

**YHAL**  
**N53**

c032-170



# INDEX N53

PAGE	PAGE
物理十五講の索引	
1. Non-holonomical system	
2. 定常振動の力の振動 振動系の	
3. Vector 場 評価 Div, Curl Gauss, Stokes の 演習	
4. Tensor 論	
5. 剛体の平衡運動	
6. 角運動の保存則	





Appell, Traité de Mécanique  
Rationnelle I, ~ IV.





の中程なり。実際、分子も原子の軌道も、その軌道  
 粒子の軌道なり、即ち通常の力学の軌道と異なる  
 軌道。これら量子力学が支配しているのだ  
 である。

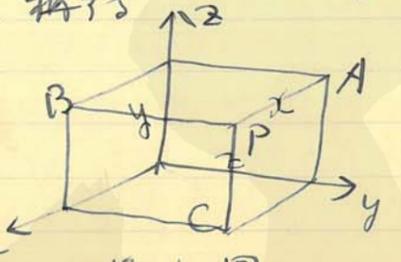
座標系(座標系)なり

さて質点の位置を定めることが必要である。  
 (この元素位置は何か標準なりとする関係  
 係して相対的に定むるなり) ところが出来るまで  
 絶対的な意味なり。最も簡単なのは

i) 直角座標 (rectangular coordinates)

である。任意の一点  $O$  を通過して、三本の互に  
 垂直な直線  $Ox, Oy, Oz$  を引き、質点  $P$   
 から  $Oyz, Ozx, Oxy$  の三平面に垂線を下し  
 その長さ  $x, y, z$  とする。この三つの値  
 により  $P$  の位置は一意的に定まる。  
 これを ~~直角~~  $Ox, Oy, Oz$  を座標軸と(此  
 場合の  $P$  点の直角座標。又 Cartesian coordinates  
 と稱す。又  $O$  を原点 (origin),  $Ox, Oy, Oz$  を  
 座標軸 (coordinate axes),  $Oyz, Ozx, Oxy$  を座標面  
 (coordinate planes) 等と稱す

他し、座標の長さ  $x, y, z$  は  
 正負を区別し、座標を定める  
 ためのなり。即ち  $P$  点  
 が  $Oyz$  平面に於いて、 $Ox$  軸  
 上の  $x$

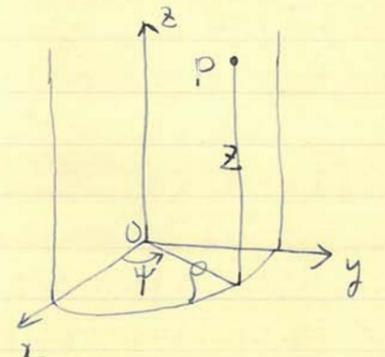


第1図

の値に於いて  $x$  は正なり、反の値に於いて  
 負なり。  $y, z$  についても同様なり。  
 精確し、ある場合なり

ii) 圓柱座標 (cylindrical coordinates)

が便利なることあり。  
 即ち、 $P$  点を通り、 $z$  軸を軸と  
 する圓柱面を作り、その半径を  
 $\rho$ 、 $Oz$  と  $P$  を含む平面と  
 $Ox$  面との夹角を  $\psi$  とする、  
 $P$  点の位置  $(\rho, \psi, z)$  により  
 一意的に決定する。



第2図

これと直角座標との関係なり

$$x = \rho \cos \psi \quad y = \rho \sin \psi \quad z = z \quad (1.1)$$

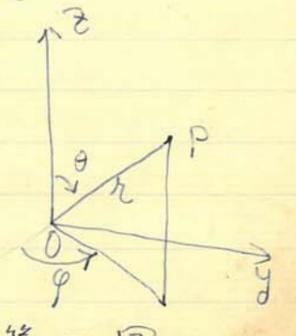
$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \psi = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.2)$$

の関係あり。

或なり

iii) 極座標 (polar coordinates) (球座標, spherical coordinates)

が用いられることあり。  
 原点  $O$  から  $P$  までの距離を  $r$ 、  
 $Oz$  軸と  $OP$  の間の角を  $\theta$ 、  
 $Oz$  軸と  $OP$  平面の間の  
 角を  $\phi$  とす、 $P$  点の  $(r, \theta, \phi)$  により



