NOTE-BOOK

量子力学
第四巻

湯川秀樹

N52

~~一般ニ~~

H' ノ eigenvalue ハ（H_0 ノ eigenvalue ニ比シテ）小：

$$H' = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\phi_b H' \cancel{\psi_a} = \sum b_\nu \varphi_\nu \cdot H' \cdot \sum a_\nu \psi_\nu = \sum_\nu H'_\nu b_\nu a_\nu$$

故ニ H'_ν ノ最大ナルモノヨリ小：

$$\phi_b H' \psi_a$$

N52

§ Perturbation Theory

幾ツカノ互ニ作用シテ居ル dynamical system ノ集リヲ一ツノ system ト考ヘレバ、之ニ對スル Hamiltonian ハ

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i + \sum_{i<j} H_{ij}$$

ナル形ニ書ケル。但シ H_i ハ N個ノ system 中 i 番目ノモノノ Hamiltonian、H_{ij} ハ i 番目ノ system ト j 番目ノ system トノ interaction ノ energy ヲ表ハス。

従ッテ $\sum_{i=1}^{N} H_i = H_0$　$\sum_{i<j} H_{ij} = H'$ トオケバ

$$H = H_0 + H'$$

ソコデ一般ニ dynamical system ガ perturbation ヲ受ケル場合ハ ~~常ニ之ノ如キノ Hamiltonian ハ~~

~~$H = H_0 + H'$~~

~~ナル形ニカケル。但シ H_0 ハ syst~~ perturbation ヲ考ヘヌ場合ノ system ノ Hamiltonian ヲ H_0 ~~[illegible]~~ perturbation ノ Hamil ヲ H' トスレバ、~~[illegible] energy ヲ [illegible] term ヲアラハス~~。system ノ Hamil ハ常ニ $H = H_0 + H'$ ナル形ニカケル。

サテモシモ (system ノ間ノ) interaction 又ハ (一般ニ) perturbation ガ存在シナカッタナラバ system ノ任意ノ state ψ_0 ハ

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = H_0 \psi_0$$

ノ solution ト考ヘラレル。

perturbation H' ガ存在スル場合ニハ ψ_0 ハモハヤ system ノ state ヲアラハシテ居ナイ。何故ナラバ [illegible] 時間ト共ニ [illegible]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\phi\psi) = \phi\cdot H\psi - \phi H\cdot\psi = 0.$$

従ッテ $i\hbar\int H'_{qp}\,dt = \phi_q\int i\hbar H'dt\cdot\psi_p$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}H'_{qp} = -\phi_q H_0 H'\psi_p + \phi_q H'H_0\psi_p + \phi_q\left(i\hbar\frac{\partial H'}{\partial t}\right)\psi_p$$
$$= \phi_q\left(H_0H' - H'H_0 \cancel{\psi_p} + i\hbar\frac{\partial H'}{\partial t}\right)\psi_p$$

H'ガ ナケレバ ~~ヨルナラバ~~ ~~従ッテ H'_{qp} ハ既ニ~~
~~time ニ depend~~シナイ。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}H'_{qp} = \phi_q\left(i\hbar\frac{\partial H'}{\partial t}\right)\psi_p$$

systemノstate ~~ノSchrödingerノrepresentation~~ ガ ψ。
ニナル ト 一致シテ居ルトシテモ．次ノ瞬間ニハソレハ互ニ異ナッテ居ル。

今 perturbationガナイ場合ノ systemノstateヲ互ニ orthogonalナモノノ complete set ψ_p ニヨッテ systemノ任意ノ stateヲ expandスレバ

$$\psi = \sum a_p\psi_p$$

ψ 及ビ ψ_p ガ共ニ normalize サレテ居レバ

$$\sum_{\alpha'}|a(\cancel{\alpha'})_p|^2 = 1$$

之ヲ ψ ノ満足スベキ式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (H_0+H')\psi$$

ニ入レレバ， ~~$i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial t} = H_0\psi_p$ ナルニヨリ~~

$$i\hbar\sum_p\dot{a}_p\psi_p + \sum_p a_p i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial t}$$
$$= \sum_p a_pH_0\psi_p + \sum_p a_pH'\psi_p$$

然ルニ ~~$i\hbar\, a$~~ $i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial t} = H_0\psi_p$ ナルニヨリ

$$i\hbar\sum_p\dot{a}_p\psi_p = \sum_p a_pH'\psi_p$$

両辺ニ ϕ_q ヲカケレバ，

$$i\hbar\dot{a}_q = \sum_p a_pH'_{qp}$$

但シ　$H'_{qp} = \phi_qH'\psi_p.$

$p \to q$ ノ transi. prob ハ
$q \to p$ ノ 〃 〃 ニ等シイ

即チ係数 a_p ハ ~~const~~ time ト共ニカハル量デアルトイフ事デアル。即チ ~~此ノ際ニ system ガ~~ perturbation ~~ノ為ニ system ハ其ノ state ヲ一ツニ~~ ノ為ニ system ハ一ツノ定マッタ state ニ止マラナイ。他ノ state ヘノ transition ガ可能トナル。其ノ transition ノ probab ハ $|H'_{pq}|$ ノ大小ニ ~~依ッテ~~ ~~カカッテヰル~~。＝従ッテ大キサガカカッテヰル。

time t ニ於テ system ガ ψ_p ナル state ニアル prob ハ $|a_p|^2$ デアル

今 $t=0$ ニ於テ system ガ ψ_0 ナル state ニアッタトスレバ、

$$a_0 = 1 \qquad a_p = 0 \quad (p \neq 0) \quad \text{for } t=0.$$

ソレカラ time t ニ於テ a's ノ値ハ $|H'_{pq}|$ ガ小サク、t ガアマリ大キクナイナラ、a's ノ値ガ $t=0$ ノ値トアマリカハラヌ故

ソレ

$$i\hbar \dot{a}_q(t) = \sum a_p(0) H'_{qp} = H'_{q0}$$

ト書イテヨイカラ

$$i\hbar a_q(t) = \int_0^t H'_{q0}\, dt$$

従ッテ t ニ於テ system ガ q ナル state ニアル prob. ハ

$$P_q \quad |a_q(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t H'_{q0}\, dt \right|^2.$$

ナル形トナル。

ソレ 0 ナル state カラ time t ノ間ニ q ナル state ~~ニ~~ ヘ transition ~~スル~~ ノ起ル ~~Trans~~ prob デアルトイッテモヨイ。

一般ニ　$P_{qp}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t H'_{qp} \right|^2$

然ニ ψ_p トシテ perturbation ノナキ時ノ system ノ stationary state ヲトル。

$$i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial t} = H_0\psi_p = \cancel{H_{pp}}\, W_p\psi_p$$

但 W_p ハ ψ_p ニ対スル H_0 ノ eigenvalue トス。
上ノ場合ハ Schrödinger ノ representation ヲトッタガ，
之ヲ Heisenberg ノ representation ニ直スニハ
ψ_p ノカハリニ $\psi_p e^{\frac{i}{\hbar}W_p t}$ トトレバヨイ。
ソレハ $i\hbar\frac{\partial(\psi_p e^{\frac{i}{\hbar}W_p t})}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\cdot - W_p\psi_p$

従ッテ

$$i\hbar\sum \dot{a}_p\psi_p e^{\frac{i}{\hbar}W_p t} = \sum a_p W_p\psi_p e^{\frac{i}{\hbar}W_p t} + \sum a_p H'\psi_p e^{\frac{i}{\hbar}W_p t}$$

故ニ $i\hbar\dot{a}_q = W_q a_q + \sum_p H'_{qp} e^{\frac{i}{\hbar}(W_p - W_q)t} a_p$

トナル。 H'_{qp} ハ perturbation ~~energy~~ energy ノ
Heisenberg ノ representation デアル。従ッテ
perturbation ガ存在スル時ハ之レハ time ニ depend スル。

~~H'_{qp} ガ小サイ時ハ 之ハ然シ time ニ depend スル~~
~~故 repr ニハ 従ッテ time ニ depend スルカラ~~

T ハ Schrödinger ノ rep デアル system ノ state ノ rep a_p^*

$$i\hbar \frac{\partial a_q^*}{\partial t} = H_{qp}^* a_p^*$$

or $$i\hbar \frac{\partial a_q^*}{\partial t} = H^{(0)}_{qp} a_p^* + H'^*_{qp} a_p^*$$

今 perturbation ノナイ時ノ system ノ stationary state ヲ fund. state トスレバ. $H^{(0)}_{qp} = H^{(0)}_q \delta_{qp}$.

$$a_q^* = e^{-\frac{i}{\hbar}H_q t} a_q$$

トスレバ Heisenberg ノ repres ニナル.

$$i\hbar \dot{a}_q = H'_{qp} a_p$$

但シ $$H'_{qp} = H'^*_{qp} e^{-i\hbar(H_q^0-H_p^0)t}$$

$\cancel{i\hbar \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = H\psi_p}$

然シ ψ_p トシテ perturbation ノナイ時ノ system ノ stationary state ヲ取レバ、 H'_{qp} ハ perturbation energy ノ Heisenberg ノ representation デアル。

H' ガ time ヲ explicit ニ含マヌ場合ニハ

$$H'_{qp} = (H'_{qp})_0 e^{-i/\hbar (H_q^0-H_p^0)t}$$

但シ $(H'_{qp})_0$ ハ time ニ depend セヌ。

従ッテ $$\int_0^t H_{qp}\, dt = (H'_{qp})_0 \int_0^t e^{+i/\hbar (H_q^0-H_p^0)t} dt$$

$$= (H'_{qp})_0 \frac{e^{+i(H_q^0-H_p^0)t/\hbar}-1}{i(H_q^0-H_p^0)/\hbar}$$

∴ $$P_{qp} = 2|(H'_{qp})_0|^2[1-\cos\{(H_q^0-H_p^0)t/\hbar\}]/(H_q^{(0)}-H_p^{(0)})^2$$

但シ $H_q^{(0)} \neq H_p^{(0)}$

$H_q^{(0)}$ ト $H_p^{(0)}$ トガ相当異ナル場合ニハ
ソノ値ハ time ト共ニ変ルガ小サイ。之ハ energy ノ conservation ノ law ヲ表ハス。

特ニ $H_q^{(0)} = H_p^{(0)}$ ノ場合ニハ

$$P_{qp} = |(H'_{qp})_0|^2 \frac{t^2}{\hbar^2}$$

附テ ψ_p ガ continuous range ヲ有スル場合ニハ

P_{qp}

H′ガ小ナル場合

$|H'_{qp}|$ ガ小サイ時、~~…~~ W ガ unperturbed system ノ一ツノ energy value H^0_q ニ近イ値ヲトル時ハ、H^0_q ニ近イ eigenvalue H^0_s ト遠ク離レタ eigenvalue H^0_t トヲ区別シテ考ヘル。即チ $|H^0_q - H^0_s|$ ハ $|H'_{qp}|$ ノ order ~~…~~ デ $|H^0_q - H^0_t|$ ハ $|H'_{qp}|$ ヨリズット大キイトシテオク。

$$(W - H^0_t)\, a_t = \sum_s H'_{ts} a_s + \sum_{t'} H'_{tt'} a_{t'}$$

又 ~~…、a_s ガ~~

$$(W - H^0_s)\, a_s = \sum_{s'} H'_{ss'} a_{s'} + \sum_t H'_{st} a_t$$

ナル故、a_s ニ比シテ a_t ヲ neglect シ得ル。

$$\therefore \quad (W - H^0_s)\, a_s = \sum_{s'} H'_{ss'} a_{s'}$$

ナル式ヲ解ケバ H^0_q ニ近イ energy value W ヲ持ツ stationary state ψ ノ近似解ガ得ラレル。

従ッテ W ノ近似値ハ

$$\mathrm{Det}\{(W - H^0_s)\,\delta_{ss'} - H'_{ss'}\} = 0$$

~~…~~ 次ニ perturbation ガ time ニ depend セヌ場合、system ノ energy value W 及ビ之ニ対スル stationary state ψ ヲ展開シテ次ノ如ク

$$\psi = \sum a_p \psi_p$$

トオキ、

$$W\psi = H\psi$$

ニ入レテ、

$$W\sum_p a_p \psi_p = \sum H^0_p a_p \psi_p + \sum a_p H' \psi_p$$

両辺ニ ψ_q ヲカケテ積分シテ、

$$W a_q = H^0_q a_q + \sum_p H'_{qp} a_p$$

従ッテ system ノ energy ~~level~~ value W ハ a ノ聯立一次方程式ノ characteristic eq.

$$\mathrm{Det}\{(H^0_q - W)\,\delta_{qp} - H'_{qp}\} = 0$$

ノ根トシテ得ラレル。

~~H'_{qp} ニ就キ一次式ノ第一近似解ヲ得ルニハ~~ ~~H'_{qp} ガ小サイ時ニハ~~ 今 W ガ perturbation ヲ除イタ時ノ energy value ノ一ツ H^0_{q} ニ近イ値ヲトルトシタナラバ $|H^0_q - H^0_r|$ ガ普通 $|H'_{qp}|$ ニ比シテ大キイ場合ニ於テハ

所謂 … H^0 ナル eigenvalue ニ対スル state ガ幾ツモアル時、即チ degeneration ノアル時ニハ、1st app. ノ式ニ於テ ~~…~~

$H^0 = H^0_s = H^0_{s'}$ トナル s, s′

~~$\mathrm{Det}\{(W - H^0_s)\,\delta_{ss'} - H'_{ss'}\} = 0$~~ ヲ解クコトニナル。

~~first energy value~~ H^0 ナル eigenvalue ニ対スル state ガ一ツシカナイ時ニハ、$H^0 = H^0_s$ トスレバ

$$W - H^0_s = H'_{ss}$$

即チ unperturbed system ノ一ツノ stationary state ニ於ケル perturbation ノ energy ノ平均値ガ 1st app. トシテ perturbation ニヨル system ノ energy ノ change ヲ与ヘル。

$$\mathrm{rot}.\mathrm{rot}\,A = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}$$
$$= -\Delta A_x + \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,A$$
$$= \mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,A - \Delta A.$$

今例ヘバ volume V ヲ完全ニ反射スル壁ヲ以テ囲マレタ容器内ノ field ヲ考ヘル場合ニハ外壁ノ所デ E ガ壁ニ
~~$E = \sum q_i A_i$ $E=0$ or $A=0$~~
垂直, 従ッテ A ガ壁ニ垂直デナケレバナラヌ。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\mathrm{rot}\left(E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$
$$E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\Phi$$

div E

Chap. VI. Interaction of Matter and Radiation

§ ~~Quantisation of wave equation~~ Quantisation of ~~Maxwell's equation~~ electro-magnetic field

classical el. dynamics ニ於テハ electro-magnetic field ハ Maxwell ノ field eq. (E, H)

$$\mathrm{div}\,H = 0 \qquad \mathrm{rot}\,E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$
$$\mathrm{div}\,E = 0 \qquad \mathrm{rot}\,H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

ヲ満足セネバナラヌ。

~~ココ~~ $E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ $\quad H = c\cdot\mathrm{rot}\,A$ トオケバ

初メノ二ツノ式ハ満足サレル。後ノ二ツガ満足サレルタメニハ A ハ

$$\mathrm{div}\,A = 0, \qquad \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

ヲ満足スレバヨイ。ト

$$A = \sum_\nu a_\nu A_\nu$$

ト~~オケバ~~

~~$\mathrm{div}\,A_\nu = 0 \qquad \Delta A_\nu$~~

ソコデ $\mathrm{div}\,A_i = 0 \qquad \Delta A_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} A_i = 0$ A_i ハ壁ニ垂直

ヲ満足スル~~任意~~ solution ヲ A_i トスレバ (互ニ orthogonal ナモノ complete set)

$$A = \sum_\nu q_i A_i$$

トスレバ. a_ν ハ

$$\ddot{q}_i + 4\pi^2\nu_i^2 q_i = 0$$

ヲ満足セネバナラヌ。

尚 $\int_V (A_i A_k)\,dV = \delta_{ik}\cdot 4\pi$

ニ依ッテ normalize シテオクコトニスル。

$\mathrm{rot}\,A_i\,\mathrm{rot}\,A_k = \cancel{\cdot\ \mathrm{rot}}$

$$\int A_k(\Delta A_i - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,A_i)\,d\tau = \frac{\nu_i^2}{c^2}\int A_k A_i\,d\tau$$

$$\int\left(\frac{\partial A_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{ix}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial A_{ky}}{\partial x} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial y}\right) +$$

$$= \int A_{iy}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_{ky}}{\partial x} - \frac{\partial A_{kx}}{\partial y}\right) - A_{iy}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_{kz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{ky}}{\partial z}\right) + \cdots$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial x}\{A_{iy}(\ \ )_z - A_{iz}(\ \ )_y\}$$

$$= -\int A_{iy}\,(\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,A_k)_y$$

$$+\int \mathrm{div}\,[A_i\,\mathrm{rot}\,A_k]$$

$\quad\ \ \|$
$\quad\ \ 0.$

$[A_i\,\mathrm{rot}\,A_k]_n = 0.$

$$H_i = \frac{1}{2}\nu_i\left\{\left(\frac{p_i}{\sqrt{\nu_i}}\right)^2 + (\sqrt{\nu_i}\,q_i)^2\right\}$$

$\mathbf{E} = -\sum \dot{q}_i \mathbf{A}_i \qquad \mathbf{H} = c\sum_i q_i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_i$ トスレバ

Field ノ energy ハ

$$\frac{1}{8\pi}\int_V(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\,dV = \frac{1}{2}\Big\{\sum_i \dot{q}_i^2 + c^2 q_i q_k \frac{1}{4\pi}\sum_{ik}\int_V(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_k)\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i(\dot{q}_i^2 + \cancel{4\pi^2}\nu_i^2 q_i^2)$$

ソコデ $\dot{q}_i = p_i$ ~~トオケバ~~ 従ッテ $\mathbf{E} = -\sum p_i \mathbf{A}_i$

$$\dot{p}_i = \nu_i^2 q_i$$

従ッテ $\quad H = \frac{1}{2}\sum_i(p_i^2 + \cancel{4\pi^2}\nu_i^2 q_i^2) = \sum_i H_i$

~~トオクト~~, トスレバ eq. of motion ハ

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

[illegible] Hohlraumstrahlung ハ 無限ニ 多クノ Harmonic Oscillator ノ集リト考ヘラレル。

Quantum Mechanics ノ一般ノ principle ニ従ッテ ~~canoni~~ $p_i\,q_i$ ~~従ッテ H~~ 従ッテ H ヲ non commutative ナ量トシ. ~~$p_i q_i - q$~~ $q_i p_k - p_k q_i = i\hbar\,\delta_{ik}$ トスレバ. ~~H ノ eig~~

$$H_i = \frac{1}{2}(p_i^2 + \cancel{4\pi^2}\nu_i^2 q_i^2)$$

ノ eigenvalue ハ $H_i' = h\nu_i(n_i + \frac{1}{2})$ $\quad n_i$: 0 or pos. int.

