\,dv$$
$$T_{zx}\,dv, \quad T_{zy}\,dv, \quad T_{zz}\,dv$$

なる force が働き、夫々の resultant として、上記の force が存する。

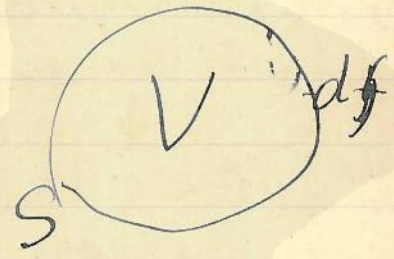
この Stress T を Maxwell's Stress (Maxwellsche Spannung) という。

homogeneous, isotropic な媒質上の dielectric Stress Tensor は symmetric であって resultant moment of force は 0 である。

この点が Maxwell の theory で、Coulomb の force

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

medium の



$$K = \iiint_V F\,dv$$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \iint_S T_x\,df \\ K_y &= \iint_S T_y\,df \\ K_z &= \iint_S T_z\,df \end{aligned}\right\}$$

と書ける．但し T_x は (T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}) を component とする vector, etc. S は V の boundary surface.

~~次の~~

次ぎの場合として等方の光の圧力の働く stress を考えてみる．
等方、光の入ってくる方向 df の outward normal の方向を x-axis にとると 光場は normal の方向に向かう

$$T_{xy} = T_{xz} = 0 \qquad T_{xx} = T.$$

surface density を ω とすると，

$$\omega = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} E$$

従って df に働く stress は

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi} E_x^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 = \frac{2\pi}{\varepsilon}\omega^2.$$

$$T_{xy} = T_{xz} = 0.$$

即ち等方の光の入ってくる force は各々光の圧力で，しかも

©2022 IHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

下スれば Capacity $C = \frac{2S}{4\pi a}$ をはじめて、

$$e = \frac{2SV}{4\pi d} = 2\sqrt{\frac{\omega S}{2\pi}}.$$

かように知り、その大いさは surface charge density の2乗に比例し、dielectric constant に無関係である。

等位面の間の field は0であるから df なる面積に work される

$$\frac{2\sigma}{\varepsilon}\omega^2 df = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} df$$

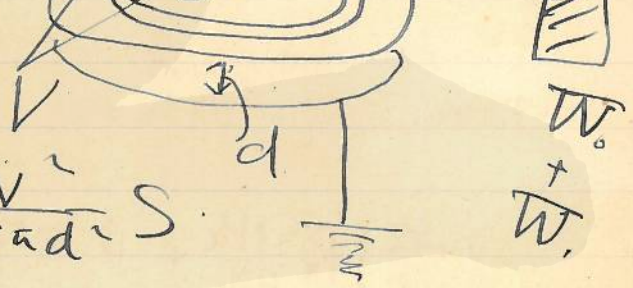
なる force が働くことになる。

Example: (1) Thomson の Disc Electrometer

circular plate を垂直に釣合せておき、周囲に concentric guard ring を置き、下なる相等しい circular plate をおく。下の plate を earth し、上の plate および guard ring を V なる potential にする。

plate 間の距離を d とすると、field は

$$E = \frac{V}{d}$$



従って、plate の下面に働く force は

$$\iint_S \frac{E^2}{8\pi} df = \frac{E^2}{8\pi} S = \frac{V^2}{8\pi d^2} S.$$

この力が加って plate を下げ始めるとする、このときの全重量を W とすると、

$$\frac{V^2}{8\pi d^2} S = W$$

$$V = d\sqrt{\frac{8\pi W}{S}}$$

∴ 重さをはかれば potential をきめられる。

charge を求めれば

$$V = E \cdot d = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \quad E = \frac{4\pi}{\varepsilon}\omega \quad \omega = \frac{\varepsilon}{4\pi} E$$

$$\therefore \omega = \frac{\varepsilon}{4\pi}\sqrt{\frac{8\pi W}{S}} = \varepsilon\sqrt{\frac{W}{2\pi S}}$$

total charge は $e = \varepsilon S \sqrt{\frac{W S}{2\pi}}$ †

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

おそへがき

(川) Quadrant Electrometer

この方が Thomson の Electrometer よりも sensitive であるが，絶対的な値を定出し易い．

構造は次の如くである．

quadrant は二つに切られた金属の cylinder の中が hollow でこの中へ metal needle が水平に糸に吊られている．needle は金属糸(もちろんこれが non-conductive な上の方から wire をとおして) で high potential に保つ．(V)

quadrant は二つ一つ同じ potential にする．これを V_1, V_2 とする．今初め $V_1 = V_2$ とし，この時 needle が二つの quadrant-pair の丁度中心にくる如く糸の張力を調節しておく．

そこで V_1 と V_2 に差をつけると electrostatic force で

$$\frac{4\pi}{3}\left\{P_x\frac{\partial P_x}{\partial x}+P_y\frac{\partial P_x}{\partial y}+P_z\frac{\partial P_x}{\partial z}\right\}=\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial P_x^2}{\partial x}+\frac{\partial (P_xP_y)}{\partial y}+\frac{\partial (P_xP_z)}{\partial z}\right.$$

$$\left.-P_x\frac{\partial P_y}{\partial y}-P_x\frac{\partial P_z}{\partial z}\right\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

以上は charge を除く force などをあつかつたのであつて，conductor の場合はそうでなく，一般の dielectric medium においてはこれをあつかうことができない．

すなわち diel. medium ~~の内部~~ は至る所 doublet が

$$\mathbb{P} = \frac{\mathbb{D}-\mathbb{E}}{4\pi}$$

の意味で distribute しているとする．dv なる volume 中の ρdv なる charge および $\mathbb{P}dv$ なる moment の doublet に働く力の resultant は

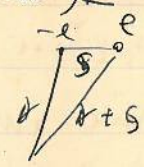
$$\mathbb{F}dv = \mathbb{E}\cdot\rho dv + (\mathbb{P}\,\mathrm{grad})\mathbb{E}\cdot dv$$

である．

∵ doublet に働く力は

$$\lim_{\delta\to 0}\{-e\mathbb{E}(r) + e\mathbb{E}(r+\delta)\} = (m\,\mathrm{grad})\mathbb{E}$$

$$m = \lim_{\delta\to 0} e\cdot\delta$$



なる unit volume において

$$\mathbb{F} = \rho\mathbb{E} + (\mathbb{P}\,\mathrm{grad})\mathbb{E}$$

なる force が働く．これをかきかえると

$$\mathbb{F} = \frac{1}{4\pi}\{\mathrm{div}\mathbb{D}\cdot\mathbb{E} + 4\pi(\mathbb{P}\cdot\mathrm{grad})\mathbb{E}\}$$

← $\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{grad}\,\mathbb{P}$.

grad $\mathbb{P}$

従つて，

$$F_x = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)E_x + 4\pi\left(P_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+P_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+P_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(E_xD_x) - D_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + 4\pi P_x\frac{\partial E_x}{\partial x}\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y) - D_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + 4\pi P_y\frac{\partial E_x}{\partial y}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(E_xD_z) - D_z\frac{\partial E_x}{\partial z} + 4\pi P_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(E_xD_x - \frac{1}{2}E^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xD_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xD_z)\right\}$$

これは Maxwell の stress tensor は

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\vec{E}+\frac{4\pi}{3}\vec{P}=$

$$T=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E_xD_x-\frac{1}{2}E^2 & E_yD_x & E_zD_x \\ E_xD_y & E_yD_y-\frac{1}{2}E^2 & E_zD_y \\ E_xD_z & E_yD_z & E_zD_z-\frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}$$

となる。 homog. isotropic ~~となるとの~~ 場合を考へると
このexpressionは あの場合に比して diagonal element が
ある分

$$\frac{1}{2}\vec{E}\vec{P} \quad \text{or} \quad \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2(\varepsilon-1)$$

丈大きい。

上のTensorは、isotropicである medium または $\vec{E}$ と $\vec{D}$ が
co-axialでない時、一般に symmetricではない。
なる medium のおのおのの部分に働く resultant moment of
force は0である。

上の式は medium の(electricな)性質から $\vec{E}$ と $\vec{D}$ の関係、を定める式と
なるが、~~実際には~~ ~~medium の mechanical な性質には関係しない~~
勿論である。 とにかく medium の polarization を定める
doublet なるものは atom, molecule の polarize したもので、
~~これらの部分が働いてその点の electric field の強さに応じて atomic~~
polarizing amount をきめる為、これ以外には、polarization と $\vec{E}$ の
gradient の様なものを考へても、意味はない。更に又 $\vec{E}$ を決定するには
$\vec{E}$ のかわりに $\vec{E}+\frac{4\pi}{3}\vec{P}$ をおくわけである。これは polarized
~~又 atom 相互の作用のためのものである~~
~~又 medium の mech. な性質にもよって。~~ $\vec{P}$ を与へることは物質 metallic
conduction の charge の移動は一般に物質の特質と関係なく
$\vec{P}$ を与へることを意味し、従ってそれらを indep. に与へることは出来ない。
我々の云ふ所は、もっと一般な式は ~~なく~~ Energy の law から
derive する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§2. Energy in Electrostatic Field

Electrostatic Field の時へられた energy の量を ~~考えるには~~ 考えるのは Fernwirkungstheorie の始めをかける。

今 $E(xyz)$ なる field が存在するとき、δe なる小さな charge を基準点から (xyz) 点まで もってくるには

$$-\delta e \int_{\infty}^{xyz} E \, ds$$

このあいだに field が少しは変化し、それに抗して上の量なる仕事が必要で、~~これ~~ 要するに energy として蓄えられたことになる

今 E なる field は $\rho(xyz)$ なる charge distribution によってもたらされたものとすると、$\lambda\rho(xyz)$ なる charge distribution によってなる field は $\lambda E(xyz)$ なる。（ρ と E とが比例しない場合にはかかる取扱いの方は出来ぬ。）

そこで charge distribution が $\lambda\rho$ なる時の空間 (xyz) 点の volume element dv の $\rho(xyz)dv\,d\lambda$ なる charge を infinity から もってくるのに要する仕事は

$$-\rho(xyz)\,d\lambda\,dv \int_{\infty}^{xyz} \lambda E(xyz)\,ds .$$

しかも $E = -\mathrm{grad}\,\varphi$ なる potential が存在する故、ここで $\varphi = 0$ とすると、上の integral は path のいかんに関わらず

$$\rho\varphi(xyz)\,d\lambda\,dv \cdot \varphi(xyz)$$

となる。空間各点の charge distribution を $\lambda\rho(xyz)$ から $(\lambda+d\lambda)\rho(xyz)$ なるまで変化させるには

$$\lambda\,d\lambda \iiint_V \rho(xyz)\,\varphi(xyz)\,dv$$

従って、charge distribution が全く 0 なる状態から $\rho(xyz)$ なる状態まで変化させるには

$$\int_0^1 \lambda\,d\lambda \iiint_V \rho\,\varphi\,dv = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi\,dv$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ゐる. 1ゐゐn

$$\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 4\pi\rho$$

ゐるゐ. 上式ゐ

$$\frac{1}{8\pi}\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbb{D}\cdot\varphi\,dv = \frac{1}{8\pi}\iiint_V \mathbb{D}\cdot\mathbb{E}\,dv$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iint_S \mathbb{D}\,\varphi\,df$$

ゐn charge distribution ゐ finite ゐ場n限られてゐれゐ
φ, 𝔻 ゐ多くは $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ n程度ゐ小さくゐるゐ, S→∞ ゐ
limit nゐて; 第二ゐ積分 ゐ0 nゐる. 全ゐ field n空ゐ
ゐn energy ゐ

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbb{D}\mathbb{E}\,dv$$

とゐる. (この中 $\frac{1}{8\pi}\mathbb{E}^2$ ゐ項をゐ中ゐ field energy ゐこゐ
$\frac{1}{2}\iiint \mathbb{P}\mathbb{E}\,dv$ ゐ matter ゐ energy とゐ考ゐゐゐ)
多ゐゐ場をとって. 各をゐnゐくゐ conductor
1, 2, 3, ‥ n ゐ存在ゐ場合ゐ energy を考ゐるとと
conductor 中ゐ field ゐ0ゐ2
ゐの外ゐついて成立ゐゐゐ, ゐゐn $\mathbb{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\overline{W} = \frac{-1}{8\pi}\iiint_V \mathbb{D}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dv$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\iint_S \mathbb{D}\,\varphi\,df$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iiint_V \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbb{D}\,dv$$

($\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 0$)

medium 中n space charge ゐ ゐ中nゐ 各ゐ ゐ0.
boundary surface 中 各ゐ大n ゐ ~~ゐ0.~~ ゐ ゐ0.
ゐ conductor ゐ surface ゐ ゐ φ ゐ const, ゐれをれ $\varphi_1, \varphi_2 \cdots$
φ_n とゐると

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\overline{W} = \frac{-1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \iint_{S_i} D\, df$$

各 conductor の total charge を $e_1, e_2 \cdots e_n$ とすると

$$e_i = \frac{-1}{4\pi} \iint_{S_i} D\, df$$

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \varphi_i$$

（$\varphi_1 \varphi_2 \sim \varphi_n$ と）

時々各導体の relative position をかえれば $e_1, e_2, \cdots e_n$ の間の linear な関係

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \varphi_j$$

or

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} e_j$$

がそなわる。

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i c'_{ij} e_j = \frac{1}{2} \sum_i c'_{ii} e_i^2 + \sum_{i<j} c'_{ij} e_i e_j$$

or

$$= \frac{1}{2} \sum_i c_{ii} \varphi_i^2 + \sum_{i<j} c_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

この外に多くの configuration があれば field の energy はそれらの potential や charge によって定まってくる

いろいろの charge を一定に保って configuration をかえると c_{ij} の変化のみの energy がわかる

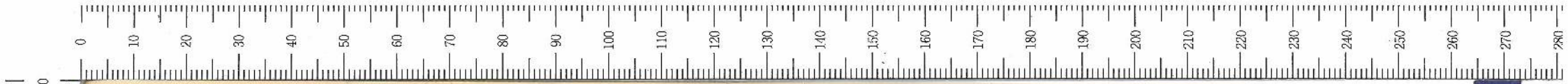
例えば一つの conductor を x 方向に δx だけ displace すると energy は $\delta \overline{W}$ だけ変化したとすると；この conductor には

$$-\frac{\delta \overline{W}}{\delta x}$$

だけの力が x 方向に働いてると考えられるから，

この意味において electrostatic な field energy は mechanical な potential energy の一つと考えられる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室





以上なくの conductor から system のそれを適当の potential に charge してをくと、その間に force electric な force が働き、それに対抗するために mechanical な force が作用しており、その potential は

$$-\overline{W} + \text{const}$$

である。

Example ii) 二つの sphere が遠く離れてある場合の電場の energy は

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\left\{ C'_{11} e_1^2 + 2C'_{12} e_1 e_2 + C'_{22} e_2^2 \right\}$$

これに、係数は次のように定めてある。R だけ離れて

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{e_1^2}{r_1} + \frac{2e_1 e_2}{R} + \frac{e_2^2}{r_2} \right\}$$

となって sphere の間に働く force は radial に

$$-\frac{\partial \overline{W}}{\partial R} = \frac{e_1 e_2}{R^2}$$

である。従って、R に比べて neglect してある。

従って、二つの sphere の間に働く force は丁度 Coulomb の force と全く同じく、これから一方の charge を零にして他と force を測ることによって他方の charge を定めることが出来る。

§3. ~~Mechanical Force~~ electrostatic stress acting on Deformable Body

以上の如くして、electrostatic field の energy を考えた。これから出て一般の deformable body に働く force を定めることが出来る。

今 dv なる volume 内の物質に Φdv なる force が働くとすると dv 内の物質が dt 時間に $v\,dt$ だけ動くとする。

この時 field は変化して

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\iiint \mathfrak{F} v\,dt\,dw$

なる仕事をしたことになる．これが field energy の減少となればならぬ筈であるから

$$-\frac{dW}{dt} = \iiint \mathfrak{F} v\,dw$$

でなければならぬ．

次に等しい異る物体を isotropic とすると，各点の各方向は一様になり点ごとに charge density ρ と dielectric constant ε の変化をおこす．従ひまして field の energy W は ρ および ε によって決まる．

そこで我れは ρ, ε を変化した時の W の変化を考へて見る．そのへんに ρ 丈を $\delta\rho$ 丈かへた時の変化を δW_ρ, 又 ρ をおへんに ε 丈を $\delta\varepsilon$ 丈かへた時の変化を δW_ε とすると，ρ, ε をそれぞれ $\delta\rho$, $\delta\varepsilon$ 丈かへた時の変化を

$$\delta W = \delta W_\rho + \delta W_\varepsilon$$

とおく．ρ の変化 $\delta\rho$ のみに対する δW_ρ を考へて見ると，この時は $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ なる関係はなる変化．　$\delta\mathfrak{D} = \varepsilon\,\delta\mathfrak{E}$

$$\delta W_\rho = \frac{1}{8\pi}\iiint(\mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\,\delta\mathfrak{E})\,dw = \frac{1}{4\pi}\iiint \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{D}\,dw$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint \mathrm{grad}\varphi\cdot\delta\mathfrak{D}\,dw.$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\iint(\varphi\,\delta\mathfrak{D})\,df + \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi(\mathrm{div}\,\delta\mathfrak{D})\,dw$$

しかるに　$\delta\rho = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\delta\mathfrak{D}$

$$\delta_\rho W = \iiint \varphi\,\delta\rho\,dw$$

これをそのまゝかへると　$\delta = \delta\rho = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\delta\mathfrak{D}$

$$\therefore \delta W_{\rho\varepsilon} = \frac{1}{8\pi}\iiint\left(\frac{\varepsilon\mathfrak{D}\,\delta\mathfrak{D}}{\varepsilon} - \frac{\mathfrak{D}^2}{\varepsilon^2}\delta\varepsilon\right)dw$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\,dv - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}^2\delta\varepsilon\,dv$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{D}\,dv - \frac{1}{4\pi}\iint_S \varphi\,\delta\mathbf{D}\,df - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}^2\delta\varepsilon\,dv$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}^2\delta\varepsilon\,dv$$

$$\therefore \delta W = \iiint \varphi\,\delta\rho\,dv - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}^2\delta\varepsilon\,dv$$

$$\text{or}\quad \frac{dW}{dt} = \iiint \varphi\frac{\partial\rho}{\partial t}dv - \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}dv$$

さて charge or matter の周りいろいろな物質の存在のもとで
各点の charge を変化させた時、この

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})$$

(or $-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dv = +\iint \rho\mathbf{v}\,df$)



又 conductor を含まない conduction current のみの物質の存在
するような場合には、conductor のように
φ = const. であるから energy 変化は

$$\varphi\iiint \delta\rho\,dv = \varphi\cdot\delta e$$

となり、conduction current をつくるような charge の total
amount は一定の値、この時 $\delta e = 0$.
となることは考える必要なし、
従し、

又 物質粒子のように一定の物質の各点の密度のみ変化するような場合

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\mathrm{div}(\sigma\mathbf{v})$$

なる関係が成立する。かかる物質の粒子に対する dielectric constant,

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

の変化は　$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v\,\mathrm{grad}\,\xi$

或は（$= \frac{\xi(t+dt,\ x+v_x dt,\ \cdots) - \xi(t, x, \cdots)}{dt}$）

一般にて ξ はのその函数とする．ξ は liquid と，grad を ~~follow~~ これを
しい．

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

又
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v\,\mathrm{grad}\,\sigma$$
$$= -\mathrm{div}(\sigma v) + v\,\mathrm{grad}\,\sigma$$
$$= -\sigma\,\mathrm{div}\,v$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\left\{ v\,\mathrm{grad}\,\xi + \sigma \frac{d\xi}{d\sigma}\mathrm{div}\,v \right\}$$

∴ 又は．
$$\frac{dW}{dt} = -\iiint \varphi\,\mathrm{div}(\rho v)\,dv$$
$$+\frac{1}{8\pi}\iiint E^2\left(v\,\mathrm{grad}\,\xi + \sigma\frac{d\xi}{d\sigma}\mathrm{div}\,v\right)dv$$

partial integration をやり，surface integral を除くと
$$\frac{dW}{dt} = -\iiint v\left\{\rho E - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\xi \mp \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(E^2\frac{d\xi}{d\sigma}\sigma\right)\right\}dv$$

これが dv なる volume に働く force は
$$\mathbf{F}\,dv = \left\{\rho E - \frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\xi + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(E^2\frac{d\xi}{d\sigma}\sigma\right)\right\}dv$$

之を stress で表す時と，

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{8\pi}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + \beta E^2\right) & \frac{\xi}{4\pi}E_xE_y & \frac{\xi}{4\pi}E_xE_z \\ \frac{\xi}{4\pi}E_xE_y & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

於て ある．なし．　$\beta = \frac{T}{\xi}\frac{d\xi}{d\sigma}$
である．†

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

#

如n gasの如n $\varepsilon-1 \ll 1$ で $\varepsilon-1$ の1次の項のみ取れば

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{\varepsilon-1}{\sigma} \qquad \therefore\ p = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore\ \varepsilon E_x^2 - \varepsilon E_y^2 - \varepsilon E_z^2 + \varepsilon E_x^2 + \varepsilon E_y^2 + \varepsilon E_z^2 - E^2$$
$$= 2E_x D_x - E^2$$

で与えられる.

βE^2 の項などの面に垂直な normal stress をあらわし, これは density と共に ε が小さくなるにつれて小さくなる.

又 solid の場合のごとく ε が density のみに depend しない場合には又 β の項がつけ加わる.*

†これらから第一に field の方向の電気は plane に field の方向に $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ の tension を及ぼし, ($\bar{E}_x = E$, $E_y = E_z = 0$)
第二に field の方向に平行な plane に $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ の pressure が及ぼし, ($E_x = 0$ $E_y^2 + E_z^2 = E^2$)
第三には Aの方向に一般に $\frac{E^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau$ なる tension が及ぼす.#

* 例えば ε dielectric const. なる medium の中に conductor の存在する時 これを面に及ぼす force を考えてみる.
field はこの面に垂直であるから

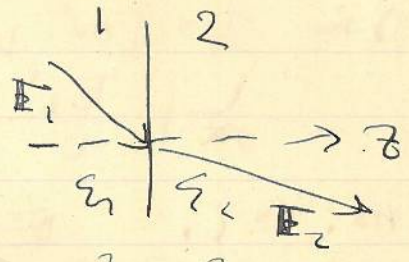
$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}\tau\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{E^2}{8\pi}\frac{d(\varepsilon\tau)}{d\tau}$$

なる tension が unit area について作用する.

この量が dielectric medium の boundary surface に及ぼす force を考えてみる.
boundary surface 上の任意の一点 P から 2 への normal の

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

面をz-方向にとるとき、面に平行な electric field vector をふくむ plane を xz-plane にとる。



また boundary condition より

$$E_{y1} = E_{y2} = 0 \qquad E_{x1} = E_{x2}$$
$$\varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}$$

である。よって、1から2へ及ぼす stress は

$$-\frac{\varepsilon_1}{4\pi} E_{x1} E_{z1},\ 0,\ -\frac{\varepsilon_1}{8\pi}(E_{z1}^2 - E_{x1}^2) - \frac{E_{x1}^2 + E_{z1}^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}\tau_1$$

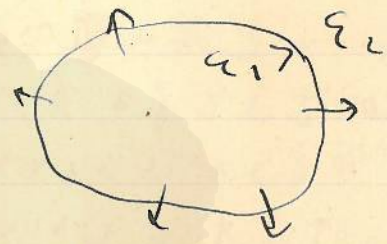
の component をもつ。又2から1へ及ぼす stress は

$$\frac{\varepsilon_2}{4\pi} E_{x2} E_{z2},\ 0,\ \frac{\varepsilon_2}{8\pi}(E_{z2}^2 - E_{x2}^2) + \frac{E_{x2}^2 + E_{z2}^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}\tau_2$$

従って resultant force の x, y, component は0, 又 stress force は boundary に normal で、z-方向は

$$\frac{\varepsilon_2}{8\pi}(E_{z1}^2 - E_{x2}^2) - \frac{\varepsilon_1}{8\pi}(E_{z1}^2 - E_{x1}^2)$$
$$+ \frac{\tau_2}{8\pi}\frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}(E_{x2}^2 + E_{z2}^2) - \frac{\tau_1}{8\pi}\frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}(E_{x1}^2 + E_{z1}^2)$$
$$= \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\varepsilon_1 E_{z1}^2}{\varepsilon_2} + E_{x1}^2\right\}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{8\pi}\left(E_2^2 \frac{d\varepsilon_2}{d\tau_2}\tau_2 - E_1^2 \frac{d\varepsilon_1}{d\tau_1}\tau_1\right)$$

第一項は $\varepsilon_1 \gtrless \varepsilon_2$ に従って + or − となる。この項をのぞくと boundary に沿う force は dielectric const の大きい方から小さい方へ、従って E_2 の medium 中に ε_2 なる dielectric const の substance をいれたとすると、$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ のときは電気力線は電気の多い所への tension が沿うが、又は field の強い方へ力を及ぼす。



$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ のときはこの反対である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第二次の項は陽極はつくので、はつて第一次と第二次の resultant かどうかはわからぬが、

第n 2ヶ式が vacuum で、おくと、stress は

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{E_z^2}{\varepsilon}+E_x^2\right\}(\varepsilon-1)-\frac{1}{8\pi}\left(E_x^2+\frac{E_z^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{d\varepsilon}{dc}\tau$$

となる。但し、E: vacuum 時の field, ε: ~~一定~~ε,

~~従って~~ 第一次の為めに、no1 の substance は expand ~~する~~ しようとする。

第 $\frac{d\varepsilon}{dc}>0$ の時は ~~第~~ 第一次と第二次の大小によって substance は expand or contract しようとする。

$\frac{d\varepsilon}{dc}<0$ の時は expand ~~する~~ しようとする。 ~~それとは~~

第n, ε がおのおの 1 ではなく、ε−1 が density で n 倍の ~~時~~ 時は ε−1=c として、

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{E_z^2}{\varepsilon}+E_x^2\right\}(\varepsilon-1)-\frac{1}{8\pi}\left(E_x^2+\frac{E_z^2}{\varepsilon^2}\right)(\varepsilon-1)$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)^2E_z^2>0$$

の為に正味として tension が残る。substance は field の方向へ引き込まれる。

例えば parallel plate condensor の plate の間に movable な diel. substance をいれると plate の方へ引き込まれる。

この為に電場の強い ~~電~~ 所に dielectric substance は充満しようとするものとみなす。これを実現しようとする力が働くことは ~~古くから~~ 古くから認められており、これを electrostriction という。一般に periodic な field を apply すれば dielectric は多少の変形をこうむる。

dielectrics の中には deformation は全くこうむらないが、例えば Kerr effect を示す non-crystalline な物質は electric field 中にあると、uniaxial crystal の如く光を reflect する。(optical axis は field の方向)

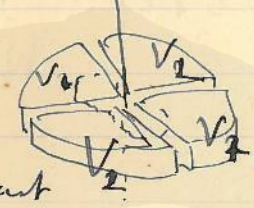
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Example (iii) Quadrant Electrometer

この方が Thomson の disc electrometer より sensitive であるが、絶対値は出をおくれない。お客さは後明するまでもないが。

quadrant のうちの一つ一つの metallic cylinder の中が hollow でこの中へ metal needle を水平な糸で吊られてゐる。needle は糸（又はこれが non-conductor ならば下の方へ wire をおくる）で high potential へつなぐ。(V) quadrant は二つづつ同じ potential にあり、それを V_1, V_2 とする。最初 $V_1 = V_2$ とし、この時 needle が二つの quadrant 間の丁度真中にくるやうな糸の捩れを調節しておく。

そこで V_1 と V_2 とを与へると electrostatic force で needle は V_1, V_2 の中央の位置へ行くやうとする。これに fibre の torsion による force と釣合ふ所まで動く。この torsion の angle を読めば potential diff. が知れる。



扨、needle の area を A, その中 V_1 の下にあるやうな部分を S とすると、needle の surface と quadrant の内面の電気容量を上下共に h とすると、~~この時の~~ この場合の electrostatic energy は、capacity ~~が~~ が夫々 $\frac{S}{4\pi h}$, $\frac{A-S}{4\pi h}$ なる二つの parallel plate condenser ~~の~~ を考へ $V-V_1$ 及び $V-V_2$ を charge してその energy を計算すればよい。

$$W = \frac{(V-V_1)^2 S}{4\pi h} + \frac{(V-V_2)^2 (A-S)}{4\pi h}$$



であるから、$V_2 \to V_1$ への rotation の angle を θ とすると、needle を動かす el. st. force の couple は

$$-\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{-(V-V_1)^2 + (V-V_2)^2}{4\pi h} \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{(2V-V_1-V_2)(V_2-V_1)}{4\pi h} r^2$$

$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$　　$\therefore |(V-V_1)| \gtrless |V-V_2|$ なら θ を小さく ~~or~~ 又は大きくする couple が働く。

©2022 YHAL/YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$\left|V_1 - V_2\right| \leqq \left|v - \frac{V_1+V_2}{2}\right|$ のとき $v = \frac{V_1+V_2}{2}$ となるが，

すなわち，$v = \frac{V_1+V_2}{2}$ のあたりで V_1 と V_2 とは入れかわる．

これが，torsion wire の θ を小さくするための条件であるが，このとき θ は次式で与えられる．

$$k\theta = \frac{(2v - V_1 - V_2)(V_2 - V_1)r^2}{4\pi h}$$

displacement の小さいときは $r = a$，また V_1, V_2 に対して v を大きくとると，

$$k\theta \simeq \frac{va^2}{2\pi h}(V_1 - V_2)$$

となり，quartz-fiber をつかうと，k を大きくすることができ sensitive な $V_1 - V_2$ を与えられる．

$\frac{a^2}{2\pi h k} = C$ とおくと，

$$\theta = C v (V_1 - V_2)$$

ただし，$V_1 - V_2$ のみだけでは，上の式では θ との関係が決まらない．そのためには $v = V_2$ のおいて考えること．

$$k\theta = \frac{(V_2 - V_1)^2 a^2}{4\pi h},$$

または

$$\theta = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2,$$

この場合 θ は potential difference の二次式であらわされる．実験の場合もこれである．

---

needle と quadrant の間の contact potential を P，quadrant 同志の contact potential を P_{12} とおくと，

$$k\theta = \frac{r^2}{4\pi h}(V_1 - V_2 + P_{12}) \times \{2(v + P) - V_1 - V_2\}$$



$(V_2 - \varphi_2) - (V_1 - \varphi_1) = P_{12}$

$\varphi_1 - \varphi_2 = V_1 - V_2 + P_{12}$

$\varphi - \varphi_1 = (V_1 - P)$

$\therefore V_1 = V_2 = v$ とおくと $k\theta \simeq \frac{v^2}{4\pi h} \cdot P_{12}$

$\therefore$ v の実験をかえると θ は変わる．

$\therefore$ この correction がある．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

charge を与えられたそのおくする，

quadrant の pair の needle を 1, 2, 3 とかつけると，
1, 2 を earth し，3 を V_3 の potential にしたとき first pair に induce される charge は

~~$C = C_{13}$~~ $e_1 = C_{13} V_3$

この induction coef. は θ の函数となっている．$V_1 = V_2 = 0$ のとき
~~θ = 0~~ となる様に adjust してあれば そのときの C_{13} を
$(C_{13})_0$ とかくと，

$$e_1 = (C_{13})_0 V_3 .$$

そこで 1st pair を insulate し，(2nd pair は earth したまま)
$e_{\text{全}}$ の charge をかえると，needle は θ だけ deflect されたとすれば，

$$e_1 + e_{\text{全}}^{\text{全}} = (C_{11})_0 V_1 + (C_{13})_0 V_2$$

$$\therefore \quad e_{\text{全}}^{\text{全}} = (C_{11})_0 V_1 + [(C_{13})_0 \pm (C_{13})_0] V_3$$

θ が小さければ

$$e_{\text{全}}^{\text{全}} \cong C_{11} V_1 + \frac{\partial C_{13}}{\partial \theta} \theta \cdot V_3$$

但し，C_{11}, $\frac{\partial C_{13}}{\partial \theta}$ は共に θ = 0 のときの値をとり，これらは
この場合 $V_2 = 0$ とし，函数から

$$\theta = C V_3 V_1$$

(但し，V_3 はすべて $e_{\text{全}}^{\text{全}}$ の決められた値をとるものとする)

$$\therefore \quad e_{\text{全}}^{\text{全}} = \left(\frac{C_{11}}{C V_3} + \frac{\partial C_{13}}{\partial \theta} V_3 \right) \theta ,$$

次に 1 を L の capacity (known) の condenser (electrometer
の外側など) につなぐと，C_{13} を用い (needle は 1, これによって 2 を
も screen にもつ) C_{11} は $C_{11} + L$ となる．この時の deflection
を θ′ とすると．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$e = \left(\frac{C_{11}+\Sigma}{CV_3} + \frac{\partial \xi}{\partial \theta} V_3\right)\theta'$$

$$\therefore \quad e = \left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta}\right) = \frac{\Sigma}{CV_3}.$$

2n quadrant の pair と known potential difference D の battery を connect した deflection を θ'' とすると

$$\theta'' = CV_3 D. \qquad CV_3 = \frac{\theta''}{D}$$

$$\therefore \quad e = \frac{\Sigma D}{\frac{\theta'}{\theta'} - \frac{\theta''}{\theta}}.$$

quadrant electrometer は small potential を 10^{-4}–10^{-5} static unit まで測れる。electrometer の capacity と small change とが sensitive に関係する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§4. Energy and Stress in Magnetostatic Field

次に magnetostatic field における mechanical action を考えてみる. paramagnetic および diamagnetic media においては $B = \mu H$ が成り立つとする. electrostatic field の場合と同様の計算をすればよい. この場合には ~~char~~ magnetic pole は存在しないから $\delta \overline{W}_\rho$ に相当するものは考える必要がない.