第3図

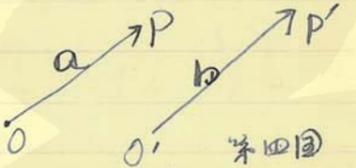
により決定される。直角座標との関係は

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{aligned} \right\} (1.4)$$

である。  
 この他に、一般に曲線座標 (curvilinear coordinates) により位置を表わし得るが、これ以後は省く。  
 この様に、3つの座標により位置を表わす

すべからず、原点から点Pへ引く位置ベクトル  $\vec{OP}$  の長さ  $r$  と方向  $\theta, \varphi$  を表わす。これを radius vector 又は position vector と稱す。



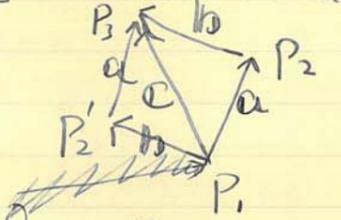
一般に、大きい方向を有するベクトルを  $\vec{a}$  とし、小さい方向を有するベクトルを  $\vec{b}$  とし、方向を有しない量を  $\alpha$  と書く。今この vector の大きさを  $a$  と書く。vector の大きさの絶対値 (absolute value) といふ。これを scalar とする。この場合、 $a$  と  $b$  の方向も大きさも同じ場合、之等を互いに等しいと稱し、これを

$$\vec{a} = \vec{b}$$

と書く。(第四図) 故に vector の位置の位置に平行移動することは可能である。

## §2. Vector 算法. Vector Calculus

この様に、位置の vector を表わせば、その位置の变化を考へて得る。時刻  $t_1$  の時刻に  $P_1$  であり、 $t_2$  の時刻に  $P_2$  へ移つて  $\vec{P_1P_2}$  とする。この間の変位 (displacement) は  $\vec{P_1P_2}$  として vector として表わす。更に  $t_3$  の時刻に  $P_3$  へ移つて  $\vec{P_2P_3}$  とする。この間の変位は  $\vec{P_2P_3}$  として表わす。



すなわち、 $t_3 - t_1$  の間の間の変位は  $\vec{P_1P_3}$  として表わす。これは、 $\vec{P_1P_2}$  と  $\vec{P_2P_3}$  の変位を合成したものが  $\vec{P_1P_3}$  として表わされる。即ち  $\vec{P_1P_3}$  は  $\vec{P_1P_2}$  と  $\vec{P_2P_3}$  を成分 (component) として合成 (合成) (resultant (displacement)) と稱す。  
 $\vec{P_1P_3} = \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3}$   
 と書く。以上の関係を

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.1)$$

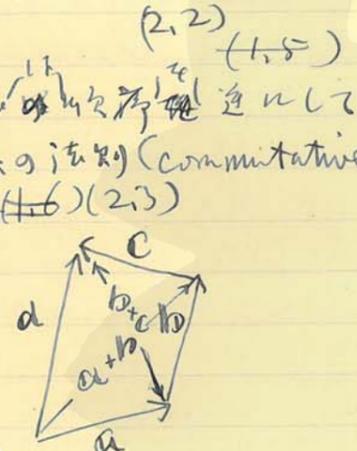
と表す。この様な関係は一般の vector の場合も成立し、これを vector の加法の定義とす。  $\vec{c} \in \vec{a}, \vec{b}$  の vector として和、vector sum と稱す。

第五図に示す如く、 $P_1, P_2$  を  $P_2'$  へ変位し、次に  $P_2$  へ変位して、結果として合成変位の矢 (和)  $\vec{P_1P_3}$

と書くとよい。即ち  $\vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{b}$ ,  $\vec{P}_2\vec{P}_1 = \vec{a}$   
 であるから、

$$\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

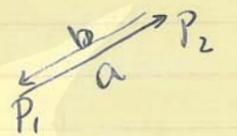
即ち  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$   
 と書ける。即ち vector の加法は可換律 (commutative law) が成立する。