従ッテ $H = \sum_i h\nu_i n_i + \frac{1}{2}\sum_i h\nu_i$

後ノ項ハ [illegible] field ノ状態ニ関係セヌ const デアルカラ, コレヲ省イテ $H = \sum_i h\nu_i n_i$ ~~トシテ~~ $= \frac{1}{2}\sum(p_i^2 + \nu_i^2 q_i^2 - h\nu_i)$ トオケバヨイ。

~~撫~~ ソシテ ~~次ノ~~
ニ,ニオイテ　$A = \sum_i q_i A_i$　　$E = -\sum_i p_i A_i$

~~互ニ~~ commute シナイコトヲ意味スル。從ッテ
~~ソシテ~~ ~~EA−AE~~ ハ vibration ノ amplitude
q_i 及ビ p_i ガ 互ニ commute シナイ量ト考ヘルコトデ
アル。ソシテ ~~A 及ビ E~~ field ハ 普通ノ electromagnetic
wave ノ superposition ト考ヘラレルガ、~~其 discrete~~
~~intensity ガ 其 discrete ナ値ヲトル~~ amplitude ガ
普通ノ數デナク、ソシテ互ニ commute シナイ量デアル
ト考ヘル。然ナ wave ノ super ~~其レ~~ ニシテ field ヲ quantise
スルト ~~和~~ 稱シテヨイ。
~~ソシテ ソレハ Radiation ハ light quanta ノ集リ~~
~~ト考ヘテモヨイシ、又 quantised field ト考ヘテモヨイ。~~
~~兩者ノ考ヘ方ガ一致スルタメニハ light quantum ニ~~
~~對スル wave equation ハ 附近ニ maxwell ノ eq ト~~
~~equivalent デナケレバナラヌ。故ニ wave eq ハ max ノ~~
~~附近ノ light quantum ニ對スル wave eq ト見ナケレバ~~
~~ナラヌ~~

内

今 J_i ノ代リニ $J_i/\hbar = n_i$ ヲ使ヘバ

$$e^{-iw_i} n_i - n_i e^{-iw_i} = e^{-iw_i}$$

$$p_i = \left(\frac{h\nu_i}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(n_i^{\frac{1}{2}} e^{iw_i} + e^{-iw_i} n_i^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_i = \cancel{(2h\nu_i)^{\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{h}{2\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-i n_i^{\frac{1}{2}} e^{iw_i} + i e^{-iw_i} n_i^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$H = \sum_i h\nu_i n_i + \frac{1}{2}\sum_i h\nu_i$$

$$n_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad e^{+iw_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad n_i e^{+iw_i} = \begin{pmatrix} \cdot & & & \\ 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$e^{+iw_i} n_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$n_i^{\frac{1}{2}}(n_i' | e^{iw_i} | n_i') =$$

即ニ Harmonic Oscillator ノ集合ヲモツテ表ニ p_i, q_i ノ代リニ J_i, w_i ヲ用ヰル。

然レバ $H_i = 2\pi\nu_i J_i + \frac{1}{2}h\nu_i$

$$J_i' = 0,\ \hbar,\ 2\hbar,\ \cdots$$

$$e^{iw_i} J_i - J_i e^{iw_i} = \hbar e^{-iw_i}$$

然ル、 $p_i = (\pi\nu_i)^{\frac{1}{2}}\left(J_i^{\frac{1}{2}} e^{iw_i} + e^{-iw_i} J_i^{\frac{1}{2}}\right)$

$$q_i = \frac{1}{2\pi}(4\pi\nu_i)^{\frac{1}{2}}\left(-i J_i^{\frac{1}{2}} e^{iw} + i e^{-iw} J^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$H = \sum_i 2\pi\nu_i J_i + \frac{1}{2}\sum_i h\nu_i$$

終リノ項ハ c.s.+ additive constant ~~デアルカラ~~ デ、之ハ省イテモ差支ナイ。

J_i ハ互ニ commute スル constant of motion デアル。field ノ ~~状態ニ於ケル~~ stationary state ハコレラノ simultaneous eigenstate トシテ与ヘラレル。

次ニ matter ガ存在シテ居リ、之ガ radiation ト interact シテ居ル場合ニハ、matter ト radiation トカラナル system ノ Hamiltonian ハ

$$H = \underbrace{\sum_i 2\pi\nu_i J_i}_{H_s} + H_m + H' + \text{const}$$

但シ H_s ハ field ノ energy デ

$$H_s = \cancel{\sum_i \ldots} \sum_i h\nu_i n_i$$

H_m ハ material system ノ energy. H' ハ interaction ノ energy.

コレハ matter ト field ノ interaction ノナイ場合ノ stationary state ハ n_i ノ eigenvalue n_i' ~~及~~ material system ノ互ニ commute スル constant of motion α's ノ eigenvalue α's ニヨッテ characterise サレル。

今 ψ_p ナル state ノ n_i, α ノ値ヲ n_i', α'

ψ_q 〃 n_i'', α''

トスレバ、H' ナル interaction ノ存在スルトキ ψ_p ~~ナル~~ state カラ ψ_q ナル state ヘノ transition ノ prob ハ　$H'_{qp} = (n_i''\alpha''|H'|\alpha', n_i')$

$$P_{pq} = \frac{1}{\hbar^2}\, 2\, |(n_i''\alpha''|H'|\alpha', n_i')_0|^2 \times \{1-\cos(H_q^0 - H_p^0)t/\hbar\} / (H_q^{(0)} - H_p^{(0)})^2$$

§ Emission and Absorption of Radiation　for $H_q^0 \neq H_p^0$

classical theory ニ於テ material system ト field トノ interaction ノ energy ハ

$$H' = \int_V \mathbf{A}\, \mathbf{I}\, dv$$

デ与ヘラレル。但シ $\mathbf{I}$ ハ current density デ matter ニ関係シテ居ル。

$$H_p^0 = \sum n_i' h\nu_i + \cancel{H} H_m'$$

$$H_q^0 = \sum n_i' h\nu_i + h\nu_j + H_m''$$

従ッテ　$\frac{1}{\cancel{4\pi}} \int_V A_i \mathbf{I} \, dV = W_i$

故ニ　$H' = \sum q_i W_i$

而シテ $(n_i'' \alpha'' | H' | n_i' \alpha') = \sum_i (n_i'' | q_i | n_i')(\alpha'' | W_i | \alpha')$

然ルニ q_i ~~ナル~~ matrix element ノ 0 デナイモノハ
$n_i'' = n_i' \pm 1$ ノ時ノミ

$$(n_i' \cancel{\pm} 1 | q_i | n_i') = (\cancel{2h\nu_i} \tfrac{h}{2\nu_i})^{1/2} \{ -i (n_i'+1)^{1/2} \cancel{+ \ldots} \}$$

$$(n_i' - 1 | q_i | n_i') = (\cancel{2h\nu_i} \tfrac{h}{2\nu_i})^{1/2} \, i \, n_i'^{1/2}$$

最初 material system ガ α' ナル state ニアリ、各 ~~eigenstate~~ schwingung state ニアル light quanta ノ数ガ夫々 n_i' デアッタトスル。time t ノ間ニ material system ガ α'' ナル state ニ transition ヲ行ヒ、j 番目ノ state ニ於ケル light quanta ~~ガ j 番目ノ state ニ於ケル $h\nu_j$ ナル振動~~ ガ emit サレル prob. ハ

$$\overset{\frown}{P_e} = 2 |(n_j'+1 | q_j | n_j')|^2 |(\alpha'' | W_j | \alpha')|^2 \times \frac{[1 - \cos\{(H_m'' - H_m')/\hbar + 2\pi\nu_j\} t]}{\{(H_m'' - H_m') + h\nu_j\}^2}$$

$$= \cancel{4h\nu_j} \frac{h}{\nu_i} (n_j'+1) |(\alpha'' | W_j | \alpha')|^2 \times \cdots$$

R

$\left\{\frac{H_m'' - H_m'}{\hbar} + 2\pi\nu_j\right\} = x_j$

j番目ノ light quanta ガ一ツ absorb サレル probability

$$P_a = \frac{h}{\nu_i} n_j' |(\alpha''|W_j|\alpha')|^2 \times \cdots$$

事

次ニ $\alpha' \to \alpha''$ ナル transition ニヨッテ 振動数ガ $\nu_0, \nu_0+\Delta\nu_0$ ~~[illegible]~~ ノ間ノ ~~light~~ radiation ガ emit サレル prob ハ

$$P_e = h \sum_{\nu_0 \le \nu_j \le \nu_0+\Delta\nu_0} |(\alpha''|W_j|\alpha')|^2 (n_j'+1) \frac{1-\cos x_j t}{\nu_j(\hbar x_j)^2}$$

コノ値ハ ~~$x_j = 0$~~ $h\nu_0 \cong H_m''' - H_m''$ ノ時 非常ニ大キク~~ナル~~。又 ν_j ガコノ値ヨリハナレルニ従ッテ P_e ハ急激ニ ~~Hohlraum ガ大キイ時ニハ~~ 小サクナル。故ニ ν_j ノ凡テノ値ニツイテ sum up シタモノガ α' ナル state カラ α'' ナル state ヘノ transition ノ起ル prob ニナッテ、ソノ時 emit サレル ~~光~~ radiation ノ freq ハ ~~大体~~ 殆ンド常ニ Bohr ノ Frequency law

$$\nu_0 = \frac{H_m''' - H_m''}{h}$$

ニ従ッテ居ルコトガ分カル。

依ッテ $P_e = h \sum_{\nu_j=0}^{\infty} |(\alpha''|W_j|\alpha')|^2 (n_j'+1) \frac{1-\cos x_j t}{\nu_j(\hbar x_j)^2}$

ヲ計算スレバヨイ。

Hohlraum ガ非常ニ大キイ時ニハ field oscillation ~~vibration~~ ノ frequency ハ非常ニ接近シテ居ルカラ、之ヲ continuous ト見レバ、ν ト $\nu+d\nu$ ノ間ニアル state ノ数ハ

$$\lambda_x = \frac{L}{l}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{L}\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

$$\left(\frac{L}{c}\right)^3 \frac{2\times 4\pi\nu^2 d\nu}{\frac{c}{L}}$$

$$I = |\mathrm{I}|$$

$$h\frac{1}{4\pi}\frac{1}{3V}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{8\pi V\nu^2}{c^3\nu}\frac{1}{2\pi}\{1+n'(\nu)\}\int\frac{1-\cos xt}{x^2}dx$$

$$\frac{4\pi\nu}{3hc^3}(1+n'(\nu))d\nu$$

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi V\nu^2}{c^3}d\nu$$

~~ソレデ Σ ノ代リニ ∫ ヲ取レバ~~

$P_e = h\int$ ~~$\alpha''|W_j$~~

然ルニ $H_m''-H_m'/h=\nu$ ナル freq ニ対応スル波長 $\lambda=c/\nu$ ガ atom ノ dimension ニ比シテ大ナル場合ニハ ~~Iハ之ヲ~~ atom 内ニ於テ I ノ大ナル範囲デハ A_i ハ殆ンド constant デアルカラ A_i ノ値トシテ atom ノ nucleus ノ位置ニ於ケル値ヲ取レバ

~~$(\alpha''|W_j|\alpha') = \frac{1}{4\pi}A_i\int(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')$~~

~~ト~~ スレバヨイ。

ソレト $|(\alpha''|W_j|\alpha')|^2 = (\frac{1}{4\pi})^2 A_i^2 |(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')|^2$

$\int A_i^2 dv = 4\pi$ デアルカラ、A_i^2 ノ平均値ハ $\frac{4\pi}{V}$ トナル。又 A_i ト ~~$\int\mathrm{I}\,dv$ トノ積ハ $|A_i|$~~ $(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')$ ノ scalar product ノ絶対値ノ二乗ノ平均ハ $\frac{1}{3}|A_i|^2|(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')|^2$ トナルカラ 結局

$$|(\alpha''|W_j|\alpha')|^2 = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{3V}\cdot|(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')|^2$$

従ッテ

$$P_e = |(\alpha''|\int\mathrm{I}\,dv|\alpha')|^2 h\frac{1}{4\pi}\frac{1}{3V}\int\frac{1-\cos x(\nu)t}{\nu(h\cdot x(\nu))^2}(1+n'(\nu))$$

$$\times\left\{\frac{8\pi V\nu^2}{c^3}+n'(\nu)\right\}d\nu$$

$$P_e = |(\alpha''|q|\alpha')|^2 \frac{4\pi^2\nu_0 t}{3hc^3} \frac{4\pi^2 \nu_0^2}{h^2} \frac{c^3}{8\pi V \nu_0^2} \cdot \left(\frac{8\pi h V \nu_0^2}{c^3} + \frac{n'(\nu_0)}{V}\right)$$

$h\nu_0$

$$= \frac{24\pi^3}{3h^2} \left(\frac{8\pi h \nu_0^3}{c^3} + n'(\nu_0)/V\right)$$

t ガ $\frac{1}{\nu_0}$ ニ比シテ大ナル時ハ

$$\cong |(\alpha''|\int \Psi d\tau|\alpha')|^2 \frac{4\pi\nu_0}{3hc^3}\left(1+n'(\nu_0)\Big/\frac{8\pi V\nu_0^2}{c^3}\right)\int \frac{1-\cos xt}{x^2}dx$$

$$= |\quad|^2 \frac{4\pi\nu_0 t}{3hc^3}(1+n'(\nu_0))\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

$$= |\quad|^2 \frac{4\pi^2\nu_0 t}{3hc^3}\left(1+n'(\nu_0)\Big/\frac{8\pi V\nu_0^2}{c^3}\right)$$

~~逆ニ $\alpha''\to\alpha'$ セヌ~~
~~$\alpha'\to\alpha''$ ノ transition ニヨリ、振動数 ν_0 ナル Frequency ノ radiation ガ absorb サレル prob.~~

H(α')>H(α'') ナル時
コレガ time t ノ間ニ atomic system ガ α' ナル state カラ α'' ナル state ヘ transition ヲ行フ prob ヲ表ハス式デアル。コノ時 emit サレル radiation ノ frequency ハ殆ンド常ニ Bohr ノ frequency law ニヨッテ与ヘラレル

$$\nu_0 = \frac{H(\alpha')-H(\alpha'')}{h}$$

ニ近イ値ヲトル。

逆ニ時ニ ~~H(α)~~ α'' ナル state カラ α' ナル state ヘ transition ヲ行フ prob. ハ

$$P_a = |(\alpha'|\int \Psi d\tau|\alpha'')|^2 \frac{4\pi^2\nu_0 t}{3hc^3}\, n'(\nu_0)\Big/\frac{8\pi V\nu_0^2}{c^3}$$

デ、コノ時 absorb サレル radiation ノ frequency ハ殆ンド常ニ ν_0 ニ近イ値ヲトル。

既ニ存在シテヰル
P_e ト P_a ヲ比較シテミルト、P_a ハ $n'(\nu_0)$ 即チ ν_0 ナル frequency ノ ~~radiation~~ ガ light quanta ノ数ニ比例スル。

$$I = \frac{e}{m}\overset{\phi}{\cancel{A}}\,p\,\psi$$

$$I = -\frac{e}{m}i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{e}{m}i\hbar\,\phi(\alpha'')\,p$$

$$\dot{x}$$

$$-i\hbar\frac{e}{m}\int \psi\,\mathrm{grad}\cdot dv$$

$$-i\hbar\frac{e}{m}\phi(\alpha'')\frac{\partial\psi(\alpha')}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{q}$$

$$4\pi^2\hbar^2\cdot\nu_0^2|(\alpha'|q|\alpha')|^2$$

従テ ν_0ナル Freq. ノ light quanta ガ存在セヌ時ニハ absorp. ~~ノ起ル~~ ノ起ル Prob. ハ非常ニ小サイ。之ニ反シテ P_e ハ $1+n'(\nu_0)$ ニ比例スル故、タトヘ ν_0ナル Frequency ノ light quanta ノ存在セヌ時デモ transition ハ起ル、カヽル transition ヲ(non emission ノ) spontaneous ~~transition~~ or Emission ト称シ、ソノ Prob. ハ

$$P_s = \frac{4\pi^2\nu_0 t}{3hc^3}|(\alpha''|\int I\,dV|\alpha')|^2$$

デ与ヘラレル。

~~コレ等ノ起ル~~ カヽル spontaneous emission ノ, 現象的ナ ~~Einstein ノ~~ 説明ハ付カナイコトデアル。

ソレニ対シテ(存在スル) light quanta ノ number ニ比例スル所ノ stimulated emission or absorption ト称スル。

多クノ atom ガ(存在スル) radiation ト equilibrium ニアル時ニ、α' ナル state ニアル atom ノ数ヲ N'
α'' 〃 〃 N'' トスレバ、平衡ノ時ニハ(単位時間ニ) $N'\to N''$ ノ transition ノ起ル回数ト $N''\to N'$ 〃 〃 トガ等シクナケレバナラヌカラ、

$$N'P_e = N''P_a$$

$$\therefore\ \frac{N''}{N'} = \frac{P_e}{P_a} = 1+\frac{\cancel{n'(\nu_0)}\ 1\ \frac{8\pi V\nu_0^2}{c^3}}{n'(\nu_0)}$$

† Weisskopf und Wigner: Zs. f. Phys. 63, 1930, 54.