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi} \iiint B H \, dV$$

からして ~~その~~ permeability $\mu(x)$ を $\delta\mu(x)$ 丈かわることによって生ずる energy の変化は

$$\delta \overline{W}_\mu = \frac{1}{8\pi} \iiint \{ H^2 \operatorname{grad} \mu - \operatorname{grad}(H^2 \frac{d\mu}{d\rho} \tau) \} \times \delta\tau \cdot dV$$

従って x 方向の仮想の小変位 dV に働く force は

$$\frac{1}{8\pi} \{ -H^2 \operatorname{grad} \mu + \operatorname{grad}(H^2 \frac{d\mu}{d\rho} \tau) \} dV$$

である.

これからして magnetostatic field における Maxwell の stress は

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

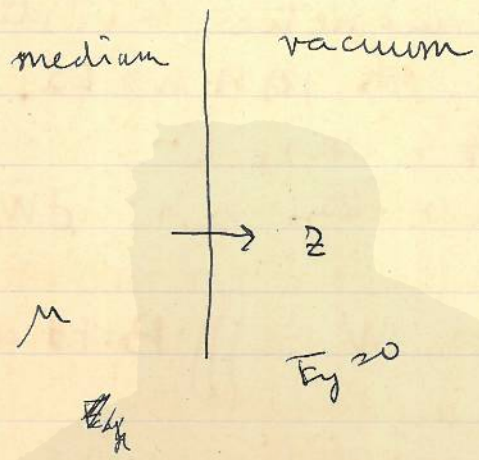
$$T_{xx} = \frac{\mu}{8\pi}(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) + \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{d\mu}{d\rho} \tau$$

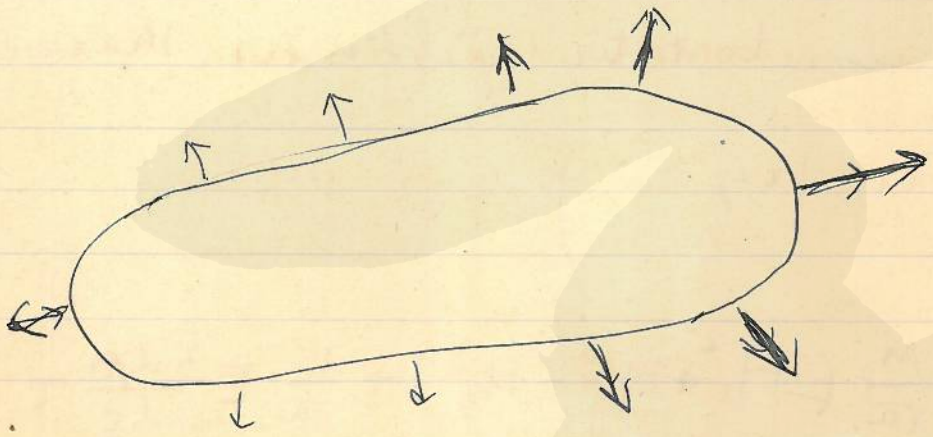
$$= \frac{\mu}{4\pi} H_x^2 - \frac{\mu}{8\pi} H^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 \frac{d\mu}{d\rho} \tau$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{\mu}{4\pi} E_x E_y = \frac{E_x D_y}{4\pi} = \frac{E_y D_x}{4\pi}$$

従ってその外は general media や fluid ~~など~~ における場合にもそのまま成立するのである

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室





~~十分つて~~ ~~その~~ ~~ところ~~ は十分つてその ところ では その金属 の
$\frac{1}{\mu\omega}$ ほど $\left(\frac{n-1}{\mu_i}\right)$ の tension が 少なく，なつて para. は tension
の 方の n の 方へ 出ており，diamag. は 中の方から 押されて 外に 出る

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~[illegible]~~ 同じ場合として最も普通の paramagnetic or diamagnetic substance がおかれたとする. その surface には

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{H_z^2}{\mu}+H_x^2\right\}(\mu-1)-\frac{1}{8\pi}\left(H_x^2+\frac{H_z^2}{\mu^2}\right)\frac{d\mu}{d\alpha}\alpha$$

の tension が働く.

~~第1項~~ 第一項は ~~μとαとの関係によって~~ media が para か dia かに従って ~~違う~~ 違うがある. para の時には dielectric media とは違い ~~paramag~~ media を field の強い所へ ~~もって来ようと~~ 持って行こうとする force が働き, dia の時には反対に field の強い所から遠ざけようとする力が働く.

第二項は μとαとの関係に depend する. fluid では一般に μ が次のように与えられれば

$$\mu-1=C\tau \qquad C:\text{const}$$

なる関係がある.

$C:$ ~~positive~~ >0 for $\mu>1$

$C<0$ for $\mu<1$.

従って $\frac{d\mu}{d\tau}=C \gtrless 0$ for $\mu \gtrless 1$

で第二項も又 paramagnetic, diamag に従って effect が現われてある.

この場合 第一項と第二項を加へたものは.

$$\frac{1}{8\pi}\cdot H_z^2\cdot\frac{\mu-1}{\mu^2}$$

で ~~ある. 従って 結局として~~ paramagnetic substance は強場に引かれ. diamagnetic substance は強場から押し出される,

magnetic field におかれた magnetic substance には次の如き stress が働き従って, substance は全体として強き土地から弱き土地へ押しやられようとする. この magnetostriction と呼ばれる.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

以上の計算は para, dia について成立するが ~~この~~ ferromag. substance の場合には あてはまらぬ.

~~この場合は B~~ いつもの場合に成立する如き系をくるるためには B と H の内の分子の固有を仮定せる限定を定めねばならぬ.

magnetic 任意の medium 中の

ある一定の magnetic field を H, magnetic induction を B ~~この field が~~ (場合) とおくと, この magnetic dipole が $\mathfrak{M} = \frac{B - H}{4\pi}$ の density で distribute (た場合の field と equivalent である.

そこで medium の μ をかうと考えるかわりに, 各点 p に distribute した dipole $\mathfrak{M}$ の density $\mathfrak{M}$ を $\delta\mathfrak{M}$ だけ変化せしめた時の field の energy の変化をかんがえる必要がある. この場合の field の energy は

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint H^2 dV$$

$$\delta\overline{W} = \frac{1}{4\pi}\iiint H \delta H dV$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint \mathrm{grad}\varphi \cdot \delta H dV$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi \delta \mathrm{div} H \cdot \varphi dV$$

(ここで div H について, $\mathrm{div}\mathfrak{M} = -\frac{\mathrm{div} H}{4\pi}$)

$$= -\iiint \varphi \cdot \mathrm{div}\delta\mathfrak{M} dV$$

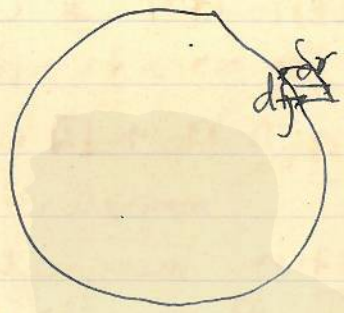
$$= -\iiint \delta\mathfrak{M} \cdot H \cdot \delta\mathfrak{M} dV$$

$$= \iiint$$

すべて dipole の density の変化 $\delta\mathfrak{M}$ は, dV を volume element
~~dV は volume element~~
とする

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

71



$$F_x = (\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\,H_x = m_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + m_y\frac{\partial H_x}{\partial y} + m_z\frac{\partial H_x}{\partial z}$$
$$= m_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + m_y\frac{\partial H_y}{\partial x} + m_z\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この dipole $m_0 dV$ を δr だけうつすことによってなした work は

$$\iiint \delta m \, dV = -\iint m_0 (\delta r \cdot df)$$

$$\therefore \iiint \delta m_x \, dV = -\iiint \{ m_{0x} \operatorname{div} \delta r + \operatorname{grad} m_{0x} \delta r \} dV$$

$$\therefore \delta m_x = -\{ m_{0x} \operatorname{div} \delta r + \operatorname{grad} m_{0x} \delta r \}$$

$$\therefore \delta W = \iiint H \{ m_0 \operatorname{div} \delta r + \operatorname{grad} m_0 \cdot \delta r \} dV.$$

$$\delta m_x = -\operatorname{div}(m_{0x} \delta r)$$

$$\delta W = \iiint \{ H_x \operatorname{div}(m_{0x} \delta r) + H_y \operatorname{div}(m_{0y} \delta r) + H_z \operatorname{div}(m_{0z} \delta r) \} dV$$

$$= -\iiint \{ \operatorname{grad} H_x \cdot m_{0x} + \operatorname{grad} H_y \cdot m_{0y} + \operatorname{grad} H_z \cdot m_{0z} \} \delta r \, dV$$

P.S. moment が m_0 である $m_0 dV$ なる dipole を δr だけうつすに要する field の energy は

$$\{ \operatorname{grad} H_x \cdot m_{0x} + \operatorname{grad} H_y \cdot m_{0y} + \operatorname{grad} H_z \cdot m_{0z} \} \times \delta r \cdot dV$$

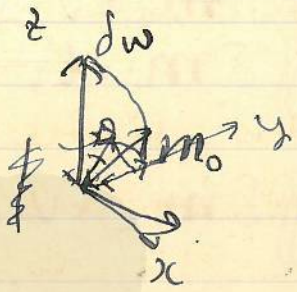
よって、これは $m_0 dV$ なる dipole を δr だけうつすに要する work に等しいから、dipole の受ける mechanical force は

$$F = \{ \operatorname{grad} H_x \cdot m_{0x} + \operatorname{grad} H_y \cdot m_{0y} + \operatorname{grad} H_z \cdot m_{0z} \}$$

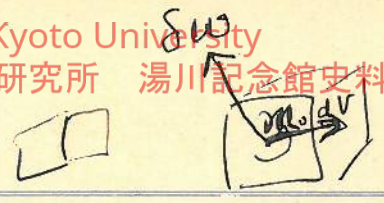
$$(m \operatorname{grad}) H$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\delta m_x = \delta w \cdot m_0 \sin\theta$$



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



62
N, 16

であれば良い。

次に上のおな dipole の translation による変化の他に dipole の ~~回転による変化が~~ axis のまわりの変化による分がかつてあるとする。今、元点において $M_0 dV$ なる dipole の ~~まわり~~ を δw 丈回転をしたとおて、これら M の変化は

$$\delta M = [\delta w, M_0]$$

これら energy の変化は

$$\delta W = -\iiint H [\delta w, M_0] dV$$

である。いま $M_0 dV$ なる dipole の axis を δw 丈回転 ~~させる分~~ したことによって

$$H [\delta w, M_0] dV = \delta w [M_0, H] dV$$

だけ field の energy が減少したことになる。これは dipole の回転はつぐなわれるようなもの。いま moment $m_0 = M_0 dV$ なる dipole には

$$K = [m_0, H]$$

なる moment of force が働くことになる。

いま magnetic field 内に小さな rigid magnet, 次に dipole がおかれたとし、その moment を m_0 とおくと、これには ~~モーメント~~ K なる moment of force が働き、~~これは~~

~~$F = \text{grad } H_x \cdot M_{0x} + \text{grad } H_y \cdot M_{0y} + \text{grad } H_z \cdot M_{0z}$~~

~~なる力が働く、それで field が uniform でなければ magnet は field の gradient の方向へ引き寄せられる~~

これは magnet を field の方向へ引き寄せる力を与える。

この field が uniform であれば magnet に

$$F = \text{grad } (H(r) \cdot m_0)$$
$$= (m_0 \text{ grad}) H$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

If field の stable magnet の stable 条件 moment of force が 0 になる。
即ち $\vec{M}_0$ と $\vec{H}$ の方向が一致する。
又 stable,

この point
unstable.



$$\frac{\partial (B_x H_x)}{\partial x} - H_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y H_x}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_x^2}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial (B_y H_x)}{\partial y} - H_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_y^2}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial (B_z H_x)}{\partial z} - H_x \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この force が働く. magnetic pole の field の強い所に置かれる. その

$$F = \mathrm{grad}(H \cdot M_0) = \mathrm{grad}\, H$$

$$= M_0 \,\mathrm{grad}\, H$$

即ち力は field の grad の値の大きな所へ向う. 即ち magnet は field の grad の値の大きな方へ引きつけられます

いま一つの magnet が dV の中に M dV の dipole があれば

その $F = (\mathrm{grad}\, H_x \cdot M_{ax} + \mathrm{grad}\, H_y \cdot M_{ay} + \mathrm{grad}\, H_z \cdot M_{az}) \times dV$

この force が働き、その

$$K = [M, H]\, dV$$

の moment of force が作用する.

これらの dV の boundary surface に働く stress の resultant として表わすことができる.

即ち

$$F_x = \left(M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) dV$$

$$= \frac{dV}{4\pi}\left\{(B_x - H_x)\frac{\partial H_x}{\partial x} + (B_y - H_y)\frac{\partial H_y}{\partial x} + (B_z - H_z)\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\}$$

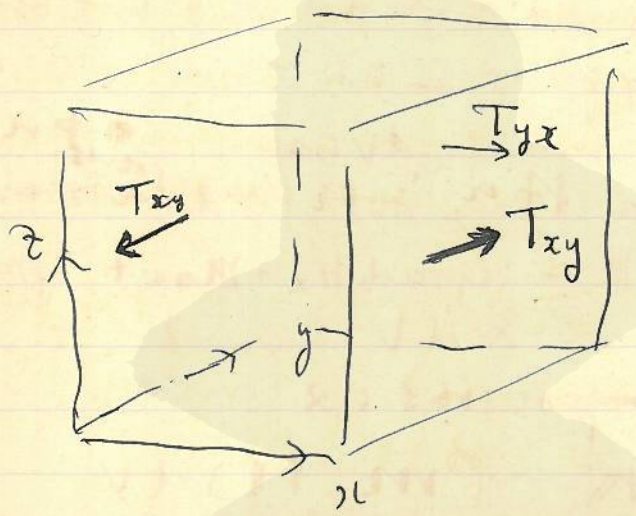
$$= \frac{dV}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2B_x H_x - H^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2B_y H_x) + \frac{\partial}{\partial z}(2B_z H_x)\right\}$$

etc

従って maxwell's stress は

$$T = \left(\quad\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



† しかし、この deduction は dielectric medium を dipole の集りと考えた場合と非常な関係がある。
digis magnet 或は para 磁性 medium から成る場合、
regis body

©2022 YHAL; YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

64
IV, 18

$T_{xx} = \frac{1}{8\pi}(2B_xH_x - H^2)$ etc.

$T_{yx} = \frac{1}{4\pi}B_yH_x$　　$T_{xy} = \frac{1}{4\pi}B_xH_y$　　etc

従って Tensor は一般に symmetric ではなく，resultant moment of force は一般に 0 ではない．

即ち，z-axis のまわりの moment of force の comp. は

$(T_{xy}\,dy\,dz)\times dx \;-\; (T_{yx}\,dx\,dz)\times dy$

$= \frac{1}{4\pi}(B_xH_y - B_yH_x)dV = \frac{1}{4\pi}[\mathfrak{B}\,H]_z\,dV$

∴ Resultant moment of force は

$K = \frac{1}{4\pi}[\mathfrak{B}H]\,dV$

なる vector であらわされる．

即ち　　$\mathfrak{B} = H + 4\pi m$.

$\therefore K = [mH]\,dV$.

上の如きことになる．

例えば半径 r_0 の uniformly magnetised sphere が uniform field の中にある場合に働く force を求める．

→ z



field の方向と permanent magnetisation の方向とが等しくなるようにとり，field は z 方向に H_0 なる大きさ，permanent mag. の density を m_p とし，sphere の permeability を μ_1 とする．

内部では　$\mathfrak{B}_1 = \mu_1 H_1 + 4\pi m_p$

その方向は x 方向の成分を持つ筈はないとすると

$m_{px} = 0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この問題の solution として、球の外は uniform field の中に置かれた moment M_0 の dipole が superposed してでき、内は ~~H_1 が uniform field~~ (は uniform) とすると potential は

$$\varphi_0 = -H_0 z + \frac{M_0 r}{r^3} \qquad r > r_0$$

$$\varphi_1 = -H_1 r \qquad r < r_0$$

球の表面 $r = r_0$ における boundary condition は

$$\begin{cases} -H_0 + \dfrac{M_{0x}}{r_0^3} = -H_{1x} \\ \dfrac{M_{0y}}{r_0^3} = -H_{1y} \\ -H_0 + \dfrac{2M_{0z}}{r_0^3} = -H_{1z} \end{cases} \qquad \begin{cases} -H_0 + \dfrac{2M_{0x}}{r_0^3} = \mu_1 H_{1x} + 4\pi M_{px} \\ \dfrac{2M_{0y}}{r_0^3} = \mu_1 H_{1y} + 4\pi M_{py} \\ H_0 + \dfrac{2M_{0z}}{r_0^3} = \mu_1 H_{1z} + 4\pi M_{pz} \end{cases}$$

これとく と、

$$M_{0x} = \frac{\mu_1 - 1}{2+\mu_1} 4\pi M_{px} r_0^3 = 0 \qquad H_{1x} = -\frac{4\pi M_{px}}{2+\mu_1} = 0$$

$$M_{0y} = \frac{\mu_1 - 1}{2+\mu_1} 4\pi M_{py} r_0^3 \qquad H_{1y} = -\frac{4\pi M_{py}}{2+\mu_1}$$

$$M_{0z} = \frac{1}{2+\mu_1}\{(\mu_1 - 1)H_0 + 4\pi M_{pz}\} r_0^3 \qquad H_{1z} = \frac{4\pi M_{pz}}{2+\mu_1}$$

$$\frac{1}{2+\mu_1}\{3H_0 - 4\pi M_{pz}\}$$

これらして球の内部における magnetisation は

$$M_1 = \frac{B - H_1}{4\pi} = \frac{\mu_1 - 1}{4\pi} H_1 + M_p$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$m_{1x} \overset{=0}{\rightarrow} \frac{\mu_1 - 1}{2+\mu_1} m_{px} + m_{px} = \frac{3}{2+\mu_1} m_{px}$$

$$m_{1y} = \frac{3}{2+\mu_1} m_{py}$$

$$m_{1z} = \frac{3}{2+\mu_1} m_{pz} + \frac{3(\mu_1 - 1)}{4\pi(2+\mu_1)} H_0$$

よからして

$$[m_1 H_1]_x = \frac{3 m_{py} H_0}{2+\mu_1}$$

$$[m_1 H_1]_y = [m_1 H_1]_z = 0$$

perm. mag の任意場を m_p

permanent magnetisation の方向と field の方向のなす角を θ とおく

$$m_{py} = m_p \sin\theta.$$

$$\therefore [m_1 H_1]_x = \frac{3 m_p H_0 \sin\theta}{2+\mu_1}$$

y, z-comp. は 0.

従って求める作用する moment of force は

$$\iiint_{\text{sphere}} K_x \, dV = \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \frac{3 m_p H_0 \sin\theta}{2+\mu_1} = \frac{3 M_p H_0 \sin\theta}{2+\mu_1}$$

$$\iiint K_y \, dV = \iiint K_z \, dV = 0.$$

ある permeability μ_1 で M_p の permanent magnetisation をもつ sphere は magn. を uniform field の方向に向きを変えようとする moment of force を受ける. そのためには permeability μ_1 が大きい程よい.

Uniform field では sphere の中で Grad H_1, x etc が 0 である

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

から 全ぶんを作用する resultant force は0である.
この magnetised sphere は 全体のまわりを ぐるぐるまわって, magnetic field の方向に 向く.

以上の考察は electric field の場合にも apply する. 即ち 各点の様子が isotropic であり, 物質では displacement の方向は electric field の方向と一般に一致しない. かかる一般の場合の Maxwell の stress は

$$T_{xx} = \frac{1}{8\pi}(2D_xE_x - E^2)$$

$$T_{yx} = \frac{1}{4\pi} D_y H_x \qquad T_{xy} = \frac{1}{4\pi} D_x E_y \text{ etc}$$

となる. ~~dielectrics 内部にあるときにこれを使うとうまくゆかない~~
~~force moment of force が一般に一致しない~~.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

68
N,22

§55. Stress and Energy in Arbitrary Electromagnetic Field.

これ迄 electrostatic field 及び magnetostatic field 中に於ける stress 及び energy の expression を夫々 electrostatic field と magnetostatic field とに分けて考えて来たが，これらの場合を含むような general な場合を考えよう．Maxwell の stress は (Isotropic medium 中に於ける)

$$T = T_E + T_M$$

$$T_E = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\rho}E^2\right) & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y & \frac{\varepsilon}{4\pi}E_zE_x \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y & \cdot & \cdot \\ \frac{\varepsilon}{4\pi}E_zE_x & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$T_M = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{8\pi}\left(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 + \frac{\rho}{\mu}\frac{d\mu}{d\rho}H^2\right) & \frac{\mu}{4\pi}H_xH_y & \frac{\mu}{4\pi}H_zH_x \\ \frac{\mu}{4\pi}H_xH_y & \cdot & \cdot \\ \frac{\mu}{4\pi}H_xH_z & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

etc.

energy density
$W = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})$

energy は $\overline{W} = \overline{W_E} + \overline{W_M}$

$$\overline{W_E} = \overline{W_M} = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{E}\mathbf{D}\,dv$$

$$\overline{W_M} = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{H}\mathbf{B}\,dv$$

そこで次に一般に，この electromagnetic field の stress 及び energy が与えられた時 $\overline{W}$ をどうして

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ず。かは似をがでしいが完かは個れの場合に apply して
その結論 既実体と比較せねばならぬが、以後の考察にて
それの場合を論ずることにて、ここではかは似をから出てく
る一般的な向を述べる。

先一般の time と共にかはる field における energy W は
かわって行くかということは

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{8\pi}\iiint_V \frac{\partial(\vec{E}\vec{D})}{\partial t}\,dv + \frac{1}{8\pi}\iiint_V \frac{\partial(\vec{B}\vec{H})}{\partial t}\,dv$$

をすればてえると、homogeneous, isotropic medium においては

$$\vec{E}\vec{D} = \varepsilon\vec{E}^2 \qquad \frac{\partial(\vec{E}\vec{D})}{\partial t} = 2\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

field equation からして、

$$\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{curl}\,\vec{H} - 4\pi\vec{I}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(\vec{E}\vec{D})}{\partial t} = 2c\,\vec{E}\,\mathrm{curl}\,\vec{H} - 8\pi\vec{E}\vec{I},$$

同様にして、$\frac{\partial(\vec{H}\vec{B})}{\partial t} = -2c\,\vec{H}\,\mathrm{curl}\,\vec{E}$,

$$\therefore \quad \frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\iiint_V (\vec{E}\,\mathrm{curl}\,\vec{H} - \vec{H}\,\mathrm{curl}\,\vec{E})\,dv - \iiint_V (\vec{E}\vec{I})\,dv$$

ベクトル vector analysis の公式

$$\vec{E}\,\mathrm{curl}\,\vec{H} - \mathrm{curl}\,\vec{E}\cdot\vec{H} = -\mathrm{div}\,[\vec{E},\vec{H}]$$

を使うと、

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi}\iiint_V \mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]\,dv - \iiint_V \vec{E}_z\vec{I}\,dv.$$

このから energy density W について計算すれば次のようになる

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}\,(\vec{E},\vec{H}) - \vec{E}\vec{I}.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \mathbb{E}^2 + \mu \mathbb{H}^2)$$

Vの boundary を S とすると

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{-c}{4\pi} \iint_S [\mathbb{E}\mathbb{H}]\, df$$

$$- \iiint_V \mathbb{E}\mathbb{I}\, dv$$



この式の右辺の第二項は conduction current $\mathbb{I}$ が存在するとき単位体積 n

$$\iiint_V \mathbb{E}\mathbb{I}\, dv$$

で energy が失われて行くことを意味する. これは Joule's Heat として失われる energy の総和である.

いま細い wire を考へ, その中のとし, 加へた電場 $\mathbb{E}$ が field の強さ $\mathbb{J}$ なる電流が流れるとして, $\mathbb{I}$ の二 $\mathbb{J}$, ($\mathbb{I}$ は各点のベクトル)

$$\iiint_V \mathbb{E}\mathbb{I}\, dv = \int_C E \cdot J\, ds$$

但し, $\int_C$ は wire に沿うての curvilinear integral. 更に $\mathbb{J}$ は wire の至る所 constant なる場合は

$$J \cdot \int_C E\, ds$$

$$= J \cdot V$$

但し, V は wire の両端の potential difference. ∴ この式は全体積内の wire 内の各点の Joule's Heat を表はす. 次に左辺の第一項は boundary surface を通つて全体積内に流入する energy の量を表はす.

この意味にて

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$S = \frac{c}{4\pi}[E, H]$$

この vector は energy の flow の density をあらわす vector となっている。これを Poynting Vector と名づける。

これからすると electric field と magnetic field とがきまって、そのあとが異なる場合には、いつも energy の flow があることになる。これ一寸不思議であるが、実際 ~~H or D~~ ~~electric displacement D が time と共に変わる場合~~ ~~conduction current I のある場合~~ time と共に変わる場合 constant field では constant な energy flow は physical には考えない。∴ 任意の volume V の boundary S について、この積分が、field が constant の外、conduction current がのような場合のみ、ゼロとなる式は立てられない。

あってもなくても同じことである。

この field energy は thermodynamical な立場から free energy にあたることは、inhomogeneous, anisotropic medium についての expression (例えば ferromag. sub.)

§5. Uniqueness of Solution

この energy の time rate of change のきまるような場合の Maxwell の field equation の solution は唯一つしかきまらないことを証明しよう。

ある time $t=0$ において electromagnetic field がきまっており、また ~~境界~~ surface においては tangential field はゼロであると仮定すると、その後の ($t>0$) field は unique に決まる。(charge distribution はきまっているものとする)

この証明は、かりに条件を満たす Maxwell の equation の solution が二つあるとし、それらを E_1, H_1; E_2, H_2 とおくと、

$$E = E_1 - E_2 \quad , \quad H = H_1 - H_2$$

も field equation を満たし、また $t=0$ において $E=H=0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

である。 仮に、$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ は initially に

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E}_1 = 4\pi\rho \qquad \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E}_2 = 4\pi\rho$$

を満足せねばならぬため、更に

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E} = 0$$

を満足するとかける。

従って、 $W = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathbf{H}^2 \quad (>0)$

とおくと、

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_V W\,dv\right\} = -\frac{c}{4\pi}\iint_S (\mathbf{E}\,\mathbf{H})\,d\sigma - \iiint_V (\mathbf{E}\,\mathbf{\Pi})\,dv$$

となる。しかも V を充分大きくすれば S の上で E, H は充分小さくなる。(∵) 右辺の第一項は 0 となる。又右辺の第二項は Joules Heat をあらわすから、これを書くと、

energy field の energy

$$\iiint_V W\,dv$$

が時間と共に常に減少して行くか、少くとも増加しない。

即ち、 $W \geq 0$, ∴ 終り t の or 0 の or 0 の先、

しかも、$t \geq 0$ ならしめて $W = 0$. ∴ $t > 0$ ならしめて

常に $W = 0$. 即ち、常に $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ でなければならぬ

Q.E.D.

逆方で field が 0 ならないという、条件のもとに finite region を考へ、その boundary surface 上の field が $t > 0$ で

ゆしあらわされてゐるとしてもよい。

この時も右辺第一項は 0 となり、明かにはなれど、

2 medium が anisotropic の時でも常に右辺 0 or 0 or 0 となり

energy density が定まれば、よりどころのない energy law が成立する

ため、その uniqueness を証明する。 証明終。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Chapter VI Stationary Electromagnetic Field

§ 1, General Considerations

今迄 static field を考へてきたが、次は stationary field を考へる。stationary field といふのは field の状態は時間と共に変化するが、medium の状態は分子的性質は時間と共に変わらないで、と考えた場合で、例へば電流が流れてゐても、電流 or time と共に変わらぬ一定の大きさを持つてゐるならば変らない、

(変動時にはこれらの field, current も変化するが その rate はおそい とする)

この場合には field equations は

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = 4\pi\rho \quad (\text{II},1) \qquad \text{div}\,\mathfrak{B} = 0$$
$$\text{curl}\,\mathfrak{E} = 0 \quad (\text{II},1) \qquad \text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{I} \quad (\text{II},2)$$

となる。

この場合には電流のために Joule's Heat が発生する。その amount は (II, 31) により

$$\iiint_V \mathfrak{E}\,\mathfrak{I}\,dV$$

である。energy の保存の原則からそれに等しい量の energy がどこからか供給されなければ field の energy は一定にならず、従つて stationary field は成立しない。

この場合には Poynting の vector

$$\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

は 0 でなく、従つて boundary surface を通つて energy の流れがあり、之が、Joule's 熱として失われる energy で賄われてゐると考へられる。

∵ Ohm's law により $\mathfrak{I} = \sigma\mathfrak{E}$ なるから、電流が存在するならば $\mathfrak{E}$ が存在し、又 $\text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{I}$ により $\mathfrak{H}$ も

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

0 でない。一般に $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] \neq 0$ 等。

この様な stationary field では electric field と magnetic field とは全く別々に、それを勝手に定めることができる。

そこで electric field $\mathbf{E}$ および それによって 31 頁 定まる current $\mathbf{I}$ について述べ、しかる後 current によって定まる mag. field を考察することにする。

(VI, 2) の第2の式。

$$\mathrm{curl}\, \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}$$

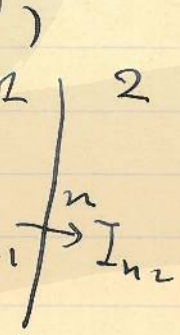
から、

$$\mathrm{div}\, \mathbf{I} = 0 \qquad (\mathrm{VI}, 3)$$

即ち current には source, sink がない。従って 2 つの medium の境界において、normal component は continuous である。(これは 磁場 の場合と同じ)

即ち、

$$I_{n1} = I_{n2} \qquad (\mathrm{VI}, 4)$$



証 medium 1, 2 において 1→2 への normal の方向の current の comp を夫々 I_{n1}, I_{n2} とする。

1 が conductor で 2 が insulator なら $\mathbf{I}_2 = 0$ であるから、

$I_{n1} = 0$. 即ち conductor と insulator の境界では current は tangential の方向を向く。

従って $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}}{\sigma}$ 即ち electric field の方向と conductor の表面では tangential. (insulator の場合は 勿論 $\mathbf{E}$ の normal comp. は存在しうる)

次に $\mathrm{curl}\, \mathbf{E} = 0$

であるから、 $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, \Phi$

in medium 内で

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

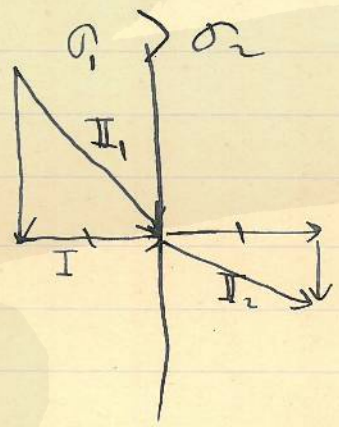
を満足する potential φ が存在する.
所で第二章で述べた如く 異なる medium の boundary surface の両側に於ける potential の差は const であるか 一般に 0 ではない. electric
従って、異なる medium の boundary surface 上に於ける electric field の tangential comp は conti である.
即ち

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (\text{Ⅵ}, 5)$$

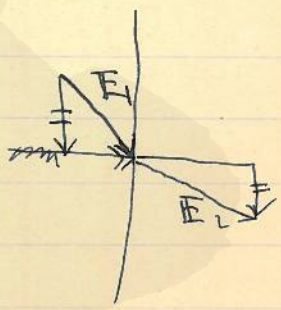
今 medium が共に conductor で specific conductivity を σ_1, σ_2 とすると

$$\frac{I_{t_1}}{\sigma_1} = \frac{I_{t_2}}{\sigma_2} \qquad (\text{Ⅵ}, 6)$$

(Ⅵ, 4), (Ⅵ, 6) から conductivity の異なる conductor の境界では current 及び electric field の方向は急に変わる.