又第6回からわかる様に  
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$   
 が成立する。即ち vector の加法は結合律 (associative law) も成立する。 (1.6) の両邊を第6回

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

と書いてもよい。  
 次に第7回から  $\vec{a} = \vec{P}_1\vec{P}_2$  の  
 意味を述べ、又  $\vec{b} = \vec{P}_2\vec{P}_1$  の  
 意味を述べ、即ち 何れの意味も起す方向  
 が同様である。よって  $\vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{a}$ ,  $\vec{P}_2\vec{P}_1 = \vec{b}$   
 と書く、これは



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \quad (2.4)$$

と書ける。この意味をたいて  
 $\vec{b} = -\vec{a}$

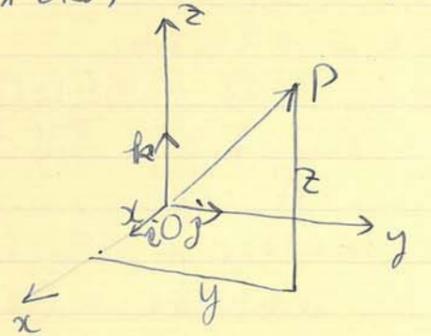
と書いてもよい。即ち  $\vec{a}$  と  $-\vec{a}$  は同じ方向の  
 反対の vector を  $-\vec{a}$  と書くことにする。  
 すると、vector の減法は

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.5) (1.8)$$

によって定義することも出来る。  
 次に unit vector である  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  の vector を 単位 vector (unit vector) と呼ぶことにすると、 $\vec{OP} = \vec{r}$  の  
 vector は

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.9) \quad (2.6)$$

と書くことも出来る。 (第7回)  
 他に、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  は  $Ox, Oy, Oz$  軸の方向の  
 単位 vector,  $x, y, z$  は  
 $P$  点の直交座標である  
 こと。



第7回

次に二つの vector  $\vec{a}, \vec{b}$   
 の間の角を  $\theta$  とした場合  
 $ab \cos \theta$

を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の スカラー積 (scalar product) と  
 呼ぶ。これを  $ab \cos \theta$ ,  $(\vec{a}\vec{b})$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  などと書く、即ち

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \theta \quad (1.10) \quad (2.7)$$

である。

~~場合~~ 二つの場合  $a$  と  $b$  の scalar 積は  $a$  と  $b$  の  
 積は  $a \cdot b = b \cdot a$  である。すなわち

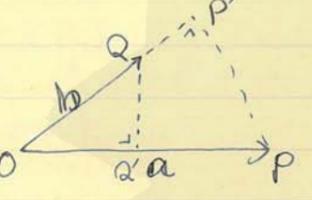
$$a \cdot b = b \cdot a \quad (2.8)$$

二つの場合、vector の scalar 乗法  $a$  と  $b$  の  
 交換の法則が成立する。

二つの場合、第一図の如く、

$$\vec{OP} \text{ と } \vec{OQ} \text{ の scalar 積は}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \vec{OP}' \cdot \vec{OQ} \quad (2.9)$$



第八図

である。但し  $P', Q'$  は共に  
 $P$  から  $OQ$  へ、 $Q$  から  $OP$  へ下した  
 垂線の足である。

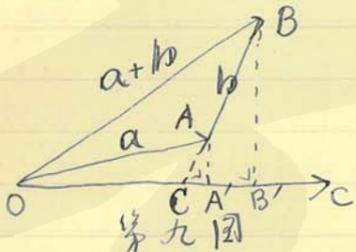
次に第九図から明らかである

$$a \cdot c + b \cdot c = \vec{OA}' \cdot \vec{OC}$$

$$+ \vec{AB}' \cdot \vec{OC}$$

$$(a+b) \cdot c = \vec{OB}' \cdot \vec{OC}$$

$$\therefore a \cdot c + b \cdot c = (a+b) \cdot c \quad (2.10)$$



第九図

すなわち scalar 乗法  $a$  と  $b$  と  $c$  の分配の法則 (distributive  
 law) が成立する。

二つの vector  $a$  と  $b$  が互いに垂直である  
 (2.7) の如く、 $\cos \theta = 0$  であるから

$$a \cdot b = 0$$

すなわち、 $a$  と  $b$  が平行ならば  $\cos \theta = 1$  であるから  
 $a \cdot b = ab$

すなわち  
 二つの

$$\begin{aligned} i \cdot j &= j \cdot k = k \cdot i = 0 \\ i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