~~結果~~ 之レ atom ガ Boltzmann ノ統計ニ従フトスレバ

$$\frac{N''}{N'} = \frac{e^{-H(\alpha'')/kT}}{e^{-H(\alpha')/kT}} = e^{h\nu/kT}$$

従ッテ

$$n'(\nu_0) = \frac{\frac{8\pi V \nu_0^2}{c^3}}{e^{h\nu_0/kT} - 1}.$$

之ガ atom ト平衡ニアル radiation ノ各 frequency ノ distribution ヲ示シテ ~~Planck ノ~~ 式デアル。即チ light quanta 丈ノ平衡ノ考ヘトシテ求メタ式ト一致シ、共ニ Planck ノ Radiation formula ヲ与ヘル。

尚上ニノベタ様ニ Bohr ノ frequency law ハ暗示的ニ含マレテヰル。又 spectral line ガ有限ノ幅ヲモッテヰル。之ノ natural line breadth モ又理論的ニ計算出来ル。† (W

matter ト radiation ノ interaction ノ energy ハ ~~explicit~~ 前ニノベタ様ニ

$$\int A\,\mathrm{I}\,dv$$

ナル形デアラハサレルガ、之ハ spinning electron ノ場合ヲ考ヘナイ。

§

前ニ light quanta ハ Bose-Einstein ノ統計ヲ満足スル
particle ト見ラレルコトヲ述ベタ。前節デハ之ヲ更ニ
radiation ヲ harmonic oscillator ノ集リト見做シ(其ノ)
electromagnetic wave ノ amplitude (之ヲ q.M. ノ方法ニ依ッテ取扱ヒ)
ヲ noncommutative ナ量ト見タ。此ノ wave ヲ
普通ノ wave ト区別シテ quantised wave ト呼ブコトニスル。
然ルニ両方ノ見方ガ equivalent デアルコトヲ証明シ
(実際証明サレル)
タ。

~~Bose ノ統計ヲ満足スル同種ノ particles ノ集リノ~~
~~state ハ、個々ノ particle 等ガ如何ナル state ニアルカヲ~~
~~知ルコトニヨリテ、ソノ state ニ幾何ノ particles ガアルカニ~~
~~ヨッテ unique ニ定マッテヰル。~~
~~今個々ノ particle ニ就テ wave eq. ヲ~~
~~$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$~~
~~トシ H ノ eigenvalue 等ナル eigenstate ヲ ψ_i $i=1,2,\cdots$~~
~~トスレバ、system ノ state ハ i ナル state ニアル~~
~~particles ノ数 $n_i (i=1,2,\cdots)$ ニヨッテ決定~~
~~サレル。~~
~~n_i~~

今 i 番目ノ particle ノ state ヲ α_i ナル observable
ニヨッテ表ハストスレバ、system ノ(任意ノ) state ハ一般ニ
$\psi = (\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'/)$ ノ
$\psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')$

ト一致スルデアラウサレル。 ~~α_i' eigenstate ナル α_i ガ $\alpha^{(n)}$~~ ~~ニアタル α's ノ eigenstate ハ~~

~~ト eigenvalue~~ ~~syst~~ particles ガ Bose ノ統計ニ従フ system

ノ state ガ symmetric ナラバ。 ~~α's ノ内ノ1ツガ~~ ノ eigenvalue

eigenvalue $\alpha^{(K)}$ ヲトルカトイフコトニナル。 ソレ故ニ n_K

ヲ以テ, 任意ノ state ハ α's ノ eigenstate ノ superposition

ニシテ $n_K (K=1,2,\cdots)$ ノ値ニノミ依存スル

state ノ superposition トシテ表ハサレル。

即チ $(n_1', n_2', \cdots /)$

ト云フ形ニ表ハサレル。

~~system ノ任意ノ state ハ symmetric ナ state~~

particles ガ Bose ノ統計ニ従フ場合ニハ

system ノ任意ノ state ニ対シ

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \psi$$

ナル形ニ書ケル。

従ッテ $\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_\nu P_\nu\psi = \sum \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')(\alpha_1',\alpha_2',\cdots\alpha_N'/)$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum P_\nu\psi(\alpha_1'\cdots\alpha_N')\cdot(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'/)$$

然ルニ $\alpha_1'\cdots\alpha_N'$ ト $\alpha_1''\cdots\alpha_N''$ ガ順序ヲ除ケバ同ジ eigenvalue ヨリ成ル場合ニハ

$$\sum_\nu P_\nu\psi(\alpha_1'\cdots\alpha_N') = \sum_\nu P_\nu\psi(\alpha_1''\cdots\alpha_N'')$$

~~故ニ~~

$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_\nu P_\nu\psi =$

†先述ノ $P_\nu\psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots/)$ ノ中デ等シイモノハ

$\frac{N!}{n_1'!n_2'!\cdots}$ 個アル。

カカル等シイモノヲ sum up スレバ

$$\sqrt{\frac{1}{N!}}\sum\psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots/) = \frac{N!}{\sqrt{N!}\,n_1'!n_2'!\cdots}\times\psi(n_1'n_2'\cdots)$$

ヲ

従ッテ、 $\psi(n_1'n_2'\cdots)$

$$\cancel{\sum\sqrt{\frac{1}{N!}}\sum_\nu P_\nu\psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots/)(n_1''n_2''\cdots|S|n_1'n_2'\cdots)}(\alpha_1'\alpha_2'\cdots/)$$

$$\frac{\sqrt{N!}}{n_1'!n_2'!\cdots}\equiv\cancel{\frac{(n_1'!n_2'!\cdots)}{\sqrt{N!}}}\psi(n')(\alpha_1''\cdots\alpha_N''|S|\alpha_1'\cdots\alpha_N')\frac{N!}{n_1''!\cdots}(n_1'n_2''\cdots/)$$

$$(n'|S|n'') =$$

ヲ $\alpha^{(1)}$ ナル eigenvalue ガ n_1' … $\alpha^{(i)}$ ナル eigenvalue ガ n_i' 回ヅツアラハレル如キモノトスレバ、カカルモノノ数ハ

$$\frac{N!}{n_1'!n_2'!\cdots}$$

個アル。~~従ッテ~~ 之ヲ用ヒテ $\psi(n_1,n_2,\cdots)$ ト書クト

ここデ ψ = カカルモノニ就テ

$$\sum(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'/) = \sqrt{\frac{N!}{n_1'!\cdots}}(n_1'n_2'\cdots/)$$

~~トスレバ~~

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{N!}}\sum_\nu P_\nu\psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots/) = \psi(n_1'n_2'\cdots)$$

トスレバ、

$$\psi = \psi(n_1'n_2'\cdots)\sqrt{\frac{N!}{n_1'!\cdots}}(n_1'n_2'\cdots/)$$

トナル。†

次ニ ~~粒子ノ matrix~~ particles ニ関シテ symmetric ナル ~~operator~~ observable ヲ S トスレバ、Sψ ナル state ハ矢張リ sym.

~~$S\psi = \psi(n_1\cdots)$~~

$$S\psi(n_1'n_2'\cdots) = \psi(n_1''n_2''\cdots)(n_1''n_2''\cdots|S|n_1'n_2'\cdots)$$

ナル形ニ書ケル。一般ニ

$$S\psi = \sum_{n''n'}\psi(n_1'n_2'\cdots)(n_1''n_2''\cdots|S|n_1'n_2'\cdots)(n_1''n_2''\cdots/)$$

一方カラ云ヘバ

$$S\psi = \sum_{\alpha'\alpha''}\psi(\alpha_1''\cdots\alpha_N'')(\alpha_1''\cdots\alpha_N''|S|\alpha_1'\cdots\alpha_N')(\alpha_1'\cdots\alpha_N'/)$$

N個ノ similar 粒子 particles ノ互ニ commute スル observables ノ complete set ヲ夫々 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N$ トシ、system ノ state ヲ ソレラノ eigenstate ニヨッテ expand シ

$$\Psi = \sum_{\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'} \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'|)$$

トシヨウ。

然ルニ state ガ particles ニ関シテ symmetric ノ時ニハ

$$\Psi = \frac{1}{N!}\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \Psi$$

ナル事ヲ要ス[ル]。

ソレ故 $$\Psi = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha'}\left\{\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')\right\}(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'|)$$

ソコデ $\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')$ ナルモノヲ考ヘテミルニ、

$\alpha_1', \alpha_2', \cdots$ ガ凡テ異ナル時ニハ $P_\nu\psi$ ハ凡テ異ナルガ

~~今 α' ノ中ニ~~ $\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N'$ ノ中ニ 等シイモノガ n_k' ($k=1,2,\cdots$)

アッタトスレバ、$\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')$ ノ中ニハ同ジ

値ガ $(n_1'!\, n_2'!\, n_3'! \cdots)$ 個ヅツアル。ソレ故ソノ

中デ異ナルモノヲ ~~一個~~ ヅツ取ッタモノヲ $\sum' P_\nu \psi(\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_N')$

トスレバ、

$$\Psi = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha'}(n_1'!\, n_2'! \cdots)\sum' P_\nu\psi(\alpha')(\alpha'|)$$

$\psi' = \sum' P_\nu \psi(\alpha')$ ハ $\alpha_1'\alpha_2'\cdots$ ニ関シテ symmetric デ $n_1', n_2', \cdots$ ニヨッテ ~~unique~~ ニ定マル。ソレ故

$$\Phi'\Psi' = \frac{N!}{n_1'!\, n_2'! \cdots}$$

$$\psi(n_1', n_2', \cdots) = \left(\frac{n_1'!\, n_2'! \cdots}{N!}\right)^{1/2}\sum' P_\nu\psi(\alpha')$$

トスレバ

$$\Phi\psi(n_1', n_2', \cdots) = 1$$

スレバ、　$$\psi = \sum_{\alpha'} \psi(n'_1 n'_2 \cdots) \cdot \left(\frac{n'_1! n'_2! \cdots}{N!}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots |)$$

~~$\psi(n'_1 n'_2 \cdots)$ ノ係数ハ~~

$$= \sum_{n'} \psi(n'_1 n'_2 \cdots) \left(\frac{n'_1! n'_2! \cdots}{N!}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum{}' (\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots |)$$

但シ Σ' ハ ~~$(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots |)$ ニ就テ~~ $\alpha'_1, \alpha'_2 \cdots$ ノ中 n_1 個ガ $\alpha^{(1)}$ … ナル組合セニツイテ加ヘアワス。 カヽルモノハ

$$\frac{N!}{n'_1! n'_2! \cdots}$$

個アル故。

$$(n'_1 n'_2 \cdots |) = \left(\frac{n'_1! n'_2! \cdots}{N!}\right)^{\frac{1}{2}} \sum{}' (\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots |)$$

トオケバ

$$\psi = \sum_{n'} \psi(n'_1 n'_2 \cdots)(n'_1 n'_2 \cdots |)$$

ト書ケル。

次ニ i番目ノ particle ニノミ関スル observable S_i ヲ考ヘテミレバ、

$$(\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots | S_i | \alpha''_1 \alpha''_2 \cdots) = (\alpha'_i | S_i | \alpha''_i)\, \delta_{\alpha'_1 \alpha''_1} \cdots$$

~~$\alpha'_i = \alpha^{(k)}$　$\alpha''_i = \alpha^{(l)}$ トスレバ~~、

$\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots$ ノ中ニテ $\alpha^{(i)}$ ガ n'_i 個アリ ~~…~~ ト

$\alpha''_1 \alpha''_2 \cdots$　　$\alpha^{(i)}$ ガ n''_i　〃　〃　〃

トスレバ、 S_i ノ matrix ノ0デナイ値ハ、

~~$\alpha'_i = \alpha$~~ $\alpha'_1 = \alpha''_1 \cdots \alpha'_{i-1} = \alpha''_{i-1},\ \alpha'_{i+1} = \alpha''_{i+1} \cdots \alpha'_N = \alpha''_N$

ノ外ニ　$\alpha'_i = \alpha^{(k)}$, $\alpha''_i = \alpha^{(l)}$ トスレバ

$$n_j' - \delta_{jk} = n_j'' - \delta_{jl} \quad j = 1, 2, \dots$$

ここに　$n_1' = n_1''$ ~~$\dots$ $n_k' - 1 = n_k''$ $n_l' + 1 = n_l''$ $\dots$~~

これ以外の場合は0となる。

然るに ~~$(n_1' n_2' \dots | S_i | n \dots$~~ $(n_j' | S_i | n_j'' \cancel{- \delta_{jk} + \delta_{jl}}) = \varphi(n_j') S_i \psi(\dots)$

$$= \left(\frac{\prod_j n_j'! \, \prod (n_j'' \cancel{- \delta_{jk} + \delta_{jl}})!}{N!} \right)^{1/2} \sum' P_\nu \varphi(\alpha') \cdot S_i \sum'' P_\nu \psi(\alpha'')$$

で

$$\sum' P_\nu \varphi(\alpha') S_i \sum'' P_\nu \psi(\alpha'') \ [\text{illegible}] \ (\alpha^{(k)} | S_i | \alpha^{(l)}) \delta_{\alpha_i \alpha_i'} \cdots$$

従って　$n_j' - \delta_{jk} = n_j'' - \delta_{jl}$ [illegible]

$$(n' | S_i | n'') = 0$$

$n_j' - \delta_{jk} = n_j'' - \delta_{jl}$ の場合　$(\alpha^{(k)} | S_i | \alpha^{(l)}) = S^{kl}$

その項が　$\dfrac{(N-1)!}{\prod_j (n_j' - \delta_{jk})!}$ 個 [illegible]。

$$\therefore \quad (n_j' | S_i | n_j' - \delta_{jk} + \delta_{jl}) = \frac{\left(\prod n_j'! \, \prod (n_j' - \delta_{jk} + \delta_{jl})! \right)^{1/2}}{N!}$$

$$\times \frac{(N-1)!}{\prod_j (n_j' - \delta_{jk})!} \, S^{kl} = \frac{1}{N} n_k'^{1/2} (n_l' + 1 - \delta_{kl})^{1/2} S_{kl}.$$

symmetric な observable

$$S = \sum_{i=1}^{N} S_i$$

の matrix は

$$(n_j' | S | n_j' - \delta_{jk} + \delta_{jl}) = n_k'^{1/2} (n_l' + 1 - \delta_{kl})^{1/2} S_{kl}$$

[illegible] は 0.

~~[illegible]　$e^{i w_j}$, $e^{-i w_j}$ は observable~~

$$\cancel{\prod_j} (n_j' | e^{-i w_i} | n_j'') = \prod_j \delta_{n_j' + \delta_{il}, n_j''} \cancel{- \delta_{il}}$$

$$(n_j'|e^{iw_i}|n_j'') = \prod_j \delta_{n_j', n_j''+\delta_{ij}}$$

~~[illegible]~~ matrix で表はされる observable e^{-iw_j}, e^{iw_j} introduce する.

$$(n_j'|e^{iw_k} e^{-iw_l}|n_j'')$$

$$= \cancel{(\ )} \prod_j \delta_{n_j', n_j'''+\delta_{jk}} \cdot \prod_j \delta_{n_j''+\delta_{jl}, n_j''}$$

$$= \prod_j \delta_{n_j', n_j''+\delta_{jk}-\delta_{jl}}$$

$$\therefore \quad S = \sum_{i=1}^{N} s_i = \sum_{kl} n_k^{1/2} \underbrace{e^{iw_k} e^{-iw_l}}_{(n_l+1-\delta_{kl})^{1/2}} S_{kl}$$

[illegible]

$$[illegible] \ (n_j'|n_l e^{iw_k} - e^{iw_k}(n_l+\delta_{kl})|n_j'')$$

$$= n_l' \cdot \delta_{n_j', n_j''+\delta_{kj}} - \delta_{n_j', n_j''+\delta_{kj}}(n_l''+\delta_{kl})$$

$$= \underbrace{(n_l'-n_l'')}_{(-\delta_{kl})} \delta_{n_j', n_j''+\delta_{kj}} = \cancel{\delta_{kl}}\ 0$$

$$(n_j'|(n_l+\delta_{kl})e^{-iw_k} - e^{-iw_k} n_l|n_j'') = 0.$$

$$\therefore \quad n_l e^{iw_k} = e^{iw_k}(n_l+\delta_{kl})$$

$$(n_l+\delta_{kl}) e^{-iw_k} = e^{-iw_k} n_l.$$

$$\therefore \quad S = n_k^{1/2} \cdot e^{+iw_k} S_{kl} e^{-iw_l} n_l^{1/2}$$

~~[illegible]~~ $\quad n_k^{1/2} e^{-iw_k} = b_k^{\dagger}, \ e^{iw_l} n_l^{1/2} = b_l$

サレバ、$b_k^\dagger$ ト b_k トハ互ニconjugate imaginary observableデ

$$S=\sum_{k,l} b_k^\dagger S_{kl} b_l$$

ナル形トナル。

但シ　$b_l b_k^\dagger - b_k^\dagger b_l = \delta_{kl}$

ココデ

$$S_{kl} = (\alpha_q^{(k)}|S_i|\alpha^{(l)}) = (k/q')(q'|S|q'')(q''/l)$$

但シ、q ハ一ツノparticleノ ordinate及ビ其ノ他ノ (spin) degree of freedom ヲアラハス observableトス。

~~but~~ S_i ノ representationノ suffix i ヲ省イテ $(q'|S|q'')$ トカキ、又 $\alpha^{(k)}$, $\alpha^{(l)}$ ナル eigenvaluesニ対スル stateヲ夫々 ψ_k, ψ_l トシテオク。

ソコデ　$\Psi^\dagger(q')=\sum_k b_k^\dagger (k/q')$　　$\Psi(q'')=\sum (q''/l)\, b_l$

ナルobservableヲintroduceスレバ、此レハobservableノ数ガcontinuumデアル。

ソレデ

$$S=\int \Psi^\dagger(q')(q'|S|q'')\Psi(q'')\,dq'dq''$$

又

$$\Psi(q'')\Psi^\dagger(q')-\Psi^\dagger(q')\Psi(q'')=\delta(q'-q'')$$
$$\Psi(q'')\Psi(q')-\Psi(q')\Psi(q'')=0$$

Particles間ニinteractionノナイ場合ハ Hamiltonianハ

$$H=\sum_{i=1}^{N} H_i$$

ナル形ニ書ケル。~~ヲ…~~ $\Psi^\dagger$, Ψ ヲ使ッテアラハセバ.

† モシ particles ノ間ニ interaction ガアレバ Ham. ハ

$$H = \sum_i H_i + \sum_{i<j} H_{ij}$$

カヽル場合ニハ ~~量子化サレタ~~ 従ッテ

$$H = \sum b_k^\dagger H_{kl} b_l + \sum b_{k_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger H_{k_1 l_1}^{k_2 l_2} b_{l_1} b_{l_2}$$

or

$$= \iint \Psi^\dagger(q')(q'|H|q'')\Psi(q'')\,dq'dq'',$$

$$+ \iint \Psi^\dagger(q')\Psi^\dagger(q'')(q',q''|H|q''',q^{iv})\Psi(q''')\Psi(q^{iv})\,dq'dq''dq'''dq^{iv}$$

トナルベキデアル。

$$H = \iint \Psi^\dagger(q')(q'|H|q'')\Psi(q'')\,dq'dq''$$

トナル。

~~之故ニ~~ Ψ ノ又ハ Ψ† ニ対スル eq. of motion ハ

$$i\hbar\dot{\Psi}(q''') = \Psi(q''')H - H\Psi(q''')$$

$$= \iint \{\delta(q'''q') + \Psi^\dagger(q')\Psi(q''')\}(q'|H|q'') \times \Psi(q'')\,dq'dq''$$

$$- \iint \{\Psi^\dagger(q')\Psi(q''')(q'|H|q'')\Psi(q'')\,dq'dq''$$

$$= \int (q'''|H|q'')\,dq''\ \Psi(q'')\,dq''$$

之ハ正ニ particle ノ state ノ満足スベキ ~~Schrödinger ノ~~ wave equation ト一致スル。~~故ニ之等 Ψ ハ~~ 決シテ ordinary ナ wave function デハナク、上ノ如キ V.R. ヲ満足セネバナラヌ。† noncommutative ナ量デ

之ヲ要スルニ、Bose ノ統計ニ従フ indep ナ particles ノ集リハ Ψ, Ψ† ナル observable ~~ヲ持ツ quantised wave~~ ニヨッテ describe 出来ル。之ヲ言ヒ換ヘレバ三次元空間ノ一種ノ公式デアル quantised wave デ describe 出来ル。

又、言ヒ換ヘレバ ~~~~ wave ノ amplitude p, q ヲ noncommutative ~~ト考ヘレバ equiv~~ ト考ヘレバ、之ハ ~~non~~ quantised wave ト数学上 equivalent デアル。

~~従ッテ~~

次ニ Fermi ノ統計

antisymmetric ヲ満足スル様ナ particles ノ集リニ於ケル上ノ如キ表示ヲ適用スルコトガ出来ルカヲ見ル.