所で第二章で述べた如く 異なる medium の boundary surface の両側における potential の差は constant であるか、一般に 0 ではない.
今 n 個の等しいが closed chain を形成してる時 其の間の potential difference の和 $V = \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3} + \cdots + \varphi_{n-1,n} + \varphi_{n,1}$ が 0 でなければ、static field は考えられず. current が



存在せねばならぬ

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

そこで 任意点Pから出発してAのconductorを通って元へ戻ると、第三章にやったのと path の如何にかかわらず

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = V$$

である。所で各々のconductorにおいて其れ

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{I}_i}{\sigma_i} \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

なる関係があるから

$$\sum_i \int_{C_i} \frac{\mathbf{I}_i}{\sigma_i}\, d\mathbf{s}_i = V \qquad (\text{VI}, 7)$$

(Aのconductorを一周す)

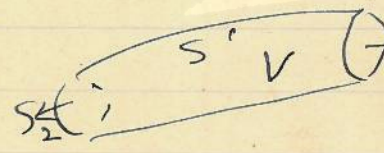
とする。但し、C_i は任意のclosed curveのi番目のconductor中にあるもの。

六月十四日。

§2, Steady Current in Linear Conductor. Kirchhoff's Laws

今conductorの任意のひねりをSとし、その上のsurface element を $d\mathbf{f}$ とすると

$$\iint_S \mathbf{I}\,d\mathbf{f}$$



はひねりの取り方によらないであろう。その値をもってひねりの強さをいえば。このひねりをまた S_1, S_2 とし、その間を其れぞれ [illegible] 。外側のinsulator [illegible] closed surface について Gaussの定理を使う。

S_1, S_2, S' について

$$\iint_{S_1} \mathbf{I}\,d\mathbf{f} + \iint_{S_2} \mathbf{I}\,d\mathbf{f} + \iint_{S'} \mathbf{I}\,d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{I}\,dV = 0$$

但し、Vは S_1, S_2, S' に包まれた region を意味する。

所で S' 上では $\mathbf{I}$ は normal component をもたないから

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\iint_{S'} \mathrm{II}\, df = 0$.　　S_1 の outward normal と S_2 の outward normal は逆の方向をむいているから normal のむきをどちらかに一そろえすれば

$$\iint_{S_1} \mathrm{II}\, df = \iint_{S_2} \mathrm{II}\, df$$

である.

その一定断面の conductive を流れる全電流を J とすると.

$$J = \iint_S \mathrm{I}\, df$$

もし電流が細い近角しかも一様な密度で流れているならば.

$$J = I \cdot S \qquad (\mathrm{VI},8)$$

但し S は上の断面積
電流が細い wire の中を流れる場合はこの関係は近似的にあてはまる.

そこで (III,7) の curvilinear integral をとる時. ~~closed curve~~ として. current の line of vector に沿って一周すると、各所 II と dS は平行で

$$\mathrm{II}_i dS_i = \mathrm{I}_i dS_i$$

$$\therefore \sum_i \int_{C_i} \frac{\mathrm{I}_i\, dS_i}{\sigma_i} = V$$

(VI,8) を使えば.

$$\sum_i \int_{C_i} \frac{J\, dS_i}{\sigma_i S_i} = V$$

但し S_i は dS_i を面とする上の断面積.

or

$$J = \frac{V}{\sum_i \int_{C_i} \frac{dS_i}{\sigma_i S_i}} = \frac{V}{R}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(2.1) $$R = \sum_i \int_{C_i} \frac{dS_i}{\sigma_i S_i}$$



は各 conductor の specific conductivity σ_i および geometrical configuration によって定まる量である。この R は electromotive force V と current J の比をあらわすものであるから conductor の system の全抵抗と呼ばれる。

もっと一般に conductor の任意の2つの点の間の potential difference を V とすると

$$V = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = J \int_1^2 \frac{ds}{\sigma \cdot S}$$

となる。この場合の抵抗は

$$R = \int_1^2 \frac{ds}{\sigma \cdot S}$$

である。

もっと一般の一定な wire の抵抗は

$$R = \frac{\int_1^2 ds}{\sigma \cdot S} = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

となる。但し l は wire の長さ。従って wire の抵抗は長さに比例し、もう抵抗に逆比例する、又は当然な事となっていることである。

又上の述べたことにより wire を series につないだ時の抵抗は各々の抵抗の和であることも直ちにわかる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

† 一つの 点から出る、その点を用いる wire を流れる電流を、$J_1, J_2, \cdots J_n$ とすると

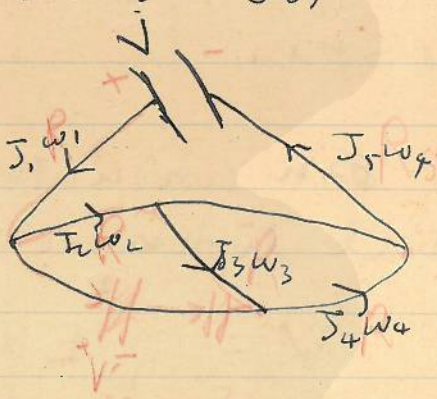


$$\sum_{i=1}^{n} J_i = 0$$

但し電流の符号は wire から出るものを +、流れこむものを − とする

† 又任意の二つの点の間の potential difference を V とし、その間を任意の path を沿って行く間の途中のそれぞれの間の電流と抵抗とを夫々 J_i, w_i とすると

$$V = \sum_{i=1}^{n} J_i w_i$$



をを Kirchhoff の第二法則 という。

この二つの法則を用いれば電流の問題が解けます。

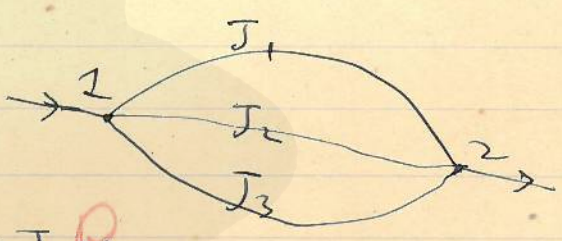
V は path の取り方によらず一定
いったん定めた path に沿っての $\sum$ は 0
であり、closed circuit 内の electromotive force の和だけとなる。
(potential difference ではない)

$$V - V' = \sum J_i R_i$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§2. Kirchhoff's Laws

wireが途中で何本にも分かれてゐる場合、各分岐点に入つてゐる電流の和と出て行く電流の和とは等しい。此れがKirchhoffのLawが成立つ!!（之が等しくないとすれば電荷が分岐点に蓄積されることになり電流にsourceとsinkとがあるといふ仮定に反する）



第1図の如き分岐した1本の導線の両端のPotentialをVとすると各分岐点に流れ込む電流は

$$V = J_1 R_1 = J_2 R_2 = \cdots = J_n R_n$$

従つて全電流 $J = \sum_{i=1}^{n} J_i$ とVの比は

$$\frac{V}{J} = \frac{1}{\frac{\sum J_i}{V}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

（各抵抗 $R_1 \sim R_n$ と）

即ち、parallelにつないだn本のwireの各抵抗Rが夫々wireの抵抗

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

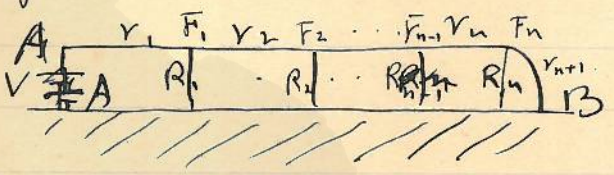
なる関係がある。）

次の例を一つあげておく。telegraph wireに対する問題で

leakageのある場合。

即ちAn electromotive force Vなるbatteryあり、currentはAから線を通つてBへ行くが、この線路の中を通つて大地とつてくるのであるが、途中 $F_1, F_2 \cdots F_n$ なる点から current は一部線路へleakする様な場合を考へる。

AF_1, F_1F_2, $\cdots$ F_nB の抵抗を $r_1, r_2 \cdots r_{n+1}$ とし



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~球が Π_i と dS_i とでは角をなしているから $\Pi_i dS_i = I_i ds_i$ であって、df は Π と垂直であるから~~

$F_1, F_2, \cdots F_n$ と地球の間の leakage の抵抗を $R_1 R_2 \cdots R_n$ とする。そして地球の裏側の抵抗は negligibly small とする。すると F_n と地球の間の抵抗は

$$r'_n = \frac{1}{\frac{1}{R_n} + \frac{1}{r_{n+1}}}$$

F_{n-1} と地球の間の抵抗は

$$r'_{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{r_n + r'_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{n-1}} + \cfrac{1}{r_n + \cfrac{1}{\frac{1}{R_n} + \frac{1}{r_{n+1}}}}}$$

continued fraction で書けば、

$$r'_{n-1} = \frac{1}{R_{n-1}^{-1} + r_n + R_n^{-1} + r_{n+1}}$$

順次にして、$F_{n-2} \cdots F_1$ と地球の間の抵抗を求めてそれが A と地球の間の抵抗は

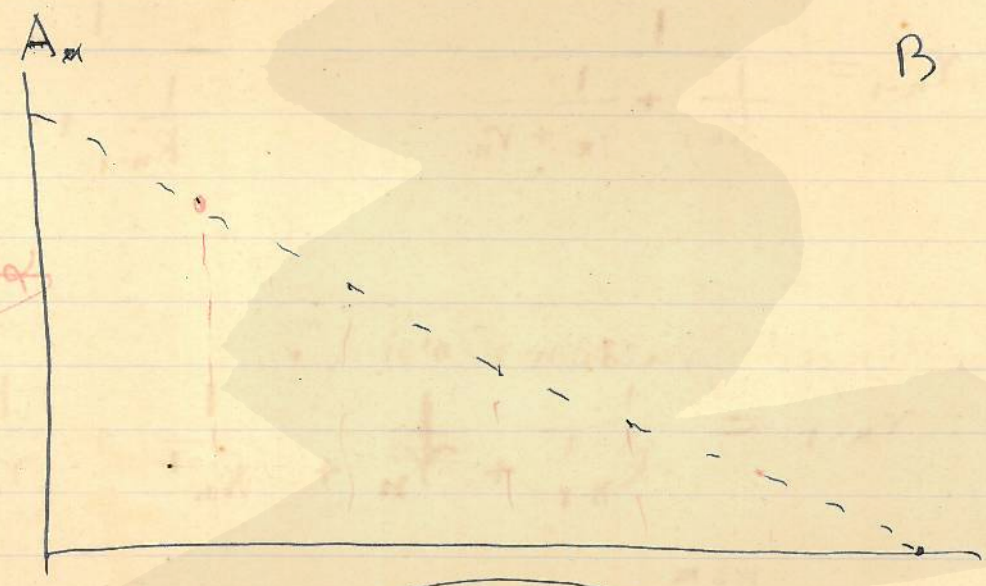
$$r'_0 = r_1 + \frac{1}{R_1^{-1} + r_2 + R_2^{-1} + \cdots + r_n + R_n^{-1} + R_{n+1}}$$

となる。之等のおの抵抗がわかれば $A F_1$ 間の電流がわかり、それからして $F_1 F_2$ 間 $\cdots$ とわかってくる。

~~もしくは~~ ~~$F_1 F_2 \cdots$~~ wire 中の current および potential の distribution が問題になる場合には次のおき方を用いる方が善い。

$A, F_1, F_2, \cdots F_n$ 等の potential を V 等 $V, \cdots$ 最後 V_{n+1} とおくと $V_{n+1} = 0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$$\frac{e^{ka}+e^{-ka}}{2} - \coth(n+1)\alpha \cdot \frac{e^{ka}-e^{-ka}}{2}$$

$$\frac{A}{2}\left\{e^{(k+1)\alpha}+e^{-(k+1)\alpha} - (e^{k\alpha}+e^{-k\alpha})(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) + e^{(k-1)\alpha}+e^{-(k-1)\alpha}\right\}$$

$$+\frac{B}{2}\left\{e^{(k+1)\alpha}-e^{-(k+1)\alpha} - (e^{k\alpha}-e^{-k\alpha})(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) + e^{(k-1)\alpha}-e^{-(k-1)\alpha}\right\}$$

$$= 0.$$

すなわち n $A = V_0$

$$A\cosh(n+1)\alpha + B\sinh(n+1)\alpha = 0.$$

$$\therefore V_k = V_0\left\{\cosh k\alpha - \coth(n+1)\alpha \cdot \sinh k\alpha\right\}$$

$V_{n+1} = V_0\{\cosh(n+1)\alpha - \coth(n+1)\alpha \cdot \sinh(n+1)\alpha\} = 0.$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$r_{k-1} \to r_k$ の電流は $\dfrac{V_{k-1}-V_k}{r_k}$

$r_k \to r_{k+1}$ 〃 $\dfrac{V_k - V_{k+1}}{r_{k+1}}$

r_k → 地対 $\dfrac{V_k}{R_k}$

∴ Kirchhoff の法則より

$$-\frac{V_{k-1}-V_k}{r_k} + \frac{V_k - V_{k+1}}{r_{k+1}} + \frac{V_k}{R_k} = 0$$

or $$\frac{V_{k+1}}{r_{k+1}} - \left(\frac{1}{R_k} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{k+1}}\right) V_k + \frac{V_{k-1}}{r_k} = 0$$

$k = 1, 2, \cdots n$

この n 個の k-difference eq から $V_1, V_2 \cdots V_n$ を決定出来る.

今 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{n+1} = r$, $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ とおけば difference eq. は const. coef. の eq になる.

すなわち. $$V_{k+1} - \left(2 + \frac{r}{R}\right) V_k + V_{k-1} = 0.$$

$1 + \dfrac{r}{2R} = \cosh\alpha$ とおくと この式の solution は

$$V_k = A \cosh k\alpha + B \sinh k\alpha \qquad k = 1, 2, \cdots n$$

~~とおき. $k=1$ の式が n 入れたとき. 他の式と全て. 上式が n 入れたとき.~~

V_2

$$A\cosh k\alpha + B\sinh(k+1)\alpha + B\sinh(k+1)\alpha$$
$$- 2\cosh\alpha \cdot (A\cosh k\alpha + B\sinh k\alpha)$$
$$+ A\cosh(k-1)\alpha + B\sinh(k-1)\alpha$$
$$= 0$$

$k=1$: $A\cosh 2\alpha + B\sinh 2\alpha - 2\cosh\alpha(A\cosh\alpha + B\sinh\alpha) + V_0 = 0$

$k=n$: $-2\cosh\alpha(A\cosh(n+1)\alpha + B\sinh n\alpha) + (A\cosh(n-1)\alpha + B\sinh(n-1)\alpha) = 0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§3. Steady Current in Continuous Medium

さて之へ入って，次くの homogeneous isotropic な conductor, insulator が存在する場合の electric field, 及び current density を求める事にする．之等 conductor, insulator 又は medium 共に

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ を満足する potential が存在する．

又之等 conductor 又は $\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$ σ: const であるから，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{I} = \sigma\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0.$$

∴ conductor の内部では φ は Laplace の eq.

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (\mathrm{VI}, 9)$$

を満足せねばならぬ．

又 insulator の内部で charge が存しないとすれば，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0.$$

∴ φ は insulator の内部でもまた Laplace の eq. を満足せねばならぬ．

boundary surface では electric field は (VI, 4) から

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2} \qquad (\mathrm{VI}, 10)$$

及び (VI, 5) より

$$E_{t1} = E_{t2}$$

を満足せねばならぬ．

従って此の式から boundary surface の両側の potential の diff は const でなければならず，又此の式から

$$\sigma_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \qquad (\mathrm{VI}, 10)$$

でなければならぬ，但し $\frac{\partial}{\partial n}$ は 1 → 2 の normal の方向の微分を意味する．conductor の中の potential φ は additional constant を除き unique に定って来る．

以上の様な事から此の式を満足する potential の任意

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

のこっを φ_2, φ'_2 とおく. $\varphi'' = \varphi_2 - \varphi'_2$ は conductor で Laplace の eq を満足し, 全 boundary で continuous で, その first derivative も continuous である.

∵ boundary における φ_1, φ_2 の jump は全く相殺する

そこで conductor について

$$\iiint \rho (\mathrm{grad}\,\varphi'')^2 \, dV$$

V, V₂ ... なる conductor の体積 V_i について, これを全 medium について

$$\sum_i \iiint_{V_i} \rho_i (\mathrm{grad}\,\varphi''_i)^2 \, dV_i$$

とし, この積分を transform すると (IV, 13) より

$$= \sum_i \iint_{S_i} \sigma_i \varphi''_i \, \mathrm{grad}\,\varphi''_i \, df_i - \sum_i \iiint_{V_i} \varphi''_i \Delta \varphi''_i \, dV_i$$

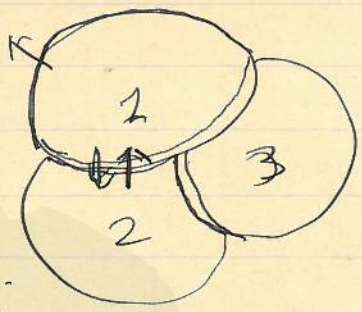
$\varphi'' = \varphi_2 - \varphi'_2$

とする. 従って S_1, S_2 : 各 conductor の boundary surface を意味する.

故に この積分 は conductor と insulator と boundary surface についての integral が 1 回.

conductor と conductor の boundary についての integral は 二回 である.

故に conductor と insulator の boundary では, potential の定義の normal comp は 0, すなわち



$$\mathrm{grad}\,\varphi'' \cdot df = \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \cdot df = 0 \quad \text{by (VI, 10)}$$

∴ 第一の形の integral は 0.

故に conductor 内全ての境界では, normal の如何に関係なく, 結局 i 番目の cond. と j 番目の cond. との境界を S_{ij} とすれば

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

とおく

~~$\iint \sigma_i \varphi_i'' \, \mathrm{grad} \, df$~~

$$\iint_{S_{ij}} \left(\sigma_i \varphi_i'' \frac{\partial \varphi_i''}{\partial n} - \sigma_j \varphi_j'' \frac{\partial \varphi_j''}{\partial n} \right) df$$

なる形の integral の和となる. 但し $\frac{\partial}{\partial n}$ は 1-2 への normal の方向の微分をあらわす.

所で境界の両側の φ'' は等しい. 即ち

$$\varphi_i'' = \varphi_j''$$

又 (III, 10) の関係より

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i''}{\partial n} = \sigma_j \frac{\partial \varphi_j''}{\partial n}$$

∴ surface integral は 0 となる.

従って

$$\sum_i \iiint_{V_i} \sigma_i (\mathrm{grad} \, \varphi_i'')^2 \, dV_i = 0$$

conductor 中の

これの integrand は至る所 0 又は正であるから, 至る所で $\mathrm{grad} \, \varphi_i'' = 0$ or $\varphi_i'' = \mathrm{const}$ でなければならぬ. 」

この additive constant は insulator との境界の外側の potential の値をあたえるか又は conductor の一つの中の一点の potential を与えることによって ~~unique に~~ 定まってくる.

~~この外側の conductor 内の potential field は conductor 内の~~ field はこの additive constant のみに関係して変る. 即ち周囲の medium の dielectric constant には independent である.

両方共物として ~~は~~ を Ren 取かった electrolyte の中に ~~は~~ 二枚の electrode が 遠く離れて 存在し, その間を

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

↑ しかされば　次ねをおふ．ぬすをいてエネ以のchangeが以ゝなるって事
なって次ねのpotentialはかはってくる．辺っと色以かかる．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

電流が流れているとする．但し電極内部に絶縁された球をつないでおるとする．

この時は Laplace 式の particular solution は

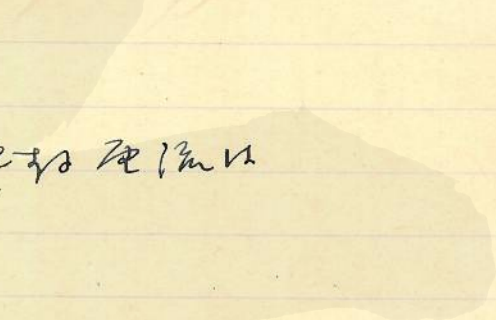
$$\varphi = \frac{c_1}{r_1} + \frac{c_2}{r_2}$$

となる．

~~球形であろう．~~ 但し r_1, r_2 は各電極からの距離，今両極の半径及び電位を $a, b, \varphi_1, \varphi_2$ とおく

$a \gg$ ~~φ_1~~ 第一の球のとなりは $r_2 \gg a$ となる．

$$\varphi_1 = \frac{c_1}{a}$$



同様に $\varphi_2 = \frac{c_2}{b}$

$$\therefore \varphi = \frac{a\varphi_1}{r_1} + \frac{b\varphi_2}{r_2}$$

~~今 $\varphi_1 > \varphi_2$ とおくと~~ 第一の電極から流出する電流は

~~$\varphi_1 > 0$ とおくと~~

$$J = -\sigma \iint \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r_1=a} df_1$$

$$= 4\pi\sigma a \varphi_1$$

但し，σ は electrolyte の specific conductivity

~~この電極に流れる~~ 第二の電極に流れる電流は

~~時~~ ? $= -4\pi\sigma b \varphi_2$

~~従って 各電極の電位を他と絶縁して~~ ~~$\varphi_1 > 0$ $\varphi_2 < 0$ とおくと~~ ~~$\varphi_1 > 0$ とおくと~~ ~~$\varphi_2 < 0$ となり~~ から $\varphi_2 < 0$ となり，

$$J = 4\pi\sigma a \varphi_1 = -4\pi\sigma b \varphi_2$$

従って 各電極間にある electrolyte の抵抗は

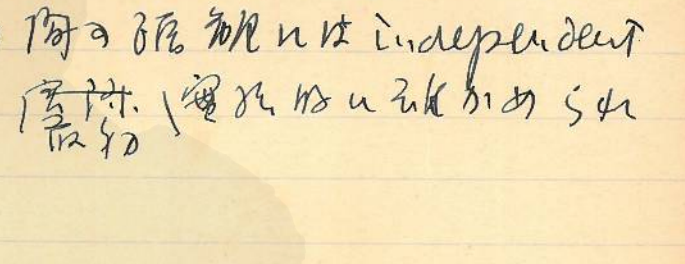
$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{J} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この抵抗は電極の大きさのみdependし、その配置にはindependentである。

(が同じ高さにあるとする事) horizontal plane

この両者の中心を通る任意のplaneを考えるとこの上では外側から考えてplaneも電気的なfieldのComp.は存在しない。この電位は水平に流れている。



従って二の平面がinsulatorとのboundary surfaceであって上のsolutionはそのまま、後の上半分はinsulator、下半分がconductorでelectrolyteであってもsolutionはそのまま、後つる。

但しこの場合には電極の(下の)半球面から電流が流れるから

$$J = 2\pi a \varphi_1 = -2\pi b \varphi_2$$

となり

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{J} = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

となる。

なお電位差を流れる電流が地球の中を通って元へ帰る場合、その抵抗はstationの間の電位差はindependentであるということになる。これは実験的にも確かめられた事である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Chapter V. Stationary Electromagnetic Field

1945 8月

六月十六日

§4. Magnetic Field due to Steady Current

これおいてsteady currentのあるときの electric fieldはcurrentのdistributionにだけよりLaplaceのequationの通常のboundary conditionを満足するsolutionをだすような関数nであるが；

この場合はel. fieldのcurrentのdistributionがわかっている場合のmagnetic fieldをだすことである．

currentのときのmagnetic fieldをHとすれば

$$H = -\operatorname{grad}\varphi$$

を満足するpotential φ からderiveされる．

そして intensity of magnetisation を M とすると

$$\varphi(r) = \iiint M(r') \operatorname{grad}' \frac{1}{|r-r'|}\, dv'$$

であらわされる．

この与えられたmediumのmagnetisationのつくるfield

を H_m とすると，

$$H_m = -\operatorname{grad}\varphi.$$

この場合currentのないところで，

$$\operatorname{curl} H = \frac{4\pi i}{c} \neq 0$$

であるが，potentialを与えるとuniquelyにきまってくる，

そこで $H_c = H - H_m$

なるvectorを考えると

$$\operatorname{div} H_c = \operatorname{div} H + \Delta\varphi$$

しかるに ~~$\varphi(r)$~~ $\varphi(r) = \iint M(r') \frac{1}{|r-r'|}\, df'$

$$- \iiint \operatorname{div} M(r') \frac{dv'}{|r-r'|}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

て、この medium の magn. pole の − div M の density で
distribute し、boundary では M(r') の surface density
で distribute している potential を作らすに従って全
medium の内部では、

$$\Delta\varphi(r) = 4\pi \operatorname{div} M$$

$$\therefore \operatorname{div} H_c = \operatorname{div}(H + 4\pi M) = \operatorname{div} B = 0$$

ここで H_c は vector の source も sink もない。
ここで

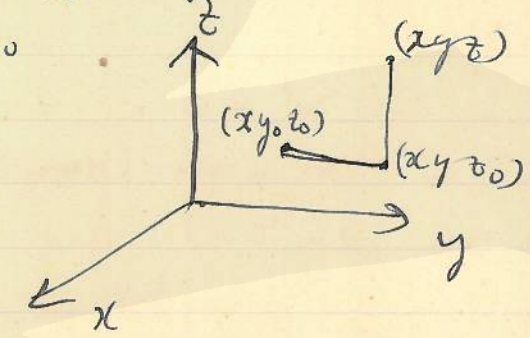
$$\operatorname{curl} A = H_c$$

を満たす様な vector A が次々と求まる。
即ち、

$$A_x = \int_{z_0}^{z} H_y(xyz)\,dz - \int_{y_0}^{y} H_z(xyz_0)\,dy$$

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} H_x(xyz)\,dz$$

$$A_z = 0$$



これより、

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial H_x(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial H_y(xyz)}{\partial y}\right)dz$$

$$+ H_z(xyz_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial H_z(xyz)}{\partial z}\,dz + H_z(xyz_0)$$

$$= H_z(xyz)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = H_y(xyz)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = H_x(xyz)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

又かはもの で 次の ~~div A~~

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

を満足するものが 必ず存在する.

∵ $\operatorname{curl} \mathbf{A} = \mathbf{H}_c$ を満すものの一つを $\mathbf{A}_1$ とすると.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 &= \rho_1 \quad \text{とすると,} \\ \operatorname{curl} \mathbf{A}' &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{A}' &= -\rho_1 \end{aligned}\right\}$$

を満足する 3 vector が 必ず存在する.

その一つを $\mathbf{A}_2$ とすると

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

は 明らかに 条件 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ が 成立する.

かゝる 条件を 満足する $\mathbf{A}$ を $\mathbf{H}_c$ の vector potential と称する.

そこで, $\mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi$

なる 形を 用いる. これを

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{I}}{c}$$

に 入れると

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{I}}{c}$$

しかるに $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$

div ∴ $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}$.

この vector equation の comp. は

$$\Delta A_x = -\frac{4\pi I_x}{c}$$

etc

で, 共に Poisson の equation である.