の関係を成立する。

任意の vector  $a$  を

$$a = i a_x + j a_y + k a_z \quad (2.12)$$

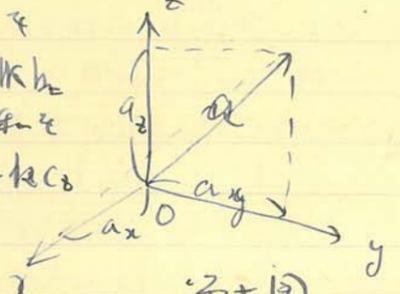
と書ける場合、 $a_x, a_y, a_z$  は  $a$  の  $x, y, z$   
 方向の成分と見做す。 (2.10) の如く (2.11)  
 を用いて、

$$a_x = a \cdot i \quad a_y = a \cdot j \quad a_z = a \cdot k \quad (2.12)$$

すなわち、同じように、任意の vector  $a$  の  $x, y, z$   
 軸上の正射影  $a_x, a_y, a_z$  (成分) は  $a$  と  $i, j, k$   
 の内積として表される。次に他の vector  $b$  を

$$b = i b_x + j b_y + k b_z \quad (2.13)$$

と書くと、(2.12) と (2.13) の和を  
 $a + b = i c_x + j c_y + k c_z$   
 と書くと、すなわち、



第十図

$$a + b = c \quad \text{この関係の両辺を } i, j, k \text{ を乗算すると、} \quad (2.14)$$

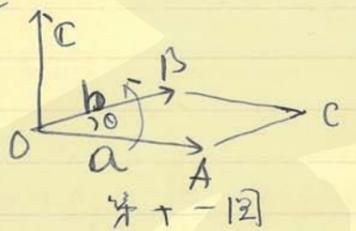
$$a + b = c \quad \text{この関係の両辺を } i, j, k \text{ を乗算すると、} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= cz \\ ay + bz &= cx \\ az + bx &= cy \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

この方程式は、 $a, b, c$  の成分の和を  $a_1, a_2, a_3$  の成分の和に等しい。

次に (2.12) (2.13) (2.11) からして  
 $ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.17)$   
 が得られる。つまり、二つの vector の scalar 積は、  
 それぞれの component の積の和に等しい。

もしも、 $a, b$  の二つの vector  
 によって作られる平行四辺形  
 $\triangle OACB$  の面積は  
 $|\vec{OA} \cdot \vec{OB} \sin \angle AOB|$   
 $= ab \sin \theta$



つまり、 $\theta$  は  $a$  と  $b$  の間の角である。この大きさで、  
 方向が  $a, b$  によって作られる vector  $c$  を  $a, b$  の vector 積 (vector product) と呼ぶ。つまり  
 $c = [ab]$

$$c = a \times b \quad (2.18)$$

つまり、もしも、 $a$  から  $b$  へ回転する際に、 $a, b$   
 の進む方向に  $c$  を得る。この場合を  $a, b$   
 $c$  の right handed system (right handed system) と呼ぶ

成り立つ。

$b$  と  $a$  の積の順序を逆にして、 $a$  と  $b$  の進む方向  
 が逆になる。つまり

$$[ba] = -c = -[ab] \quad (2.19)$$

つまり、二つの vector 積は、互いに反対の方向に  
 成り立つ。

もしも  $a, b$  が平行の場合に、 $\sin \theta = 0$  となる

$$[ab] = 0$$

垂直の場合に  $\sin \theta = 1$  となる

$$|[ab]| = ab$$

つまり、

従って、 $x, y, z$  軸  $Ox, Oy, Oz$  を右手系として  
 それぞれの単位 vector  $i, j, k$  を右手系を作  
 り得る場合