N個ノ particle カラ成ル system ノ state ヲ表ス ψ ヲ

$$\Psi = \sum \psi(\alpha_1' \cdots \alpha_N')(\alpha_1'\alpha_2' \cdots \alpha_N'|)$$

トシテアラハス。

state ガ antisym ノ時ハ

$$\psi = \frac{1}{N!}\sum_{\nu=1}^{N!}\varepsilon(P_\nu)P_\nu\psi$$

ナルヲ以テ [illegible]

$$\Psi = \sum \frac{1}{N!}\sum_{\nu=1}^{N!}\varepsilon(P_\nu)P_\nu\psi(\alpha_1' \cdots \alpha_N')(\alpha_1'\alpha_2' \cdots \alpha_N'|)$$

従ッテ ~~[illegible]~~ 故ニ

$$\psi' = \sum_{\nu=1}^{N!}\varepsilon(P_\nu)P_\nu\psi(\alpha_1'\alpha_2' \cdots \alpha_N')$$

ハ $\alpha_1', \alpha_2', \cdots \alpha_N'$ ガ全テ異ナル時ノミ 0 デナク、~~[illegible] $\alpha^{(k)}$ [illegible]~~

又 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots \alpha_N'$ ノ中デ任意ノ $\alpha^{(k)}$ ニ等シキモノ ノ数 n_k' ガ 0 又ハ 1 個ノナイ場合ニ 0 デナイ [illegible] ψ' ハ n_k' ノミニヨッテ決定サレ

$$\bar{\psi}'\psi' = N!$$

トナル。

$$\psi(n_1' n_2' \cdots) = \left(\frac{1}{N!}\right)^{1/2}\sum_{\nu=1}^{N!}\varepsilon(P_\nu)P_\nu\psi(\alpha_1' \cdots \alpha_N')$$

トスレバ、 $\bar{\psi}\psi(n_1' n_2' \cdots) = 1$,

又 [illegible] $\left(\frac{1}{N!}\right)^{1/2}\sum'(\alpha_1'\alpha_2' \cdots \alpha_N'|) = (n_1' n_2' \cdots|)$

トスレバ

$$\Psi = \sum \psi(n_1' n_2' \cdots)(n_1' n_2' \cdots|)$$

$n_j' = n_j''$ トスル　時 $\alpha_j' = \alpha_j''$，他ハ全部0デアル

$(\alpha^{(k)}|S_i|\alpha^{(k)}) = S^{kk}$ トスレバ

$(n_j'|S_i|n_j') = \sum_k n_k' S^k \frac{1}{N!}(N-1)!$

$(n'|S_i|n') = \sum_k n_k' S^{kk}$

$1-n_k' = n_k''$　　$1-n_l' = n_l''$

$(\alpha^{(k)}|S_i|\alpha^{(l)}) = S^{kl}$ トスレバ

$(n'|S_i|n'') = \quad S^{kl}\,\frac{1}{M}(N-1)!$

$(n'|S_i|n'') = S^{kl}$

$= \sum_{k,l} n_k' S^{kl} (1-n_l'') n_l''$

$= \sum_{k,l} S^{kl} \delta_{n_i' n_i''} \cdots \delta_{n_k', 1-n_k''} \cdots \delta_{n_l', 1-n_l''} \cdots$

$S = b_k^\dagger S^{kl} b_l$

$b_k^\dagger b_l + b_l b_k^\dagger = \delta_{kl}$　　$b_k^\dagger b_k = n_k$

$b_k b_l + b_l b_k = 0$

デアル

ナラ　i 番目ノ particle ニノミ depend スル observable S_i ノ matrix el.

$(n_j'|S_i|n'') = \phi(n') S_i \psi(n'')$

$= \frac{1}{N!}\sum_{\nu=1}^{N!}\sum_{\mu=1}^{N!} \varepsilon(P_\nu)\varepsilon(P_\mu)\, P_\nu\phi(\alpha')\cdot S_i P_\mu \psi(\alpha'')$

$= \frac{1}{N!}\sum_{\nu=1}^{N!}\sum_{\mu=1}^{N!} \varepsilon(P_\nu)\varepsilon(P_\mu)(P_\nu\alpha'|S_i|P_\mu\alpha'')$

$(\alpha'|S_i|\alpha'') = (\alpha_i'|S_i|\alpha_i'')\,\delta_{\alpha_1'\alpha_1''} \cdots$

従ッテ　$P_\nu\alpha'|S_i|P_\mu\alpha''$

ハイルヨウ

$(n'|b_k^\dagger|n'') = \prod_{j=0}^{k-1}(2n_j'-1)\, n_k' \,\delta_{n_k', 1-n_k''}\, \delta_{n_i' n_i''} \cdots$

$(n''|b_l|n'') = \prod_{j=1}^{l-1}(2n_j''-1)\, \delta_{n_l', 1-n_l''}\, n_l''\, \delta_{n_i'' n_i''} \cdots$

ヲ用ヒテ作ツタ matrix ハ observable ヲ表ハス。

$k \neq l$ ノ時ハ　$(n'|b_k^\dagger b_l|n'') = \prod_{j=k+1}^{l-1}(2n_j'-1)\, \delta_{n_1' n_1''}\, \delta_{n_2' n_2''} \cdots$

$\prod(2n_k'-1)\, n_k'\, \delta_{n_k', 1-n_k''}\, \delta_{n_l', 1-n_l''}\, n_l'' \cdots$

$$H = \sum \int \Psi^{\dagger}(q')\,(q'|H|q'')\,\Psi(q'')\,dq'\,dq''$$

$$\Psi^{\dagger}(q')\Psi(q'') + \Psi(q'')\Psi^{\dagger}(q') = \delta(q'-q'')$$

$$\Psi(q')\Psi(q'') + \Psi(q'')\Psi(q') = 0$$

従ッテ $H\Psi - \Psi H$

$$= \int (q'|H|q'')\,\Psi(q'')\,dq''$$

以上デ Non-relativistic Quantum Mechanics
ノ一般論ハ一先ヅ打切ルコトニスル。
此ノ内特ニ Atomic Spectra ノ理論ヲ大ヘ知リ
タイ方ハ、之ヲ見ルベキ書物

Wigner: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Q.M der Atomspektren

Weyl: G. und Q.

van der Waerden: gruppentheoretische Methode in der Q.M.

等.

数学的ニ比較的厳密ナ理論ハ

J. von Neumann: mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Born u. Jordan: Elementare Q.M.

Chapter VII Relativistic Quantum mechanics.

§ One electron problem

以上ニ於テ non-relativistic ナ理論ヲ述ベテ来タガ、~~relativistic ナ理論ト云フノハ理論~~ニ relativity ノ原~~principle~~ヲ introduce スル。此ノ theory ガ Lorentz transformation ニ対シテ invariant デアル（相対的）コトガ必要デアル。以上ノ考ヘ方ヲ改メネバナラヌ。此ノ non-relativistic ナ理論ニ於テハ observable ト云フハ或 time t ニ於ケル dynamical variable ξ ノ値 ξ_t デアッタ。所ガ relativistic ニ考ヘルナラバ、他ノ Lorentz' frame ニ於ケル time τ ニ於ケル ξ ノ値 ξ_τ モ又同様ナ意味デ observable デナケレバナラヌ。所ガ ξ_t ト ξ_τ トノ間ノ関係ハ一般ニ非常ニ複雑デアル。relativistic ニ考ヘルト ξ_t ナル如キモノハ決シテ簡単ナ observable ナルモノデハナク、カヽル量ヲ fundamental ナモノトスルノハ不適当デアル。コノ困難ヲ免カレル為ニ従来ノ field theory デハ、observable トシテハ ~~space ト~~ 4-dimensional space ノ一点ノ field quantity ノ値ヲトル ~~[illegible]~~ ベキデアル。コレハ前章ノ終リニ述ベタ similar particles ヨリナル dynamical system ヲ quantised field Ψ, Ψ† ニヨッテ、3-dimensional space ノ一点ニヨッテ describe シ、observable トシテハ ~~或 time t ニ於ケル~~ ~~[illegible]~~ ~~space point~~ ニ於ケル field ノ値 Ψ(x'y'z') ノ space, time ニ於ケル値ヲ x'y'z' トスルナラバ

$(x_t\, y_t\, z_t\, t|) = (x\, y\, z\, t|)$

$(x_{t'}\, 2, y_{t'}, z_{t'}|)$

$(x_{t'} + \delta x_{t'}, \ldots |) = (x, y, z, t'|)'$

考ヘネバナラヌ relativistic ナ場合ニ於ケル困難ニツイテ述ベヨウ。
其ノ前ニ Heisenberg 及ビ Pauli ハ ソノ論文ニ於テ rel. q. theory ノ建設ニ或ル程度迄成功シタ。
ソノ ~~一般的ナ内容ヲ述ベル前ニ~~ 先ヅ one particle カラ成ル system ヲ考ヘテ見ヨウ。ソノ場合ニ relativistic ニ invariant ナ theory ヲ作ルコトハ比較的ニ容易デアル。即チ time t ニ於ケル particle ノ position x_t, y_t, z_t ガ diagonal ニナル様ナ representation ヲ取レバ system ノ state ノ repr. ハ ~~wave~~ function $(x_t y_t z_t|)$ 或ハ t, x, y, z ノ function $(x y z t|)$ ト見ナスコトガ出来ル。即チ wave function ノ domain ハ普通ノ四次元空間トナリ、system ノ物理的状態ハ ~~wa~~ ソノ点及ビ附近ニ於ケル wave function ノ値ニ depend シテ居ル。wave function ナルモノハ Lorentz Transformation ニ対シテ invariant デアルカラ此ノ場合ハ相対論的ナ理論ニ於イテモ何等ノ困難モ生ジナイ。此ノ考ヘ方ハ one particle ノ場合ニノミ適用サレル。
~~relativistic ニ~~ particle ノ momentum ノ time t ニ於ケル値 p_{xt}, p_{yt}, p_{zt} ~~ナ observable ト見ナスナラバ~~ ソレハ ソノ値ハ space-displacement operator ト関係スルモノデアル。~~其ノ瞬間 t ニ於ケル~~ wave function ニ operate シテ ~~其ノ瞬~~ 其ノ瞬間 t ニ於ケル space displacement ヲ表ハス。従ッテ此ノ wave function ノ

time t ニ対シテ特殊ノ地位ヲ与ヘル。~~相対論~~ シカルニ 此ノ time ニ対スル仮定ハ
wave equation ニヨッテ定マッテヰル。
relativ. theory ニ於テハ此ノ time ニ対スル wave 函数
ノ space displacement ヲ考ヘル 如キモノヲ考ヘルノガ
必要デアル。 之ハ既ニ wave 函数 (xyzt) ニ対スル
diff. ノ operator $\frac{\partial}{\partial x}$ ノ如キモノデアツテ、之ニ依ツテ種々ノ
operation ヲ行ッテ ~~結果ハ~~ 波動函数 ~~一般~~ ニハ wave 函数ヲ
eq. ヲ満足シナクナル。 system ノ state ヲ与ヘルト
スレバ 之ニ operator ハ observable デナケレバナラヌ。 rel.
theory デハ之ガ momentum ノ代リノ 役ヲスル

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

ナル operator ヲ introduce スル。之ト同様ニ time
displacement operator ~~ナル~~ energy ノ代リニ

$$W = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (1)'$$

~~ヲ energy~~ ヲ introduce スル。
~~ナル operator~~ 之等ノ operator ハ wave 函数ニ operate
スルモノデ ~~obse~~ observable ト対スル
algebraic ナ関係ハ 第二量子化デ hold スル。従テ
之等ノ operator ノ 固有値ガ observable デナケレバナラヌ。 $\phi \alpha \psi$
ヲ number トシテ 求メル。 ($\alpha\psi$ ハ state ヲ表ス)
ψ, φ ノ代リニ ソノ xyz, t ニ関スル
representation ヲトレバ 形式的ニ簡単ナ結果ガ得ラレル。

従ッテ之ノ意デハ ψ, φ, p 等ハ x, y, z, t ニ関スル wave fn. ノ diff. operator
~~representation~~ ヲアラハス symbol ト見レ
~~バ良イ~~。ストシテモヨイ。

classical ~~relativistic~~ ニ於テハ electron ノ
electromagnetic field ノナイ場合ノ Hamiltonian ハ

$$H = c\,(m^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{1/2}$$

ニテ与ヘラレル。
従ッテ wave eq. ハ (1) ノ H ノ symbol ヲ使ヘバ、

$$\left\{\frac{W}{c}-(m^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{1/2}\right\}\psi=0. \qquad (2)$$

トナル筈デアル。~~之ニ~~ $\frac{W}{c}+(m^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{1/2}$
ナル operator ヲ作用サセルト、

$$\left\{\frac{W^2}{c^2}-m^2c^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2\right\}\psi=0 \qquad (3)$$

トナル。之ノ式ハ relativistic ニ invariant ナ
form ヲ持ッテ居ルガ、quantum mechanics ノ一般ノ
~~principle~~ 形式ト少シ異ナル。即チ wave eq. ハ
$\frac{\partial}{\partial t}$ or W ニ関シテ linear デナケレバナラヌ。
~~relativistic ニ~~ ソレデ space, time ヲ symmetrical
ニ取扱ヘバ ~~ナナ~~ 同様ニ wave eq. ハ p_x, p_y, p_z ニ
関シテモ linear デナケレバナラヌ。

$$\left\{\frac{W}{c}+\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z+\beta\right\}\psi=0 \qquad (4)$$

トイフ形ヲモツト假定シテ居ル。但シ α, β ハ W, p ニ indep ナモノトシテオク。field ノナイ場合ハ等ヘテ在ル所ノ ~~space-wave~~ space-time ノ各点ハ equivalent デ、wave eq 中ノ operator ハ x, y, z, t ハ入ラヌ筈デアル。∴ α, β ハ x, y, z, t ニモ indep. 故ニ α, β ハ新シイ dynamical variable デアル electron ノ internal motion ヲ表ハスモノデアラウ。
(4) ニ $W/c - \alpha_x p_x - \alpha_y p_y - \alpha_z p_z - \beta$ ヲ operate スルト

$$\left\{ \frac{W^2}{c^2} - \sum_{xyz} \left[\alpha_x^2 p_x^2 + (\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x) p_x p_y + (\alpha_x\beta + \beta\alpha_x) p_x \right] - \beta^2 \right\} \psi = 0$$

~~ソレガ $\alpha_x^2 = 1$ (3) 式ト~~

∴ α, β ガ

$$\alpha_x^2 = 1 \qquad \alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0$$
$$\beta^2 = m^2c^2 \qquad \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0 \qquad (5)$$

ナル関係ヲ満足スレバヨイ　之ハ(3)式ト一致スル
$\beta = \alpha_m mc$ トオケバ、上ノ関係ハ

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = x, y, z, \text{ or } m) \qquad (5)'$$

ナル式デアラハサレル。
ソコデ field ノナイ場合ニハ (5)ヲ満足スル様ナ α, β ヲトレバ (4)ガ electron ニ対スル正シイ wave eq. ヲ与ヘルモノト考ヘル。
(5) or (5')ヲ満足スル様ナ量ハ matrix デアラハセバヨイコトガ分ル。前ニ nonrel. ナ場合ニ electron

$$(\sigma_3' \rho_3' | A^{\rho_m} | \sigma_3'' \rho_3'')\,\cancel{(\sigma_3'' \rho_3'' | \rho_m |}\quad \rho_3'' - \rho_3' (\quad)$$

$$\rho_3'' = \rho_3' \quad \text{or} \quad (\sigma_3' \rho_3' | \sigma_m | \sigma_3'' \rho_3'') = 0.$$

spin ヲアラハス observable (~~variable~~) トシテトッタ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ハ互ニ相関係ヲ満足スルガ、~~之ト交換スル~~ 之ヲ two row, two column ノ matrix トスレバ、~~之ト交換シ~~ 互ニ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ト anticommute スル如キ matrix ハ無イノデアル。

ソコデ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ノ他ニ更ニ ρ_1, ρ_2, ρ_3 ナル observable ヲ導入シ、之ハ σ ト同様ニ互ニ anticommute シ square ガ 1 トナリ σ ト ρ トハ commute スルト仮定スレバ

$$\alpha_x = \rho_1\sigma_x, \quad \alpha_y = \rho_1\sigma_y, \quad \alpha_z = \rho_1\sigma_z, \quad \alpha_m = \rho_3 \tag{6}$$

ハ確カニ (5) ノ関係ヲ満足スル。

σ 及ビ ρ ノ represent トシテ ρ_3 ト σ_z トガ diagonal ナモノヲトレバ、

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(7)

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

従ッテ wave function ハ 4 component ヲモツコトニナル。而シテ electron ガ spin ヲ有スル為ニハ wave fn ハ二ツノ comp ヲモッテオレバ充分デアル筈ガ 更ニ二ツノ comp ヲ有スル ~~解~~ ~~solution~~ ~~state~~ solution ノ数ハ二倍トナル、実際ニ

附

†ソレト σ, ρ ニ関スル vertauschungs relation トモ compatible デアル。

$$H = -eA_0 - \rho_1(\sigma, p + \frac{e}{c}A) - \rho_3 mc$$

物理的ニ意味ノ明カデナイ energy ガ negative デアル所ノ state ニ帰着シテ来ル。

(6) ノ関係ヲ使ヘバ、wave eq. (4) ハ

$$\left\{\frac{W}{c} + \rho_1(\sigma, p) + \rho_3 mc\right\}\psi = 0 \qquad (4')$$

トナル。

electromagnetic field ノ存在スル場合ニハ classic ナ理論ニ於ケル如ク、W, p ノ代リニ $W + eA_0$, $p + \frac{e}{c}A$ トスル。但シ A_0, A ハ scalar, vector potential. ソレデ

$$\left\{\frac{W}{c} + \frac{e}{c}A_0 + \rho_1(\sigma, p + \frac{e}{c}A) + \rho_3 mc\right\}\psi = 0 \quad (8)$$

ソノ conj. imag. eq. ハ

$$\phi\left\{\frac{W}{c} + \frac{e}{c}A_0 + \rho_1(\sigma, p + \frac{e}{c}A) + \rho_3 mc\right\} = 0 \quad (9)$$

トナル。但シ、W, p ハ左ノ方カラ operate スルノデ signe ヲ change セネバナラヌコトハ、勿論 time, space disp. ノ順序ヲ変ヘタト同様デアル。

(8), (9) ガ relat. ナ electron theory ノ fund. eq. トナル。†

(8) 及ビ (9) 式ガ Lorentz invariant デアルコトヲ証明スルニハ、$\frac{W}{c} = p_0$ トシテ、~~x, y, z~~ suffix x, y, z ノ代リニ 1, 2, 3 トカキ、又 suffix ノ二重ニ出テ来ル $\underbrace{\text{sum up}}_{0,1,2,3 \text{ ニツイテ}}$ スル

之ト共ニ (8) ハ

$$\{\alpha_\mu(p_\mu+\tfrac{e}{c}A_\mu)+\alpha_m mc\}\psi=0 \qquad (10)$$

但シ $\alpha_0=1$. (9) ハ

$$\phi\{\alpha_\mu(p_\mu+\tfrac{e}{c}A_\mu)+\alpha_m mc\}=0 \qquad (11)$$

トナル。ソコデ Lorentz. Transf ヲ行フト p_μ 及ビ A_μ ハ新シキ axes ニ関スル 4-vector p^*_μ, A^*_μ トノ間ニ

元ノ axes ニ関スル 4-vector

$$p_\mu=a_{\mu\nu}p^*_\nu \qquad A_\mu=a_{\mu\nu}A^*_\nu \qquad (12)$$

ナル関係ガアル。

従ッテ (10) 及ビ (11) ハ

$$\{\alpha_\mu a_{\mu\nu}(p^*_\nu+e/c\,A^*_\nu)+\alpha_m mc\}\psi=0 \qquad (13)$$

$$\phi\{\alpha_\mu a_{\mu\nu}(p^*_\nu+e/c\,A^*_\nu)+\alpha_m mc\}=0 \qquad (14)$$