これらの solution は 既に 知られて いるから その は

$$A_x = \frac{1}{c} \iiint \frac{I_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad \text{etc}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次は、
以上、discontinuous な surface が存在する場合の
定式が出来たわけだが、Surface current は一般に
0 では、ないわけだ…。
そこで

$$H_c = -\frac{1}{c}\iiint \frac{[(r-r'),\ \mathrm{II}(r')]}{(r-r')^3}\,dv'$$

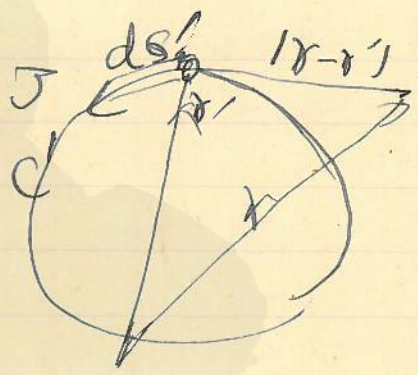
$$= \frac{1}{c}\iiint [\mathrm{II}(r'),\ \underset{\text{grad}'}{\nabla'}]\frac{1}{|r-r'|}\,dv'$$

$$= -\frac{1}{c}\iiint [\mathrm{II}(r'),\ \underset{\text{grad}}{\nabla}]\frac{1}{|r-r'|}\,dv'$$

これ II は current distribution によってきまる magnetic field H_c をあらわす式である。
ある current が図の wire に沿って流れる一つの closed circuit をつくる場合は wire に垂直な面を
考えれば、mag. field の式の中に於いて $r-r'$ は const
と考えてよさそうだ。

すなわち、

$$\mathrm{II}(r')\,dv'$$
$$= I(r')\,df'\,ds'$$
$$\iint I(r)\,df' = J,$$
$$H_c = -\frac{J}{c}\int_{C'} \frac{[r-r',\ ds']}{|r-r'|^3}$$



これ 第一章で述べた Biot-Savart の法則に他なら
ない。" 面の場合には

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$-\frac{J}{c}\Omega$

この potential の特徴は one valued であって，C
C は circuit を一周すると $\frac{4\pi J}{c}$ と
なる．



これは moment の $\frac{J}{c}$ の uniform な
magnetic double layer のつくる field
に等しい．この closed circuit C' を
つらぬく J の current のつくる magnetic field はこの C
を boundary とする surface 上の $\frac{J}{c}$ の moment の
mag. double layer のつくる mag. field に等しい．」

これの証明は 容易．

$$H_c = -\frac{J}{c}\int_{C'} \frac{[r-r', ds']}{|r-r'|^3}$$

$$= \frac{J}{c}\int_{C'} [ds'; \mathrm{grad}'] \frac{1}{|r-r'|}$$

を書きかえれば 良い．

即ち
$$H_{cx} = \frac{J}{c}\int_{C'} \left(dy'\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|r-r'|} - dz'\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|r-r'|}\right)$$

$$= \frac{J}{c}\int_{C'} K_x\, ds'$$

但し，
$$K = \left(0, \frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|r-r'|}, -\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|r-r'|}\right)$$

$$\therefore (\mathrm{curl}' K)_x = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\frac{1}{|r-r'|}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$(\quad)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|r-r'|}, \qquad (\quad)_z = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|r-r'|}$$

しかも wire 外の点では $|r-r'| \neq 0$.

$$\therefore \Delta \frac{1}{|r-r'|} = 0$$

$$\mathrm{curl}' K = \left(\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|r-r'|}, \cdots, \cdots\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}\right\}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mathrm{grad}\frac{1}{|r-r'|}\right\}$$

$$\therefore H_{cx} = \frac{I}{C}\iint_S \mathrm{curl}' K \, df'$$

$$= -\frac{I}{C}\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S'} \mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}\cdot df'$$

$$H_c = -\mathrm{grad}\iint_{S'}\frac{I}{C}\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}\, df'$$

$\therefore H_c$ は

$$\varphi_c = \iint_{S'}\frac{I}{C}\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}\, df'$$



~~この H_c は~~ この potential から derive される φ. この S' を surface とし $\frac{I}{C}$ を uniform density の magnetic doublet が distribute している field の potential とする

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(勾配 $-\Omega = \iint_{S'} \mathrm{grad}' \frac{1}{|r-r'|} df'$ 第2項は 4πに等しい)

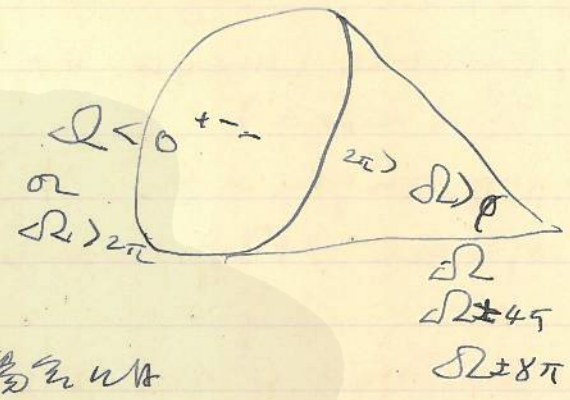
~~第2項は 4πに等しい~~

以上の理論は

空気 又は、non-magnetic medium 及び rigid magnet よりなる系の一般の場合に対する関係である。

mag field と云う may が変化する場合には

問題はまだ研究されてゐない。(かゝる場合には磁化が時間の function であるに違ひない)。



Example (1)

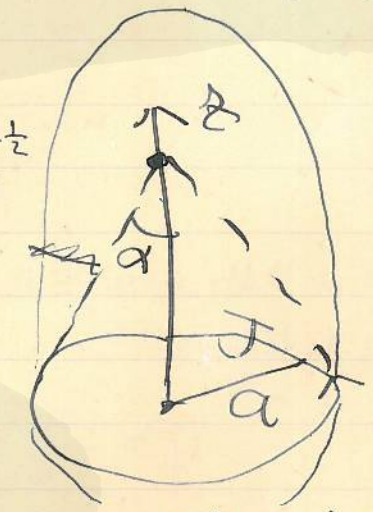
I の電流が半径 a の circle を流れる場合の mag. field を求める。

この circle の axis 上の任意点の potential は symmetry により、原点を origin とし、平面とのなす角を α とし、z-axis にとると、(z, 0, 0) なる点の potential は

$$\varphi = -\frac{I}{c}\Omega = -\frac{I}{c}2\pi(1-\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad \text{or} \quad -\frac{I}{c}2\pi(1+\cos\alpha)$$

$$\frac{z}{|z|}\cdot\left\{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$



or $-\frac{I}{c}2\pi(1+\cos\alpha)$.

$$= \frac{2\pi I}{c}\left(\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{2\pi I}{c}\left(\pm 1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^3 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} + \cdots\right) \quad \text{for } |z|<a$$

$$= \frac{2\pi I}{c}\begin{cases} 0 & \text{or } -2 \\ 2 & \text{or } 0 \end{cases} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2 \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n} + \cdots \quad \text{for } |z|>a$$

($z>a$ ↑, $z<-a$ ↓)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$z=+a$ $\quad 0$ or $-\frac{4\pi J}{c}$

$z=-a$ $\quad \frac{4\pi J}{c}$ or 0

(double layer は 外部 = 低く，内は 外部 に 高くという 場合 を 考える)

球面の中心を origin とし，半径を a の sphere とみなす

この sphere の外部で continuous で

$$\Delta\varphi = 0$$

を満足する 外部 φ が存在する

($-\mathrm{grad}\,\varphi = H_c \qquad \mathrm{div}\, H_c = 0$)

axis のまわりに symm. であるから polar coord. (r,θ,ϕ) を使うと． φ は r,θ のみの 函数で，まとめて

$$\varphi = \sum_{n=0} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

の形に expand しうる．

特に $\theta=0$ では $r=z$ $(z<a)$ で，上の expansion の 右辺 - 項のみを，しかも $P_n(1)=1$ から 取り，

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

$$= \frac{2\pi J}{c}\left\{\pm 1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

この 2 つの 式 が 等しいから 係数 が 等しくおかれねばならぬ．

従って

$$\varphi = \frac{2\pi J}{c}\left\{\pm 1 - \left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \cdots\right.$$

$$\left. + (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta) + \cdots\right\}$$

中心 の 近く では $r \ll a$ で

$$\varphi \simeq \frac{2\pi J}{c}\left\{\pm 1 - \frac{r}{a}\cos\theta\right\} = \frac{2\pi J}{c}\left\{1 - \frac{z}{a}\right\}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この magnetic field は中心附近は uniform で $\frac{2\pi J}{ac}$

である。

一般の solenoid では断面を小さい sole noid の一つ一つの circle と考へ、その circle の contribution を sum up すればよい。

(ii) 次に両方共無限に straight wire を J なる current が流れる場合で、field はその軸を

と考へられる。(おもその方向は J, r に垂直である

かつ J の正の方向に右ねじを

circle をつくる

$$\int H ds = \int \mathrm{curl} H \, df$$

$$= \frac{4\pi J}{c}$$

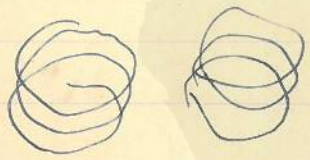
が curvilinear integral をつくる

$$2\pi r \cdot H = \frac{4\pi J}{c}$$

$$H = \frac{2J}{cr}.$$



即ち field の大きさは wire からの距離に逆比例して減少する ※



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\mathrm{div}\, B = 0$
$\mathrm{curl}\, H = \frac{4\pi}{c} I.$

Continued

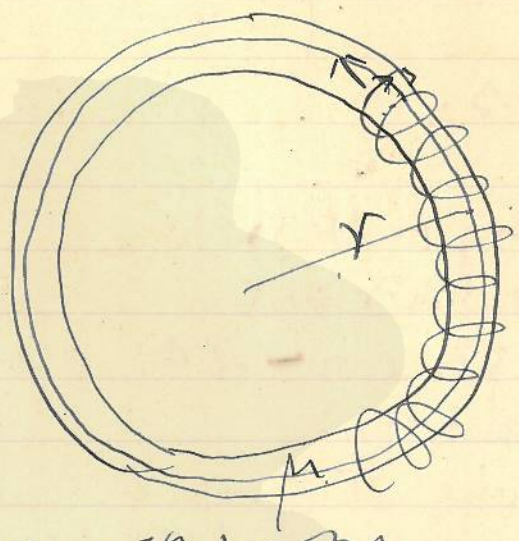
§5. ~~Magnetic fields in~~
これまでの様な current によって定まる magnetic field H_c は medium の性質に indep. であった．しかし実際の field はこの様な magnetisation による H_m だけ余分にこれに又 field の強さによってきまる．即ち実際には field は又 magnetisation を変化し，従って result. magnetic field は色々な medium の性質に depend するということになる．

今 homog. isotropic medium で
$B = \mu H$　　μ: const
なる場合を考えると，先
$\mathrm{div}\, B = \mu\, \mathrm{div}\, H = 0$
である．medium 中で B と H は
~~grad φ~~ $\mathrm{curl}\, A = B = H$
なる vector potential A をおくことが出来る．この時
$\mathrm{div}\, A = 0$
なるようにとると，
$$\Delta A = -\frac{4\pi I}{c}$$
となる．
この式の solution は容易に得られる．
∴ medium が homogeneous 且 isotropic なら $B = \mu H$．
なる関係は容易に得られる．
この様な rigid magnet があれば，それによる場が，
これに相当する．

しかし実際の様々な様子の medium が，如何なる様に
しかし実際の様々な medium は
~~…色々な様子の permeability $\mu_1, \mu_2, \cdots$ と t. current~~

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に場合には同じ結果になる。
最も簡単な場合として
permeability μ の
物質の circular ring
をつくったとする。
そのまわりに N turns の
wire が巻かれてあり
I なる電流が流れる
とする。N が充分大
きければ magnetic field
はほぼ uniform で、次は ring を設けてある。
~~wire の~~ 内部 中の medium がどのようになるかを
mag. field の line of force を描いて一周して



$$2\pi r H_{内} = \frac{4\pi N I}{c}$$

$$H = \frac{4\pi N I}{c\,2\pi r}$$

ring の l: ring の長さ,

物質が ring の内部を満たすときには $l \simeq 2\pi r$

$n = \frac{N}{l}$: unit length についての巻数 とおいて,

$$H = \frac{4\pi}{c} n I$$

∴ 外の field は 0
とする. (wire の外部のどの閉じた path についても $\int H ds = 0$.)
そこで中へ ~~medium~~ 物質を入れると, 内の field はその大
のまま, 即ち この場合には 内の solution がそのまま
あてはまる。それは 異なる medium の boundary では
H の tangential component は continuous であるから
である. この場合には magnetic induction の normal
component は

$$B = \mu \frac{4\pi}{c} n I$$

となり, 内部で discontinuous

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

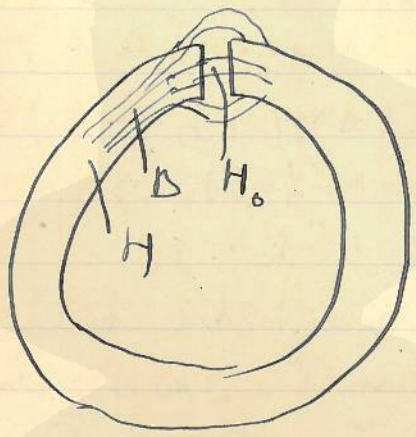
magnetic field の場合の electromotive force について考えよう。B を magnetic current と考えると、

$$\frac{l}{\mu}+d$$

が抵抗に相当する。

$$H_0 = B = \frac{\frac{4\pi NJ}{c}}{\frac{l}{\mu}+d}$$

μ が非常に大きいから H_0 は d に逆比例する。



ring の形で、
周囲に沿うように
lines of force の一部は
外側へ漏れる。
(Streuung)
Streuung を neglect すると
magnetostatics の時の
ように

$$\int H ds = \frac{4\pi NJ}{c}$$

$$H_0 = B = \mu H$$

$$\int \frac{B}{\mu} ds + \int H_0 ds = H_0\left(\frac{l}{\mu}+d\right) = \frac{4\pi NJ}{c}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(続きより始)

Strewing がおおと H₀ は之より小さくなる.
一般には同法の之れは coil とまいてある. Strewing
による loss は更に大きい.

今 solenoid の中の磁場を考えるに double layer のおきかえられる, uniformly magnetise された substance と考えると, その field H' は両端面の surface に $\frac{4\pi J_n}{c}$ なる, 断面が surface charge のようなものとして与えられるべく, その field は丁度 cylinder を tangential とおくと外側とおし, 又 magnet mag. ind は

$$B = H' + \frac{4\pi J_n}{c}$$

~~又之をこれにあてはめると~~ 今から全体の coil の solenoid の中の field がそうであるかということと, ある点を中心とする double layer, (これを相当する coil の一部分) をつけたとしても. その点にある unit mag. charge を引くわけだんだからそれは, ~~これは~~ 結局 $H = B$ なるわけである.

~~$\frac{4\pi J_n}{c}$~~

即ち solenoid がえらく長ければ, その中の mg. field は

$$H \simeq \frac{4\pi J_n}{c}$$

である.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

* (前回) に上 conductor の ~~linear dimension~~ cross section の dimension に比して充分小さい時の field をみるのであるが、その逆に小さい時の field をみるには vector potential に関する Poisson の equation を解かねばならない。上述 a の wire と circular cylinder とみなし、その axis の方向を z-direction とすると、vector potential としては $A_x = A_y = 0$ で $A_z = A$ は axis からの距離 r のみの function となっていること... 又すると、Poisson の eq. は

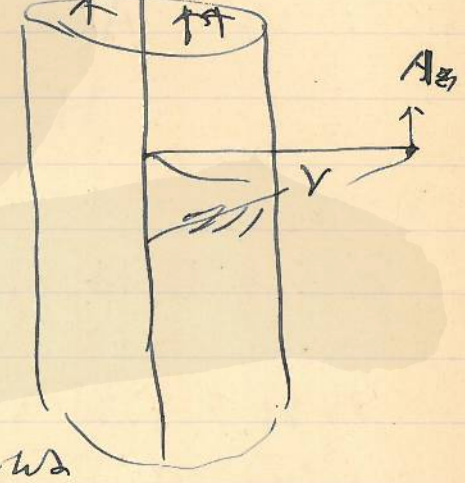
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = \frac{d^2A_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_z}{dr} = -\frac{4\pi}{c}j_z I \quad \text{or} \quad 0 \qquad \text{for } r \lessgtr a$$

となる。 ($\mathrm{div}\,A = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$ は満足されている)

$r > a$ の場合の solution は

$$A = C \log r \qquad r > a$$

(additive const. は落とす)



次の場合 current density I は const. として、

$$A = -\frac{\pi I^2 r^2}{c} + C' \log r$$

(additive const. は落とす)

これが $r = 0$ で finite であるためには $C' = 0$

total current を J とすれば $J = \pi a^2 I$ であるから

$$A = -\frac{J r^2}{c a^2} \qquad r < a$$

この magnetic field は

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{2Jy}{c a^2} = -\frac{2Jr\sin\varphi}{ca^2}$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{2Jx}{c a^2} = \frac{2Jr\cos\varphi}{ca^2} \qquad \text{for } r < a$$

$$H_z = 0$$

or $H_r = H_x\cos\varphi + H_y\sin\varphi = 0$

$H_\varphi = -H_x\sin\varphi + H_y\cos\varphi = \frac{2Jr}{ca^2}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

スカラーポテンシャル.

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{Cy}{r^2} \\ H_y &= \frac{-\partial A_z}{\partial x} = -\frac{Cx}{r^2} \end{aligned}\right\} \qquad r > a$$

$$H_z = 0$$

or $\quad H_r = 0 \qquad H_\varphi = -\frac{C}{r}$.

cylinderの surface での boundary condition より.

$$H_\varphi(a) = \frac{2J a}{Ca^2} = \frac{-C}{a}$$

$$C = -\frac{2J}{c}$$

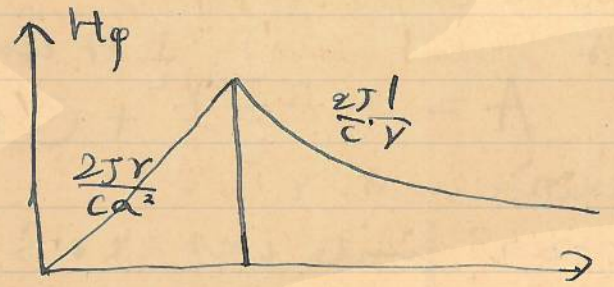
$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} A &= -\frac{2J}{c}\log r \\ H_r &= 0 \quad H_\varphi = \frac{2J}{c}\frac{1}{r} \end{aligned}\right\} \text{ for } r > a.$$

とる.

fieldの様子は図のようである.

外部の fieldとなる

example (1.1) ~~これの~~ のかわりに 出発点のようである.



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第二分冊
(十二分冊)

Chapter VI. Dynamics and Thermodynamics of Energy and Mechanical Force in Stationary Fields

Thermodynamics of the Electromagnetic Fields

§1. ~~Generation of Heat in Stationary Field~~

静電場において定常電流が流れる一般的な場合. 例えば電場と電流. 電流と磁場の関係について述べた. 次に定常電流が流れる場合の熱的な現象すなわち熱力学的な現象について考察する.

先ず熱的現象から考える. 単位時間に発生する Joule Heat は dv なる volume 要素で. dt 時間について

$$\mathrm{I}\,\mathrm{E}\,dv\,dt = \sigma\,\mathrm{E}^2\,dv\,dt = \frac{\mathrm{I}^2}{\sigma}\,dv\,dt$$

なる関係: wire C を J なる電流が流れるとき. 電流密度と一様とすると

$$J = \iint_S I\,df = I\,S$$

$$\iint_S I^2\,df = \frac{I^2}{S}$$

$$\iiint \frac{I^2}{\sigma}\,dv = \int_C \frac{ds}{\sigma} \iint I^2\,df = J^2 \int_C \frac{ds}{\sigma\cdot S} = J^2 R$$

R：打全の抵抗.



斯て電磁場の勢力は dv なる体積について

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H})\,dv$$

で与えられる. 之は time と共に無化しない. 即ち Joules heat は電磁場以外の他の種類の energy から変ったものに相違ない. 勿論それが一般電磁的な energy となり, しかも熱となるのであるが. 通常の電磁の場合には電荷密度の如き元来化学的な勢力の一部が無化したものである.

この為に通常は熱が発生し. 之が無化の場合には energy の他の形は mechanical な形をとり得るのである.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

先 homogeneous isotropic medium を考えると.

$$\varepsilon \mathbb{E} = \mathbb{D} \quad , \quad \mu \mathbb{H} = \mathbb{B}$$

の関係が満たされる場合には electromagnetic field の energy density は一般に

$$\frac{1}{8\pi}\{\varepsilon \mathbb{E}^2 + \mu \mathbb{H}^2\}$$

で表わされることを述べた. 今この場合 medium の state の変化は全く各外部して居たのである.

Ohm's conduction current が流れる場合には $\mathbb{E}\mathbb{I} = \sigma \mathbb{E}^2$ の density の Joule's Heat が発生し. 従って medium の state の変化があらう.

non-conductor の場合でも electric displacement, magnetic induction の変化は, 一般に state の変化を伴ふ.

Ohm's law が変化すると dielectric constant, permeability specific conductivity が夫々変化する.

かゝる場合は dt と云ふ短かい時間の state 変化の electric displacement 及び magnetic induction の変化は

$$d\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} dt = (c \operatorname{curl} \mathbb{H} - 4\pi \mathbb{I})\, dt$$

及び

$$d\mathbb{B} = -c \operatorname{curl} \mathbb{E}\, dt$$

で表わされる.

$$\frac{1}{4\pi}(\mathbb{E}\, d\mathbb{D} + \mathbb{H}\, d\mathbb{B}) = \frac{c}{4\pi}(\mathbb{E} \operatorname{curl} \mathbb{H} - \mathbb{H} \operatorname{curl} \mathbb{E})\, dt - \mathbb{E}\mathbb{I}\, dt$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbb{E}\mathbb{H}]\, dt - \mathbb{E}\mathbb{I}\, dt$$

之を V なる volume について積分すると.

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V (\mathbb{E}\, d\mathbb{D} + \mathbb{H}\, d\mathbb{B})\, dv = -\frac{c}{4\pi}\iint_S [\mathbb{E}\mathbb{H}]\, df\, dt - \iiint_V \mathbb{E}\mathbb{I}\, dv\, dt$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

となる。

この関係は medium の性質に全関係なく成立つ、最も一般な場合にも成立する。

今 dt 時間に dt 時間内に boundary S を通って流入する energy から、Joule's heat として失われる energy を引いたものが dt 時間の間に V なる volume 中の field energy の変化をあらわすと考えられる。

いいかえれば、dt 時間内の energy density の変化は

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

であらわされる。

今 $t=0$ において field は 0, t 時間の間に $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ なる field が生ずるとすれば、その間に一定な関係が保たれているとすると、homogeneous isotropic で

$$\varepsilon \mathbf{E}=\mathbf{D} \qquad \mu \mathbf{H}=\mathbf{B},$$

の関係が成立する場合には、t なる時刻の field energy の density は

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \mathbf{E}^2+\mu \mathbf{H}^2\right)dt=\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon \mathbf{E}^2+\mu \mathbf{H}^2\right)$$

となる。今がもし 2 次元の場合であるならば ε, μ は途中 constant でない限り、最後の energy の density は上式とは異なる筈。

一般の medium の unit volume の energy の dt 時間内の変化は

$$dU=d'Q+d'A$$

であらわされる。但し $d'Q$ は dt 時間内に供給された熱量

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

E, H, T, (…) medium の状態を characterize
する変数とし U はそれらの函数となる.

d'A は外から与えられた work とする.
electric displacement, magnetic induction の変化によって
medium 一般のくる work が与えられ それによって

$$d'A = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

と energy が増加したと考えてよい, 又熱力学の第二法則
より reversible process については

$$d'Q = T\,dS$$

なる関係がある.

$$\therefore\quad dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

そこで, free energy $F = U - TS$ を introduce すると

$$dF = -S\,dT + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

又 isothermal な field をえらんで行くと, 一般に
$dT = 0$ ~~$\mathbf{E} = \mathbf{D}$~~ μ: const.

$$\therefore\quad \bar{F} = \frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)$$

又, 前節の energy density の expression は正確には
free energy の density を与えるものであろう.
一般に temperature が与えられた時には どうなるか: 簡単な場合
について考えてみる. 又 volume の変化は考えないとし,
(上記の条件を仮定した) $\mathbf{H} = 0$ $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ とは同じ方向
である. すなわち

$$D = D(E, T)$$

$$dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi}E\,dD$$

$U = U(E, T)$ と考えると,

$$dS = \frac{dU}{dT} - \frac{E\,dD}{4\pi T}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\doteqdot \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{E}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial T}\right)dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial E} - \frac{E}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial E}\right)dE$$

而して $\quad \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)$

なる integrability の條件は

$$\frac{\partial U}{\partial E} - \frac{E}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial E} = \frac{T}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial T}.$$

● isothermal の場合は U は E, T の function として与えられ

$$U = \int E \frac{\partial D}{\partial E} dE$$

一般の場合.

$$D(E,T) = \varepsilon(T)\cdot E$$

なる linear な関係があるとすると.

$$\frac{1}{E}\frac{\partial U}{\partial E} = \frac{\varepsilon}{4\pi} + \frac{T}{4\pi}\frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{1}{4\pi}\frac{d(\varepsilon T)}{dT}$$

$$U = f(T) + \frac{1}{8\pi}E^2(\varepsilon + T\frac{d\varepsilon}{dT})$$

$$= f(T) + \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dT}\right)$$

$f(T)$ は T の unknown function で, ある substance の specific heat に関係する. isothermal の時には これは constant. で 関係にならぬ.

この式において ε が temp. に independent である時に限って, $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ は field energy の density となる.

多くの場合において el. suscept. $\chi = \frac{C}{T}$ なる関係がある

$\therefore \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi C}{T}$

$$\therefore U = f(T) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon + T\left(-\frac{4\pi C}{T^2}\right)\right)$$

$$= f(T) + \frac{E^2}{8\pi}$$

$\Rightarrow$ field energy density は $\frac{E^2}{8\pi}$ に等しい.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ある temp T と const. にして field をゆっくりかける熱量
Q は

$$dQ' = T\,dS$$

$dT=0$. とすると

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial E} - \frac{E}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial E}\right) dE$$

$$= \frac{T}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial T}\,dE$$

$D=\varepsilon(T)E$ とすると

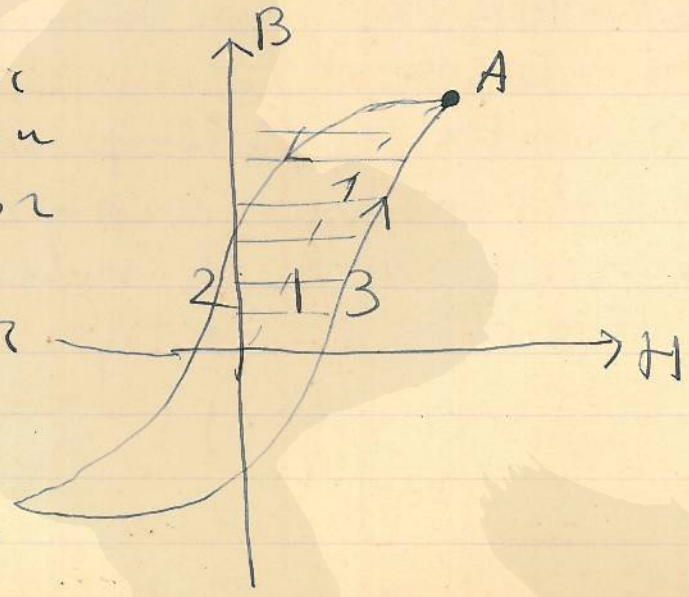
$$= \frac{T}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{dT}\,d(E^2)$$

$$\therefore\quad Q = \int dQ' = \frac{E^2}{8\pi} T \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{E^2}{2} T \frac{d\chi}{dT}$$

もし χ が T の下がると減するような場合（例えば $\chi = \frac{C}{T}$）
には 圧をかけて、(pp's D の P をかけて) Q は negative
外から熱をおいる。逆に adiabatic に圧をかけると temp
は上昇する。(圧をへらすと降下する)

もっと複雑な場合として 強磁性体の ~~hysteresis~~ hysteresis の
現象を考えてみる。

magnetic field を apply すると
magnetic induction は図のように
1, 2, 3 なる curve に従って
変化する。 例で A から
2, 3 の closed curve を通って
元へ戻ってくると熱が有
なうことが知られている。
これ断熱の変化から求めてみる。



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

I-4 の field の中で
磁界が H から $H+dH$ に変化する時に system に与えられた仕事は

$$\frac{1}{4\pi} H\,dB$$

であるから、従って

$$\oint dA' = \frac{1}{4\pi}\oint H\,dB$$

~~A~~ closed curve によって囲まれた面積を S とすると

$$\oint dA' = -\frac{S}{4\pi}$$

故に

$$dU = dA' + dQ'$$

$$\oint dU = 0$$

であるから、磁性体の熱量 Q は

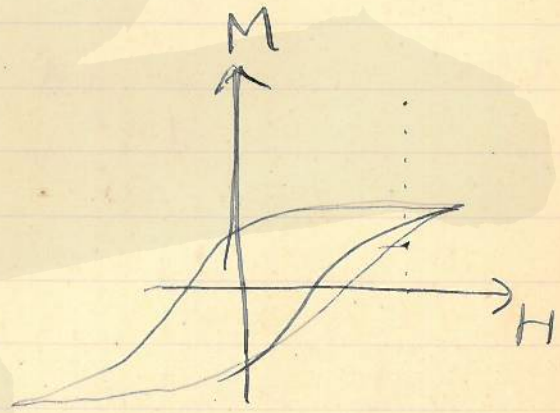
$$Q = \oint dQ' = -\oint dA' = \frac{S}{4\pi}$$

である。~~$W = \frac{S}{4\pi}$~~ (これは magnetic field の energy が全体積中に分布しているとしての話である)

(今 $dB = d(H) + 4\pi\,d(M)$ であるから

$$Q = -\oint H\,dM$$

thermodynamical
に上のようにして field energy と熱 energy の相関関係を論じるが、実際、steady current によって発生する熱、Joule's 熱の相当体は電磁場に分布している。



∵ Stationary field とすれば field energy の変化

~~$W = \iiint dv \int E\,dD + dW$~~ $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi}\iiint (H\frac{\partial B}{\partial t} + E\frac{\partial D}{\partial t})\,dv$

$= 0$

(即ち $W = \frac{1}{4\pi}\iiint (\int E\,dD + \int H\,dB)\,dv$

は time と共に変化しないからである。)

例えば 直流の電池に於て、電流を流す場合には、電磁場に蓄積された化学的な energy が熱になる。今これは一定

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

完全な不等号の時，定温熱源からの吸熱量が，
又等価の2つの流体が一方から他方へ熱を完全に移動する
時等 pro's Thermoelectric Phenomena 又は thermo-
junction' を使ってる energy の一分が熱になる，
それらは可逆

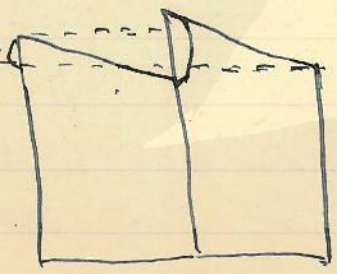
$dU + = dA' + dQ'$ 即 $U = A' + Q'$

reversible process の cycle：

$\frac{Q_1'}{T_1} = \frac{Q_2'}{T_2}$ Q_1'：吸熱 Q_2'：放熱

$A' = Q_1' - Q_2'$ $-A' = Q_1' - Q_2'$

$-\frac{A'}{Q_1'} = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$



$dT = T_1 - T_2$ $A' = dA'$ Q_1

$-\frac{dA'}{Q'} = \frac{dT}{T_1}$

$\therefore U - A' = T\frac{dA'}{dT}$.



1 gram 当量 とする。

Gibbs - Helmholtz の式，
ある可逆電池の electromotive force を V，これを dT
change or 加えたときの
$-$ 変化の

$A' = \varepsilon V$

$\therefore U - \varepsilon V = T\frac{\varepsilon dV}{dT}$

or $V = \frac{U}{\varepsilon} + T\frac{dV}{dT}$.

この式は熱 U と V の間の関係である。
electromotive force

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



~~之も~~
~~Gibbs-~~
~~Helmholtz 式と相似.~~
電池の起電力と化学反応の間には有名な Helmholtz の式が成立する. (或は Gibbs-Helmholtz 式とも言う.)
今電池を一つの thermodynamical system と考へ, これが T の温度にあって V の electromotive force をもつてゐると考へる.
その両極を結んで I の電流を t 時間丈流すと

$$C = It$$

なる電荷が陽極から陰極へ輸送されたことになる. (電池の内部では逆に陰極から陽極へ輸送されてゐる)
それによつてなされた仕事は

$$CV$$

である. (勿論之はまた Joule's Heat になつて了ふ.)
~~この際の陽極及び陰極における化学反応の熱~~ この際の化学反応の熱を Q とする. (Joule 熱は除く)
~~の関係~~ すると考へる system の internal energy は

$$\Delta U = -(Q + CV)$$

丈減少したことになる. (第一主張)
次に Temperature を T+dT にかへると, electromotive は V+dV に変化するであらう. そこで逆に可逆的な変化を行はすと internal energy は, 20℃の場合の熱を Q+dQ とすると

$$Q + dQ + C(V + dV)$$

丈増加するであらう. 最初に Temp T に於ける system はそへ与へる仕事, internal energy の変化は丈..

$$dQ = -CdV$$

である.
~~此の~~ この process が reversible な為には次の場合である.
dq'=dq で
~~丈~~ 丈の変化する熱を dq とする時それは小さい. negligible である
~~すなはち~~ 次の熱を dq' とすると dq'-dq は極めて小さくなる

©2022 YHAL, YITP Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(セミ) 46
84
125.

第二を現はして entropy の増がなく，従って

$$\frac{Q+dQ}{T+dT} = \frac{Q}{T}.$$

の元，即ち $dQ = \frac{Q}{T}dT$

即ち $dV = \frac{Q\,dT}{T}$.

ゆえ

$$U = C\left[V - T\frac{dV}{dT}\right]$$

となる．[ ] は T が決まれば，C から各電極に相当する物質がある多数（おおの数に比例する）（陽極と陰極の algebraic sum）

充電された Coulomb. 起電力を Volt であらわせば，仕事は Joule であらわされるから．

ある定まった物質（electrolyte）の原子量（または +ion と −ion）の原子量をそれぞれ n とおくと，1 mol のある物質を

$$C = n \times 96500 \text{ Coulomb}$$

だけ電気分解するに要する仕事 U_m cal とおくと，1 cal = 4.184 Joule

$$\frac{4.2 \times U_m}{n \times 96500} = E - T\frac{dE}{dT}$$

但し，右辺の E は volt であらわす．

即ち $\frac{U_m}{2.3 \times 10^4 \times n} = E - T\frac{dE}{dT}$.