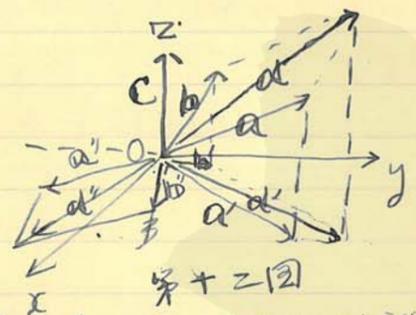
$$\left. \begin{aligned} [i, j] &= k = -[j, i] \\ [j, k] &= i = -[k, j] \\ [k, i] &= j = -[i, k] \\ [i, i] &= [j, j] = [k, k] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

が成り立つ。

次に  $a, b, c$  を任意の三つの vectors とすると  
 $[(a+b)c] = [ac] + [bc] \quad (2.21)$

が成る。この vector 系は  $a, b, c$  の  
 基底となる。

証明.  $C$  の方向を  $c$   
 軸とし,  $a, b$  の  
 $xy$  平面への正射影を  
 $a', b'$  とすると,  
 $d = a + b$



の正射影  $d'$  は  $a', b'$  の和である。  
 平行四辺形の正射影は平行四辺形である。  
 この四辺形は  $c$  軸の方向に  $d$  の正射影を形成し、  
 各辺を  $C$  軸に平行な vector とする  
 $a'', b'', d''$  とすると、之等は  $a, b$  の平行四辺形  
 の  $C$  軸に平行な辺を形成して居る。

$$a'' + b'' = d'' \quad (2.22)$$

これより、  
 $a'' = [a, c] \quad b'' = [b, c]$   
 $d'' = [d, c]$   
 であるから、(2.22) は (2.21) と他は等しい、  
 全く同様にして、

$$[c, (a+b)] = [c, a] + [c, b] \quad (2.23)$$

が成る。  
 (2.21), (2.23) の関係

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$b = b_x i + b_y j + b_z k$$

この両方を  $(, (2, 20)$  と見ると

$$[a, b] = [a_x i + a_y j + a_z k, b_x i + b_y j + b_z k]$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

$$\text{すなわち } [a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

と書ける。

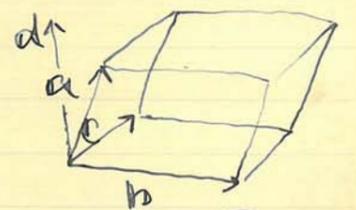
これは二つの vector の積は定義され、これを  
 してなる三角の vector の積を作ることから、

i)  $a(b \times c)$  は  $a$  の方向が  $a$  と  $b \times c$  の  
 $a, b, c$  の  $b \times c$

の vector を表す。

ii)  $a[b \times c]$

$[b \times c] = d$  とすると、  
 $d$  は  $b, c$  の平面に垂直で、



第十三回

大いさか  $b, c$  を二辺とす平行四辺形  $\vec{a}$  垂直の vector である。  $\vec{a}$  と  $\vec{a}$  の self scalar 積  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  の平行四辺形を面積とし、高さを

$$a \cos \theta$$

の平行四辺形、即ち  $a, b, c$  を三邊とす平行四辺形の面積  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  である。  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が右手系を形成して居る場合  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  は正で、(左向きの場合) 負である。

~~また~~ 従って ~~また~~

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \quad (2.25)$$

この関係は、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が右手系を形成して居る場合  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  は正で、(左向きの場合) 負である。  
 (2.12), (2.13), (2.14) の如く  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を分解して、  
 $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  (2.11) として

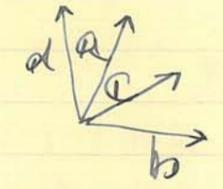
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot \left( \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

これより  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$  である。

頂点とす平行四辺形の面積を  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  とし、 $\vec{a}$  垂直の vector 何れ  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  である。

iii)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  は  $\vec{a}$  の  $\vec{b} \times \vec{c}$  垂直の vector