ソコデ新シキ axes ニ関スル wave ~~eq~~ fn ψ^* ハ元ノ wave fn ψ ト linear ナ関係ガアルトシ

$$\psi^*=\gamma\psi \qquad (15)$$

トスル。但シ γ ハ α's ト同様ニ 4-row 4-column ノ matrix デアラハサレ得ル operator トスル。之ニ対スル conj imag ハ

$$\phi^*=\phi\bar{\gamma} \qquad (15)'$$

故ニ (13) 及ビ (14) ハ γ 及ビ $\bar{\gamma}$ ガ

$$\bar{\gamma}\{\alpha_\nu(p^*_\nu+\tfrac{e}{c}A^*_\nu)+\alpha_m mc\}\psi^*=0 \qquad (16)$$

$$\phi^*\{\alpha_\nu(p^*_\nu+e/c\,A^*_\nu)+\alpha_m mc\}\gamma=0 \qquad (17)$$

$$\bar{\gamma}\alpha_\nu\gamma=\alpha_\mu a_{\mu\nu}, \qquad \bar{\gamma}\alpha_m\gamma=\alpha_m \qquad (18)$$

ヲ満足スレバ

ナル形トナル。

∴ $\bar{\gamma}^{-1}$, γ^{-1} ガ存在スルナラバ. 之ヲ(16), (17)ニ乗ズレバ
(10) 及ビ (11) ト 全ク同型ノ式ヲ得。

∴ 問題ハ γ (及ビ γ^{-1}) ナル operator ガ常ニ存在スル
(18) ヲ満足スル
コトヲ証スレバヨイ。

所デ任意ノ Lorentz Transformation ハ座標系ヲ xt-plane
ニ於テ θナル hyperbolic angle ノ rotation ヲ行フ事。

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_0^* \cosh\theta + p_1^* \sinh\theta \\ p_1 &= p_0^* \sinh\theta + p_1^* \cosh\theta \\ p_2 &= p_2^* \qquad p_3 = p_3^* \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ソコデ
$$\gamma = e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_1} = \bar{\gamma} \qquad (20)$$
$$\gamma^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_1} = \bar{\gamma}^{-1}.$$
デ
トオクト.

$$\bar{\gamma}\alpha_0\gamma = \bar{\gamma}\gamma = e^{\theta\alpha_1}$$
$$= 1 + \theta\alpha_1 + \theta^2\alpha_1^2/2! + \cdots$$

$\alpha_1^2 = 1$ ナルカラ,

$$\bar{\gamma}\alpha_0\gamma = \{1 + \theta^2/2! + \cdots\} + \alpha_1\{\theta + \theta^3/3! + \cdots\}$$
$$= \alpha_0\cosh\theta + \alpha_1\sinh\theta.$$
$$\bar{\gamma}\alpha_1\gamma = \alpha_0\sinh\theta + \alpha_1\cosh\theta.$$
$$\bar{\gamma}\alpha_2\gamma = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_1}\alpha_2 e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_1} = e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_1}e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_1}\alpha_2 = \alpha_2$$
$$\because\ \alpha_2 f(\alpha_1) = f(-\alpha_1)\alpha_2$$
$$\bar{\gamma}\alpha_3\gamma = \alpha_3 \qquad \bar{\gamma}\alpha_m\gamma = \alpha_m.$$

∴ (18) ノ関係ハ満足サレル。

$$e^{\theta\alpha_2\alpha_3} = \sum \frac{\theta^n}{n!}(\alpha_2\alpha_3)^n = \cancel{\sum \frac{\theta^n}{n!}(-1)^{n!}\alpha_2\alpha_3}$$

$$= \cos\theta + \alpha_2\alpha_3 \sin\theta$$

$$e^{-\theta\alpha_2\alpha_3} = \cos\theta - \alpha_2\alpha_3 \sin\theta$$

$$\alpha_2\, e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3} = \alpha_2 \sum \frac{(\frac{1}{2})^n\theta^n}{n!}\cdot(-\alpha_2\alpha_3)^n$$

$$= \sum \frac{(\frac{1}{2})^n\theta^n}{n!}(-1)^n(-\alpha_2\alpha_3)^n\alpha_2$$

$$= e^{+\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}\alpha_2$$

$$\gamma = e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3} \qquad \bar\gamma = e^{+\frac{1}{2}\theta\alpha_3\alpha_2} = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}$$

$$\bar\gamma\alpha_2\gamma = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}\alpha_2 e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}$$

$$= \alpha_2\, e^{\theta\alpha_2\alpha_3} = \alpha_2(\cos\theta + \alpha_2\alpha_3\sin\theta)$$

次に ordinary space に於ける x-axis のまはりの angle θ の rotation を行へば

$$p_0 = p_0^* \qquad p_1 = p_1^*$$

$$p_2 = p_2^*\cos\theta + p_3^*\sin\theta$$

$$p_3 = -p_2^*\sin\theta + p_3^*\cos\theta$$

この場合には $\gamma = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}$ $\quad \bar\gamma = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_3\alpha_2} = e^{\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}$

$$\gamma^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_3\alpha_2} = \bar\gamma.$$

故に

$$\bar\gamma\alpha_0\gamma = \alpha_0$$

$$\bar\gamma\alpha_1\gamma = \bar\gamma\gamma\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\bar\gamma\alpha_2\gamma = e^{+\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}\cdot\alpha_2 e^{-\frac{1}{2}\theta\alpha_2\alpha_3}$$

$$\cancel{= e^{\theta\alpha_2\alpha_3}\alpha_2 = \alpha_2\cos\theta +}$$

$$\cancel{= (\cos\theta_2 + \alpha_2\alpha_3\sin\theta)\alpha_2(\cos\theta - \alpha_2\alpha_3\sin\theta)}$$

$$\cancel{= \alpha_2\cos}$$

$$= e^{\theta\alpha_2\alpha_3}\alpha_2 = (\cos\theta + \alpha_2\alpha_3\sin\theta)\alpha_2$$

$$= \alpha_2\cos\theta - \alpha_3\sin\theta$$

$$\bar\gamma\alpha_3\gamma = \alpha_2\sin\theta + \alpha_3\cos\theta$$

從來ノ Lorentz transformation ノ外ニ二ツノ type
ノ transf ~~ヲ考ヘル~~ ヲ入レタリ。以下行ヘバ然シ、ソ
ノ場合ノ γ ト云フ。夫々ノ transf ノ γ ノ積ヲトレバ
1ナリ。∴(18)ヲ満足シ、reciprocal ノ関係ニ
アル γ ハ常ニ関係アル。
カクシテ ~~wave~~ 新シキ coordinate system ニ於ケル
wave eq ノ solution ヲ (15)ニヨッテ元ノ wave eq ノ solution
ト one-one corresp サセルコトガ出来ル。之ラハ
同ジ state ヲ表ハスト考ヘラレル。
従テ 一点ニ於ケル wave function ノ modulus ノ square ハ
ソノ state ニ於テ electron ガソノ点ニ在ル prob. ヲ
与ヘル。之レ electric density ノ意味ヲモツテ
居ルカラ current ト共ニ 4-vector ヲ作ルベキ
デアル。又 ~~electric den~~ charge ノ conservation ニ
相当シテ current density vector ノ 4-dim.
divergence ハ vanish スベキデアル。
今 $\phi_r \cdot \psi_s$ ナル symbol ニヨッテ 一点ニ於ケル ϕ_r ノ4ツノ component
ト ψ_s ノ4ツノ component ノ對応スルモノヲカケ合セテ
sum up シタモノヲアラハスコトニスレバ α ガ 4-~~row~~, col ノ
any matrix ナル場合

$$\phi \cdot \alpha\psi = \phi\alpha \cdot \psi \qquad (21)$$

デアル。
ソコデ electric density ヲ $\phi\cdot\psi$ 或ハ (トスルトキ) $\phi\cdot\alpha_0\psi$
デアルカラ、

$$s_\mu = \phi \cdot \alpha_\mu \psi \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

ヲ density-current vector ト云フコトガ出来ル (covariant comp.)

∵ (12)ニヨリ ~~$\phi^* \cdot \alpha_\nu \psi^* = \phi$~~ Lor. Trans. ニヨリ ~~$\phi \to \phi^*$~~ ~~$p_\mu \to a_{\mu\nu}$~~ ヲ行ヘバ

~~ニ*ツテトスル~~

$$\phi^* \cdot \alpha_\nu \psi^* = \phi \bar{\gamma} \cdot \alpha_\nu \gamma \psi = \phi \cdot \bar{\gamma} \alpha_\nu \gamma \psi$$

$$= \phi \cdot \alpha_\mu a_{\mu\nu} \psi = (\phi \cdot \alpha_\mu \psi)\, a_{\mu\nu}$$

ヨツテ $s^*_\nu = s_\mu a_{\mu\nu}$

or $a_{\mu\nu} s^*_\nu = s_\mu$

Contravariant Component ハ 得テ

$s^0 = \phi \cdot \psi \quad s^1 = -\phi \cdot \alpha_1 \psi \quad s^2 = -\phi \cdot \alpha_2 \psi \quad s^3 = -\phi \cdot \alpha_3 \psi.$

然ラバ

~~$\sum_\mu \frac{\partial s^\mu}{\partial x_\mu} = \phi \cdot \alpha$~~

(10)ニ ϕ ヲカケ, (11)ニ ψ ヲカケテ引ケバ.

$$\phi \cdot \alpha_\mu p_\mu \psi - \phi \alpha_\mu p_\mu \cdot \psi = 0$$

$$-ih \left\{ \phi \cdot (1) \alpha_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + (1) \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \alpha_\mu \cdot \psi \right\} = 0$$

or $$\sum_\mu \frac{\partial s^\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (22)$$

次ニ field ノ存在スル場合ノ classical theory カラノ analogy ニヨリテ得ラレル wave eq.

$$\left\{\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)^2-\left(p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-m^2c^2\right\}\psi=0 \qquad (23)$$

ガ得ラレルガ、今ノ場合ニ之ニ近イモノヲ得ルニハ (8) ノ左方カラ

$$\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0-\rho_1\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-\rho_3 mc$$

ヲ operate スレバヨイ。スレバ.

$$\left\{\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)^2-\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-m^2c^2 + \rho_1\left[\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)\right]\right\} \times\psi=0 \qquad (24)$$

然ルニ $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ ヲ（互ニcommuteスル）任意ノ Vector トスレバ.

$$(\sigma,\mathbf{B})(\sigma,\mathbf{C})=\sum_{xyz}\{\sigma_x^2 B_xC_x+\sigma_x\sigma_y B_xC_y + \sigma_y\sigma_x B_yC_x\}=(\mathbf{B},\mathbf{C})+i\sum_x\sigma_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$=(\mathbf{B},\mathbf{C})+i(\sigma,\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \qquad (25)$$

vector product

$\therefore$ $\mathbf{B}=\mathbf{C}=p+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ トスレバ.

$$\left(p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times\left(p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}\{p\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times p\}$$

$$=-i\hbar e/c \ \mathrm{curl}\,\mathbf{A}=-i\hbar e/c\,\mathbf{H}.$$

$$\therefore \left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2=\left(p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+\frac{\hbar e}{c}(\sigma,\mathbf{H})$$

$$\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-\left(\sigma, p+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(\frac{W}{c}+\frac{e}{c}A_0\right)$$

$$=\frac{e}{c}\left(\sigma, \frac{W}{c}\mathbf{A}-\mathbf{A}\frac{W}{c}+A_0 p-pA_0\right)$$

$$= \frac{i\hbar e}{c}\left(\sigma, \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, A_0\right) = -i\frac{\hbar e}{c}(\sigma, \mathbf{E})$$

故ニ (24) ハ

$$\left\{\left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c}A_0\right)^2 - \left(p + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - m^2c^2 - \frac{\hbar e}{c}(\sigma, \mathbf{H}) - i\rho_1\frac{\hbar e}{c}(\sigma, \mathbf{E})\right\} \times \psi = 0$$

relativity correction ヲ neglect シテ

$$W = mc^2 + W_1$$

トオキ、W_1 ガ小サイト~~スルト~~シ、高次ヲ省ケバ次ノ如クナル。

$$\left[W_1 - \left\{-eA_0 + \frac{1}{2m}\left(p + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{2mc}(\sigma, \mathbf{H}) + i\rho_1\frac{\hbar e}{2mc}(\sigma, \mathbf{E})\right\}\right]\psi = 0.$$

~~故ニ~~ 故ニ Hamilton 函数ハ Rel. Corr ヲ neglect スレバ

$$H = -eA_0 + \frac{1}{2m}\left(p + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{2mc}(\sigma, \mathbf{H}) + i\rho_1\frac{\hbar e}{2mc}(\sigma, \mathbf{E})$$

コレ electron ガ　$-\frac{\hbar e}{2mc}\sigma$ ナル magnetic moment ト
$-i\rho_1\hbar e/2mc\ \sigma$ ナル electric moment ト
ヲモツテ居ルコトヲ意味スル。
electric moment ハ pure imaginary ナルヲ以テ
物理的意味ヲ有タナイ。而シテ之ハ classical theory トノ
analogy ヲ~~~~ 保タンガタメニ artificial ナ operation
ヲ行ッタ為ニ生ジタモノデアル。ソノ項ヲ除ケバ、丁度
non-rel. ナ spinning electron ニ於ケル Hamiltonian
ト同一ニナル。

$$\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$$

次ニ central field ニアル electron ノ motion ヲ考ヘテ見ル。 $\mathbf{A}=0$, $A_0 = A_0(r)$ トスル。

wave eq. (8) ハ

$$(W-H)\psi=0$$

トナル。然ルニ H ハ Hamiltonian 故ニ

$$H = -eA_0(r) - c\rho_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) - \rho_3 mc^2 \quad (26)$$

扨、ソコデ angular momentum

$$\mathfrak{m} = r\times\boldsymbol{p}$$

ニ対スル eq. of motion ハ

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{m}_x &= m_xH - Hm_x \\
&= -c\rho_1\{m_x(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})m_x\} \\
&= -c\rho_1(\boldsymbol{\sigma},\ m_x\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}m_x) \\
&= -i\hbar c\rho_1\{\sigma_y p_z - \sigma_z p_y\}
\end{aligned}
$$

故ニ $\dot{m}_x \neq 0$ デ orbital angular momentum ハ conserve シナイ。

然ルニ

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{\sigma}_x &= \sigma_xH - H\sigma_x \\
&= -c\rho_1\{\sigma_x(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})\sigma_x\} \\
&= -c\rho_1(\sigma_x\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\sigma_x,\ \boldsymbol{p}) \\
&= -2ic\rho_1\{\sigma_z p_y - \cancel{\hbar}\,\sigma_y p_z\}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad i\hbar\,\cancel{\sigma}(\dot{m}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\dot{\sigma}_x) = 0$$

故ニ $\mathbf{M} = \mathfrak{m} + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ ナル vector ハ constant of motion デアル。 コレカラ electron ガ $\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ ナル spin angular momentum ヲモッテヰルト云フ説明ガ出来ル。

$$(\sigma, m)(\sigma, p) = i(\sigma, m \times p)$$
$$+\quad (\sigma, p)(\sigma, m) = i(\sigma, p \times m)$$
$$(\sigma, m)(\sigma, p) + (\sigma, p)(\sigma, m)$$
$$= i \sum_{xyz} \sigma_x \{ m_y p_z - m_z p_y + p_y m_z - p_z m_y \}$$
$$= i \sum_{xyz} \sigma_x \, 2i\hbar p_x = -2\hbar(\sigma, p)$$
$$\{(\sigma, m) + \hbar\}(\sigma, p) + (\sigma, p)\{(\sigma, m) + \hbar\} = 0.$$

∴ $\rho_3\{(\sigma, m) + \hbar\}$ ハ $-c\rho_1(\sigma, p)$ 並ニ $-\rho_3 mc$
ト commute シ、従ツテ H ト commute スル。

$$0 = r\varepsilon \cdot r - r \cdot r\varepsilon = r(\varepsilon r - r\varepsilon)$$

ソコデ $\qquad j^2\hbar^2 = M^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \qquad (27)$

トナル。 j ハ constant of motion デ、~~ソノ eigenvalue~~
ハ $M_z = m_z + \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ ノ eigenvalue ハ ~~ħ ノ half odd~~
$\frac{\hbar}{2}$ ノ odd multiple デアルカラ、 j ノ eigenvalue ハ
0 デナイ integer デアル。
(25) ノホカニ $\quad B = C = m$ トナル。
$$(\sigma, m)^2 = m^2 + i(\sigma, m \times m)$$
$$= m^2 - \hbar(\sigma, m)$$
$$= (m + \tfrac{1}{2}\hbar\sigma)^2 - 2\hbar(\sigma, m) - \tfrac{3}{4}\hbar^2$$
$$\therefore \{(\sigma, m) + \hbar\}^2 = M^2 + \tfrac{1}{4}\hbar^2$$
or $\qquad [\rho_3\{(\sigma, m) + \hbar\}]^2 = j^2\hbar^2.$

又 $\rho_3\{(\sigma, m) + \hbar\}$ ハ const of motion デアル。
j ヲ $\quad \rho_3\{(\sigma, m) + \hbar\} = j\hbar \qquad (28)$
ニヨツテ定義スレバ、 j ノ eigenvalue ハ zero 以外ノ pos. or neg integer デアル。

又 (25) ヲ適用スレバ、
$$(\sigma, r)(\sigma, p) = (r, p) + i(\sigma, m)$$
$$= r p_r + i\rho_3 j\hbar. \qquad (29)$$
ソコデ $\qquad r\varepsilon = \rho_1(\sigma, r) \qquad$ デ define スレバ $\quad (30)$
observable ε ヲ導入スル。 r ハ ρ_1 並ニ (σ, r) ト commute
スルカラ rε ト r モ commute スル。
$$r^2\varepsilon^2 = (r \cdot r\varepsilon)\varepsilon = (r\varepsilon \cdot r)\varepsilon = [\rho_1(\sigma, r)]^2 = (\sigma, r)^2 = r^2 = r^2$$
or $\qquad r^2(\varepsilon^2 - 1) = 0.$

$\therefore \varepsilon^2 = 1 \quad (r \neq 0)$

$$0 = r\varepsilon j - jr\varepsilon = r(\varepsilon j - j\varepsilon)$$

$$H' = W + mc^2$$

M ニ対スル r ト p_r ノ sym. ナルコト

$\rho_1(\sigma, p)$ ガ M, j ト commute スルコトハ $\rho_1(\sigma, r)$ ガ M, j ト commute スルコトカラワカル。従ッテ ε ハ M, j ト commute スル (ε', r)

又 $$(\sigma, r)(r, p) - (r, p)(\sigma, r) = \{\sigma, r(rp) - (rp)r\}$$
$$= i\hbar(\sigma r)$$

∴ $$r\varepsilon(rp_r + i\hbar) - (rp_r + i\hbar)r\varepsilon = i\hbar r\varepsilon$$
$$r\varepsilon(p_r r + 2i\hbar) - (rp_r + i\hbar)r\varepsilon = i\hbar r\varepsilon$$
$$r(\varepsilon p_r - p_r\varepsilon)r = 0$$

(29), (30) カラ
$$r\varepsilon\rho_1(\sigma, p) = rp_r + i\rho_3 j\hbar$$
$$\rho_1(\sigma, p) = \varepsilon p_r + i\varepsilon\rho_3 j\hbar/r$$

(※) 形ハ polar coord. ニヨル

従ッテ $$H/c = -\frac{e}{c}A_0 - \varepsilon p_r - i\varepsilon\rho_3 j\hbar/r - \rho_3 mc \quad ~~(31)~~ \quad (26)'$$

ε, ρ_3 ハ H 及ビ 他ノ量 ト commute シ、互ニ anticommute シ、又 square ハ 1 デアル。故ニ ρ_3 ヲ diagonal ニスル repr. ニ於テハ 夫々