$T\frac{dV}{dT}$ の項は，一定の latent heat の仕事であって，

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

充電 $Pb + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2H$
放電 $PbO_2 + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O + O$ ～そろえる

No. 6

$\frac{dV}{dt} > 0$ のときは，放電現象はみかけから熱を吸収する場合があり，$\frac{dT}{dt} < 0$ のときは光の逆である．

この関係を例へば 蓄電の設計色把にapplyすると，陰陽両極を一緒に考えれば

$$PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \rightleftarrows 2PbSO_4 + 2H_2O$$

なる反応が起つてゐるので，その反応熱は（溶解熱をも含んで．硫酸濃度 比重(比重) 1.15 より 1 mol の H_2SO_4 が 21 mol の H_2O に溶けてゐるとき） 1 mol につき

$U_n = 8.5 \sim 8.7 \times 10^4$ cal　　$n = 2$.

$T = 290°$ として，かゝる電池の

$$\frac{dE}{dT} = 4.1 \times 10^{-4} \text{ Volt/degree}$$

$$\therefore \quad E = \frac{8.5 \sim 8.7 \times 10^4}{2.3 \times 10^4 \times 2} + \frac{290 \times 4}{10^4}$$

$$= 1.96 \sim 2.01 \text{ volt}$$

実測は 1.99 ～ 2.01 volt で略ゞ相等しくよく一致する．

電池のみを場合には system は大体一様になつてゐるが，一般には各部の Gradient がある場合には，その為めに electromotive force を生ずる（Thermo element）Joule 熱以外の熱が発生する（Thomson Effect）ことがある．（Peltier Effect）また異なる電池の為めに接点の不均等を生ずる．（Peltier Effect）ことがある．

この二つの現象は互ひに関係があり，William Thomson (Kelvin) がその thermodynamical な取扱を発表した．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これらの場合にも Joule's Heat & Heat Conduction のために irreversible でなくなる。Joule 熱の方は電流を小さくすれば J^2 に比例して小さくなる。これを neglect してよい。(他の熱は J に比例) Heat Cond. の方は neglect できない。一般にこれに相当するものがある。

二種の金属の接点を通ずる電流のために Peltier 熱 Q_p 発生又は吸収する Peltier 熱は電流 J とその接点の物質で定まる量に比例する。即ち

$$Q_p = \Pi J t$$

熱を Joule, 電流を coulomb にとれば Π の次元は volt である。電流の方向を逆にすれば Q_p の符号が変るから Joule's Heat とは異なる。

(Thermoelement を作ればこの接点の一方を流れる電流と同方向に流れる時に熱が発生する) この時 Π は negative (positive) である)

次に等質な金属の gradient のある導体中を電流が流れるに $\frac{dT}{dx}$ に比例し, current J に比例する熱の発生又は吸収がある。(Thomson Effect)

dx の長さの間に発生する熱は

$$dQ_T = \sigma \cdot \frac{dT}{dx} J t \, dx$$

ただし σ は係数で Joule/Coulomb·degree = Volt/degree の dimension を持つ。

従って (x_1, x_2) の間に temp が (T_1, T_2) に変るとすると, 全熱量は

$$Q_T = J t \int_{x_1}^{x_2} \sigma \frac{dT}{dx} dx = J t \int_{T_1}^{T_2} \sigma \, dT$$

故に Q_T は両端の temp のみに depend し, 全体の temp の状態には関係しない。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(実際は negative)

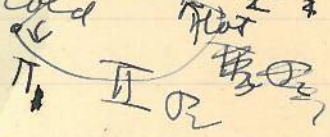
99
11-7

Thomson heat も電流の向きをかえると符号がかわるが, Joule 熱とまざっている. current が流れる時, 低温へ流れ込む熱の量を Q_T の様 positive にとる様に定めておく.
(ここで J は ~~ten~~ 密度のベクトルの positive. Q_T は吸収する熱を positive にとる)

次に 1 コの metal の junction の
Temp. difference が dT のときの thermoelectromotive force を dV
とおくと

$$e = \frac{dV}{dT}$$

は thermo-electromotive force per degree.
これは temp の function である.



I, II metal の cold junction で current が I → II へ流れるとする. I は II に対して Π_1 positive な thermoelectromotive force を持つとする事にする.

(Joule's heat を neglect するとして)

さて第一を考えると, 電荷に対して外から仕事されたもの, すなわち

∇J_t

は Peltier or Thomson Heat に変化する事である. 従って

$$\nabla \cdot J_t = \left(\Pi_1 - \Pi_2 + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_1 dT + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_2 dT\right) J_t$$

$\Pi_2 - \Pi_1 = d\Pi$
$T_2 - T_1 = dT$
$T_1 = T$, $\Pi_1 = \Pi$

or

$$e = \frac{d\Pi}{dT} + \sigma_2 - \sigma_1 \quad \text{Volt/degree}$$

~~を用いて表すと~~ 熱量保存を不可逆過程まで拡張するには, 外から仕事され, 温度が変化しないとしておくと考えよう. ~~Joule 熱を neglect しない時~~, この process

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\Pi}{T}\right) = \frac{1}{T}\frac{d\Pi}{dT} - \frac{\Pi}{T^2}$$

reversible であるから、 $\int \frac{dQ}{T} = 0$ なる。

$$\frac{\Pi_1}{T_1} - \frac{\Pi_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_1 dT}{T} - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_2 dT}{T} = 0$$

$T_1 = T$, $\Pi_1 = \Pi$

$T_2 - T_1 = dT$, $\Pi_2 - \Pi_1 = d\Pi$ とおくと、

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{\Pi}{T}\right)}{dT} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} = 0}$$

この式から $\sigma_2 - \sigma_1$ を消去すると

$$+ * e = \frac{\Pi}{T}.$$

又 Π を消去すると、

$$-\frac{de}{dT} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T}.$$

この関係から出て来る結論は、Thomson effect がない、すなわち、$e = \text{const.}$ の時 Thermo el. V が σ に関係なく $V = \varepsilon T$. ~~$e = c$: const~~ となり、しかも一般に V は一般の T の quadratic function であること、Thomson-effect を考慮せねばならぬことである。

さらに Thomson の coef. が σ 以外は T の関数として、e が T の ~~関数~~ 1次式 となり、V は T の quadratic function となり、linear function でなく、この点が重要である。

以上の理由で Heat Conduction の ~~in~~ reversible な過程から純粋な熱の伝導のみがおこり、これが irreversible である ことを証明した。これを考慮に入れ Boltzmann の原理を証明する 必要がある。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Thomsonの式と実験とは多くの場合よく一致するが、次のものでは異なる。(Müller-Pouillet, Bd. IV, Teil 4, S. 221)

	$e = \frac{dV}{dT}$ (microvolt/degree)	$\frac{\Pi}{T}$ (microvolt/degree)
Bi-Pb	−11,22	−17,51
Fe-Cu	20,00	19,97
Zn-Sn	2,56	2,65

$$e = \int_0^T \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{T} dT + \frac{de}{dT} e_0$$

(ここで Nernst の Heat Theorem (第三法則) から

$e_0 = \left(\frac{dV}{dT}\right)_{T=0} = 0$

$\therefore e = \int_0^T$

Ⅱとして銅(Cu)をとり 21°C において $\sigma_{II} = 1.2$ (microvolt/degree)

物質 I	Temp.(°C)	σ_I (microvolt/degree)	$\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{T} \times 10^9$ volt/degree	$\frac{de}{dT} \times 10^9$ volt/degree
Constantan	25	−25.6	−90,4	−89.8
Steel (Piano wire)	28	−7.7	−29.6	−26.5
Cd	27	9.1	26.3	25.6

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§2, Field Energy due to the current in linear Circuit.
電磁場の energy は媒質の場合を含めば：（静磁場は free energy）

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint (\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H})\,dv$$

となるが、之を変形すると、第一項の積分は static field の場合と全く同様にして

$$\overline{We} = \frac{1}{2}\iiint \varphi\rho\,dv$$

第二項は

$$\mathbf{B} = \mathrm{curl}\,\mathbf{A}$$

の vector potential を使えば、

$$\overline{Wm} = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{B}\mathbf{H}\,dv = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{curl}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}\,dv$$

$$= \frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{div}[\mathbf{A}\mathbf{H}]\,dv + \frac{1}{8\pi}\iiint \mathbf{A}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{H}\,dv \quad (*)$$

遠方では current はないとすると $\mathbf{A}$ は $\frac{1}{r}$、$\mathbf{H}$ は $\frac{1}{r^2}$ の order で 0 になるから、第一項の面積分は 0 になり、

$$\overline{W_m} = \frac{1}{2c}\iiint \mathbf{A}\mathbf{I}\,dv$$

となる。この field の magnetic energy は current density と vector potential の積を積分したものに比例する。之は We とよく似ている

この場合 discontinuity surface があれば (*) の体積の第一項は 0 にならない。例へば、電気容量と誘導が互いに平行のとき、この場合電流がなければ第二項の方が 0 はずである。

今 medium が homog. isotropic で permeability μ が constant の場合、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{I(x')\,dv'}{|x-x'|}$$

従って Energy は

$$W_m = \frac{\mu}{2c^2} \iint \frac{I(x)\,I(x')}{|x-x'|}\,dv\,dv'$$

勿論 (1) wire C を J が
流れる時 $\mu \iint \frac{I(x)\,I(x')}{|x-x'|}\,dv\,dv'$
積分は J² に比例する.



それで $= L J^2$ (wire)
とかくと. L を self induction
の coefficient と称する.
これを決めるには幾何学的な形状を関係して決まる μ に比例し, wire の
geometrical な形状によって決まる.
しかし, 一般には A は上の様な簡単な形にはならない.
が current density を決める時入ると field energy
は J² に比例するから, Wm は current J の二乗に比例する.
よって

$$L = \frac{2c^2 \cdot W_m}{J^2}$$

self induction の
これが一般的な定義となる.
(Ferromag. mag. sub の為 μ が field の強さに depend する時
には L は J に indep にはならない)
L は従って長さと同じ dimension をなし, 1 cm が
単位. 電磁単位系でも μ が入っているから, L も入っ
ている.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に二個の wire C_1, C_2 に J_1, J_2 の電流が流れる場合. 一方の電流例えば $J_2=0$ とおくと, field の magnetic energy は J_1^2 に比例する. この比例の常数は C_2 の様にまわりに関係がない. C_1 の coef. of self. induction を L_1 とおくと

$$\overline{W_m} = \frac{L_1 J_1^2}{2c^2}$$

同様に $J_1=0$ とおくと C_2 の coef. of self. ind. を L_2 とすると

$$\overline{W_m} = \frac{L_2 J_2^2}{2c^2},$$

次に J_1, J_2 が共に 0 でないとおくと, magnetic field magnetic induction は夫々 J_1 に比例および J_2 に比例する分の linear sum となるから, energy は

$$\overline{W_m} = \frac{L_{11}}{2c^2} J_1^2 + \frac{L_{12}}{c^2} J_1 J_2 + \frac{L_{22}}{2c^2} J_2^2$$

なる形となるであろう.

特に二つの J_2 と $J_1=0$ のとき

$$L_{11} = L_1, \quad L_{22} = L_2$$

として L_{12}: mutual induction coeff.

L_{12} も又 medium の permeability に比例し, wire の形および mutual の geomet. config. に depend する. 今 μ = const の場合を考えると, 二つの circuit C_1, C_2 を流れる current が

$$\overline{W_m} = \frac{\mu}{2c^2} \int\int \frac{\Pi(x)\Pi(x')}{|x-x'|} dv\, dv'$$

なる形となる. C_1, C_2 に関する積分を

$$\overline{W_m} = \frac{\mu}{2c^2} \iiint_{C_1} dv \iiint_{C_2} dv' + \frac{\mu}{c^2} \iiint_{C_1} dv \iiint_{C_2} dv'$$

~~+ $\frac{\mu}{2c^2}$ $\iiint_{C_2}$ $\iiint_{C_2}$ ..~~

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これが、第一次及び第二次回路に

$$\frac{L_1}{2c^2}J_1^2 \quad , \quad \frac{L_2}{2c^2}J_2^2$$

に比例するのから、

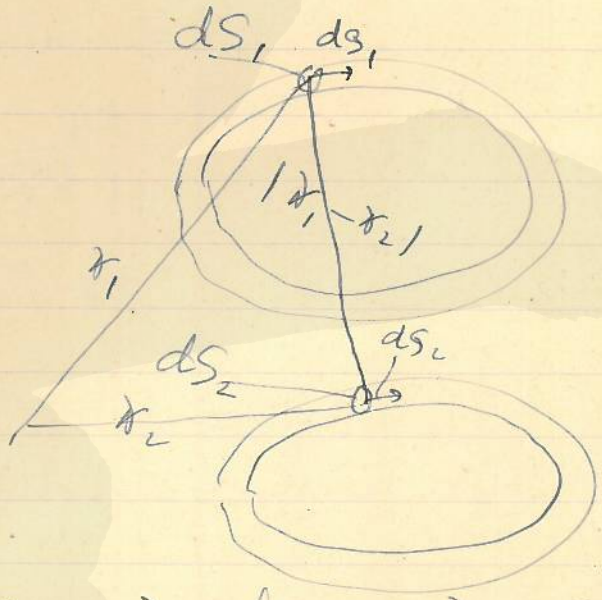
$$\frac{L_{12}}{c^2}J_1J_2 = \frac{\mu}{4\pi c^2}\iint_{C_1C_2} dvdv' \frac{I(r)I(r')}{|r-r'|}$$

ところで、二つのwireの間の電流の強さが1cmのdiameterにわたって大体均一だから、この積分にあたって、cross sectionについての積分は、$|r-r'|$ = const とみて行えるから、

$$\int_{C_2} dv' \int_{C_1} dv \frac{I(r)I(r')}{|r-r'|} = \iint_{C_1C_2} \frac{dS_1 \cdot dS_2}{|r_1-r_2|} \iiint_{S_1S_2} I(r_1)I(r_2)\, dS_1 dS_2$$

$$= J_1J_2 \iint_{C_1C_2} \frac{dS_1 dS_2}{|r_1-r_2|}$$

$$\therefore L_{12} = \mu \iint_{C_1C_2} \frac{dS_1 dS_2}{|r_1-r_2|}$$



である。

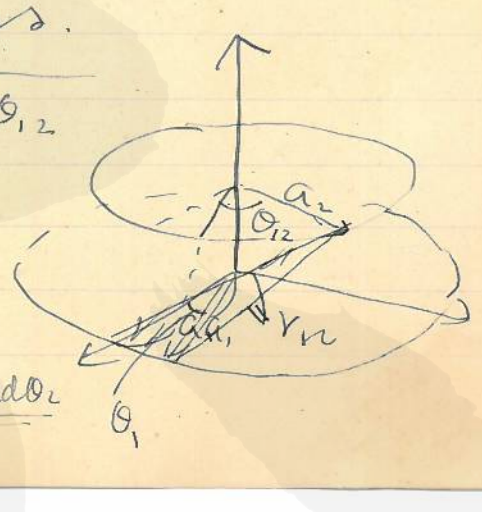
特別として、同じcoaxial でない circular wire の間の mutual induction の coefficient.

$$r_{12} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + z^2 - 2a_1a_2\cos\theta_{12}}$$

$$dS_1 dS_2 = ds_1 ds_2 \cos\theta_{12}$$

$$dS_2 = a_2 d\theta_{12}$$

$$L_{12} = \mu \iint \frac{dS_1 dS_2}{|r_1-r_2|} = \mu \int dS_1 a_1 d\theta_1 \times \int_0^{2\pi} \frac{a_2\cos\theta_{12} d\theta_2}{\sqrt{\quad}}$$



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$= 2\pi\mu a_1 a_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\theta}}$$

$$k^2 = \frac{4a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2 + z^2} \qquad \varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\cos\theta = -\cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi - 1,$$

$$r_{12} = \sqrt{\quad} = \sqrt{z^2 + a_1^2 + a_2^2 - 4a_1 a_2 \sin^2\varphi + 2a_1 a_2}$$

$$= \sqrt{z^2 + (a_1+a_2)^2}\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$$

$$L_{12} = 4\pi\mu k\sqrt{a_1 a_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$\frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{\quad}} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{2-k^2}{\sqrt{\quad}} - 2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right\}$$

$$L_{12} = 4\pi\mu\cdot\sqrt{a_1 a_2}\left\{\left(\frac{2}{k} - k\right)K - \frac{2E}{k}\right\}$$

従って、$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{\quad}.$$

これが第1種 kind の第2種 kind の elliptic integral であって table に出ている.

今 a_1, a_2 が殆んど shortest distance b の時には
$a_1 \sim a_2 \sim \frac{a_1+a_2}{2} = a$, $|a_1 - a_2| \ll a$, $z \ll a$,
すると、$k \cong 1$. $E \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 1$
K の方は $k=1$ で ∞ になる. 然も integrand が $\varphi = \frac{\pi}{2}$ の近くで大きくなる. $\frac{\pi}{2} - \varphi$ を variable にすると

$$K = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}} + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$k' = \sqrt{1-k^2}$

φ_0 として $k' \sqrt{1-k^2} \ll \varphi_0^2 \ll 1$ ということと、第一種楕円積分では近似的に $\cos^2\varphi \cong 1-\varphi^2$

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)}} \cong \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{k'^2+k^2\varphi^2}}$$

$$= \log \frac{\varphi_0 + \sqrt{k'^2+\varphi_0^2}}{k'} = \log \frac{2\varphi_0}{k'}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}} = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\log\left(\tan\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

$$= -\log \frac{\varphi_0}{2}$$

$$K = \log \frac{4}{k'} \cong \log \frac{8a}{b}$$

$$\left(\because k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\sqrt{(a_1-a_2)^2+z^2}}{\sqrt{(a_1+a_2)^2+z^2}} \cong \frac{b}{4a}\right)$$

$$\therefore L_{12} = 4\pi n a \left\{ \log \frac{8a}{b} - 2 \right\}$$

*

もう一般に $C_1, C_2 \cdots$ が wire で $J_1, J_2, \cdots$ が current が流れているときは、energy は

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,j} L_{ij} J_i J_j$$

となっている：ここで L_{ii}, L_{ij} はそれぞれ self induction, mutual induction の係数である。#

†

Self induction, mutual induction は次のようにして定義される：i uniform として、J_j が定常の C_j の wire を流れているときの magnetic field の vector potential を A_j とすると、

$$A_j(r) = \frac{\mu J_j}{c} \int_{C_j} \frac{d s_j}{|r - r_j|}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

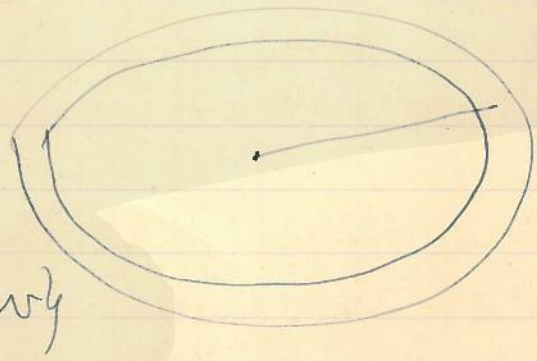
従って $c\int_{C_i} A_j(1)\,dS_i = T_j\,\mu \iint_{C_i C_j} \frac{dS_i\,dS_j'}{|r_i - r_j|}$

or $T_i L_{ij} = c\iint_{S_i} \mathrm{curl}\, A_j\, df$

$= c\iint_{S_i} B_j\, df$

従って、S_i は C_i を boundary とする任意の surface. 従って
L_{ij} は C_j を unit current が流れた時 C_i を boundary
とする任意の surface を通る magnetic induction の total
flux の c 倍で与えられる. この事を C_i or close して
場合に限る.

次に、勿論 $\mu = \mathrm{const}$ として、おのおの任意の場合の例として.
wire が
それの半径 r, ~~ring~~ の半径 R の
circular ring を取った場合
~~を考える~~. の self induction を考える.
この計算には field energy の計算が
~~も~~ 必要である.



$$W_m = \frac{1}{8\pi}\left\{\iiint_{\text{外界}} B\cdot H\,dv + \iiint_{\text{内界}} B\cdot H\,dv\right\}$$

この全エネルギーを wire の外界、内界に分ける.
すると、外界のポテンシャルは

$$-H = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

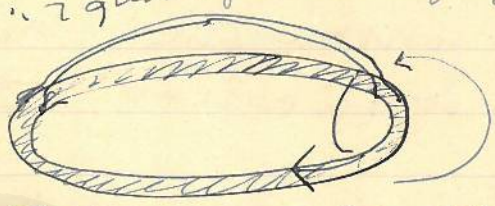
で与 potential の方を定く. その wire の表面を一周すると,
$\frac{4\pi}{c}I$ となる.
外界は $-\iiint B\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dv = -\iint B\,\varphi\,df + \iiint \varphi\,\mathrm{div}\,B\,dv$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(Bのうち tangential な成分 ∫∫B dS は coil の外では integral negligible)

$= \frac{4\pi J}{c} \iint B_t \, dS$ (wire surface について積分)

$\therefore \overline{W_m}(\text{外}) = \frac{J}{2c} \iint B_t \, dS$



次に、積分は半径 R-r の円内の空間について行えばよい。
これは半径 R の円形の wire と R-r の円形の wire の mutual induction coefficient の $\frac{J}{c}$ 倍に他ならぬ。

故に、$\iint B_t dS = \frac{J}{c} 4\pi\mu_0 R \left\{ \log \frac{8R}{r} - 2 \right\}$

$\therefore \frac{1}{8\pi} \iiint_{\text{外}} = \frac{J^2}{2c^2} 4\pi\mu_0 R \left\{ \log \frac{8R}{r} - 2 \right\}$

μ_0: 外の medium の permeability.

次に内側では $r \ll R$ であるから、各点の wire を current が流れているとみてよいから

$|H| = \frac{2J}{cr^2} x$ $\quad x$: axis から距離.

単位 length 当りの energy は、各点各点について

$\frac{\mu_i}{8\pi} \int_0^r |H|^2 2\pi x \, dx = \frac{J^2}{2} \frac{\mu_i}{2c^2}$

(r/2 / x)

μ_i: 内側の permeab.

各点は $2\pi R$ 倍.

$\frac{1}{8\pi} \iiint_{\text{内}} = \frac{J^2}{2c^2} \cdot \pi R \mu_i$

$\therefore \overline{W_m} = \frac{J^2}{2c^2} 4\pi R \left\{ \frac{\mu_i}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{8R}{r} - 2 \right) \right\}$

$\therefore$ Self induction の係数は

$L = 4\pi R \left\{ \frac{\mu_i}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{8R}{r} - 2 \right) \right\}$

$\mu_0 = \mu_i = 1$ の場合

$L = 4\pi R \left\{ \log \frac{8R}{r} - 1.75 \right\}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

wire が ferromagnetic で $\mu \gg 1$ のときは 内外の磁束 から来る
分の inductivity が 大きくなってきます.

後述のごとく. 高周波の電流のときは skin effect があって
current は表面の近く丈 flow する. この磁束 が小さく
なり. これに対して, 外からの磁束 は変らずに 内部 から来る
induction coeff. が減少する

3. 第二章

§3. Mechanical Force on the Current in the Magnetic Field

先ず任意の経路 Π におかれた電流 I に流れている場合について
その各部分に働く力を求める.

r 点のまわりの dv なる小磁石を $\mathbb{I}$ なる強さで電流
が流れてるとすると. それによって任意点 r' に

$$H(r') = -\frac{1}{c}\frac{[r'-r, \mathbb{I}]\,dv}{|r'-r|^3}$$



~~之が~~
~~r' 点 に おかれた unit magnetic pole に ~~働く力~~ ~~働く力~~ ~~おす~~ ~~おす~~ ~~おす

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$H(r) = \frac{r - r'}{|r - r'|^3}$$

単位

$$F(r) = -\frac{1}{c}[HII]dv = \frac{1}{c}[IIH]dv$$

Permeability が μ の場合は

$$H(r) = \frac{1}{\mu}\frac{r - r'}{|r - r'|^3} \qquad \mu H = B$$

$$\therefore F(r) = \frac{1}{c}[IB]dv.$$

この force は Maxwell の Stress から derive される。

即ち dv なる体積に働く力は

$$F_x dv = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right)dv$$

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2)$$

$$T_{yx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_y + \frac{\mu}{4\pi}H_x H_y$$

$$T_{zx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_z + \frac{\mu}{4\pi}H_x H_z$$

$$\therefore F_x dv = \frac{1}{4\pi}\left\{E_x \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E_x) - \varepsilon E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - \varepsilon E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}\right.$$

$$+ E_x \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E_y) + \varepsilon E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_x \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}$$

$$\left. + \varepsilon E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + \cdots\right.$$

$E_x div(\mu H) - [\mu H, curl H]_x$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{E_x div(\varepsilon E) - [\varepsilon E, curl E]_x + \cdots\right\} dv$$

$$= E_x \rho dv + \frac{1}{c}[IB]dv$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に r' の moment m の magnetic doublet が おかれたとすると，
その附近では

$\bar{H}(r') = (\boldsymbol{m}\,\mathrm{grad}')H(r')$ 又 $\bar{F}_x = m_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + m_y\frac{\partial H_y}{\partial y} + m_z\frac{\partial H_z}{\partial z}$

ならば

~~$\bar{H}$~~ $= \mathrm{curl}'H(r') = 0$.　　$(\because \mathrm{I}(r') = 0)$

∴ force は

$\bar{F}(r') = \mathrm{grad}'\{\boldsymbol{m}H(r')\}$　　$F_x = m_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + m_y\frac{\partial H_y}{\partial x} + m_z\frac{\partial H_z}{\partial x}$

この field が II dv の中に与えられた時の force

$= \frac{1}{c}\mathrm{grad}'\{\boldsymbol{m}[\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}, \mathrm{I}]\}dv$

従って，全体の力は

$\int dv = -\frac{1}{c}\mathrm{grad}'\{$　　dv

$= -\frac{1}{c}\mathrm{grad}'\{\mathrm{I}[\boldsymbol{m}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}]\}dv$

(r の中の r' に m の moment の magnet が存在する時の r における
field の vector potential は

$A(r) = [\boldsymbol{m}, \mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}]$

(∵ $\mathrm{curl}\,A(r) = (\boldsymbol{m}\,\mathrm{grad})\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|} + \boldsymbol{m}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}$

~~$-\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}$~~

$= -\mathrm{grad}(\boldsymbol{m}\,\mathrm{grad}')\frac{1}{|r-r'|}$

$\mathrm{div}\,A(r)$, ~~$= \mathrm{div}[\boldsymbol{m}, \mathrm{grad}'\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}]$~~

$= (\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|}, \mathrm{curl}\,\boldsymbol{m}) - \{\boldsymbol{m}\cdot(\mathrm{curl}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{|r-r'|})$

$(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(m_y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|r-r'|} - m_z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|r-r'|}) + \cdots)$

∴ $\bar{F}(r) = -\frac{1}{c}\mathrm{grad}'\{\mathrm{I}A(r)\}dv$

$dv = \frac{1}{c}\mathrm{grad}(\bar{\mathrm{I}}A(r))dv$

$= -\mathrm{grad}\,\square$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

くなし、　　$\cup \doteqdot -\frac{1}{c} \mathrm{I} A(x)\, dv$

この為に magnet のまわりに生ずる磁場のなかの $\mathrm{I}dv$ なる current の受ける force は $\cup$ の potential から derive される、これを electromagnetic potential と称する。

任意点 x に $\lambda \mathrm{I}(x)$ の density の current が continuous に distribute している時は

$$\lambda A(x) = \frac{\lambda}{c} \iiint \frac{\mathrm{I}(x')}{|x-x'|}\, dv'$$

なる x 点に此の current を $\delta\lambda \cdot \mathrm{I}\, dv$ として与える時は

$$-\frac{1}{c} \delta\lambda\, \mathrm{I}\, dv\, \lambda A(x)$$

$$= -\frac{1}{c} \lambda\delta\lambda \iiint \frac{\mathrm{I}(x')\, dv'}{|x-x'|} \mathrm{I}\, dv$$

なる仕事が必要。

故に、任意点の current density を $(\lambda + \delta\lambda)\mathrm{I}$ にするには、

$$-\frac{1}{c} \lambda\delta\lambda \iiint \frac{\mathrm{I}(x)\mathrm{I}(x')\, dv dv'}{|x-x'|}$$

の仕事が入用。

故に 最初から $\mathrm{I}(x)$ なる current distribution を造るには

$$V = -\frac{1}{c} \int_0^1 \lambda\delta\lambda \iint \frac{\mathrm{I}(x)\mathrm{I}(x')}{|x-x'|}\, dv dv'$$

$$= \frac{-1}{2c} \iint \frac{\mathrm{I}(x)\mathrm{I}(x')\, dv dv'}{|x-x'|}$$

なる仕事が要る。しかるに その時の field の potential は

$$A(x) = -\frac{1}{c} \iiint \frac{\mathrm{I}(x')}{|x-x'|}\, dv'$$

なるから、それは

$$V = -\frac{1}{2c} \iiint \mathrm{I}(x) A(x)\, dv.$$

となる、これが field の magnetic energy の符号を変えたものである。　$= -W_m$.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$V = -W_m$ の

~~之の~~ mechanical な系のときに potential energy に当つるものである。この V を electrodynamical potential という。

ある system の configuration で $-W_m = V$ が minimum になる様に、いつもなれば W_m が maximum になる様な状態をかかる。

この方向にて、系には一定の current を保く force は V なる potential から derive される様なものと考へる。

例へば、系にある C なる小さな circuit をつくる current が流れる時は、この C を boundary とする任意の surface S との moment

$$|M| = \frac{J}{c}$$

なる density (uniform) の double layer であることを知つた。その場合、H なる magnetic field のもとにおいてこの double layer を保く resultant force は

$$\frac{J}{c} \iint_S \text{~~grad H dS~~} \; (df\ \text{grad})\, H.$$

これは $$U = -\frac{J}{c} \iint_S H\, df$$

なる potential から derive される。

(即ち、C と dS と parallel な displace をおくと、それによつてなされる仕事は

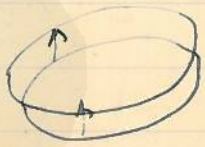
$$\frac{J}{c} \iint_S \text{~~(dS grad) H. df~~}\ (df\ \text{grad})(H\, dS)$$

$$(df_x \tfrac{\partial}{\partial x} + df_y \tfrac{\partial}{\partial y} + df_z \tfrac{\partial}{\partial z})(dx H_x + dy H_y + dz H_z)$$

$$= df_x \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} dx + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial t} dt\right) + \cdots$$

$$= (dS\ \text{grad})(H\, df) \quad \left(= \frac{J}{c} \iint_{(dS\ \text{grad})} (H\, df)\right)$$

= nor. potential の変分 $-dU$ に等しい。



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

空で permeability μ の medium 中 a m なる density の permanent magnetism の distribution があるとすると,

$$m = \frac{B - \mu H}{4\pi}$$

$$H = -\operatorname{grad}\varphi$$

故に,

$$\varphi = \frac{1}{\mu}\iiint m(r')\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|}\,dv'$$

従って空気の場合と同じ次の field をなすものは magnet の moment は空気の時の μ 倍で与えられるから,
此で空間における magnetic field は空気であっても, μ なる permeab. の medium であっても同じであるから, 小さな circuit を流れる I ess current と同じ magnetic field をなす double layer の moment は

$$|M| = \frac{\mu J}{c}$$

$$\therefore\ U = -\frac{J\mu}{c}\iint_S H\,d\sigma$$

current の circuit C を limit とする任意の曲面
magnet の distribution が S 上にある空気中にあるから,

$$B = \mu H \qquad \therefore\ U = -\frac{J}{c}\iint_S B\,d\sigma.$$

故に小さな circuit を limit とする force はその circuit を boundary とする任意の surface を通る induction の total flux を $-\frac{J}{c}$ をかけたものを potential としてもつてゐる.