従って、 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$

$$= \hat{i} \{ a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \}$$

$$+ \hat{j} \{ a_x(b_z c_x - b_z c_y) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \}$$

$$+ \hat{k} \{ a_x(b_z c_y - b_x c_z) + a_y(b_y c_z - b_z c_y) \}$$

$$= \hat{i} \{ b_x(a_y c_x + a_z c_y) - c_x(a_y b_x + a_z b_y) \}$$

$$+ \hat{j} \{ \dots \}$$

$$+ \hat{k} \{ \dots \}$$

$$= \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.27)$$

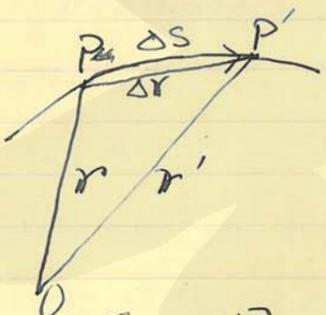
即ち  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  である。

物. これから  
 $[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0$  (2.28)  
 の関係が成り立つ。

8.3. 速度

質点が運動している場合、その経路は曲線と  
 して連続的に変化し、~~その~~その経路 (path) は  
 一般に一つの曲線として表わされ、  
 今ある時刻に P 点があり、その位置を  $r$  とし、  
 $t + \Delta t$  時刻に  $P'$  点があり、その位置を  
 $r'$  とすると、 $\Delta t$  時間の間の  
 変位は  $\Delta r = r' - r$   
 である。従って

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}$$



は  $\Delta t$  時間の間の平均の  
 速度ともいえる。これを vector  
 とする。これを  $\Delta t$  を限り  
 なく小さくして行くと、 $P'$  点に  $P$  点に近づき  
 $\Delta t \rightarrow 0$  になると極限を取ると  $|\Delta r|$  も  $\Delta t$  も  
 0 になるが、 $|\Delta r|$  が  $\Delta t$  より速く減少する、 $PP'$  間の曲線の長さを  
 $\Delta s$  とし、 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$  ~~は~~ の極限を取ると、  
 となり、

9  

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (3.1)$$

は一般に曲線の接線を表わしている。この接線は  $t$  に  
 対して  $\Delta r$  は P 点から P' 点の移動方向、 $ds$  は弧の  
 方向に向かっている。この方向の単位 vector を  $t$  と  
 すると、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} t \quad (3.2)$$

と書くことが出来る。これを質点の P 点における  
 速度 (velocity) と呼ぶ。これを  $v$  とすると、

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (3.3)$$

又速さの大小  $\frac{ds}{dt}$  を速さ (speed) と呼ぶ。

直角座標 (x, y, z を取り、質点の位置 vector を

$$r = i x + j y + k z$$

と表わす時、 $i, j, k$  は単位 vector (座標系が動かかない限り)

$$v = \frac{dr}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} \quad (3.4) \quad (2.32)$$

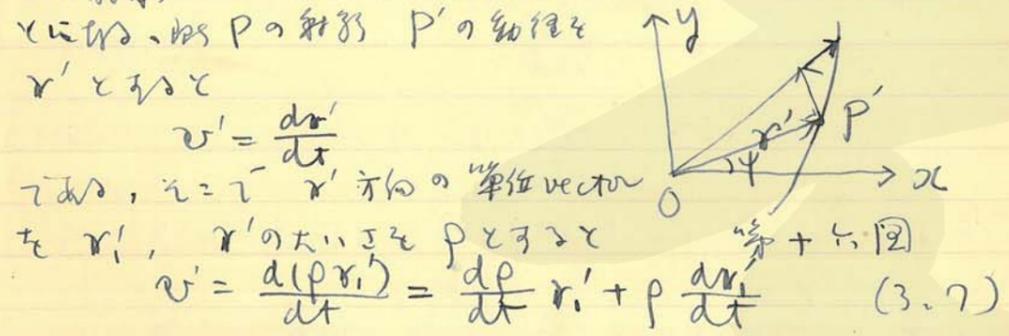
と表わす。この速度の x, y, z 方向の成分を  $v_x$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.33) \quad (3.5)$$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$   
 $= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad (3.6)$

この関係が成り立つ。

次に圆柱座標の同位速度の成分を求めよう。速度  $v$  を  $z$  軸の方向の成分  $v_z = \dot{z}$  と、この垂直な方向の成分  $v' = v - v_z$  とに分ける。この質点の軌道を  $xy$  平面上の射影  $P$  と、質点の射影は  $z$  軸上の射影  $P'$  の軌道を  $v'$  の速度で  $v'$  として