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

ノ matrix デ与ヘラレル。又 r ヲ diagonal ニスル wave function ハ 此ノ matrix ノ二ツノ row, column ニ対応スル二ツノ comp. $(r|)_a$ $(r|)_b$ ヲモツ。

$$\left(\frac{H'}{c}+\frac{e^2}{cr}\delta(r)\right)$$

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)f-\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}+\frac{j}{r}\right)g=0$$

$$\left(-\frac{1}{a_2}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)g+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)f=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}+\frac{j}{r}\right)g$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)f$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)\frac{\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}+\frac{j}{r}\right)g}{\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)}=\left(-\frac{1}{a_2}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)g$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{r^2}\delta(r)-\frac{\alpha}{r}\delta'(r)\right)}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\delta\right)^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}+\frac{j}{r}\right)g$$

$$=\left(-\frac{1}{a_2}+\frac{\alpha}{r}\delta(r)\right)g\,.$$

Hydrogen atom ノ場合ヲ考ヘル

$$A_0=e/r$$

ヲトリ、H ノ energy level H' ヲ求メテ居ル。

Schröd. eq $\quad (H'-H)\psi=0$

ハ (26)' 及ビ (31) ヨリ、

$$\left(\frac{H'}{c}+\frac{e^2}{cr}\right)(r|)_a-\hbar\frac{\partial}{\partial r}(r|)_b-\frac{j\hbar}{r}(r|)_b+mc(r|)_a=0$$

$$\left(\frac{H'}{c}+\frac{e^2}{cr}\right)(r|)_b+\hbar\frac{\partial}{\partial r}(r|)_a-\frac{j\hbar}{r}(r|)_a-mc(r|)_b=0$$

$$\frac{\hbar}{mc+H'/c}=a_1\qquad\frac{\hbar}{mc-H'/c}=a_2\qquad(32)$$

トオケバ eq ハ

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\right)(r|)_a-\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{j}{r}\right)(r|)_b=0\\&\left(-\frac{1}{a_2}+\frac{\alpha}{r}\right)(r|)_b+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{j}{r}\right)(r|)_a=0\end{aligned}\right\}(33)$$

α ハ fine structure const

但シ $\alpha=e^2/\hbar c$ ハ ~~fine~~ デ small number デアル。

$$(r|)_a=e^{-r/a}f\qquad(r|)_b=e^{-r/a}g$$

トオケバ、但シ

$$a=(a_1a_2)^{\frac12}=\hbar\left(m^2c^2-H'^2/c^2\right)^{-\frac12}\qquad(34)$$

(33) ハ

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\alpha}{r}\right)f-\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}+\frac{j}{r}\right)g=0\\&\left(-\frac{1}{a_2}+\frac{\alpha}{r}\right)g+\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{a}-\frac{j}{r}\right)f=0\end{aligned}\right\}(35)$$

$$f=\sum_s c_s r^s\qquad g=\sum_s c'_s r^s\qquad(36)$$

但シ s ハ integer デナクテモヨイガ consecutive ノ s ハ 1 ダケ違ッテ居ルトスル。

$n'=0$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{s_0}}{a_1} + \frac{c'_{s_0}}{a} &= 0 \\ -\frac{c'_{s_0}}{a_2} + \frac{c_s}{a} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\alpha c_{s_0} - (s_0+j) c'_{s_0} = 0$

$\alpha c'_{s_0} + (s_0-j) \cancel{\alpha} c_{s_0} = 0$

$\alpha c_{s_0} \cancel{\alpha c_{s_0}} - \{ j + \sqrt{j^2-\alpha^2} \} c'_{s_0} = 0$

$a, a_1 > 0$ $\qquad j < 0$.

之ヲ(35)ニ入レ r^{s-1} ノ係数ヲ0トオスト

$$\left.\begin{aligned} c_{s-1}/a_1 + \alpha c_s - (s+j) c'_s + c'_{s-1}/a &= 0 \\ -c'_{s-1}/a_2 + \alpha c'_s + (s-j) c_s - c_{s-1}/a &= 0 \end{aligned}\right\} (37)$$

上ノ方ニ a，下ノ方ニ a_2 ヲカケテ加ヘレバ．$a/a_1 = a_2/a$ ナレバ．c_{s-1}, c'_{s-1} ガ eliminate サレテ

$$c_s [a \alpha + a_2(s-j)] + c'_s [a_2 \alpha - a(s+j)] = 0 \quad (38)$$

之ガ c_s ト c'_s ノ関係ヲ与ヘル式デアル。

$r=0$ ニオケル boundary condition トシテ (36) ノ series ハ s ノ小サイ方デ切レテ居ル。s_0 ヲ s ノ min. value (c_s, c'_s ノ共ニ0トナラナイ s) トスレバ (37)ニ $s=s_0$ $\quad c_{s_0-1} = c'_{s_0-1} = 0$ ヲ入レレバ。

$$\left.\begin{aligned} \alpha c_{s_0} - (s_0+j) c'_{s_0} &= 0 \\ \alpha c'_{s_0} + (s_0-j) c_{s_0} &= 0 \end{aligned}\right\} (39)$$

$$\alpha^2 = -s_0^2 + j^2$$

$s_0 \gtrless 0 \qquad s_0 = +\sqrt{j^2-\alpha^2}$

(36) ノ series ノ convergence ヲ見ルニ s ノ大キイ値ニ於テ c_s/c_{s-1} ヲ見ルト、

s ガ大キイナラバ (38) ハ大体 $\qquad c_s a_2 = c'_s a$

(37) ノ下ノ方ハ $\qquad s c_s = c_{s-1}/a + c'_{s-1}/a_2$

$$\therefore \quad c_s/c_{s-1} = 2/as$$

$\therefore$ (36) ノ series ハ $\sum_s \frac{1}{s!}\left(\frac{2r}{a}\right)^s = e^{2r/a}$

† (38) ニヨリ、~~一方ガ~~ c_s, c'_s ノ一方ガ 0 ニナレバ他モ 0 トナル。

$+2$
-2
$+1$
-1

$n'+|j|$ $\qquad$ j

ノ形ニ converge スル。

從ツテ a ガ pure imaginary ノ場合即チ $|H'|>mc^2$ ノ場合ハ H' ノ凡テノ値ガ eigenvalue トナリウル。

又 a ガ real 即チ $|H'|<mc^2$ ノ場合ハ (36) ノ series ガ s ノ大キイ所デ中途デ切レル場合ノミ H' ハ eigenvalue トナル。今 series ガ s ノ所デ切レルトスレバ、

$c_{s+1}=c'_{s+1}=0$ デ (37) ノ s ノ代リニ $s+1$ トオクト

$$c_s/a_1 + c'_s/a = 0$$
$$-c'_s/a_2 - c_s/a = 0$$

之ハ又 (34) ニ於ケル equivalent デアル。之ト (38) カラ

$$a_1[a\alpha + a_2(s-j)] = a\{a_2\alpha - a(s+j)\}$$
$$2a_1a_2s = a(a_2-a_1)\alpha$$
$$\frac{s}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\alpha = \frac{H'}{c\hbar}\alpha$$

両辺ヲ二乗スルト

$$s^2(m^2c^2 - H'^2/c^2) = \alpha^2 H'^2/c^2$$
$$\frac{H'}{mc^2} = \left(1+\frac{\alpha^2}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

之ニ s ハ series ノ last term ノ power デアル、

$$s = \cancel{s_0 + n}\ n' + s_0 = n' + \sqrt{j^2-\alpha^2}$$

n' : 0 or pos. int.

energy level

$$\therefore \frac{H'}{mc^2} = \left\{1 + \frac{\alpha^2}{(n'+\sqrt{j^2 \pm \alpha^2})^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

j : integer (moto)

~~(37) ニ於テ $s = s_0$, $c_{s_0+1} = c'_{s_0+1} = 0$ トオケバ~~

$$\cancel{c_{s_0}/a_1 + \alpha c'_{s_0}/a = 0}$$

$$\cancel{-c'_{s_0}/a_2 - c_{s_0}/a = 0}$$

$n' = 0$: $H' > 0$.

$$\frac{H'}{mc^2} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{j^2 - \alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{j^2 - \alpha^2}}{|j|}$$

$$a_1 = \frac{\hbar}{mc + H'/c} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{j^2-\alpha^2}}{|j|}} = \frac{\hbar}{mc^2} \cdot \frac{|j|}{|j| + \sqrt{j^2 - \alpha^2}}$$

$$a_2 = \frac{\hbar}{mc - H'/c} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{j^2-\alpha^2}}{|j|}} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{|j|}{|j| - \sqrt{j^2 - \alpha^2}}$$

$$a = \left(\frac{\hbar^2}{m^2c^4} \frac{1}{1 - \frac{j^2 - \alpha^2}{j^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{|j|}{\alpha}$$

之レハ Sommerfeld ノ fine structure formula ニ他ナラヌ。之ガ実験ト合フコトハ良ク知ラレテ居ル。従ニ確カメラレテヰルモノデアル。

コレニヨッテ ~~energy level~~ ハ ~~[illegible]~~ α^2 ガ小サイトスレバ ~~[illegible]~~ $n = n' + |j|$ ノミニ ~~depend スル~~

(注) ノミノ energy level ハ 非常ニ接近シタ 本質的ニ大体

$$\frac{H'}{mc^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2}$$

$$\text{or} \quad H' - mc^2 \cong -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

即チ non-rel ナ場合ノ energy level ト一致スル。

n' ~~及ビ j ノ~~ ノ一部ノ値ニ対シテハ j ハ正負 pos or neg. integer ニナッテ居ルカラ。

$n' = 0$ ノ時ニハ ~~$s_0 = \sqrt{j^2 - \alpha^2}$~~ $c_{s_0+1} = c'_{s_0+1} = 0$.

(38) ハ ~~identically = 0~~.

~~(37)~~ ハ

$$c_{s_0} \frac{\hbar}{mc^2}\left\{\frac{|j|}{\alpha}\alpha + \frac{|j|}{|j| + \sqrt{j^2-\alpha^2}}(\sqrt{j^2-\alpha^2} - j)\right\}$$

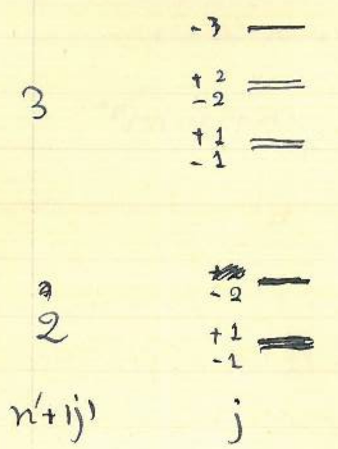
$$+ c'_{s_0} \frac{\hbar}{mc^2}\left\{\frac{|j|\alpha}{|j| - \sqrt{j^2-\alpha^2}} + \frac{|j|}{\alpha}(\sqrt{j^2-\alpha^2} + j)\right\}$$

$$= c_{s_0} \frac{\hbar}{mc^2}\{\cancel{|j| - |j|}\} + c'_{s_0} \frac{\hbar}{mc^2}\left\{\cancel{\frac{(\sqrt{j^2-\alpha^2}+j)}{\alpha}}(j + |j|)\right\}$$

$$\frac{|j|}{\alpha}\{(|j| + \sqrt{j^2-\alpha^2}) + (j + \sqrt{j^2-\alpha^2})\}$$

$\therefore$ ~~$j \geq 1$ ノ時ニハ $c'_{s_0} = 0$.~~

~~$j \leq 1$ ノ時ニハ $c_{s_0} = 0$.~~



$$\frac{h}{mc^2}\Big\{C_{s_0}\Big[\frac{|j|}{\alpha}+\frac{|j|}{\alpha}\{|j|+\sqrt{j^2-\alpha^2}\}\{\sqrt{j^2-\alpha^2}-j\}\Big]$$

$$+C'_{s_0}\frac{|j|}{\alpha}\Big[(|j|+\sqrt{j^2-\alpha^2})+(j+\sqrt{j^2-\alpha^2})\Big]\Big\}$$

~~$j \geq 1$~~

$$\frac{h}{mc^2}\Big\{C_{s_0}\frac{2|j|\sqrt{j^2-\alpha^2}}{\alpha}+C'_{s_0}\frac{|j|\{|j|+j+2\sqrt{j^2-\alpha^2}\}}{\alpha}\Big\}=0$$

$$\alpha C_{s_0}-(\sqrt{j^2-\alpha^2}+j)C'_{s_0}=0$$

両式ヨリ j

2ノ場合 ~~(38), (39)~~ ノ (37) = 代入シテ $s=s_0$ 及ビ $s=s_0+1$ トオケバ、

$$\frac{C_{s_0}}{a_1}+\frac{C'_{s_0}}{a}=0,\quad \alpha C_{s_0}-(s_0+j)C'_{s_0}=0$$

此関係ガ出テクル。

2ノ場合. $s_0=+\sqrt{j^2-\alpha^2}$ ~~トナレバ~~ $a_1, a>0$ ナレバ 両式ガ compatible ナル為ニハ $j<0$ デナケレバナラヌ。

コレデ ノコトカラシテ Hydrogen ノ Energy level ハ n', $|j|$ ニヨッテ決定サレルガ、$n'\neq 0$ ナル energy level ハ凡テ二重デアル。 $n'+|j|$ ノ同ジモノハ互ニ非常ニ接近シテ居ル。

field ガ Coulomb ノ field デナイ場合ニハ、一般ニ Energy level ハ n' 及ビ j ニ depend スルデアラウ。2ノ場合.

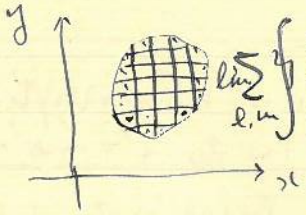
$n=3$

$l=$	0	1	~~1~~	2	~~2~~
$j=$	-1	1	-2	2	-3
$(j'=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2})$
	$s_{1/2}$	$p_{1/2}$	$p_{3/2}$	$d_{3/2}$	$d_{5/2}$

$j>0$ 〃 $j=l$ }
$j<0$ ナル場合ハ $-j-1=l$ トナル。
l ノ一ツノ値ニ対シテ二ツノ term ガ doublet ヲナシテヰル。
之ガ Alkali spectrum ノ doublet デアル。

第1四節ハ Dirac ノ relativistic ナ electron ノ理論
デアッタガ、ヨシニハ ~~有~~ 行ッタガ 欠点モアッタ。
~~先第一ハ~~ 即チ 内ニ Relativistic ナ理論ニ出テ来ル
electron ノ energy ハ ± ノ両方ノ値ヲ同ジ様ニトリウルカラ;
次ニ ~~pos. energy ノ state カラ~~ negative energy ノ state ヘノ ~~transition ガ起ルコト~~
~~カラ negative ener~~ = 如何ニ physical meaning ヲ
与ヘルカガ難シイ。classical ナ理論デハ pos. energy
ト neg. energy ノ間ニハ $2mc^2$ ナル Gap ガアル。
neg. energy ヲ持ツ事ヘ行モヨカッタガ、今ノ理論ハ
pos. energy state カラ neg. energy state ヘノ transition
ガ起リウルカラ 故ニ一方ヨリトハイハレヌ事ナル。
Dirac ハ考ヘタ如ク neg. energy state ノ大部分ハ空ク 電子
electron ガ占メ、空イテイル所ガ陽子
proton ニナルトシテモ、mass ノ違ヒヲ derive 出来
ヌノミナラズ、proton ノ life time ガ短カスギル。
コノ問題ノ ~~解~~ 決ハ今ノ所一寸解決ガ出来ヌ。

発見されれば、かかる空所は丁度 mass が
electron と同じ charge が +e なる particle
で同じ様に振舞ふ。 anti-electron しかしかかる空席は
子は (~~positive energy~~ electron の transition
positive energy の
によって埋められるであろうから寿命が短かく
observation がむつかしい。 <相殺がある
最近発見された Positive Electron は ~~恐らく~~
この anti-electron に他ならないであろうと考へるべき



$$\lim \sum_{l,m} \iint \left\{ \frac{f_{l+1,m} - f_l}{\Delta x} \right\} \Delta x \Delta y$$

$$= \lim \sum_{l,m} (f_{l+1,m} - f_{l,m}) \Delta y$$

$$= \lim \sum_{m} (f_{l_1(m),m} - f_{l_2(m),m}) \Delta y$$

$$= \int f \cos\theta \, dy$$

$$\int \delta Q_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} \right) dV dt$$

$$+ \sum_x \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}} \right) dV dt + \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} \right) dV dt$$

~~Q_α 及ビソノ derivative ノ函数 $L(Q_\alpha, \dots)$~~, ~~即チ Lagrange 函数~~

~~boundary ニ於テハ ... ト ...~~, Lagrange 函数

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta q_\kappa \left(\frac{\partial L}{\partial q_\kappa} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\delta q_\kappa \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) dt$$

§ Quantum Mechanics of Wave Field

前ニノベタ様ニ Relativistic ナ Quantum Mechanics ヲ建設スル一ツノ方法ハ ~~field theory~~ quantum theoretical dynamical system ヲ field quantity ニヨツテ describe スルコトデアル。ソノ場合ニハ dynamical variables ノ数ガ infinity トナル。ソレハ finite ノ場合ノ limiting case ト考ヘラレル。field quantity ノ満足スベキ関係、即チ V.R. ト Equation of field equation トヲ derive スル。classical ナ場合ニ於テハ、field quantity ヲ $Q_\alpha(x, y, z, t)^{\alpha=1,2,\dots}$ トスレバ、~~Lagrange 函数~~

$$\int L\left(Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial y}, \cdot \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} \dot{Q}_\alpha\right) dV dt$$

$$= \text{extreme} \qquad (1)$$

ナル條件カラ field eq ガ derive サレル。但シ $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}$.