この関係は field の原因が permanent magnet であっても, 又他の current ~~である~~ によるものであっても同じである.
∵ current の場合の potential は

$$V = -W_m = -\frac{\mu}{2c^2}\iint\frac{\Pi(r)\,\Pi(r')\,dv\,dv'}{|r-r'|}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$= -\frac{1}{2C}\sum_{i,j} J_i J_j L_{ij}'$$

where the circuit C_i close ならば,

$$J_j L_{ij} = C \iint_{S_i} B_j \, df$$

従って他の circuit or C_i の circuit 以外より force の potential は

$$V_i = -\frac{J_i}{C}\sum_j \iint_{S_i} B_j \, df = -\frac{J_i}{C}\iint_{S_i} B \, df$$

従って.

$$B = \sum_{j \neq i} B_j$$

は他の circuit による resultant magnetic induction である ことを.

これは magnetic field の原因が magnet である場合 とは異なる点.

いづれにしても circuit には potential V_i, U をつくる力. 又 C_i circuit の中を通る magnetic induction の flux を大きくしようとする力が働く.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§4. Units

系の取り方として、従来おかれた電流に働く力をすべて、
例えば、一点 O に unit pole (静磁学的) をおくと、それから ds なる距離の所に $m\,ds$ なる磁気量のかけらを考えるとき電流 i (静電気) が流れている時には、この間に働く force の大いさは $\frac{ds}{c}$ dyne である。但し、ds は OP に垂直とする。c は実験によると

$$c \fallingdotseq 3\times10^{10}$$

で、dimension は velocity であり、c は light velocity に等しい。

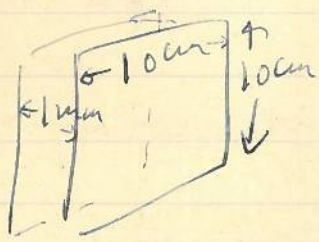
このかわりに、magnetic pole の unit としては之とは別に静磁気学的な unit の磁気量を流れる電流で unit の磁場 (それに垂直なもの) を length なる距離のものを 電場のまことにとると その大いさは静電気学的の c 倍になる。 それで電流が作りつゝ電場の単位は、静電気学的の場の単位の $\frac{1}{c}$ になる。電磁気学的な場合には、Maxwell の field equation にあらわれてみた $\frac{\partial H}{c}$ の c なる factor が消える。従つてこの場合及び電磁の諸式にあらわれてみた c なる factor は消えて 1 になつてゐる。
電磁気学的な単位の電流の $\frac{1}{10}$ を Ampère といふ。
電場の単位から遠い 1 cm 隔れた二点間に電場が単位電荷に垂直に流れたときの電気量として電荷その電磁気学的なものが定まれ、これは静かに静電気学的の c 倍である。その $\frac{1}{10}$ を Coulomb といふ。

次に一点の電場の強さはその点に置いた単位電荷に働く力が働くかたちとして定まれる。この電場の電磁気学的な場合は静電気学的の $\frac{1}{c}$ である。
従つて電位、即ち electromotive force の電磁気学的な静電気学的の $\frac{1}{c}$ である。この 10^8 倍を Volt といふ。(静電気学的の $\frac{1}{300}$)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~経つて~~ 又 電気量の単位を1 volt の電位にあるの
1 Coulomb の電気量をあるものをとる。之を Farad と言う。
これは大きすぎるから、その 10^{-6} を microfarad と言う。
~~経つと~~ 地球の半径は 6.4×10^8 cm その capacity は
$\frac{6.4\times10^8\times10^9}{9\times10^{20}}$ Farad $= 0.0007$ Farad $= 700$ microfarad

又



同じ大きさの Condenser の capacity は
$\frac{1}{4\pi}\frac{10^2}{10^{-1}}\cdot\frac{10^9}{c^2}\cdot10^6$ micro farad
$= 8.84\cdot10^{-5}$ microfarad

又 1 volt の電位差をあるには 1 ampère の電流を 1 秒間流すには抵抗を 1 ohm とすれば。

このかんじで

	静電学的で測った単位	電磁的	実用的
電流	J	J/c	J/c·10 (ampère)
電荷	e	e/c	e/c·10 (Coulomb)
電位	V	cV	cV·10^{-8} (Volt)
電気抵抗	R	c^2R	c^2R·10^{-9} (ohm)
電気容量	C	C/c^2	C/c^2·10^9 (Farad)
電磁誘導	ε	ε/c^2	ε/c^2·10^9
自己誘導	L	L	L·10^{-9} (Henry)

又 electric displacement の方向は
$\iint D\,df = 4\pi e$
から定まる。S は L, e は S の closed surface 内にある charge. これから point charge e の外々のような半径の sphere 上の elect. displ. は $D = e$ となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

電 non electric displacement の次元としては，unit charge から unit distance における electric displacement の大いさとする．従って電磁気単位では静電気単位の C 倍となる．

次に dielectric const は D と E の比であるから，電磁気単位で測った値は静電気単位で測った値の $\frac{1}{C^2}$ となる．

∴ 真空の diel. const. は電磁気単位では $\frac{1}{C^2}$ である．

実用単位では charge の大きさは Coulomb であり電磁気単位の $\frac{1}{10}$．

従って elect. displ. の大きさは静電気単位の $\frac{C}{10}$，

又 electric field の実用単位は 1 Cm の間に 1 volt の potential 差のある field は，静電気単位の $\frac{10^8}{C}$ 倍である．

∴ 同じ場合，電磁気単位では静電気単位の $\frac{10^8}{C^2}$ となる．

仕事の実用単位としては 1 volt の電位差の下で 1 Ampère の電流が 1 秒間流れることによって行われる仕事としてきめられるが，これは電磁気単位では erg の

$$\frac{C}{10} \cdot \frac{10^8}{C} = 10^7 \text{ 倍}$$

即ち 1 Joule = 10^7 erg

である．

仕事率 power の大きさは Joule per sec or Watt である．

電磁気単位の方は Gauss の system では静電気単位をはかり，これを電磁気単位と関係づけた．その単位を Gauss という．（Oersted）同様に magnetic induction, mag. permeab. は Gauss の system では電磁気単位をはかり，

最後に coef. of induction は circuit の geometrical configuration によって定まる permeab. の如きものであるから，電磁気単位では同じである．その dimension は 1 cm．

実用単位ではこの 10^9 倍を，henry という．（理由は後述）

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所，湯川記念館史料室

Chapter VII Quasistationary Field

§1. Quasistationary Currents in Linear Conductors

今迄取扱って来た static field 及び stationary field 中では field, charge, current 等は時間的に変化しないが、これからは少しと一般的な時間的に変化する field を考え、この場合は問題は次のようになる。

先ず一つの circuit を電流が流れるとき erste Hauptgl

$$\operatorname{curl} H = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$$

に従って、magnetic field が生ずることになる。この時の電流が少しと共に変化するとき zweite Hauptgl.

$$\operatorname{curl} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

に従って、その circuit 自身又は他の circuit に induced electromotive force を生ずる。その大きさは

$$\overline{\Phi} = \int_C E\,ds = \iint_S \operatorname{curl} E\,df$$



$$= -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\,df$$

となる。

一般に $\operatorname{div} B = 0$ $B = \operatorname{curl} A$

となる vector potential A が存在する。これから

E. M. F. は

$$\overline{E} = -\frac{1}{c}\iint_S df \operatorname{curl}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{c}\int_C \frac{\partial A}{\partial t}\,ds$$

C の time derivative の

即ち vector potential の curvilinear integral の $-\frac{1}{c}$ 倍となる。stationary field の vector potential は ($\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ から) erste Haupt. より

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \mathrm{II} \qquad (\mathrm{div}\, A = 0)$$

の solution として みられる.

さし field が time と共に かわる 場合には conduction current の 他に displacement current $\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$ を考へねばならぬが, これは conductor の 内外のみならず, 空間全体に 拡がつて ある. その distribution は 容易に 求めることが 出来ない. かかる displ. current をも 含んだ 一般の 場合は 後章で 論ずるとして, この 章では field があまり 急激に 変化せず 従つて conduction current に 対して displacement current を neglect しうる 如き 場合 を quasistationary field とよぶ.

この 場合 field の energy は 各瞬間 with, それは 丁度 stationary field の energy と 同形 と 見なしうること ある. (field の ~~瞬間的な~~ energy 中の 時間 time derivative に depend する 項は 小さいこと と 同じ.)

と. el. field の energy は static field と 同様.

$$W_E = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{D}\cdot\mathrm{D}\, dv = \frac{1}{2}\iiint \rho V dv$$

V: el. st. potential

又 mag. field energy も stationary field と 同様.

$$W_M = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{H}\cdot\mathrm{B}\, dv = \frac{1}{2}\iiint \mathrm{I}\cdot\mathrm{A}\, dv$$

で あらわされる.

さて 実際上 重要な 場合として, 多くの linear circuit を 電流が 流れる 場合を 考える.

今 一つの circuit が 与えられ, 空間の 点 1, 2 を 電流 J_1, J_2 が 流れこむとする. J_1, J_2 は 時間 t の 函数 と 変化し, 互に 一つが 0 となりうるとする. 簡単のために, 各 時間 一つの

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

circuitを中の変わり方を流れてゐる電流は皆一定だ". 加之 plate の形状の如何を問はず. quasistationary と云ふ條件から plate の形状を全く negligibly small である.

今 circuit の self induction の coef. を夫々 L_1, L_2, mutual induction の coef. $L_{12}=L_{21}$ とする. 又夫々の circuit の capacity を夫々 C_1 C_2 とする. (之は丁度 condenser を形造つてゐない concentrate して居ると考へる) 又 resistance を夫々 R_1, R_2 とする.

今 system の electric energy は

$$\overline{W_E}=\frac{1}{2}\frac{e_1^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{e_2^2}{C_2}$$

茲に, e_1, e_2 は夫々 condenser の一つ宛の一方の plate 丈の charge, J_1, J_2 は夫々 plate から外へ流れ出る電流とすると, 勿論

$$-\frac{de_1}{dt}=J_1 \qquad -\frac{de_2}{dt}=J_2$$

の關係がある.

この場合 charge は condenser 以外の所には決して流れ込まないとする. つまり current は condenser の plate 以外では conductor の tangential に流れるとする.

今 system の mag. energy は

$$\overline{W_M}=\frac{1}{2c^2}(J_1^2L_1+2J_1J_2L_{12}+J_2^2L_2)$$

であるから,

電流單位を以つて, J_1, J_2 のかはりに $\frac{J_1}{c}, \frac{J_2}{c}$, C_1 C_2 のかはりに $\frac{C_1}{c^2}$ $\frac{C_2}{c^2}$, L_1, L_2, L_{12} はそのまゝ, 用ゐて

$$\overline{W}=\overline{W_E}+\overline{W_M}=\frac{1}{2}\frac{e_1^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{e_2^2}{C_2}+\frac{1}{2}(J_1^2L_1+2J_1J_2L_{12}+J_2^2L_2)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

dt 時間の field の energy は

$$d\overline{W} = d\overline{W}_E + d\overline{W}_M$$

と変化したとする。その時 circuit を動かすとなすと、それに
抗して mech. energy の変化がある。
各 circuit を動かすことにより inductance が夫々 dL_1, dL_2
dL_n と変化したとする。Capacity は変化しないとする。
mech. energy の源は el. dyn. potential $V = -W_m$
の減少とにあらわれる。この時間の

$$-dV = d\overline{W}_m = \frac{1}{2}(J_1^2 dL_1 + 2J_1 J_2 dL_n + J_2^2 dL_2)$$

又 dt 時間の発生する Joule's heat は

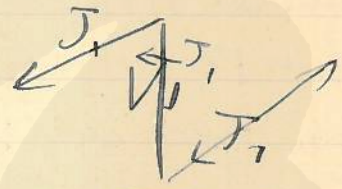
$$J_1^2 R_1 dt + J_2^2 R_2 dt$$

又 dt 時間の conductor 内及び boundary
における energy (chemical energy, Peltier effect
による heat の吸収、放出) の変化は

$$-J_1 V_1 dt - J_2 V_2 dt$$

(但し V_1, V_2 は各 circuit の el. motive force

energy の保存則によると
全ての変化の総和は 0 の筈。



$$\therefore d\overline{W} - dV + \sum J_i^2 R_i dt - \sum J_i V_i dt = 0$$

or $$-\sum_{i=1,2} \frac{e_i}{C_i} J_i + J_1 \frac{d}{dt}(J_1 L_1 + J_2 L_{12})$$

$$+ J_2 \frac{d}{dt}(J_1 L_{12} + J_2 L_2) + \sum_i J_i^2 R_i - \sum_i J_i V_i = 0.$$

となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

or $$J_1\left\{-\frac{e_1}{C_1}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(J_1L_1+J_2L_{12})+J_1R_1-\cancel{J_1}V_1\right\}=0$$
$$+J_2\left\{-\frac{e_2}{C_2}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(J_2L_{12}+J_2L_2)+J_2R_2-\cancel{J_2}V_2\right\}=0$$

おの時 n 番目は ~~n~~ の circuit を流れる current は何番目へまわるか、その時 n 番目として、

$$-\frac{e_1}{C_1}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(J_1L_1+J_2L_{12})+J_1R_1-\cancel{J_1}V_1=0$$

$$\text{or}\quad -\frac{e_2}{C_2}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(J_2L_{12}+J_2L_2)+J_2R_2-\cancel{J_2}V_2=0$$

が成立せねばならぬ。

circuit の数がいくらふえても以下の推論によって、それぞれの式が導き出される。

このもし方は原始的だが、元来 quasi-stationary field というものは、ごく近似的な意味しかもたないものであるから、この程度の近似は許されるべきであろう。(厳密にやろうと思えば field eq. を解かねばならぬ。しかも Kirchhoff のごとき

今一つ次の circuit を考え、self induction は外部から無視しうるとすると、これからおのずから

$$-\frac{e}{C}+\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}+JR=V$$

である。所で $\frac{de}{dt}=-J$ であるからこの式は e に関する二次の微分方程式

$$\frac{L}{c^2}\frac{d^2e}{dt^2}+R\frac{de}{dt}+\frac{e}{C}=-V$$

である。これを special case を考える。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(i) Circuit の condenser の capacity 0 なる場合には electrostatic energy 等
は存在なく.

$$\frac{d(LJ)}{dt} + JR = V$$

$$\text{or } J = \frac{V - \frac{1}{C}\frac{d(LJ)}{dt}}{R}$$

この起電力 ~~of time~~ は self induction or time という場合には あれかと $-\frac{1}{C}\frac{d(LJ)}{dt}$ なる applyed electromotive force の逆な induced electromotive force が発生する訳と見える.

L が time という場合には

$$L\frac{dJ}{dt} + JR = V$$

この式の general solution は左辺の particular solution 等
で

$$J_0 e^{-\frac{C^2Rt}{L}} \qquad J_0 : \text{const}$$

なる t の functions.

applyed electromotive force V or time は indep. の場合は

$$J = \frac{V}{R}$$

が一つの particular values. ∴ general solution は

$$\therefore \quad J = \frac{V}{R} + J_0 e^{-\frac{C^2Rt}{L}}$$

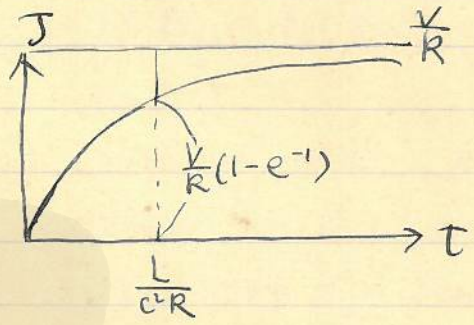
$t=0$ において 起電力 $J=0$ とおくと. $J_0 = -\frac{V}{R}$

$$\therefore \quad J = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{C^2Rt}{L}}\right)$$

即ち self induction があれば 起電力は一定の max. value に
なるため. そして L/R が大きい程, ~~max になるまでの~~
起電力の増す時間.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に $t=0$ 迄は $\frac{V}{R}$ なる steady current が流れてゐて、$t=0$ に electromotive force を急に 0 にすると



$t>0$, $V=0$: $J = J_0 e^{-\frac{c^k R t}{L}}$

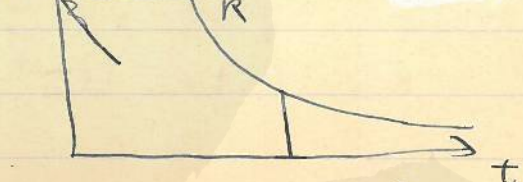
$t=0$: $J_0 = \frac{V}{R}$ $\quad J = \frac{V}{R} e^{-\frac{c^k R t}{L}}$

従つて electromotive force がなくなつても current は急には 0 にはならぬ。$\frac{L}{c^k R}$ が大きい程遅い。

$\frac{L}{c^k R}$: time of relaxation : $J = \frac{V}{R} e^{-1}$

次に applied potential が time と共に simple periodic に変る場合を考へる。その時刻 t の potential を V とすると

$$V = V_0 \sin(\omega t + \delta)$$



とし、この場合の solution を

$$J = J_0 \sin(\omega t + \delta')$$

と仮定すると、

$$-J_0 \frac{L\omega}{c^k} \sin\delta' + J_0 R \cos\delta' = V_0 \cos\delta \qquad \cos\delta \quad -\sin\delta$$

$$J_0 \frac{L\omega}{c^k} \cos\delta' + J_0 R \sin\delta' = V_0 \sin\delta \qquad \sin\delta \quad \cos\delta$$

これから

$$J_0^2 \left\{ \left(\frac{L\omega}{c^k}\right)^2 + R^2 \right\} = V_0^2$$

or

$$J_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{L\omega}{c^k}\right)^2 + R^2}}$$

又

$$\frac{L\omega}{c^k} \cos(\delta' - \delta) + J_0 R \sin(\delta' - \delta) = 0$$

or

$$\tan(\delta' - \delta) = -\frac{L\omega}{c^k R}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\int I E\,dV = J\int E\,ds = J\left(V - L\frac{d(LJ)}{dt}\right) = J^2R$$

この式は periodic な場合 一周期について平均すると 0 になる! X

~~この式は circuit の場合~~

であるから 実際の抵抗は

$$P = \sqrt{R^2 + \frac{L^2\omega^2}{c^4}}$$

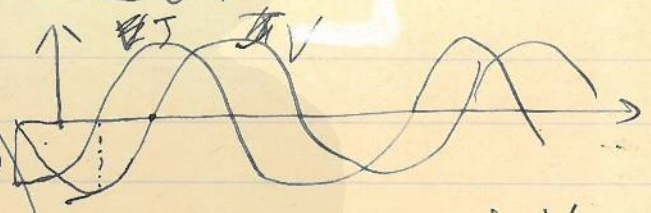
になる。これを Impedance という。

R applyed voltage と current の間には $\delta'-\delta$ だけの phase のずれがある。

$\frac{L\omega}{c^2} \ll R$ ならば $\delta'-\delta = 0$。実際それほどない

$\frac{L\omega}{c^2} \gg R$ ならば $\delta'-\delta = \frac{\pi}{2}$

実際この phase が $\frac{\pi}{2}$ 大きく違うと、



この場合 ~~$\frac{dt}{dt}$~~ 時間に発生する熱量は

$$W\frac{dt}{dt} = JV\frac{dt}{dt} = V_0J_0\sin(\omega t+\delta)\times\sin(\omega t+\delta')\frac{dt}{dt} = \frac{V_0J_0}{2}\{\cos(\delta'-\delta) - \cos(\omega t + \frac{\delta+\delta'}{2})\}dt$$

これを 1 周期について平均すると、右の式は 0 になり、まぐれ当たり

$$\overline{W} = \frac{V_0J_0}{2}\cos(\delta'-\delta)$$

$J^2R = J_0^2\sin^2(\omega t+\delta)R$ 一周期について平均すると

$\overline{J^2R} = \frac{J_0^2R}{2} = \frac{V_0^2}{2}\frac{R}{R^2+L\omega^2}$

の式と一致することがわかる。しかも

$$\cos(\delta'-\delta) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L\omega}{c^2R}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L\omega}{c^2}\right)^2}}$$

$(\because\ 0 \le \delta'-\delta \le \frac{\pi}{2})$

$$\therefore \overline{W} = \frac{V_0^2}{2}\frac{R}{R^2+\left(\frac{L\omega}{c^2}\right)^2} = \frac{J_0^2R}{2}$$

であるから L が大きくて R が小さい程 Joule 熱は少くなる。

X ~~field~~ として field の energy は ~~dt 時間に~~

$\frac{LJ}{c^2}\frac{dJ}{dt}dt$ 一周期について平均すると $\frac{LJ_0^2}{4c^2}$ で

$\frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{LJ_0^2}{2c^2}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

#この場合には

$$J_1 = \frac{V_1 - \frac{L_1}{c^2}\frac{dJ_1}{dt} - \frac{L_{12}}{c^2}\frac{dJ_2}{dt}}{R_1}$$

V111, 5^
electromotive force を生ずる. 114

で第一のcircuitの時の電流変化および第二のcircuitの電流の変化が induced 第一のcircuitに

丈変化する.

$$\frac{LJ_0^2}{2c^2}\omega \sin^2(\omega t+\delta')\,dt$$

なる子うな項は生ずる.

$$\frac{LJ_0^2\omega}{2c^2}\cdot 2\sin^2(\quad) = 1-\cos$$

丈変化する. これから $\frac{L\omega}{c^2}/R$ が大きい程 mechanical energy として放出される分が少なくなる.

次に二つのcircuitがcoupleしている場合を考える

この場合の#体circuitが設定してみれば

$$\frac{L_1}{c^2}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_{12}}{c^2}\frac{dJ_2}{dt} + J_1R_1 = V_1$$
$$\frac{L_{12}}{c^2}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_2}{c^2}\frac{dJ_2}{dt} + J_2R_2 = V_2$$

general solutionはこれの

である.# この#のparticular solutionは $V_1=V_2=0$ の時のgeneral solutionをかいたものである.

$V_1=V_2=0$ とすれば.

$$J_1 = C_1 e^{-\lambda t} \qquad J_2 = C_2 e^{-\lambda t}$$

とおくと.

$$\left(-\frac{L_1\lambda}{c^2}+R_1\right)C_1 + \frac{L_{12}\lambda}{c^2}C_2 = 0$$
$$-\frac{L_{12}\lambda}{c^2}C_1 + \left(-\frac{L_2\lambda}{c^2}+R_2\right)C_2 = 0$$

これより λは

$$\begin{vmatrix} \frac{L_1\lambda}{c^2}-R_1 & \frac{L_{12}\lambda}{c^2} \\ \frac{L_{12}\lambda}{c^2} & \frac{L_2\lambda}{c^2}-R_2 \end{vmatrix} = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

の solution として次のようにする.

$$\frac{L_1L_2-L_{12}^2}{c^4}\lambda^2-\frac{L_1R_2+L_2R_1}{c^2}\lambda+R_1R_2=0$$

$$\lambda=\frac{1}{2\frac{L_1L_2-L_{12}^2}{c^4}}\cdot\left\{\frac{L_1R_2+L_2R_1}{c^2}\pm\sqrt{\left(\frac{L_1R_2+L_2R_1}{c^2}\right)^2-\frac{4R_1R_2}{c^4}(L_1L_2-L_{12}^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\frac{L_1L_2-L_{12}^2}{c^4}}\left\{\frac{L_1R_2+L_2R_1}{c^2}\pm\sqrt{\frac{(L_1R_2-L_2R_1)^2}{c^4}+\frac{4R_1R_2L_{12}^2}{c^4}}\right\}$$

~~$\frac{(L_1R_2+L_2R_1)^2}{c^4}-\frac{4R_1R_2}{c^4}(L_1L_2-L_{12}^2)$~~

時で field の energy は

$$\frac{1}{8\pi}\iiint HB\,dV=\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{L_1}{2}J_1^2+2L_{12}J_1J_2+L_2J_2^2\right\}$$

又 J_1, J_2 の任意の real (non zero) value に対し positive ~~or 0~~ でなければならぬから

$$L_1L_2-L_{12}^2\geq 0$$

でなければならぬ.

従って λ の二つの根は共に real positive である.

従って. 之を $\lambda>\lambda'$ とすると. general solution は

$$J_1=C_1e^{-\lambda t}+C_1'e^{-\lambda' t}$$
$$J_2=C_2e^{-\lambda t}+C_2'e^{-\lambda' t}$$

V_1 V_2: const である時の general solution は

$$J_1=\frac{V_1}{R_1}+C_1e^{-\lambda t}+C_1'e^{-\lambda' t}$$
$$J_2=\frac{V_2}{R_2}+C_2e^{-\lambda t}+C_2'e^{-\lambda' t}$$

である.

今の系の ~~circuit~~ の electromotive force $V_2=0$ とし. $t=0$ で今の系の ~~circuit~~ に V_1 なる e.m.f. を apply すると. $t=0$; ~~$J_1=J_2=0$~~ なる故.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

VIII, 6

この方からは
general な initial condition の下で special solution をかぎ
られる.

次に
十A－B
↓
次の circuit の一方に periodic な electromotive force
が働く場合を考える. これは変圧器の primary に相当
する. この e.m.f. を複素数で
$$V_{外} = V_0 e^{i(\omega t + \delta_0)}$$
とおいておき, solution の real part をとることにすれば
$V = V_0 \cos(\omega t + \delta_0)$ の場合の solution になる.
~~L_1, L_1~~ $\frac{1}{C^2}\frac{d}{dt}(L_1 J_1)$ L_1, L_2, L_{12} : const とすれば
$$\frac{L_1}{C^2}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_{12}}{C^2}\frac{dJ_2}{dt} + J_1 R_1 = V_0 e^{+i(\omega t+\delta_0)}$$
$$\frac{L_{12}}{C^2}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_2}{C^2}\frac{dJ_2}{dt} + J_2 R_2 = 0$$
この特 particular sol
$$J_1 = C_1 e^{i(\omega t+\delta_1)} \qquad J_2 = C_2 e^{i(\omega t+\delta_2)}$$
を assume すると
$$\left(\frac{L_1}{C^2} i\omega + R_1\right) C_1 e^{i\delta_1} + \frac{L_{12} i\omega}{C^2} C_2 e^{i\delta_2} = V_0 e^{i\delta_0}$$
$$\frac{L_{12} i\omega}{C^2} C_1 e^{i\delta_1} + \left(\frac{L_2}{C^2} i\omega + R_2\right) C_2 e^{i\delta_2} = 0$$
or
$$C_1 e^{i\delta_1}\left\{\left(\frac{L_1}{C^2} i\omega + R_1\right)\left(\frac{L_2}{C^2} i\omega + R_2\right) + \frac{L_{12}^2 \omega^2}{C^4}\right\} = \left(\frac{L_2}{C^2} i\omega + R_2\right) V_0 e^{i\delta_0}$$
$$C_2 e^{i\delta_2}\{\quad ,\quad\} = -\frac{L_{12} i\omega}{C^2} V_0 e^{i\delta_0}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\therefore\quad C_1 e^{i\delta_1} = \frac{V_0 e^{i\delta_0}}{\frac{L_1 i\omega}{c^2} + R_1 + \frac{\frac{L_{12}^2\omega^2}{c^2}}{\frac{L_2 i\omega}{c^2} + R_2}}$$

$$= \frac{V_0 e^{i\delta_0}}{\frac{i\omega}{c^2}\left(L_1 - \frac{L_{12}^2\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)^2\left(\frac{L_2\omega}{c^2}\right)^2}{\left(\frac{L_2\omega}{c^2}\right)^2 + R_2^2}\right) + R_1 + \frac{\left(\frac{L_{12}\omega}{c^2}\right)^2 R_2}{\left(\frac{L_2\omega}{c^2}\right)^2 + R_2^2}}$$

なる等価 circuit の induction coef は

$$L_1' = L_1 - \cdots$$

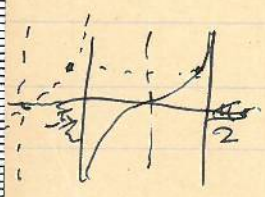
抵抗は resistance は

$$R_1' = R_1 + \cdots$$

となる．

primary circuit と secondary circuit の変位の比は

$$\frac{C_2}{C_1} e^{i(\delta_2 - \delta_1)} = \frac{-\frac{L_{12} i\omega}{c^2}}{\frac{L_2}{c^2} i\omega + R_2} = \frac{-\frac{L_{12}\omega}{c^2}\left(\frac{L_2\omega}{c^2} + iR_2\right)}{\left(\frac{L_2\omega}{c^2}\right)^2 + R_2^2}$$





$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{L_{12}\omega}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{L_2\omega}{c^2}\right)^2 + R_2^2}} \qquad \delta_2 - \delta_1 = \tan^{-1}\frac{R_2}{\frac{L_2\omega}{c^2}} - \pi$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

† 但し、初めに入れたのは L_1 となるような circuit の current をきめた時のこと。

VIII, 7

frequency ω が大きくて、$\frac{R_2\omega}{L_2}$, $\frac{L_2\omega}{C_2}$ に比して R_2 が negligible の時には

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{L_{12}}{L_2}$$

である。この primary current と secondary current の位相差の符号は L_2 と L_{12} の比になっている。又 phase difference は $-\pi$ である。これから primary current と secondary current とは常に方向が逆である。†

通常の電気量の用いる場合には magnetic induction の flux は殆んど完全にもつ様な L_{12} と L_2 とは大体 primary と secondary の係数の比にある（この点参照）‡

併用して L_1 と L_{12} の比も大体 primary と secondary の係数の比であるとって、

$$\frac{L_{12}}{L_2} \cong \frac{L_1}{L_{12}},$$

or $L_1L_2 - L_{12}^2$ は 0 に近い。

$L_1L_2 - L_{12}^2$ が小さい場合には初めは殆んど両方共なる。

次に λ は殆んど大きくなり、

$$\lambda' \cong \frac{R_1R_2}{\left(\frac{L_1R_2 + L_2R_1}{C}\right)}$$

$$L_1C_1 = L_{12}C_2$$

$$L_{12}R_1C_1' = L_1R_2C_2' \quad \text{or} \quad \frac{C_1'}{C_2} = \frac{L_1}{L_{12}} \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{L_1}{L_{12}}$$

$t<0$; $J_{10}^{(0)} = \frac{V_1}{R_1} + C_1 + C_1'$, $J_{20}^{(0)} = C_2 + C_2'$; $t>0$; $J_1 = \frac{V_1}{R_1} + C_1' e^{-\lambda' t}$, $J_2 = C_1' e^{-\lambda' t}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$J_1 L_{12} + J_2 L_{12} = c\iint_{S_2} B_2\,df = c N_2 \Phi_2$

$J_2 L_2 = c\iint_{S_2} B_2\,df = c N_2 \Phi_2$

∴☆

$J_2 L_{12} = c\iint_{S_1} B_2\,df = c N_1 \Phi_2$

$J_2 L_{12} = c\iint_{S_2} B_2\,df = c N_2 \Phi_2$

$\left.\begin{array}{l} J_2 L_{12} = c N_1 \Phi_2 \\ J_2 L_{12} = c N_2 \Phi_2 \end{array}\right\} \dfrac{L_{12}}{L_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$

$J_1 L_1 + J_2 L_{12} = c\iint_{S_1} B\,df = c N_1 \Phi$

今 次々の任意の cross section を通る total flux を Φ とし、~~N_1, N_2~~ 各 coil の巻数を N_1, N_2 とすると、

~~eq.~~ は 上式の如く ~~$J_1 R_1 + \dfrac{N_1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt}$~~ は

$= \alpha c N_1 \Phi.$

$\therefore \dfrac{N_1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt} + J_1 R_1 - V = 0$ $\quad J_1 R_1 = V - N_1 \dfrac{d\Phi}{dt}$

$\dfrac{N_2}{c}\dfrac{d\Phi}{dt} + J_2 R_2 = 0$ $\quad J_2 R_2 = -N_2 \dfrac{d\Phi}{dt}$

と 次ぬ。 ~~this~~ ~~primary~~ N_1 / N_2 小さくて $\dfrac{N_1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt}, N_2 \dfrac{d\Phi}{dt} \gg V$,

これから $\dfrac{d\Phi}{dt}$ を eliminate すると、 次ぬ 次々の circuit の electromotive force の比は $N_1 : N_2$ に比例

$J_2 R_2 = (J_1 R_1 + V)\dfrac{N_2}{N_1}$

$= -\dfrac{N_2}{N_1}(V - J_1 R_1)$

(of primary circuit)

- induced electro-motive force

$= \dfrac{N_2}{N_1}(V - J_1 R_1)$ 次ぬ

~~this primary~~ secondary circuit に $\dfrac{N_2}{N_1}(V - J_1 R_1)$ 次ぬ electromotive force が apply された事に相当する。 ~~primary~~ ~~resistance が~~ ~~inductance に比べて小さいから、~~ ~~よって~~ ~~$\dfrac{N_2}{N_1} V$ である~~

又 次々の circuit の current の比

$\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{L_{12}}{L_2} \cong \dfrac{N_1}{N_2}$

V は induced el. m. f. に比べて negligible 次ぬ

比例する。 ∎

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

十月六日

(ii) Capacity のある場合.
一つの circuit を考えれば condenser の charge の変化は
おおよそ次の如く.

$$\frac{L}{C}\frac{d^2e}{dt^2} + R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \overline{+}V.$$

で表わされる. $J = -\frac{de}{dt}$

この式の general solution は丁度その particular solution が $V=0$ なる 式の general solution を加えたものに等しいから, それで $V=0$ として.