$v' = \frac{dr'}{dt}$   
 である、 $e = \hat{r}'$   $r'$  方向の単位vector  
 を  $r'_i$ ,  $r'$  の大きさを  $\rho$  とすると  
 $v' = \frac{d(\rho r'_i)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} r'_i + \rho \frac{dr'_i}{dt} \quad (3.7)$

したがって  $r_i'^2 = 1$  であるから  
 $2r'_i \frac{dr'_i}{dt} = 0 \quad (3.8)$   
 即ち  $r'_i$  の  $\frac{dr'_i}{dt}$  は  $r'_i$  と垂直である。即ち  $\frac{dr'_i}{dt}$  は  $\psi$  の  $\hat{t}$  方向の単位vectorである。したがって  
 は  $\frac{d\psi}{dt} \hat{t}$  であるから、

$\frac{dr'_i}{dt} = \frac{d\psi}{dt} t_\psi \quad (3.9)$

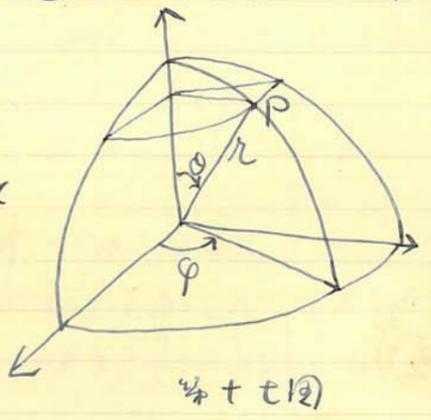
と書ける。但し  $t_\psi$  は  $\psi$  の増加方向の単位vectorである。

従って速度  $v$  は  
 $v = \frac{d\rho}{dt} r'_i + \rho \frac{d\psi}{dt} t_\psi + \dot{z} e_z \quad (3.10)$

~~この~~  $v$  の成分を  $(\frac{d\rho}{dt}, \rho \frac{d\psi}{dt}, \dot{z})$  と表す。この成分の  $\rho, \psi, z$  方向の成分を  $v_\rho, v_\psi, v_z$  とする。

次に球座標の同位速度の成分を求めよう。

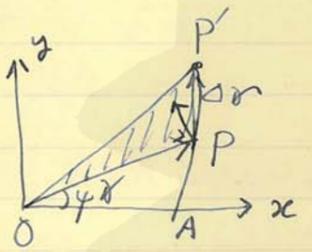
~~時刻~~  $t$  の時刻に  $P$  点に  
 質点  $m$  が  $t + \Delta t$  の時刻に  $P'$   
 に移動すると、その速度は  
 $v$  である。従って速度  $v$  は  
 $v = v_r + v_\varphi + v_\theta$   
 と分解される。ここで  $r$  は  $\varphi$   
~~は~~  $\theta$  方向の単位vector



したがって  $r_i, t_\varphi, t_\theta$  である  
 $v = \frac{dr}{dt} r_i + r \frac{d\varphi}{dt} t_\varphi + r \sin\theta \frac{d\theta}{dt} t_\theta \quad (3.11)$

いま、P点 (r, φ, θ) 点の速度の成分は  
 $(\frac{dr}{dt}, r \sin \theta \frac{d\phi}{dt}, r \frac{d\theta}{dt})$  (3.13)  
 である。

更に  $\frac{1}{2} [r v]$  のベクトルを  
 と、その方向は軌道の面上に向き、  
 その大きさは位置ベクトル r が  
 方位角 θ を描く面積速度 (areal  
 velocity) と等しい。P点の  
~~位置~~、軌道線上の任意の点 A と A



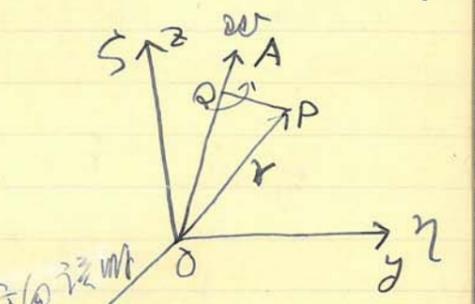
と、 $\theta \cdot \overline{AP} \cdot \overline{OA}$ ,  $\overline{OP}$ ,  $\overline{AP}$  の曲線の長さを  
 同方向に積分して  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} [r v]$  (3.14)