即チ

$$\sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} = 0. \quad (2)$$

トコロガ degree of freedom ガ finite ナ dynamical system ニ於テハ eq. of motion ハ (t_1, t_2 ニ於テ q_κ ノ値ガ一定ニ保タレル時)

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_\kappa, \dot{q}_\kappa) dt = ext$$

ナル條件カラ出テクル。

デアル $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

之ヲ Hamilton ノ形ニ書キ直スニハ
$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

トオキ、 $$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

p_k, q_k ノ変分ニ対シ $$\int_{t_1}^{t_2} H\,dt = \text{extremum}$$

トイフ條件カラ、 can. eq.
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

デアル。

量子力学デハ、{p_k ト q_k ノ ~~交換関係ニ対シテ~~} quantum condition
$$q_k p_l - p_l q_k = i\hbar\,\delta_{kl}$$

ヲ与ヘレバ、~~eq. of motion~~ can eq. of motion ニ対スル 量子力学的 equation of motion ハ 次ノ形ノ式
$$i\hbar\,\dot{\xi}_k = \xi_k H - H \xi_k$$

デアル。

ソシテ dynamical variables ノ数ガ infinite ナ場合ノ eq. ニ classical ナ理論カラ quantum theory ニウツルコトガ

$$\iint \delta Q_{\alpha,l,m,n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{Q_{\alpha,l+1,m,n}-Q_{\alpha,lmn}}{\Delta x}\right)} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{Q_{\alpha,l,m,n}-Q_{\alpha,l-1,\cdots}}{\Delta x}\right)} \right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}}\right) \right\} dt\, \Delta x \Delta y \Delta z$$

~~finite~~ $$\bar{L} = \int L\, dV \qquad (3)$$

ナル函数ヲ introduce スル。

今 integrate スベキ Volume ヲ各邊ノ長サ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ナル直六面体ニワケ、(l,m,n) ナル番號ヲ附ケ、(l,m,n) ナル直六面体ニ於ケル Q_α ノ平均値ヲ $Q_{\alpha;l,m,n}$ トスル。

$$\bar{L} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \Delta x \Delta y \Delta z \sum_{l,m,n} L\left(Q_{\alpha;l,m,n}, \frac{Q_{\alpha,l+1,m,n}-Q_{\alpha,l,m,n}}{\Delta x}, \cdots \dot{Q}_{\alpha;l,m,n}\right)$$

$$= \cancel{\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \bar{L}' \qquad (4)$$

∴ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ finite ノ時ニハ系ハ ~~field quantity~~ ~~dynamic variable~~ $Q_{\alpha,l,m,n}$ ニヨッテ describe サレル (finite number of variables)

$$\int \bar{L}' dt = \text{extremum} \qquad (5)$$

ナル條件カラ

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha;l,m,n}} - \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha,lmn}} + \frac{1}{\Delta x}\left\{ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{Q_{\alpha,l+1,\cdots}-Q_{\alpha,l}}{\Delta x}\right)} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{Q_{\alpha,}-Q_{\alpha,l-1}}{\Delta x}\right)} \right\} = 0 \qquad (6)$$

ガ運動方程式トシテ出テ来ル。 $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ ノ limit

前 $$\frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_{\alpha, r}} = \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} - \sum_{xyz} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}}$$

ニ於テ之ハ (2) ト一致スル。

之ニ對應スル $Q_{\alpha,l,m,n}$ ニ對スル canonical conj. ハ

$$p_{\alpha,l,m,n} = \frac{\partial \bar{L}'}{\partial \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}} = \delta x \delta y \delta z \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}} \quad (7)$$

又 $$P_{\alpha,l,m,n} = \frac{p_{\alpha,l,m,n}}{\delta x \delta y \delta z}$$ トオク (8)

從ツテ Hamilton 函數ハ

$$\bar{H}' = \sum_{\alpha,l,m,n} p_{\alpha,l,m,n} \dot{Q}_{\alpha,l,m,n} - \bar{L}'$$

$$= \delta x \delta y \delta z \sum_{\alpha,l,m,n} \left(P_{\alpha,l,m,n} \dot{Q}_{\alpha,l,m,n} - L \right)$$

$\delta x, \delta y, \delta z \to 0$ ナル limit ニ於テハ $Q_{\alpha,l,m,n} \to Q_{\alpha}(x\,y\,z)$ トナリ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha}} = \lim \frac{p_{\alpha,lmn}}{\delta x \delta y \delta z} = P_{\alpha}(x\,y\,z)$$

トナルカラ

$$\bar{H} = \lim \bar{H}' = \int H dV$$
$$= \int \left\{ \sum_\alpha P_{\alpha}(x\,y\,z) \dot{Q}_{\alpha}(x\,y\,z) - L \right\} dV \quad (8)$$

トナリ field eq ハ $$\int \bar{H} dt = \text{extremum} \quad (9)$$

ナル條件カラ

$$\cancel{\int \bar{H} dt = \quad \delta P_{\alpha,(xyz)}\, \dot{Q}_{\alpha,r} - \frac{\partial L}{\partial}}$$

$$\delta \int \bar{H}\, dt = \int dV dt \cdot \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha,r}} \delta P_{\alpha,r} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha,r}} \delta Q_{\alpha,r} + \sum_{xyz} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x}} \delta \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x} \right.$$

$$= \int dV dt \sum_\alpha \Big(\dot{Q}_{\alpha,r} \delta P_{\alpha,r} + P_{\alpha,r} \delta \dot{Q}_{\alpha,r}$$

$$- \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha,r}} \delta Q_{\alpha,r} - \sum_{xyz} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x}} \delta \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,r}} \delta \dot{Q}_{\alpha,r} \Big)$$

$$\dot{Q}_{\alpha,r} = \frac{\partial H}{\partial P_{\alpha,r}} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_{\alpha,r}}$$

(2) ヨリ

$$\dot{P}_{\alpha,r} = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha,r}} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x}}$$

$$= -\left[\frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha,r}} - \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x}} \right]$$

$$= -\frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_{\alpha,r}}$$

$$\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \int f(Q_{\alpha,l,m,n} \cdots) \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z =$$

$$= f(Q_{\alpha,l',m',n'} \cdots) =$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x}} \right) \qquad (10)$$

$$\cancel{\dot{Q}_\alpha(xyz) =}$$

~~Canonical Eq.~~ 之ヲ

$$\dot{Q}_{\alpha,r} = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_{\alpha,r}} \qquad \dot{P}_{\alpha,r} = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_{\alpha,r}} \qquad (10)'$$

ト ~~(…)~~ 書ク コトガ 出来ル。
~~…~~

之ニ 交換関係ヲ 要求スルコトガ 一般ノ principle ト 考ヘラレル

$$\cancel{p_{\alpha,l,m,n} Q_{\beta,l'm'n'} - Q_{\beta,l'm'n'} p_{\alpha,l,m,n} =}$$

$$Q_{\alpha,l,m,n} p_{\beta,l'm'n'} - p_{\beta,l'm'n'} Q_{\alpha lmn} = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \delta_{ll'} \cdots$$

or $Q_{\alpha,l,m,n} P_{\beta,l'm'n'} - P_{\beta,l'm'n'} Q_{\alpha lmn} = i\hbar \dfrac{\delta_{\alpha\beta} \cdots}{\Delta x \Delta y \Delta z}$

所が

$$\lim \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

$$= \delta(r-r')$$

ナルガ故、上ノ Vertauschungs rel ノ $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0}$ ヲ取レバ

$$Q_{\alpha,r} P_{\beta,r'} - P_{\beta,r'} Q_{\alpha r} = i\hbar\, \delta(r-r') \delta_{\alpha\beta} \quad (11)$$

(Q 同志, P 同志 ハ 勿論 commute スル。)

トナル。(任意ノ field quantity ヲ F デ表ハシ

ソノ時 Field Eq ハ

$$i\hbar \dot{\bar{F}} = \bar{F}\bar{H} - \bar{H}\bar{F} \cancel{\; i\hbar \frac{\partial F}{\partial t}} \qquad (12)$$

ナル形ニ 書ケル。之ハ (10) ト一致スル。

(H ガ Q_α, P_α 及ビ derivative ノ有理函数ナル時ハ analytic)

$\bar{H}$ ガ time ヲ explicit ニフクマヌ場合ニハ、之ハ constant トナル。之ハ field ノ total energy ヲ示ス。

$$\cancel{Q_{\alpha,r}\bar{H}-\bar{H}Q_{\alpha}} =$$

$$Q_{\alpha,r}F_1 - F_1 Q_{\alpha,r} = \frac{\delta F_1}{\delta P_{\alpha,r}}$$

$$Q_{\alpha,r}F_2 - F_2 Q_{\alpha,r} = \frac{\delta F_2}{\delta P_{\alpha}}$$

$$Q_{\alpha,r}F_1F_2 - F_1F_2Q_{\alpha,r} = \frac{\delta(F_1F_2)}{\delta P_{\alpha,r}}$$

$$P_{\alpha,r}F_1F_2 - F_1F_2P_{\alpha,r} = P_{\alpha,r}\frac{\delta F_1F_2}{\delta Q_{\alpha,r}}$$

$$\int (P_{\alpha,r}F_r - F_r P_{\alpha,r})\,dV$$

$$= \int (P_{\alpha,r}F_{1r} - F_{1r}P_{\alpha,r'})F_{2r}\,dV + \int F_{1r}(P_{\alpha r}F_{2r} - F_{2r}P_{\alpha r})$$

$$= \frac{\delta F_{1r}}{\delta Q_{\alpha,r'}}F_{2r'} + \cdots$$

∵) H ガ $Q_{\alpha,r}$

$$i\hbar\dot{Q}_{\alpha,r} = Q_{\alpha,r}\bar{H} - \bar{H}Q_{\alpha,r} = i\hbar\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha,r}} = i\hbar\frac{\delta H}{\delta P_{\alpha,r}}$$

$$i\hbar\dot{P}_{\alpha,r} = -i\hbar\left[\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha,r}} - \sum\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x}}\right]$$

之ニ依リテ (in ser (n) ある $Q_{\alpha,r}$ ガ diagonal ナ rep ニ於テ) wave eq ヲツクルニハ $\bar{H}$ ノ中ニ於ケル $P_{\alpha,r}$ ~~ヲ~~ ヲ $-i\hbar\dfrac{\delta}{\delta Q_{\alpha,r}}$

~~ト~~ 即チ

$$\left.\begin{aligned}&\bar{H}\left(Q_{\alpha,r},\ \frac{\partial Q_{\alpha,r}}{\partial x},\ \cdots -i\hbar\frac{\delta}{\delta Q_{\alpha,r}}\right)\Psi(Q_{\alpha,r})\\ &= +i\hbar\frac{\partial\Psi(Q_{\alpha,r})}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

ナル式ヲツクレバヨイ。

實際ノ計算ニ當ッテハ $Q_{\alpha,r}$, $P_{\alpha,r}$ ヲ variable ニナホ之ヲ改メテ置ク。

$$u_i(x,y,z)\qquad i=1,2,\cdots$$

ヲ orthogonal 函数ノ complete set トスル。

$$\left.\begin{aligned}Q_{\alpha,r} &= \sum_i q_{\alpha i}u_i(xyz)\\ P_{\alpha,r} &= \sum_i p_{\alpha i}\bar{u}_i(xyz)\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$\cancel{E = J - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\, A_0}$$
$$\cancel{H = \mathrm{rot}\, A}$$

$$\mathrm{rot}\, E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{div}\, H = 0$$

† 及ビ $\mathrm{rot}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} I$,

但シ Scalar potential ハ０トオイタカラ $\mathrm{div}\, E = 4\pi\rho$ トイフ式ハ落ス。

† ~~然ルニ場合~~ 所デ matter ノ存在スル所ヲ除外スル時ハ,

$$\mathrm{div}\, E = 0$$
$$\mathrm{rot}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \cancel{0}\ 4\pi I$$
} ナル二式ヲ得ル

$$\mathrm{div}\, A = 0 \qquad \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

ノ如キ ~~Bed~~ 條件ニ於ケル方程式ヲ得ル。

トオキ $q_{\alpha i}$, $p_{\alpha i}$ ヲ variable ニトレバ

$$\int \bar{u}_i(xyz)\, u_j(xyz)\, dv = \delta_{ij}$$

ナル條件ヲ入レテ q, p ニ対スル V.R. ハ

$$q_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\beta j} q_{\alpha i} = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \quad (15)$$

トナル。

之ノ方法ヲ先ヅ Electromagnetic Field ニ applyスル。
vacuum ニオイテハ Maxwell ノ eq ハ ~~φ=0トシタ時ニ~~

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$
$$H = \mathrm{rot}\, A$$

トオケバ。
Lagrangian トシテ

$$L_R = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2) = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 - (\mathrm{rot}\, A)^2\right\} + \frac{1}{c} A I \quad (16)$$

ヲトレバ A ノ variation ニ対シ

$$\delta \int L_R\, dv = \text{extremum}$$

ナル條件カラ出テクル。†

~~h ニ対スル~~ A ニ対スル canonical conj ハ $-\frac{1}{c}E$ デアル。

$$\because \frac{\partial L_R}{\partial \frac{\partial A_x}{\partial t}} = -\frac{1}{c}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4\pi c} E_x$$

∴ Hamiltonian ハ $H_R = \sum \frac{\partial A}{\partial t} - L_R = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + AI = \frac{1}{8\pi}\{E^2 + (\mathrm{rot}\, A)^2\} + AI \quad (17)$

V.R. ハ $A_\mu E_\nu - E_\nu A_\mu = -4\pi i\hbar c\, \delta_{\mu\nu}\, \delta(r - r') \quad (18)$

トナル。 但シ $\mu, \nu =$ ~~1, 2, 3~~ x, y, z.

次ニ ~~$A = \sum_i q_i \mathbf{A}_i u_i$, $E = -\frac{1}{c}\sum_i p_i \mathbf{A}_i u_i$ トオク。然シ~~ 但シ u_i ハ

$$\Delta u_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} u_i = 0$$

ヲ満足スル規格化サレタ Vector デアル。之ハ

$$\int u_i u_j \, dV = \delta_{ij}$$

ヲ満足スル函数ノ complete set ヲツクル。

此ノ時ニ Hohlraum ノ内面ニ於テ

$div\, u_i = 0$ 　　u_i ハ壁ニ垂直

ナル様ナ條件ヲ満ス solution ヲ ~~考ヘル~~ トス。ソレヲ

v_i 　$j = 1, 2, \ldots$

トスル。但シ $\int v_i v_j \, dV = \delta_{ij}$

次ニ $\Delta \varphi + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2}\varphi = 0$

ヲ満シ、Boundary デ $\varphi = 0$ ナル條件ヲ満足スル

トオキ、$q_{\alpha,i}$, $p_{\alpha,i}$ ヲ variable ニトレバ

$$\int \bar{u}_i(xyz)\, u_j(xyz)\, dV = \delta_{ij}$$

ナル條件ノ下デ q, p ニ対スル V.R. ハ

$$q_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\beta j} q_{\alpha i} = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \qquad (15)$$

之ノ方法ヲ Electromagnetic Field ニ apply スル。vacuum ニ於ケル ~~場合~~ Lagrangian ハ

$$L = \cancel{-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, A_0\right)^2 - \cancel{\tfrac{1}{c}}(\mathrm{rot}\, \mathbf{A})^2\right\}$$

従ッテ ~~A~~ $\mathbf{A}$ ニ對スル canonical conj ハ $-\frac{1}{c}\mathbf{E}$ トナル

$$\because \quad \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, A_0\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\mathbf{E}_x$$

トナル。然シ A_0 ニ對スル canonical conj ハ 0

トナル。

~~之ハ困難ヲ生ズルガ~~ 然シ vacuum ノ場合ハ

Scalar potential ~~$\mathbf{A} = 0$~~ $A_0 = 0$ トシテヨイカラ、

$$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})^2\right\}$$

rc. $\mathbb{A}$ 2882m canonical conj ヲ $-\frac{1}{c}\mathbb{E}$

$$\Delta u_i + \frac{4\pi^2 \nu_i^2}{c^2} u_i = 0$$

$\cancel{\mathrm{div}\, u_i =}$ $\qquad$ $\mathrm{div}\, v_i = 0$

$\mathrm{rot}\, u_i = A_i$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\, v_i = \mathrm{rot}\, u_i$

$\cancel{\mathrm{div}}\ u_i = v_i + w_i$

$$\mathrm{rot}\,(u_i - v_i) = 0 \quad \text{grad}$$

$$u_i = v_i + \mathrm{grad}\,\varphi_i$$

$$\Delta u_i = \Delta v_i + \Delta\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_i$$

$$v_i \Delta w_j - w_j \Delta v_i =$$

$$\int \left(\mathrm{rot}\, v_i \cdot \mathrm{rot}\, w_j + \mathrm{div}\, v\, \mathrm{div}\, w + v \Delta w \right)$$

$$\mathrm{div}\,[v \cdot \mathrm{rot}\, w] + \mathrm{div}\,(v\, \mathrm{div}\, w)$$

$=$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{ v_y (\mathrm{rot}\, w)_z - v_z (\mathrm{rot}\, w)_y \} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(v_x \mathrm{div}\, w)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\{ v_z (\quad)_x - v_x (\quad)_z \} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(v_y \qquad)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\{ v_x (\quad)_y - v_y (\quad)_x \} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(v_z \qquad)$$

$$= \mathrm{div}\, v\, \mathrm{div}\, w$$

$$= \mathrm{rot}\, v \cdot \mathrm{rot}\, w \pm v \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, w \quad + v\, \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, w$$

$$\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r') + \psi_i(r')\psi_i^\dagger(r) = \delta(r-r')$$

$$\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\cdot\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r') = \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r)\delta(r-r')$$

$$\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\{\delta(r-r') - \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\} = 0$$

$$\int \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r)\,dv = \iint \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\delta(r-r')\,dv\,dv'$$

$$= 0 \text{ or } \delta(r-r')$$

$r_1, r_2, \ldots r_n$

$$\int dv \int \frac{\sum_i \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r)\sum_k \psi_k^\dagger(r')\psi_k(r')}{4\pi|r-r'|}\,dv'$$

Σ

$$\sum_i \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r) = 4\delta(r-r')$$

$$F'G' - G'F' = \{F + \frac{\varepsilon}{\hbar c}(\bar\Lambda_\mu F - F\bar\Lambda)\}\{G + \frac{\varepsilon}{\hbar c}(\quad)\}$$

$$-\{G + \quad\}\{F + \quad\}$$

$F(\bar\Lambda G - G\bar\Lambda)$
$+ (\bar\Lambda F - F\bar\Lambda)G$
$- G(\bar\Lambda F - F\bar\Lambda)$
$- (\bar\Lambda F - F\bar\Lambda)G$

~~従ッテ Field eq.ハ Hamiltonian ハ~~

~~$H =$~~

従ッテ Field eq.ハ $\bar H_R = \int H\,dV$ トスル時.

$$i\hbar\dot F = FH_R - H_R F$$

カラ出テクル。

~~サテ A 及 E ヲ 夫々 real ナル orthogonal 函数デ expand シ~~

~~$$A_\mu = \sum_i q_{\mu i} u_i$$~~

~~$$E_\mu = \sum_i p_{\mu i}\bar u_i$$~~

~~トスル。~~ $\int u_i u_j\,dV = \delta_{ij}$ ナル如ク.

~~$\bar H =$~~

而シテ scalar 函数 $\varphi_{\lambda i}$ ニ

$$w_i = \mathrm{grad}\,\varphi_{\lambda i}$$

ヲ作ル。 更ニ

$$\int w_i w_j\,dV = \delta_{ij}$$

然ル時.

$$\Delta w_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} w_i = 0$$

デ

$$\int w_i w_j\,dV = 0$$

$$\Delta u_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} u_i = 0 \qquad u_i:\ \text{壁ニ垂直}$$

ヲ満足スル任意ノ vector ヲ u_i トシ.

$$\cancel{\mathrm{div}}\ \mathrm{rot}\, u_i = \mathrm{rot}\, v_i$$

$$\mathrm{div}\, v_i = 0 \qquad \Delta u_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} u_i = 0$$

ヲ満足スル vector ヲ v_i トスレバ.