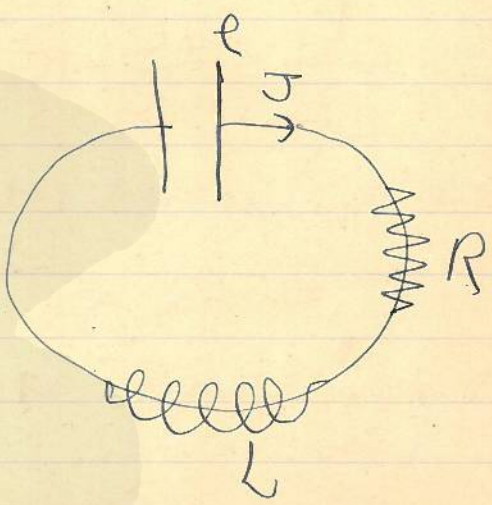
$$e = a e^{bt}$$

とおくと, b は

$$\frac{L}{C}b^2 + Rb + \frac{1}{C} = 0$$

の root であるから, 次の如くなる.

$$b = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C^2C}}}{2\frac{L}{C^2}}$$

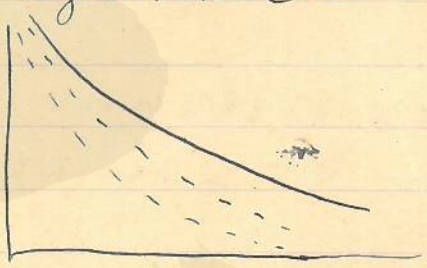


$R \geq \frac{2}{C}\sqrt{\frac{L}{C}}$ なる場合には b の二つの値は共に負で

General solution は

$$e = a_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_2 t} \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

なる形となる. condenser の charge は logarithmic な damp をなして行く.



~~つまり $\frac{2}{C}\sqrt{\frac{L}{C}}$ より circuit の condenser の dist~~ time $t=0$ において $e = e_0$ となるには $a_1 + a_2 = e_0$.

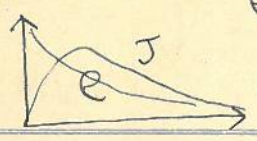
又 current J_0 となるには, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = J_0$

time $t=0$ で $e = e_0$ current $=0$ となるには

$a_1 + a_2 = e_0$ $\quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$\lambda_1 \to \lambda_2$
$\lambda_1 < \lambda_2$



$$e = e_0 \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right\}$$

$$J = e_0 \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\}$$

この circuit は condenser を discharge すると charge の current は logarithmic に damp する。

$R < \frac{2}{C}\sqrt{\frac{L}{C}}$ の場合は

$$\frac{1}{2\frac{L}{C^2}} \sqrt{\frac{4L}{C^2C} - R^2} = C \cdot \sqrt{\frac{1}{2LC} - \left(\frac{CR}{2L}\right)^2} = \omega_1$$

$\frac{2RC^2}{2L} = \lambda$

とおく。general solution は

$$e = a e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \delta)$$

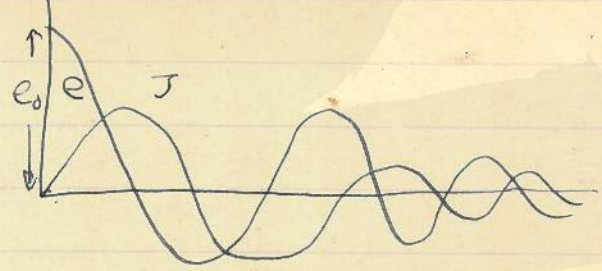
これが、damped oscillation をおこす condition。

$t=0$, $e = e_0$ $J = 0$.

$$e_0 = a \sin\delta$$

$$0 = a e^{-\lambda t} \{ \lambda \sin(\omega t + \delta) - \omega \cos(\omega t + \delta) \}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega}{\lambda}.$$



$R \ll \frac{2}{C}\sqrt{\frac{L}{C}}$ のとき

この時 $\tan\delta$ は非常に大きく、$\delta \cong \frac{\pi}{2}$

$$e = e_0 e^{-\lambda t} \left(\sin\omega t / \tan\delta + \cos\omega t \right)$$

$$\cong e_0 e^{-\lambda t} \cos\omega t$$

$$J \cong e_0 e^{-\lambda t} \omega \sin\omega t$$

$R = 0$ の場合は

$$e = a \sin(\omega t + \delta) \qquad \omega = C\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

この circuit は $\nu = \frac{C}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ の振動数で oscillate する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この場合は undamped oscillation である.

applyed electromotive force が periodic なるとき

$$V = V_0 e^{i(\omega_0 t + \delta_0)}$$

とおくと.

$$e = a' e^{i(\omega_0 t + \delta')}$$

これを代入

$$a'\left(-\frac{L}{c^2}\omega_0^2 + iR\omega_0 + \frac{1}{C}\right) e^{i\delta'} = -V_0 e^{i\delta_0}$$

である.

従って

$$a' = \frac{V_0}{\omega_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}}$$

$$\delta' - \delta_0 = \arctan \frac{R}{\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{\omega_0 C}}$$

これから

$$J = -\frac{de}{dt} = b' e^{i(\omega_0 t + \varepsilon')}$$

とおくと.

$$= a'\omega_0 e^{i(\omega_0 t + \delta' \mp \frac{\pi}{2})}$$

$$\therefore b' = \frac{V_0}{\sqrt{\quad''\quad}}$$

$$\varepsilon' - \delta_0 = \arctan \frac{R}{\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{\omega_0 C}} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{\omega_0 C}}{R}\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って general solution は

$$e = a e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\delta) + a'\sin(\omega_0 t+\delta')$$

之は circuit 内に於ける damped oscillation と forced oscillation の superpose したもの である.

current

$$J = \cancel{b'e} - \frac{de}{dt} = a(\lambda\sin(\omega t+\delta) + \omega(\cos\omega t+\delta))e^{-\lambda t} + a'\omega_0\cos(\omega_0 t+\delta')$$

$$= b\sin(\omega t+\varepsilon)e^{-\lambda t} + \cancel{a'\omega_0}\cdot b'\sin(\omega_0 t+\varepsilon')$$

但し、 $b = a\sqrt{\lambda^2+\omega^2}$ ~~ε~~

~~$\varepsilon = \arctan$~~

$$b' = a'\omega_0 = \frac{c^2\omega_0}{L}V_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\{(\omega_0-\omega)^2+(\lambda/4)^2\}\{(\omega_0+\omega)^2+(\lambda/4)^2\}}}$$

$$\sqrt{\quad} = \left|\omega_0^2 - i\frac{c^2R}{L}\omega_0 - \frac{c^2}{LC}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\omega_0^2-\frac{c^2}{LC}\right)^2+\left(\frac{c^2R}{L}\omega_0\right)^2}.$$

$$\therefore b' = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L\omega_0}{c^2}-\frac{1}{C\omega_0}\right)^2}}$$

と成る. 即ち R, L, C の任意の場合の current は 求められる. $\sqrt{\quad}$ は抵抗が任意の場合の如くに 任意. 之を Impedance. $\frac{L\omega_0}{c^2}-\frac{1}{C\omega_0}$: Reactance と言う.

又 $\varepsilon' = \delta' - \frac{\pi}{2} = \delta_{0t}$ $\arctan\frac{\lambda\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2-(\lambda/4)^2} - \frac{\pi}{2}$

$$\omega^2-\omega_0^2-\lambda^2 = \frac{c^2}{LC} - \left(\frac{c^2R}{2L}\right)^2 - \omega_0^2 + \left(\frac{2Rc^2}{2L}\right)^2$$

$$\lambda\omega_0 = \frac{Rc^2}{L}\omega_0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



119
VIII, 10

従って、

$$\varepsilon' = \delta_0 - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\frac{2Rc^2}{L}\omega_0}{\frac{c^2}{LC} - \omega_0^2}$$

$$= \delta_0 - \arctan \cdot \frac{\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{C\omega_0}}{R}$$

$$= \delta_0 + \tan^{-1} \frac{\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{C\omega_0}}{R}$$

applyed e.m.f. の freq を変えないときに
その impedance の一番小さくなるのは

$$\frac{L\omega_0}{c^2} - \frac{1}{C\omega_0} = 0$$

or $$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

この時 ~~resonance~~ である。この場合には pt 電流と電圧の phase difference をなく、circuit は抵抗大の場合と全く同じになる。

お電流と電圧の phase の差は reactance が resistance に比して大きい、或は小さくなる。

$\omega_0 > \frac{c}{\sqrt{LC}}$ の時には phase diff は positive
即ち電流の phase がすすむ。

$\omega_0 < \frac{c}{\sqrt{LC}}$ の時には電流の phase がおくれる。

又 ω_0 を $\frac{c}{\sqrt{LC}}$ より大きくしても小さくしても電流は全く
0 に近づく。

抵抗 R が小さい時には $\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ において電流は大きく
なる。これは circuit の固有振動数と applyed e.m.f. の
振動数が resonance をする場合である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これは alternating electromotive force が引き
apply された場合であるが、electromotive force を
apply した瞬間、又はそった瞬間しばらくの間は、
この様な damped oscillation なども流れるはずである。
従ってかかる場合には general solution

$$e = a e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \delta) + a' \sin(\omega_0 t + \delta')$$

$$J = b e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varepsilon) + b' \sin(\omega_0 t + \varepsilon')$$

をとり、e.m.f. を apply 又は cut off した瞬間の
e, J の値なる condition からして、indeterminate
constant ~~a, b~~, を定めればよい。
($-\frac{de}{dt} = J$ なる関係があるから、a, δ; b, ε の間には
二つの関係がある。∴ independent なのは二つまでである)
時間がたてば、damp が云わの項は零となり、forced
oscillation となる。

§2. Kirchhoff's Laws for Quasistationary Current
以上の考察例からして、或る circuit があって、
その circuit に resistance, inductance, capacity
が series に入ってる時 ~~など場合は~~ 一般の場合を ~~考えるに~~
~~あらゆるものに~~ 応用~~し~~できるものであるが、
もっと一般に一つの circuit 中に ~~electro~~ R, L, C
が或る series に、(あるいは) parallel に入ってる
場合の如き ~~如き~~ ものへよう。
~~さて~~ Ohm の法則によれば

$$E = \frac{\Pi}{\sigma}$$

σ: specific conduct.

である。之を一つの circuit の中の任意の closed path P.
について積分すると、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\int E\,ds = \int \frac{I}{\sigma}\,ds$$

circuitの任意点のなす面を S, 電流を J とすると, 右辺は

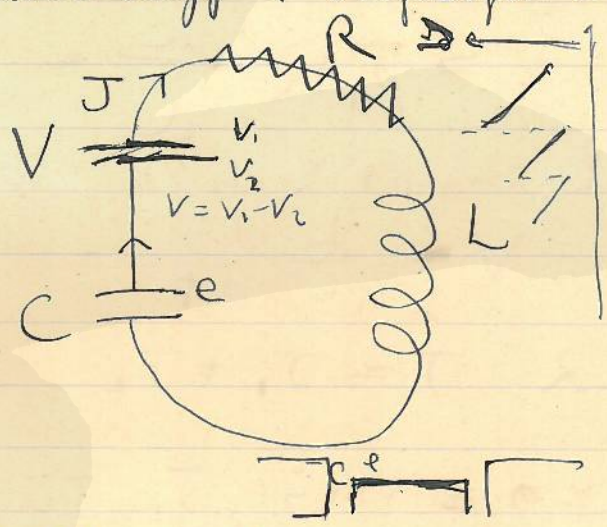
$$\int E\,ds = J\cdot\int \frac{ds}{s\sigma}$$

$$= J\cdot R$$

Lorsn $\int E\,ds$ は e.m.f. の原因ではあるが之は異なる conductor の部分によって生ずる Galvanic e.m.f. と, V magnetic induction によって生ずる electromotive force

$$\Phi = -\frac{1}{c}\iint \frac{\partial \Pi_B}{\partial t}\,df$$

condensor の両端の potential diff の superpose したものである.



右の図の如き circuit に於ては e.m.f. は

$$V + \frac{e}{C} - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = JR.$$

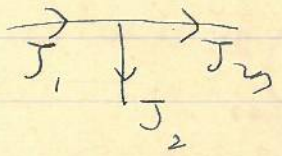
又

$$\frac{de}{dt} = J.$$

これは前に求めた式と全く同じものになる.
これは直流の場合の Kirchhoff の第二の法則に相当する.

次に circuit 中の任意の点に(大きな capacity の condensor を)電気の量は各瞬間に対して常に一定でなければならぬ. しかうすれば, 瞬間に対して電気が流れ込むことがない, potential が変化しない.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



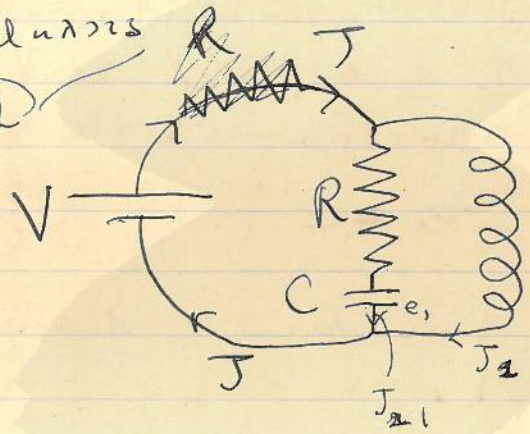
分岐点の各々の場合には

$J_1 = J_2 + J_3$

でなければならぬ。

これは直流の場合の Kirchhoff の第一の法則に相当する。

この一般化された Kirchhoff の二つの法則を以つて どんな場合でも出る。



分岐点 (図の如き R, C と L parallel になる) の場合には 先ず始から R, C circuit を辿つて 一周すると、

$$V = J_1 R - \frac{e_1}{C}$$

L circuit を辿つて一周すると

$$V = \frac{L}{C^2}\frac{dJ_2}{dt} = 0,$$

又 $J = J_1 + J_2$ 又 $-\frac{de_1}{dt} = J_1$

この四つから e_1, J, J_1, J_2 を eliminate すると、

$$\frac{dV}{dt} = R\frac{dJ_1}{dt} + \frac{J_1}{C}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = R\frac{d^2J_1}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dJ_1}{dt}$$

$$\frac{C^2}{LC}V = \frac{1}{C}\frac{dJ_2}{dt}, \quad \frac{C^2R}{L}\frac{dV}{dt} = R\frac{d^2J_2}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{C^2R}{L}\frac{dV}{dt} + \frac{C^2}{LC}V = R\frac{d^2J}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dJ}{dt}.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って applyed potential V がわかって おれば、
current J がわかってくる。

~~for if~~ V= を ~~とき~~ V' と ~~おく~~ し、二回 積分 すると、

$$JR - \frac{e}{C} = \int_0^t dt \int_0^t V' dt'$$

従し、 $e = -\int_0^t J\,dt$

$J = 0$ ~~for~~ $e = 0$ for $t = 0$

とする。

V: const なら、

$$JR - \frac{e}{C} = \frac{c^2}{2LC} V t^2$$

すなわち、R, C circuit に $\frac{c^2}{2LC} V t^2$ なる potential が apply されたと 時の ~~充電が 零~~ である、ということが わかる。

V が frequency $\frac{\omega}{2\pi}$ なる 交流となると 問題は 少し 面倒になる。 すなわち ~~V, J₁, J₂ 等は 皆 $e^{i\omega t}$~~ に ~~比例~~ する。 ~~V = complex~~ V を $Ae^{i\omega t}$ とおけば e, J₁, J, J 等は 皆 $Ae^{i\omega t}$ (C, C': complex const.) なる形の solution のみ 存在する。 従って かかる 場合には、time について 積分すれば、$i\omega$ が かかり、逆に ~~積分~~ すれば $(i\omega)^{-1}$ が かかる、即ち $e_1 = \frac{i \cdot J_1}{\omega C}$ に 正確は

$$V = J_1\left(R \mp \frac{i}{\omega C}\right) = \frac{iL\omega}{c^2} J_2$$

$$J = J_1 + J_2 = V\left\{\frac{1}{R \mp \frac{1}{R \mp \frac{1}{\omega}}} R - \frac{i}{\omega C}\right\} + \frac{1}{\frac{iL\omega}{c^2}}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

抵抗のimaginary partをとると(12)，$V_0 \sin(\omega t+\delta_p)$ の potentialを apply すれば current $J_0 \sin(\omega t+\xi)$ が流れる．この時の current が流れる場合の J_0, ξ が定まる．

この様な互いに independent な R_1, L_1, C_1, $R_2 L_2 C_2 \cdots$ が parallel に入っている場合に流れる total current は complex number で表わせば

$$J = J_1 + J_2 + \cdots = V\left\{\frac{1}{R_1 - \frac{i}{\omega C_1} + i\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + i\left(\frac{L_2\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)} + \cdots\right\}$$

である．

これをして 2つの series に入っている時には

$$J = V\Big/\Big(\sum R_i + i\left(\frac{\sum L_i \omega}{c^2} - \frac{1}{\omega}\sum_i \frac{1}{C_i}\right)$$

となる．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§3. Lenz's Law　　C　　VIII, 13

前々なんぺんかいた様な closed circuit に働く induced electromotive force は　Faraday の法則に従って

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\, df$$

この関係は 昔も一般的に成立し、circuit が動いている場合にも成立する。適用出来る。

今 t 点の line element $d\mathbf{s}$ が dt 時間に $d\mathbf{r}$ 丈動いたとすると、time t における surface を S, $t+dt$ … S' とすると

$\iint_S \mathbf{B}(t)\, df$

は　$\iint_{S'} \mathbf{B}(t+dt)\, df$ ~~$+\iint \mathbf{B}(t)[d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s}]$~~

に等しい。



しかるに time t における surface S と time t' における surface S' とを $d\mathbf{r}$ でむすびつけて出来た closed surface について

$\iint \mathbf{B}^{(t)}\, df$

をつくると

$$= \iiint \operatorname{div} \mathbf{B}^{(t)}\, dV = 0.$$

$$= \iint_{S'} \mathbf{B}^{(t)}\, df - \iint_{S} \mathbf{B}^{(t)}\, df + \iint_{S''} \mathbf{B}^{(t)} \overbrace{[d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}]}^{[d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s}]''}$$

$$\therefore \iint_{S'} \mathbf{B}(t+dt)\, df - \iint_{S} \mathbf{B}(t)\, df \quad \overbrace{[d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}]}^{[d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s}]}$$

$$= \iint_{S'} \{\mathbf{B}(t+dt) - \mathbf{B}(t)\}\, df - \iint_{S''} \mathbf{B}(t)[d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}]$$

$$= dt \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, df + \int_C [\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}]\, ds$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って、$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathfrak{B}\,df = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}df - \frac{1}{c}\int_C [\mathfrak{B}\frac{dr}{dt}]ds$

しかるに $\mathfrak{B} = \mathrm{curl}\,A$ なる故

$= -\frac{1}{c}\int_C \frac{\partial A}{\partial t}ds - \frac{1}{c}\int_C [\mathfrak{B}\frac{dr}{dt}]ds$

$\therefore \quad \int_C E\,ds = $ 〃

この任意の closed curve について成立する故、

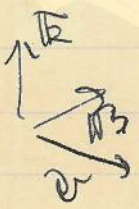
$$E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathfrak{B}\frac{dr}{dt}] = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

なる scalar potential φ が存在する。

or $$E = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{c}[\mathfrak{B}v]$$

なる。 $=$ 〃 $+ \frac{1}{c}[v\mathfrak{B}]$

従って任意の閉じた circuit が moving line element の line element が v なる速さで動いて、その circuit の potential が local change の他に field の moving velocity v, 磁束の magnetic induction $\mathfrak{B}$ に比例し、又その間の angle の sin に比例する electric field が induce される。この field の方向は v, $\mathfrak{B}$ と右ねじの関係にある。



それから従って、物体が空間格子に固定した magnetic field の中で回る時

$$E = \frac{1}{c}[v\mathfrak{B}]$$

©2022 YHAL YITP Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

[Ⅱ · curl A]

$$I_y \mathrm{curl}_z A - I_z \mathrm{curl}_y A = I_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - I_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= I \,\mathrm{grad}\frac{\partial A}{\partial x} - I\frac{\partial A}{\partial x} - (I\,\mathrm{grad})A$$

この electric field をえらべ それによって

$$I = \sigma E = \frac{\sigma}{c}[v B_0] \qquad \text{(Eddy Current)}$$

の density distribution で current が流れる.

~~この静止した system から見て~~

~~のことであるから~~ いま ~~dv は volume~~ dv

~~dv で density の~~

current が流れておれば, この mag. field 中

$\frac{[I, B_0]}{c} dv$

の力を A という:

$$\text{or} \quad \frac{\sigma}{c^2}\left[[v, B_0] B_0\right] = -\frac{\sigma}{c^2} v B^2 dv$$

この 空間を積分しようという気持ちが湧く.

これが物体 Leng の場合である.

~~所で~~ 中の

~~所で~~ 又 この circuit を J の電流が流れている時の field の magnetic energy は

$$W_m = +\frac{J}{c}\iint_S B\, df$$

circuit の各 line element ds を dr で書かれたとすると,

mag. energy は

$$-\frac{J}{c}\cdot\iint_{S''} B\,[ds \cdot dr]$$

と change する.

$$\text{or} = +\frac{J}{c}\int_C [B\, dr]\, ds. = +\frac{J}{c}\int [ds\, B]\, dr$$

これは electrodynamical potential で $V = -W_m$ は

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

dsの line element を dv 丈移すとすれば

$$-\frac{J}{c}[ds, B]\,dv$$

丈かける。

dsの line element に働く force は

$$F = \frac{J}{c}[ds, B]$$

である。

dvの volume element の Ⅱ の density の current が流れるとき働く mech. force は

$$F = \frac{1}{c}[\Pi, B]$$

である。

従って上の如き場合には

$$\frac{\sigma}{c^2}[[vB]B] = -\frac{\sigma}{c^2}vB^2$$

なる force が働き、これは運動を妨げようとする向きに働く。

これが所謂 Lenz の法則である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

十一月 十一日

§4 Quasistationary Current in Continuous Medium

VIII, 15, '24

今迄は線 wire を流れる電流について、この立場で来たが、
~~導体の表面~~ 之等の導体の場合はどうなるか。
導体が静止してるとすると、その内外の任意点の electric field は

$$\mathbb{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \qquad (v=0)$$

で与へられる。

$$\mathbb{I} = \sigma \mathbb{E}, \qquad \operatorname{curl}\mathbb{I} = \sigma \operatorname{curl}\mathbb{E}$$

従つて

$$\mathbb{I} = \sigma\mathbb{E} = -\sigma\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\right\}$$

となる。conductor を均質であるとする。すると、σ, μ は const. で

$$\mathbb{B} = \mu\mathbb{H} = \operatorname{curl}\mathbb{A}$$

上式の両辺の curl をとると

$$\operatorname{curl}\mathbb{I} = -\frac{\sigma\mu}{c}\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{c}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

もう一度 curl をとると、

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbb{I} = -\frac{\sigma\mu}{c}\cdot\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbb{I}}{\partial t}.$$

しかるに $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbb{I} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbb{I} - \Delta\mathbb{I}$
導体の中に charge が存在しないとすると、

$$\operatorname{div}\mathbb{I} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

$$\therefore \quad \Delta\mathbb{I} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbb{I}}{\partial t}$$

電流を与えたら $\frac{1}{c^2}$ がなくなる。

となる。
之は熱伝導の式と同形である。
この式を適当な boundary condition のもとに解けば導体内外の電流の distribution がわかる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

前々して (半)径の針金の中を電流が流れる場合を考える.

z axis の方向を z-方向とし, cylindrical coord. (r, θ, z) をとると 電流は θ, z の向きの成分 のみから

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}$$

~~又電流の方向は z-方向の成分 (これ…とすると~~
~~I z-方向の電流成分を表わすことを I とし, 周波数 $\frac{\omega}{2\pi}$ である交流とすると~~

$$I = I_0(r)\, e^{i\omega t}$$

とおけば.

$$\frac{d^2 I_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dI_0}{dr} - \frac{i I_0}{a^2} = 0$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$$

そこで $x = \frac{r}{a}\sqrt{-i}$

とおくと, $\frac{d^2 I_0}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI_0}{dx} + I_0 = 0$

となる. これは 0-order の Bessel Eq で その general solution は

$$I_0 = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

ある形となる. 今で $r=0$, 即ち $x=0$ で I_0 が finite であるためには $C_2 = 0$ ($Y_0(x)$ は $x=0$ の近くで infinite になる.)
従って $I = C_1 J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}\right) e^{i\omega t}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$b = \pm a$ ⋯ ①

$\sqrt{-i} = a + bi$

$a^2 - b^2 = 0 \quad 2ab = -1$

$\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

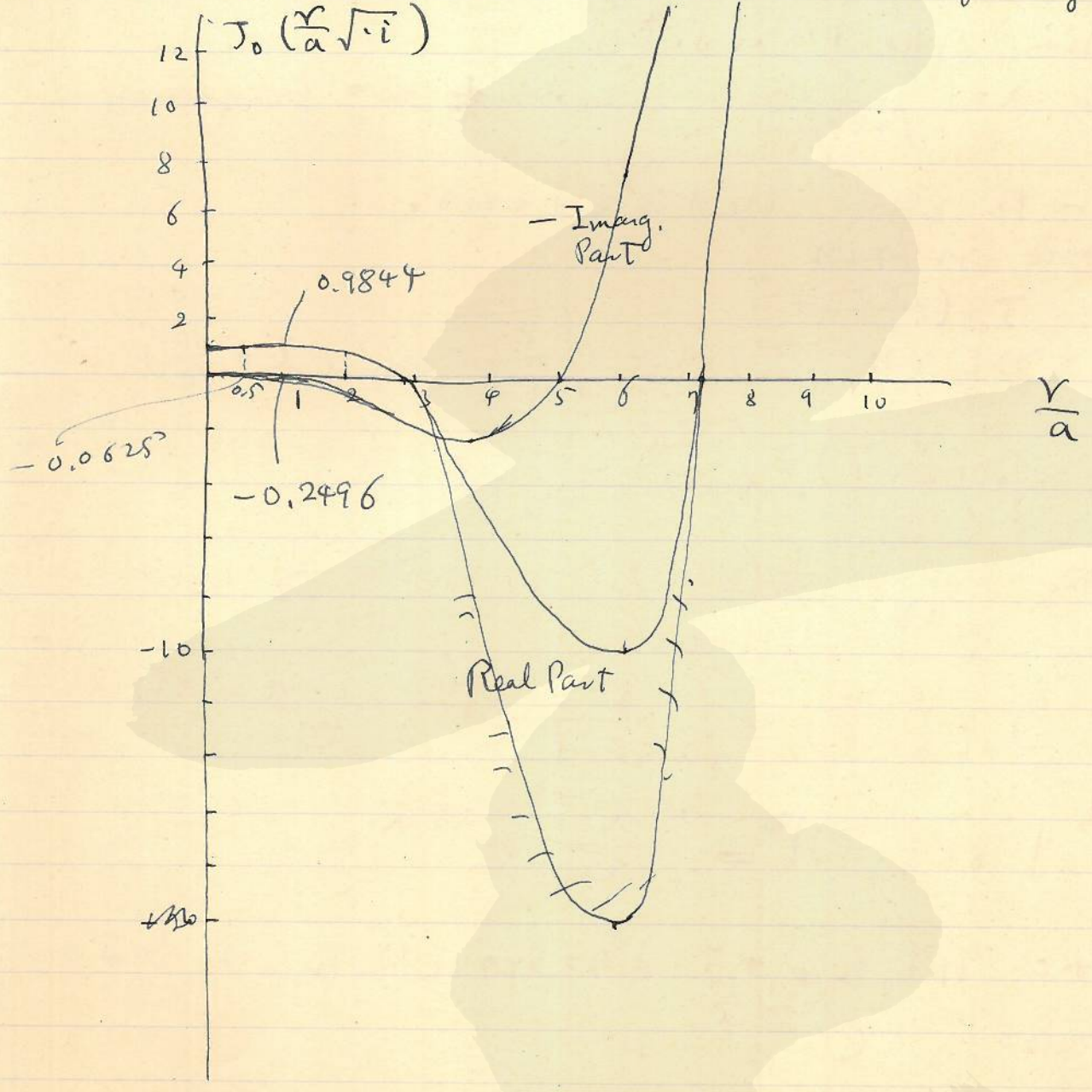
$\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

025
VIII, 16

とおく。 C_1 は constant は boundary condition から
きめる。

さて、円筒のなかを考えれば Bessel 関数 $J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}\right)$ or $\frac{r}{a}$ などに
depend するかを考えなければならぬ。

Jahnke-Emde S. 294, S. 295 etc を見ると ②. 右が出て
き。これは $J_0(x\sqrt{i})$ であるが $J_0(x\sqrt{-i})$ はその comp. conj をとればよい。



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今針金の半径を r_0 とおいて

$r_0 < a$ のときは　J_0 の絶対値は ほとんど uniform に 1 である。したがって電流密度は針金の中ほとんど一様である。

これに対して $r_0 >> a$ のときは boundary 針金の 表面の近くの電流は 急激に 0 に近くなって、$r < a$ なる針金の中心の電流密度は negligible になる。

この電流は ほとんど表面だけに集まって流れることになる。

これを skin effect という。

すなわち $a = \dfrac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$ であるから 振動の frequency ω が大きい程 skin effect は著しくなる。

~~$r_0 >> a$ のとき~~

今 $J_0\left(\dfrac{r}{a}\sqrt{-i}\right) \simeq$

ここで $x >> 1$ のとき $J_0(x) \simeq \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore\quad J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}\right) \simeq \sqrt{\frac{2a}{\pi r\sqrt{-i}}} \cdot \frac{1}{2i}\left\{ e^{i\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}+\frac{\pi}{4}\right)} \right\}$$

しかるに $\sqrt{-i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$　　$i\sqrt{-i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

~~$e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$~~

$$J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}\right) \simeq \sqrt{\frac{a}{2\pi r\sqrt{-i}}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r}{a} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r}{a}} + \cdots$$

$$\therefore\quad \left|J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{-i}\right)\right|^2 \simeq \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r}{a}}$$

であるから 針金表面から δ なる所の電流密度は 表面の電流密度の $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{a}}$

よりへって了ってある。なお $\delta = a$ の時 $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 約 $\frac{1}{2}$ 位になる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所・湯川記念館史料室

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{30}{2\pi}$

126
9/11, 17

で おおよそ 針金の半径 r_0 cmとして $a = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$ かえる。
~~この電流の frequency がたま。~~
~~Skin effect は たま。~~

~~主に 銅~~
銅線の場合には. specific resistance は $\cong 1.8 \times 10^{-6}$ ohm
$= 1.8 \times 10^{-6}$. $1\ \text{E.S.U} \cong c^2 \cdot 10^{-9}\ \text{ohm} = 9 \cdot 10^{11}\ \text{ohm}$
$\therefore$ spec. resistance $\cong 0.2 \times 10^{-17}$ E.S.U.

$\sigma \cong 5 \times 10^{17}$ E.S.U $\quad \mu \cong 1$

$a \cong \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{3 \times 10^{10}}{\sqrt{4\pi \times 5 \times 10^{17}}} \cong \frac{10}{\sqrt{\omega}} \cong \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{30}{2\pi}$

ω を ~~大きく~~ から $\frac{30}{2\pi\sqrt{\nu}\sqrt{\omega}}$ cm の ~~程~~ で 電流は 半径 r_0 より 小さく なる.

$\omega = 60$ cycle の 交流では ~~$\omega = 2\pi \times 60$~~ $a = 0.7$ cm
~~この 時で 電流は 半減する.~~ ~~r_0~~ として、金属の 半径が 1.0 cm より 大きい 時 初めて Skin effect が 著しく なる. $r_0 \gg 1$ cm なる は ない. ~~から~~
0.7 cm の 時で 電流は 半減する. $r_0 < 1$ cm の 時には ほんど Skin effect は ない.
又 周波数 10^6 位の 交流に 対しては $a \cong \frac{3}{2\pi} \cdot 10^{-2}$ cm
$\therefore a \cong 0.05$ mm となり 電流は ほんど 針金の 表面 ~~の~~ 近く のみを 流れる ことに なる.
~~お~~ 鉄線の 場合には μ が 大きい ~~ので~~ Skin effect は より 著しい.

この 場合 任意の 点 S を 流れる 全電流 J は 次の ~~様~~ に
$$J = \iint_S R(I(r))\ df = \frac{4\pi}{2} \int_0^{r_0} R(I(r))\, r\, dr$$

この 場合 生ずる Joules Heat は 次の ~~様~~ に なる.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\int_0^{x'} e^{-x} \cos(\quad) dx =$$

$$\iint \mathbf{I}\mathbf{E}\, df = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^{r_0} \{R(I(r))\}^2 r\, dr$$

これらの r に応じた抵抗 R を

$$J^2 R = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^{r_0} \{R(I(r))\}^2 r\, dr$$

$$\text{or}\quad R = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{\int_0^{r_0} \{\quad\}^2 r\, dr}{\left[2\pi \int_0^{r_0} \{\quad\} r\, dr\right]^2}$$

$\overline{(x-\bar{x})^2}$

$= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 > 0$

$\geq \frac{2\pi \overline{I^2} \cdot \text{断面積}(\frac{r_0^2}{2}\text{等})}{(2\pi)^2 (\bar{I})^2 \cdot \frac{r_0^4}{4}}$

$= \frac{\text{断面積}}{\sigma \pi r_0^2} \cdot \frac{\overline{I^2}}{(\bar{I})^2}$

と define し.

又電流が流れるための磁場 mag. field の energy は

軸からの r までについて,

$$\overline{W_m} = \frac{1}{8\pi} \cdot 2\pi \int_0^{\quad} \frac{B \cdot H}{\mu H^2} r\, dr$$

これ. $\mu = 1$ for $r_0 < r < \infty$

として self induction から出て. この場合の self induction

$$\frac{1}{2} J^2 L = \overline{W_m}$$

として与えられる.

いわゆる skin effect のための抵抗 R は計算しなければならない. 従って L も小さくなければならない,

$r_0 \gg a$ の場合は

$$I(r) \cong I(r_0)\, e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{r_0 - r_0}{a} + i\omega t}$$

$$R\{I(r)\} \cong |I(r_0)| \cdot e^{\frac{r_0 - r_0}{\sqrt{2}a}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{r_0 - r_0}{\sqrt{2}a} + \delta\right)$$

$$\int_0^{r_0} R(I(r))\, r\, dr = |I(r_0)| \cdot \frac{1}{2} \{\cos(\omega t + \delta) + \sin(\omega t + \delta)\}$$

$$J = |I(r_0)| \cdot \pi$$

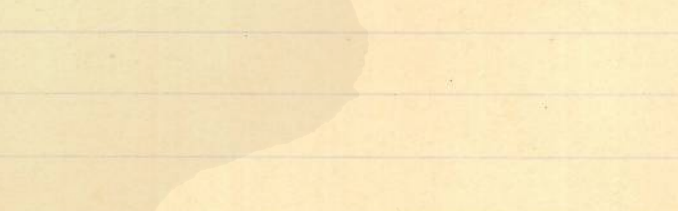
抵抗は $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2\pi r_0 \cdot a\sigma}$ となり. 直流の時の抵抗 $\frac{1}{\pi r_0^2 \sigma}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

η $\frac{\gamma v}{2\sqrt{2}a}$ となる。

Skin Effect という現象は high frequency の magnetic field が作用して conductor 中に大きな電流を存せしめることを意味する現象である。

例えば soft iron の cylinder に coil の、いれた、coil に high frequency の電流を流すと cylinder 中に magnetic induction の flux が変化し、induced el. m. f. を生ずる、その為めの閉回路に沿うてみる。これによってこの閉回路に沿うて Joule's heat によっていわゆる渦電流が流れる。



この場合には電流はもはや断面一杯にひろがっていないで表面に集まる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

Quenched many Current in

§5. Non-linear Circuit.

(Le Corbeiller, Journal of Inst. Elect. Eng. Vol. 79, 361, 1936, Sept)

ふさは書ゐ 充流と充場の間ゐ linear な関はがあり、ゐる Ohm の法則が成立し、従つて applied voltage と同じ period で (synchronous ゐ) current が流れると云はれてゐた:

しかし、例へば circuit が open gas-filled tube, vacuum tube 等が入つてゐるときにはそこには Ohm の法則が成立せず、従つて applied voltage と period の異つた oscillation が現はれる。かゝる場合を non-linear problem でなく linear theory で取扱つてゐた。

かゝる non-linear theory の中でゐる problem である。

その最も簡単な取扱は almost 同じ typical な場合を例に取る。

第一の例として、L, R, C circuit ゐ parallel ゐ neon tube N を入れ、これに流充に V を apply されたとし、之等を夫々 J, J' に流れるとし、N の抵抗を R' とすると

$$J'R' = V$$

であるが、R' は constant でなく、図のごとき curve になつて居る。

この V の極小値 V_0 に対しては

$$\frac{dV}{dJ'} < 0 \qquad \frac{dV}{dJ'} \cong 0$$

である。この近くで、

$$V \cong V_0 - R_0(J' - J_0) + \gamma\frac{(J'-J_0)^3}{3} = V_0 - R_0 J'' + \gamma\frac{J''^3}{3}$$

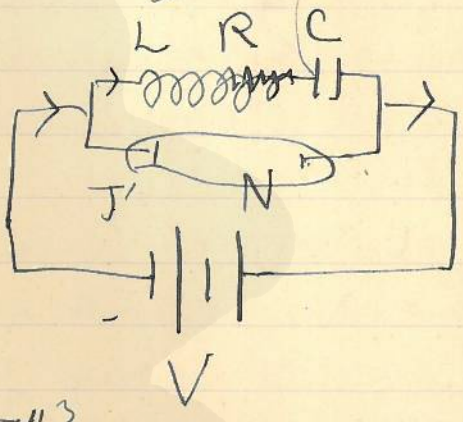
なる形になる。之を L, R, C circuit になる式

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$L\frac{dJ}{dt}+RJ+\frac{e}{C}-V=0 \qquad J=+\frac{de}{dt}$$

これより

$$L\frac{d^2e}{dt^2}+R\frac{de}{dt}+\frac{e}{C}-V_0+R_0J''+\gamma\frac{J''^3}{3}=0$$



V_0, R_0, γ は time に independent な定数,

$$e = V_0C + e'(t)$$

とおくと,

$$J=\frac{de'}{dt}.$$

$$L\frac{d^2e'}{dt}+R\frac{de'}{dt}+\frac{e'}{C}+R_0J''+\gamma\frac{J''^3}{3}=0$$

分岐 circuit の分の抵抗には全部は resistance を入れて, 分岐
J_0 は constant current or 流れは出ないとする
(neon tube の両端の voltage V_0 = ~~applied voltage~~ 抵抗による
~~V_0~~ は potential drop を引いたもの)

$$J_0 = J+J' = J+J_0+J'' \quad \text{or} \quad J=J''$$

$$L\frac{d^2e'}{dt^2}+R\frac{de'}{dt}+\frac{e'}{C}-R_0J''+\gamma\frac{J''^3}{3}=0$$

$$-R_0\frac{de'}{dt}+\frac{\gamma}{3}\left(\frac{de'}{dt}\right)^3=0$$

$t=\sqrt{LC}\,x$ と $e'=e_0y$ とおくと.

~~(又は, $e_0=\sqrt{C}\sqrt{\frac{(R_0-R)}{\gamma\sqrt{LC}}}$)~~ $e_0=\sqrt{\frac{(R_0-R)\sqrt{LC}}{\gamma}}$

$$\frac{dy}{dx^2}-\varepsilon\left(\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right)+y=0 \qquad \varepsilon=(R_0-R)\sqrt{\frac{C}{L}}$$

(equation of motion)

$$\frac{dy}{dx}=z: \quad z\frac{dz}{dy}-\varepsilon\left(z-\frac{z^3}{3}\right)+y=0$$

(equation of path)

©2022 VHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$y^2+z^2=\text{const}$

$\frac{dy}{dz}=\frac{y}{z}$

$\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$



$y^2+z^2=3$

$ydy+zdz=\frac{z}{3}dy$

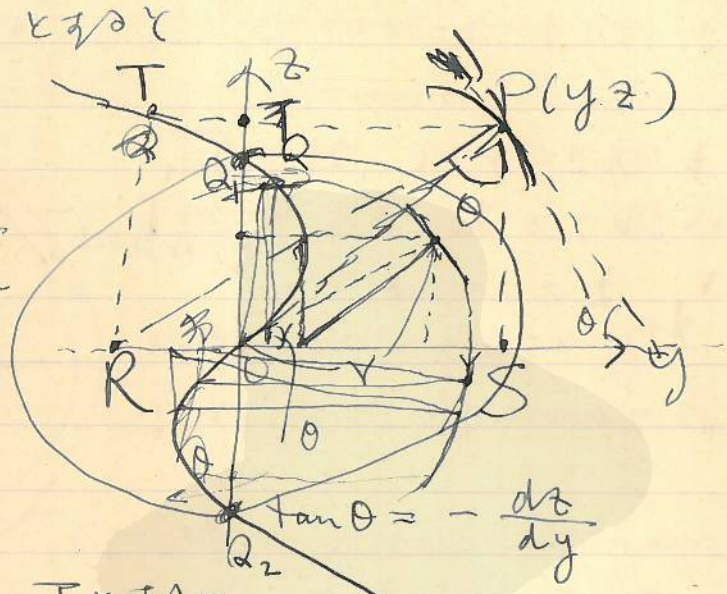


$z-\frac{z^3}{3}=z(1-\frac{y^2}{3})$

$=\frac{2}{3}y^2dy$

$\varepsilon>0$ (or $R_0>R$) とすると

$RS=-z\frac{dz}{dy}$



~~RS~~ 一般に, PR や PS 等が integral curve の normal.

次に y-軸の平行な PQ をひけば

$y=\varepsilon(z-\frac{z^3}{3})$

この curve 上の点を T とすると

path の equation から

$\overline{RS}=\overline{PQ}+\overline{QT}$, $=\overline{PT}$,

∴ RT は y-軸に平行.

故に, T から垂線をおろし, その点と R と P とを結び PR や P を通って y軸に平行な RP に垂直な直線を引くと, この P を通る integral curve の tangent になる.

この如くして各点で tangent をひいて おけば integral curve がかける.

従って, 大体の integral curve は定まるわけである.

Liénard の報告 (Revue Générale de l'Électricité 1928, Vol 23, 901, 946) によると, 求める path は yz-plane を clockwise にまわって, 一つの closed curve をなす.

($y>0$

(; 今 z を与えて, x を与えると. ~~$y>0$ から~~ $|z|<\overline{OQ}$, $(=\overline{OQ_2})$

の範囲では $\frac{dz}{dy}=\frac{-y+\varepsilon(z-\frac{z^3}{3})}{z}\lesseqgtr 0$ according as $z\gtrless 0$

しかも, ~~$|dy|\geq 1$~~ $\frac{dr}{d\theta}>0$,) これは $|z|<\overline{OQ_2}$ の

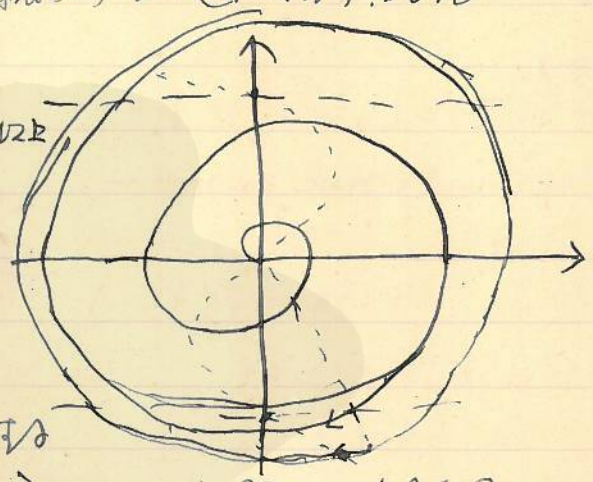
範囲で $y<0$ から始まって, 左 spiral orbit を描いて, curve

をつくり, y-軸と交わる $\frac{dz}{dy}=\pm\infty$, according as $\frac{z}{y}\lesseqgtr 0$; z-軸と交わる $\frac{dy}{dz}=\pm 0$

$\frac{dr}{d\theta}=\frac{(z-\frac{z^3}{3})^3}{z^2}$

$=(\frac{r^3}{z^2}-\theta)^3=$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$.

$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dz}$ $\frac{dz}{dy} = \varepsilon \frac{dz}{dx} - \varepsilon\left(z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$. except for $z = \sqrt{3}$,

$$\int \frac{dz}{\varepsilon\left(z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \int dx \left(\frac{a}{z} + \frac{b}{z + \sqrt{3}} + \frac{c}{z - \sqrt{3}} \right) dx = \varepsilon t$$

$a(z^2 - 3) + b(z^2 - \sqrt{3}z) + c(z^2 + \sqrt{3}z) = 1$

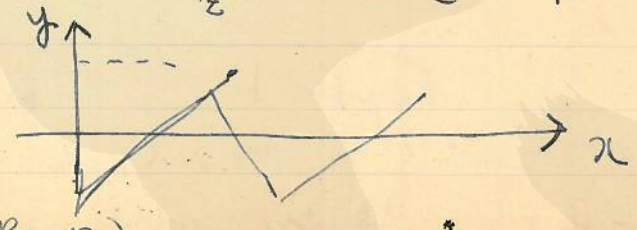
$a + b + c = 0$ $b - c = 0$ $-3a = 1$, $a = -3$ $b = c = \frac{3}{2}$

$z^{-3}(z^2 - 3)^{\frac{3}{2}} = Ce^{-\varepsilon t}$. $\frac{z^2 - 3}{z^2} = C' e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}$.

$z^2 = \frac{3}{1 - C' e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}}$

$\frac{dy}{dx} = 3$

$y = 3x$



period は $1.6\,C(R_0 - R)$.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\varepsilon > 0$ で $R_0 > R$ とすると.

$\overline{RS} = -z\frac{dz}{dy}$

従って PR は P における integral curve の normal に沿う y 軸に平行な PQ をとり

$y = \varepsilon\left(z - \frac{z^3}{3}\right)$

なる curve と z 軸との点を T とすると, path の equation から

$\overline{RS} = \overline{PQ} + \overline{QT}$

$= \overline{PT}$

$\therefore \overline{RT}$ は y 軸に垂直.

なる点 T から z 軸をおろし, その足より R と P を結び P を通って RP に垂直な線を引くと, これが P を通る integral curve の tangent になる.

この様にして z 軸上で tangent をとって行けば, いくらでも多くの integral curve がかける.

従って, origin を通る integral curve は多数ある.

Liénard (Revue Générale de l'Électricité 1928, Vol 23, 901, 946) によると, 各点の path は yz-plane を clock wise にまわって一つの closed curve を描く.

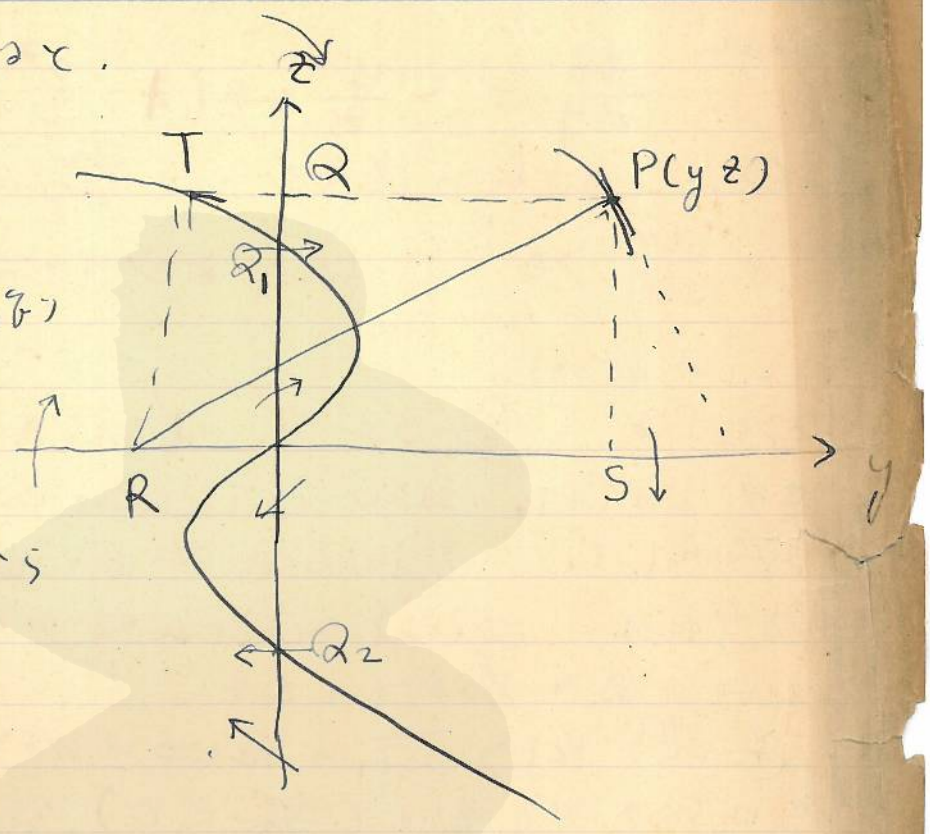
(∵ 各 y 軸上では $\frac{y}{z} \lessgtr 0$ に従って

$\frac{dy}{dz} = \pm 0$ or $\frac{dz}{dy} = \pm\infty$

z 軸上では $\frac{dz}{dy} = \varepsilon\left(1 - \frac{z^2}{3}\right)$

となるようにとると $y > 0$ $\overline{OQ_2} < z < \overline{OQ_1}$ の範囲では

z について, $\frac{dz}{dy} = \frac{-y + \varepsilon\left(z - \frac{z^3}{3}\right)}{z} \lessgtr 0$

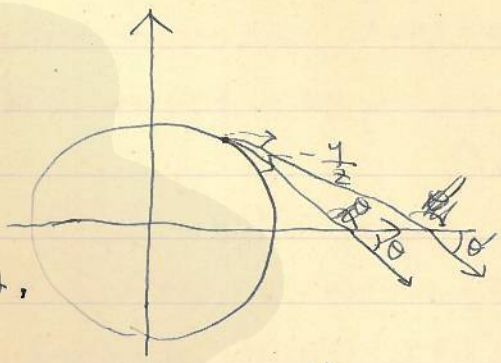


©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

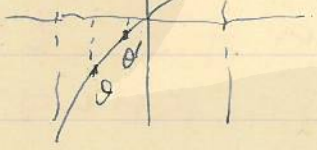
一般に
$$\frac{dy}{dy} = -\frac{y}{z} + \varepsilon\left(\pm - \frac{z^2}{3}\right)$$
であり、circle の場合の $\frac{dy}{dy} = -\frac{y}{z}$ と比べると、

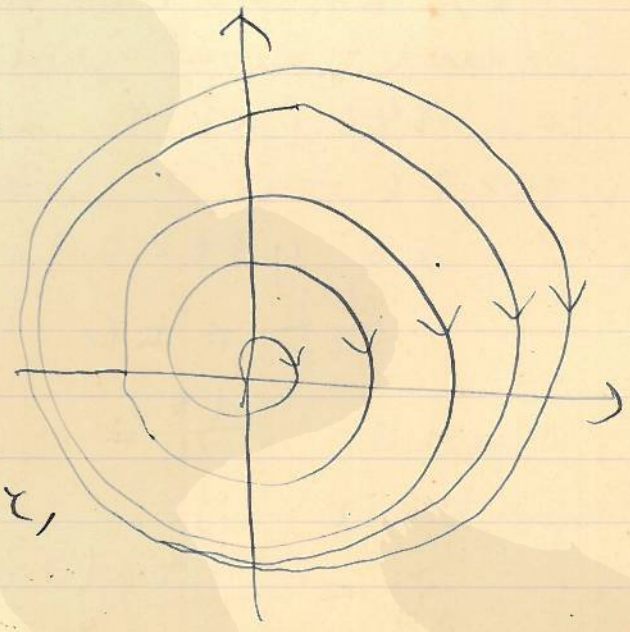
$\frac{dr}{d\theta} > 0$ for $z^2 > 3$, $z^2 < 3$

ということがわかる。
$z > 0$ では $\frac{dy}{dx} > 0$ であり、また x が
増せば y は増す、また clockwise にまわる、
ことのおいて、$|z| < \overline{OQ}$, のおの点から
出発すれば spiral orbit を描いて
curve 上の点を移っていく。
逆に $|z| > \overline{OQ}$, の他の点にあると、
遠ざかっていく ($\frac{dr}{d\theta} < 0$)。従って
curve 上のある特定の点とは限らず、おの
asymptotic curve に converge する。
(このことは $y = \varepsilon(z - \frac{z^3}{3})$ のかわりに
それと勝手の curve をもってきても — 同じである)
この asymptotic curve は特別な curve で
どんな initial condition から
出発しても必ず到達するもので、
これで current は periodic
でいつまでも sustain
される。
この asymptotic curve は
一般に sinusoidal curve と
異なる。
振幅は小さくて、$\varepsilon \ll 1$ とおくと、
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$



$\tan\theta = -\frac{y}{z}$
$\tan\theta' = -\frac{y}{z} + \varepsilon\left(\pm - \frac{z^2}{3}\right)$





©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$ 4

$= \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x$ 131

$= \cos x \cdot \{\cos^2 x - 3\sin^2 x\}$

$= 4\cos x(-3 + 4\cos^2 x)$

$\cdot z\frac{dz}{dy} + y \simeq 0.$

これが、a y-z curve は circle のようだ。

そこで、

$y = A\sin(x+\delta)$

$z = A\cos(x+\delta)$ $+ \varepsilon \frac{du}{dx}$

とおくと、

$\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} - \{(A\sin\cos(x+\delta)\sin x)$

$-\frac{1}{3}(A\cos(x+\delta)\}+\varepsilon u = 0$

$A\cos 3x$

$u = CA\sin 3(x+\delta)$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

さて E のおしごとが $\oint E = 0$ であるから

$$E = -\operatorname{grad}\varphi$$

なるポテンシャル φ を考へることができる。それを(208)を線状の導体に適用すれば、線に沿つて

$$\frac{I_s}{\sigma} = -\frac{\partial\varphi}{\partial s} + E_s^e \qquad (212)$$

が成立する。これを線上の点 P_1 から P_2 まで線に沿つて積分すれば、(211)を用ひて

$$J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 E_s^e\, ds \qquad (213)$$

が得られる。

P_1 から P_2 までの間に起電力がないときには(213)の右辺第二項は0となり、簡単な次のやうに表はすことができる。即ち、

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}, \qquad (214)$$

但し、

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{\sigma q}. \qquad (215)$$

P_1 から P_2 までの

R_{12} は導線の各部における比抵抗と、その幾何学的形状によつて定まる量で、二点の電位差と電流の比になつてゐる。それ故、R は二点の抵抗を表はし、(214)は Ohm の法則を積分形で表はしてゐる。

切口の等しい一様な材質の抵抗は、長さを l とすれば、(215)から直ちに

$$R = \frac{l}{\sigma q} \qquad (216)$$

なる(よく)知られた関係が得られる。*

(213)を一つの閉ぢた回路に適用すると、P_1 と P_2 とが一致し、$\varphi_1 = \varphi_2$ となるから、

$$J\oint \frac{ds}{\sigma q} = \oint E_s^e\, ds.$$

が得られる。これは又次のやうに書くことができる。

$$J = \frac{V^e}{R'}, \qquad (217)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$V_{ab}^{e} = \oint E_s^{e}\, ds \qquad (218)$$

$$R' = \oint \frac{ds}{\sigma q}. \qquad (219)$$

こゝに V^e は，R' は夫々回路の有効電力及び有効抵抗を表はしてゐる．

次ゝ線状の導体を色々に接続してできた網状回路について考へて見よう．先づオームの分岐点に於て入る電流の總量と出る電流の總量とは相等しくなつてゐる．即ち，一つの分岐点へ入る電流と出る電流とを夫々正負の電流として表はすとき，

$$\sum J_i = 0 \qquad (220)$$

なる関係が成立する．このことは電流にはさる許溜点がないといふことから明らかである．次ゝ網状回路の中の任意の一つの閉ぢた回路について ~~(213) を適用~~ して考える．ついて (212) を積分して見る．このとき分岐点へ達する毎ゝ一般に電流 J は値を変へる．又ポテンシャル φ は一周すると再び元の値に戻るから，結局

$$\sum_k J_k \int_{C_k} \frac{ds}{\sigma q} = \sum_k \int_{C_k} E_s^{e}\, ds.$$

左辺の積分は k 番目の導線部分の抵抗，右辺の積分は ~~k番目~~ その部分に存在する動電力に等しいから，これ等を夫々 R_k, V_k^e で表はせば，

$$\sum_k J_k R_k = \sum_k V_k^{e} \qquad (221)$$

なる関係が得られる．即ち，網状回路中の任意の一つの閉ぢた回路について各部分の電流と抵抗との積の總和をとれば，これがその回路中に存在する有効電力に等しい．

(220) 及び (221) は夫々普通 Kirchhoff の第一法則及び第二法則と呼ばれてゐるものである．これらの法則を用ひると複雑な網状回路の電流を計算することができる．

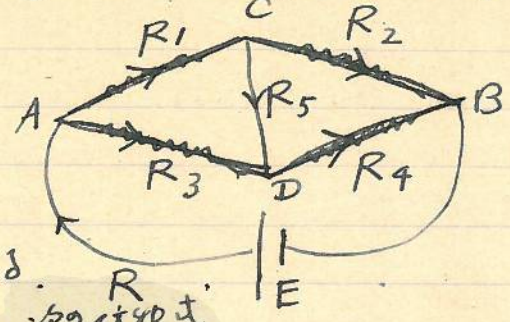
© 2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

例1. Wheatstone 橋 ~~に於ける電流分布~~

13K

図は Wheatstone 橋の略図で、e を中心の電動力 V^e 抵抗の大きさが

~~夫々~~ R, R_1, R_2, R_3, R_4 及び R_5 で、電流は矢の方向に夫々 J, J_1, J_2, J_3, J_4 及び J_5 であるとする。



第35図

Kirchhoff の第一法則から、次の4方程式

$$J = J_1 + J_3 = J_2 + J_4,$$
$$J_5 = J_1 - J_2 = J_4 - J_3$$

~~の4方程式が~~ 得られる。また第二法則を ACD 及び ACBE の回路に適用すると、

$$J_1R_1 + J_5R_5 - J_3R_3 = 0.$$
$$J_1R_1 + J_2R_2 + JR = V^e$$

なる2方程式が得られる。上の6方程式から $J, J_1, \cdots J_5$ の6個の未知量 ~~が~~ を求めることができる。

容易に

特に $J_5 = 0$ のときには、$J_1 = J_2$, $J_3 = J_4$ となり、

$$J_1R_1 = J_3R_3$$
$$J_2R_2 = J_4R_4$$

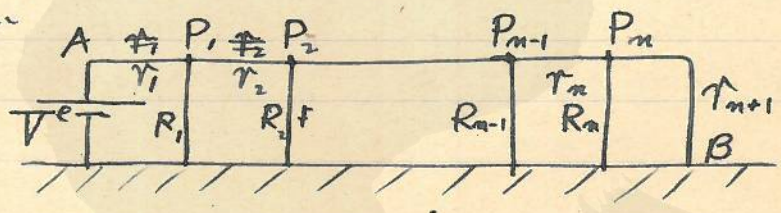
なる関係が成立 ~~し、$J_1 = J_2$~~ するから、これから

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

が得られる。これは ~~等価~~ Wheatstone 橋を ~~用いて~~ 使って未知抵抗を測る場合に用いる ~~ので~~ よく知られた ~~もの~~ 関係である。

例2. 電気漏洩のある電信線

A と地面との ~~間に起電力 V^e~~ の電池があって A から B への電信線と ~~地面~~ 土地とよりなる回路に電流が通るものとする。



第36図

電信線上の $P_1, P_2, \cdots P_n$ なる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

諸点では電柱等とのそとの絶縁物より電気漏洩があるものとし，それらの諸点と地面との電気抵抗を夫々$R_1, R_2, \cdots, R_n$．また$AP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}P_n, P_nB$の間の抵抗を夫々$r_1, r_2, \cdots r_n, r_{n+1}$とする．$P_n$と地面とのあいだは$R_n$と$r_{n+1}$との2つの抵抗が列に続いていることになるから，その合抵抗は

$$\frac{1}{\frac{1}{R_n}+\frac{1}{r_{n+1}}}$$

である．P_{n-1}からP_nを経て地面に至る合抵抗は

$$r_n+\frac{1}{\frac{1}{R_n}+\frac{1}{r_{n+1}}}$$

で，これとR_{n-1}の抵抗とがP_{n-1}と地面とのあいだに列に続いていることになる．それ故その合抵抗は

$$\frac{1}{\frac{1}{R_{n-1}}+\frac{1}{r_n+\frac{1}{\frac{1}{R_n}+\frac{1}{r_{n+1}}}}}$$

となる．これを連分数の形で書けば次のようになる．

$$\frac{1}{R_{n-1}^{-1}+\frac{1}{r_n}\cdot\frac{1}{R_n^{-1}+\frac{1}{r_{n+1}}}}$$

このようにしてAと地面とのあいだの合抵抗を求めると，結局

$$r_1+\frac{1}{R_1^{-1}+\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{R_2^{-1}+\cdots+\frac{1}{r_n}\cdot\frac{1}{R_n^{-1}+\frac{1}{r_{n+1}}}}}$$

となる．電池の起電力が与えられると，AP_1間の電流が求め得られ，また順次に各部分の電流をも求めることができる．

しかし電信線中の各部分の電流の強さ或は電位が問題になる場合には，むしろ次のようにすればよい．

$A, P_1, P_2, \cdots P_n, B$の電位を夫々$V_0, V_1, \cdots V_{n+1}$とすると

P_{k-1}からP_kへの電流は$\frac{V_{k-1}-V_k}{r_k}$，

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

P_k から P_{k+1} への電流は $\dfrac{V_k - V_{k+1}}{r_{k+1}}$

空気漏洩を通っての

P_k から地面への電流は $\dfrac{V_k}{R_k}$

で、P_k 点において Kirchhoff の第一法則を適用すると、

$$\frac{V_{k-1}-V_k}{r_k} - \frac{V_k - V_{k+1}}{r_{k+1}} - \frac{V_k}{R_k} = 0,$$

或は、

$$\frac{V_{k+1}}{r_{k+1}} - \left(\frac{1}{R_k} + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{k+1}}\right) V_k + \frac{V_{k-1}}{r_k} = 0,$$

$k = 1, 2, \cdots, n$

が得られる。これらの n 個の方程式から $V_1, V_2, \cdots V_n$ が求め得られる。