$\mathrm{rot}(u_i - v_i) = 0$ ナルガ故ニ,

$$u_i = v_i + \mathrm{grad}\,\varphi_i$$

ノ形ニカケル。

~~但~~ モシ

$$\Delta \varphi_i + \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2}\varphi_i = 0$$

$\varphi = 0$ ~~於~~ Boundary Condition

$$w_i = \mathrm{grad}\,\varphi_i$$

ト置ケバ. 任意ノ $u_i = v_i + w_i$

$\cancel{v_i \Delta\varphi_i =}$

$$\mathrm{div}(v_i \,\mathrm{div}\, w_i) = \mathrm{div}\, v_i\, \mathrm{div}\, w_i + v\{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, w_i$$

$$= 0 + v\,\cancel{\mathrm{div}}\,\Delta w_i - v\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, w_i$$

$$= v_i \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} w_i$$

$$\therefore \int v_i w_i \,\cancel{dv} = \int \left(v_i \frac{4\pi\nu_i^2}{c^2}\varphi_i\right) d\sigma = 0$$

之ヨリ v_i 及ビ w_i ニヨッテ任意ノ u_i ガ表ハサレル。

従ッテ A, E ヲ v_i, w_i ニヨッテ expand シ

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}c}\mathbf{A} = \sum q_i v_i + \sum q_i' w_i$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\mathbf{E} = \sum p_i v_i + \sum p_i' w_i \qquad (19)$$

トスレバ,

$$q_i p_j - p_j q_i = + i\hbar\,\delta_{ij}$$

$$q_i p_j' - p_j' q_i = 0 \quad \text{etc.} \qquad (20)$$

(19) ヨリ Hamiltonian ハ下ノ如クナル。

$$\bar{H}_R = \frac{1}{2}\sum_i \left(p_i^2 + 4\pi^2\nu_i^2 q_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i p_i'^2 \qquad (21)$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{\sqrt{4\pi}c}}}_{-\sqrt{4\pi}} \sum_i q_i \int v_i \Pi\, dV \; \underbrace{\cancel{-\frac{1}{\sqrt{4\pi}c}}}_{-\sqrt{4\pi}} \sum_i q_i' \int w_i \Pi\, dV.$$

次ニ Electron ニ対スル Lagrange 函数トシテ

$$\bar{L}_E = \int \psi^\dagger\left\{\left(+i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0\right) + c\,\alpha\left(-i\hbar\,\mathrm{grad} + \frac{e}{c}A\right) + \alpha_m mc^2\right\}\psi \qquad (22)$$

$$\left(\int L_E\, dV \quad L_E = \right)$$

ト取レバ

$$\int \bar{L}_E\, dt = \int L_E\, dV\, dt = \text{extremum}$$

ナル條件カラ (Dirac ノ) wave eq. ガ出テクル。

ナル density

$$S_0 = \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i$$

ノ eigenvalue ハ (24) カラ

$$\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r)\{\psi_i^\dagger(r)\psi_i(r') + \psi_i(r')\psi_i^\dagger(r)\} = \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r)\delta(r-r')$$

$$\therefore \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\{\delta(r-r') - \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r')\} = 0$$

$$\therefore \psi_i^\dagger(r)\psi_i(r') = 0 \text{ or } \delta(r-r')$$

Electric Density Current ニ対スル Four Vector ハ

$$S_\mu = \psi^\dagger \alpha_\mu \psi \qquad \alpha_0 = 1, \qquad (23)$$

ψ_i ニ対スル ~~Conjugate~~ canonical conj. ハ

$$\frac{\partial L_E}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial t}} = i\hbar \psi_i^\dagger \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

∴ V.-R. ハ

$$\psi_{i,r}\psi_{k,r'}^\dagger - \psi_{k,r'}^\dagger \psi_{ir} = \delta_{ik}\delta(r-r')$$

etc

トナルベキデアルガ Electron ハ Pauli ノ exclusion principle ヲ満足スルカラ之ヲ考ヘニ入レテ次ニ

$$\left.\begin{aligned} \psi_{i,r}\psi_{k,r'}^\dagger + \psi_{k,r'}^\dagger \psi_{i,r} &= \delta_{ik}\delta(r-r') \\ \psi_{i,r}\psi_{k,r'} + \psi_{k,r'}\psi_{i,r} &= 0 \end{aligned}\right\} (24)$$

etc

コノ V.R. ヲ満足スル様ナ Field quantity ニヨッテ describe サレル電子デハ ... ニナルコトガアル

ソレニ

~~$F_1 F_2 Q_\alpha - Q_\alpha F_1 F_2 = F_1(F_2 Q_\alpha + Q_\alpha F_2) - (F_1 Q_\alpha + Q_\alpha F_1) F_2$~~

~~トナルカラ. (22) ノ様ニ $\psi, \psi^\dagger$ ノ bilinear form ノ ...~~

electric current : $\mathbf{I} = \frac{e}{4} - ecS$

$$H_E = \psi^\dagger i\hbar c(\alpha, \mathrm{grad})\psi - \alpha_m mc^2 + \frac{1}{c}\mathbf{A}\mathbf{I}$$

$\frac{1}{c}\mathbf{AI}$ ハ interaction ヲ表ハス. 之ハ field ニ於テ matter ト ~~radial~~ field ノ
アラハレテヰル場所ト一致スル。~~故ニ之ヲ interaction~~
従ッテ ...

Hamiltonian ハ　　　　$\overline{H}_E = \int H_E dv$

$$H_E = \left(i\hbar \sum_i \psi_i^\dagger \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - L\right)$$

$$= \psi^\dagger \{ i\hbar c\, \alpha(\underset{i\hbar}{\mathrm{grad}} \pm \tfrac{e}{c}A) - \alpha_m mc^2 \} \psi \quad (25)$$

而シテ F_1, F_2 ヲ $\psi, \psi^\dagger$ ノ任意函数トスルトキ,

$$F_1 F_2 \psi_i - \psi_i F_1 F_2 = F_1(F_2\psi_i + \psi_i F_2) - (F_1\psi_i + \psi_i F_1)F_2$$
etc

ナル故、上ノ如キ H ノ $\psi, \psi^\dagger$ ノ bilinear form デアルコトニ注意スレバ

$$i\hbar \dot{\psi} = \psi \overline{H}_E - \overline{H}_E \psi$$
$$i\hbar \dot{\psi}^\dagger = \psi^\dagger \overline{H}_E - \overline{H}_E \psi^\dagger$$

ナル式ハ正ニ Dirac ノ wave eq ト同等デアル。
従ッテ任意ノ Field quantity F ニ対スル field eq ヲ

$$i\hbar \dot{F} = F\overline{H}_E - \overline{H}_E F \quad (26)$$

トカクコトガ出来ル。

Electron ト Electromagnetic Field カラ成ル Total System ニ対スル Hamiltonian ハ (17) 及ビ (25) ヨリ,

$$H = \cancel{H_E + H_R} = \psi^\dagger \{ i\hbar c\, \alpha(\underset{}{\overset{i\hbar}{\mathrm{grad}}} \pm \tfrac{e}{c}\mathbf{A}) - \alpha_m mc^2 \}\psi + \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{E}^2 + (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2\} \quad (27)$$

$$\overline{H} = \int H dv$$

$\psi^\dagger, \psi$ ト $\mathbf{E}, \mathbf{A}$ トハ互ニ commute スルコト

$$\mathbf{E}\int (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 dv - \int (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 dv\,\mathbf{E} = \mathbf{E}$$

$$\int E_x' \sum_{xyz} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)^2 - \sum E_x' dv$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(E_x' A_x \delta(rr') - A_x E_x'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta(rr') - A_x E_x'\right)\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right] dv$$

$$-i\hbar 4\pi c \qquad \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad -i\hbar 4\pi c$$

$$= -i\hbar 4\pi c \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}\{i\hbar 4\pi c\, \delta(rr')\} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$E_x' \mathrm{rot}_y \mathbf{A} - \mathbf{A}\, \mathrm{rot}_y \mathbf{A} \cdot E_x'$$

$$= E_x'\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - (\quad) E_x'$$

$$= +i\hbar 4\pi c \frac{\partial \delta(r, r')}{\partial z}$$

$$E_x'(\mathrm{rot}_y \mathbf{A})^2 - (\mathrm{rot}_y \mathbf{A})^2 E_x' = i\hbar 4\pi c \frac{\partial \delta(r,r')}{\partial z} \mathrm{rot}_y \mathbf{A}$$

$$+ i\hbar 4\pi c \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{rot}_y \mathbf{A} \frac{\partial \delta(r,r')}{\partial z}$$

$$E H_R - H_R E = +i\hbar c\, \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$$

~~ナイデ~~ $i\hbar \dot{F} = F\bar{H} - \bar{H}F$ デハナク

~~ソレデ~~ $\psi^\dagger, \psi, E, A$ ニ対スル field eq ヲ出スト.

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \mp \frac{e}{4\pi c} \psi^\dagger \alpha \psi$$

or $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = 4\pi e \mathbf{S}$

$\mathbf{S}$ ハ Current ヲ表ハス Vector. $= \psi^\dagger \alpha \psi$.

カクシテ Maxwell 及ビ Dirac ノ式ガ証明サレタノデ Field eq トシテ考ヘラレル。 ~~A_0~~ 即チ scalar potential ヲ省イタカラ除外サレタモノ

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho = -4\pi e \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i$$

ノ式ハ出テコナイ。

(任意ノ) $\lambda(r)$ ヲ任意ノ real 関数トスレバ

$$\psi, \psi^\dagger, A =$$

$$\psi' = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\lambda(r)} \psi$$

$$\psi'^\dagger = \psi^\dagger e^{+\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\lambda(r)}$$

$$A' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\lambda(r)$$

ナル transformation ヲ行ッテモ 物理的ニ意味ガナイ。 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $S_\mu = \psi^\dagger \alpha_\mu \psi$

H_E, $\bar{H}_R$ 等ハ invariant デアル。

之ヲ Eichinvariant ト称スル。

此 infinitesimal ノ Eichinvariant Transformation

$$\psi' = \psi - \frac{ie}{\hbar c}\varepsilon \lambda \psi$$

~~$\psi'^\dagger = \psi^\dagger + \frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\varepsilon\lambda\psi^\dagger$~~

$\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot H_k - H_k \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$

$\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \int \cancel{A} \ldots A' \operatorname{div} \mathbf{E} =$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = \operatorname{div}\left(c(\operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{I}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho)$$

$$= -4\pi\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}\right\} = 0$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \int \mathbf{I}_n \, df$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \varepsilon \operatorname{grad} \lambda$$

~~変~~ヲ 行フト Ψ 及 $\mathbf{A}$ ノ任意ノ Function F ハ

$$F' = F + \varepsilon \int dV \left(\sum_i \frac{\delta F}{\delta \psi_i}\left(\frac{-ie}{\hbar c}\right) \psi_i \lambda + \sum_{xyz} \frac{\delta F}{\delta A_x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)$$

$$= F - \varepsilon \int dV \lambda \left(\sum_i \frac{ie}{\hbar c} \psi_i \frac{\delta}{\delta \psi_i} + \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta}{\delta A_x} \right) F$$

トナル。

然ルニ Ψ, $\mathbf{A}$ ガ diagonal ナル rep ニ於テハ

$$+i\hbar \psi_i^{\dagger} \;:\; -i\hbar \frac{\delta}{\delta \psi_i}$$

$$-\frac{1}{4\pi c} E_x \text{ 等 } ; \; -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_x}$$

ナル Operator ト等シクナル。此ノ Operator ハ

$$\int dV \lambda \left(\sum_i \frac{ie}{\hbar c} \psi_i \psi_i^{\dagger} + \sum_x \frac{-i}{4\pi \hbar c} \operatorname{div} \mathbf{E} \right)$$

トナル。然ルニ $\bar{H}$ ハ Gauge invariant ~~Transf~~ ナル故、此ノ Operator ハ H ト commute シ、従ッテ constant of motion. 然モ λ ハ任意ノ故ニ 次ノ関係ヲ得ル

$$\operatorname{div} \mathbf{E} + 4\pi e \sum_i \psi_i^{\dagger} \psi_i = \text{const.} = C \quad (28)$$

Lagrange 形式　Lor. inv. ?

$C=0$ ナルト　Lorentz Transformation ヲ行ッタ時.

i) $\bar{\Lambda}$ ガ eichinv. ナルカラ 新シイ system デモ $C'=0$.

ii) $\bar{H}'$ ハ A_0' ヲフクマズ eichinvariant ナルユエ $\bar{H}'$ ト C' トハ Commute スル.

(H ハ four vector time comp. ニナル)

iii) V.-R. ハカハラヌ.

(28)式

ナオ又 我々ノ理論が relativistic ニ invariant デアルカドウカガ問題トナルガ. 先ヅ, Field quantity F ハ infin. Lorentz transf. ニヨリ

$$F' = F + \varepsilon \frac{2\pi i}{hc}(\bar{\Lambda}F - F\bar{\Lambda})$$

ニ Transf. サレル. コノ $\bar{\Lambda}$ ナルモノハ $C=0$ ノ時ハ eichinvariant.

$$F'G' \mp G'F' = FG \mp GF + \frac{\varepsilon}{hc}\{F(\bar{\Lambda}G - G\bar{\Lambda}) + (\bar{\Lambda}F - F\bar{\Lambda})G$$
$$\mp G(\bar{\Lambda}F \mp F\bar{\Lambda}) \mp (\bar{\Lambda}G - G\bar{\Lambda})F\}$$
$$= FG \mp GF + \frac{\varepsilon}{hc}\{\bar{\Lambda}(FG \mp GF) - (FG \mp GF)\bar{\Lambda}\}$$

∴ V.-R. ハ Lorentz Transf. ニヨリテカハラヌ.

Lorentz Transf. ヲ行ヘバ A ハ A' ノ他ニ A_0' ヲモフクムデアラウガ,

$C=0$ ノ時ハ $\bar{H}'$ ハ A_0' ヲフクマズ. 且 eichinvariant

故ニ A', ψ', $\psi^{\dagger\prime}$ ト commute スル.

$$-\int \operatorname{grad}\varphi_i \cdot \operatorname{grad}\varphi_j \, dV$$
$$= \int \varphi_i \, \Delta\varphi_j \, dV = -\delta_{ij}$$

此式ハ直接明ニ之ヲ用ヒ得ル.

然ルニ C ハ xyz ニ ~~space~~-function ナリカラ,

~~然~~ C ハ eichinvariant ナ凡テノ量ト commute スル.

(28)式ハ ~~Nebenbedingung ト~~ 各々 time ニ依ラズ

$$C=0$$

トシテモ, 何等矛盾ヲ生ジナイ.

即チ $\operatorname{div} \cancel{E} + 4\pi e \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i = 0$　(29)

ナル関係ガ ? time ニ依ラズ満足サレナケレバナラナイコトモ 之ガ満足サレル. ~~之ガ M_0 即チ~~ Maxwell ノ第四式ハ, Hamiltonian (27) カラ導カレル Schrödinger ノ wave eq. ニ対シ ~~然ノ関係ト矛盾スルコトナク~~, Neben-bedingung トシテ トレルコトガ出来ル. ナ

次ニ (21), (19) ヲ代入スレバ. Hamiltonian ハ

$$\bar{H} = \int \psi^\dagger \cancel{\alpha\,\mathrm{grad}} (i\hbar c\,\alpha\,\mathrm{grad} - \alpha_m m c^2)\psi \, dV$$
$$-\frac{e}{\sqrt{4\pi}\,c}\sum_i q_i \int v_i s_\mu \, dV - \frac{e}{\sqrt{4\pi}\,c}\sum_i q_i' \int w_i s_\mu \, dV$$
$$+\frac{1}{2}\sum_i (p_i^2 + 4\pi^2 \nu_i^2 q_i^2) + \frac{1}{2}\sum_i p_i'^2 \qquad (30)$$

トナル.

又 ~~Maxwell~~ (29) ハ

$$\sqrt{4\pi}\sum_i p_i \cancel{\operatorname{div} v_i} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sum_i p_i' \operatorname{div} w_i + 4\pi e \sum_i \overset{\rho_0}{\psi_i^\dagger \psi_i} = 0$$

or $\sqrt{4\pi}\sum p_i' \Delta\varphi_i + 4\pi e \sum_i \psi_i^\dagger\psi_i = 0$

or ~~$-\sqrt{4\pi}\sum_i \frac{4\pi^2\nu_i^2}{c^2} p_i'\varphi_i + 4\pi e \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i$~~

$$\Delta\{\varphi_i(r)\varphi_i(r')\} = -\sum_i w_i(r)\, w_i(r')$$

これ $= -\delta(r, r')$

$\therefore\ \varphi_i(r)\varphi_i(r') = G(r\, r')$

G : green function

Hohlraum が大きければ

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|r-r'|}$$

$$\therefore\quad p'_i = \sqrt{4\pi}\, e \int s_0 \varphi_i \, dV \qquad (31)$$

~~これを (30) に入れると~~ 従って

$$\cancel{\sum_i p_i'^2 = 4\pi e^2 \iint s_0(r) s_0(r') \sum_i \varphi_i(r)\varphi_i(r')\, dV dV'}$$

$$\cancel{= 4\pi e^2 \int \frac{s_0(r)\, s_0(r')}{4\pi |r-r'|}\, dv dv'}$$

然るに $s_0(r), s_0(r')$ は 0 又は [illegible] ∞ となる故 ∞ となる故 s

然るに $s_0(r) = 0$ or $\lim \delta(r-r_n)$ となる。 $n=1,2,\ldots$

$s_0(r)$ の infinity となる所を $r_1, r_2 \cdots r_n \cdots$ とすれば

$$p'_i = \sqrt{4\pi}\cdot e \sum_n \varphi_i(r_n)$$

$$\therefore\ \sum_i p_i'^2 = 4\pi e^2 \sum_{i,n,m} \varphi_i(r_n)\varphi_i(r_m)$$

$$= \sum_{n,m} \frac{4\pi e^2}{4\pi |r_n - r_m|}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\sum_i p_i'^2 = \sum_{n<m} \frac{e^2}{|r_n - r_m|} + \infty .$$

従って (30) の last term は electron 相互の間の Coulomb force を表して居るが、所謂 Selbstenergie = self energy として ∞ の値が這入って来る。

classical electrodynamics ニ於テハ ~~同時~~ el. mag field ノ作用ト考ヘテ居る ヲ quantum theory ニ
ナゼナラ ~~本来~~ particle ノ間ノ electrostatic ナ interaction ト ~~discrete~~ radiation トヲ ~~区別~~ 二ツニ分ケテ考ヘ来タトイフ事ガ、理論的根據ガ薄弱ダカラデアル。

Oppenheimer; Phys. Rev. 35, 461 (1930)

此ノ二ツノ項ハ constant デアルガ、~~tta~~ 第一項ハ radiation ノ energy ノ部分ヲ表ハシ、所謂 Nullpunktenergie ト共ニ Hamiltonian カラ除外シテ差支ヘナイ。
第二項モ第三項モ radiation ト ~~e~~electron トノ interaction ヲ表ハシテ居ルノデアル。~~1st appr~~
(30) ノ Hamiltonian カラ wave eq ヲ作リ、~~1st appr.~~ ~~unperturbed~~ ト第二項以下ノ interaction ノ項ヲ ~~neglect~~ シテ perturbation energy ヲ求ム。energy ノ charge ヲ perturbation ノ parameter トシテ計算スルト、2nd approx. トシテ constant デナイ infinite energy ガ出テ来ル。従ッテ energy level ノ値ハ云フニ及バズ、ソノ間ノ差モ無限大トナッテ了フカラ、ソノ spectral lines モ無限ニ displace シテ了フ。更ニ approximation ヲ進メテ行ケバ、ソレ等ノ ∞ ガ compensate サレルカモ知レナイガ、ソレハ考ヘ得ナイ。今日ノ所謂 Quantum Electrodynamics ハ ~~失敗~~ ダトイフ。コレヲ何トカ改良シナケレバナラヌノデアル。
Electron ノ self energy ニ関スル difficulty ハ、~~ele~~ classical ナ理論ニ於テ electron ノ radius ニ correspond スル量ヲ introduce スレバ除カレルカモ知レヌガ、ソレハ relativistic ニ invariant ナ ~~形~~式ニ入レルコトハ困難デアル。之ニ代ッテ場ノ外部ニ近イ距離ニオケル particles ノ interaction ト関係ナク、field ガ外部ニ

狭い範囲で矛盾しない場合には．現在の量子力学が
適用出来るといふ二つの意味をもつて居る。