いま、  
 方位角の積分が一平面上に成り立ち、この平面  
 を xy 平面とし、点 A を x 軸上にとり、 $\angle AOP = \psi$  とし、  
 $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} [r \omega (\frac{d\psi}{dt} r' + p \frac{dr'}{dt})]$  (3.15)  
 $= \frac{1}{2} p^2 \frac{d\psi}{dt} \dot{\psi}$

いま、  
 $\frac{d\psi}{dt} \dot{\psi}$  を角速度 (angular momentum) と稱す。

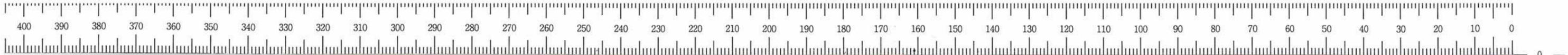
最後に回転座標系 (rotating coordinate  
 system) の回転速度と静止座標系 (stationary  
 coordinate system) の回転  
 速度との間の関係を求め  
 る。

今 Oxyz の座標系をとり、  
 Oξηζ の座標系が  
 $\omega = \overline{OA}$  の角速度で  
 回転してゆく。このとき、方位角  
 θ は、 $\omega$  は  $\overline{OA}$  の方向を  
 軸として、 $\omega$  の絶対値は  $\omega$  と  
 なる。



したがって、P点の速度は  $\omega$  と  $v'$  の和である。  
 $v = \omega \times r + v'$   
 $PQ = \omega = r \omega \sin(\theta \omega)$  (3.16)

いま、  
 $v = [ \omega r ]$  (3.17)  
 と、 $\omega$  の方向は  $\overline{OA}$  の方向を軸として、  
 $\omega$  の絶対値は  $\omega$  とする。  
 Oξηζ の座標系をとり、 $v'$  の速度は動  
 いて居る場合、Oxyz 座標系での速度  
 $v$  は  
 $v = v' + [ \omega r ]$  (3.18)

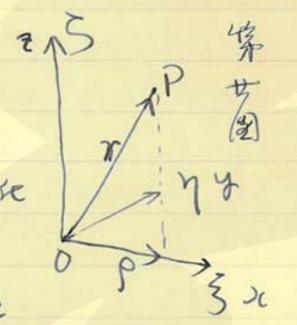


$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} e_z & r &= \rho e_\rho + z e_z \\ v &= \dot{\rho} e_\rho + \dot{z} e_z + \rho \dot{\psi} e_\psi \end{aligned}$$

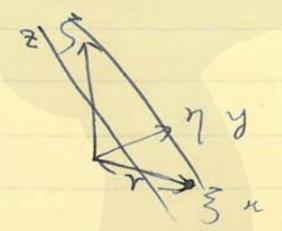
ここで、  
 角速度  $\omega$  と  $(0, \zeta, \zeta)$  と  $(0, x, y, z)$  軸とが重なる  
 $\zeta$  と  $x$  と  $y$  と  $z$  と、 $\rho$  と  $\psi$  と  $z$  とを  $(\zeta, \eta, \zeta)$ ,  $(x, y, z)$ ,  
~~と~~ 時間  $t$  の関数として  $(3.18)$   
 の成分は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\zeta} + \omega_y \zeta - \omega_z \eta \\ \dot{y} &= \dot{\eta} + \omega_z \zeta - \omega_x \zeta \\ \dot{z} &= \dot{\zeta} + \omega_x \eta - \omega_y \zeta \end{aligned} \right\} (3.19)$$

と書き換える。  
 $(0, \zeta, \zeta)$  座標系  $(\zeta, \eta, \zeta)$   
 $(0, \rho, z)$  座標系  $(\rho, \psi, z)$   
 $\omega$  と  $\omega$ , 回転座標系  $(\rho, \psi, z)$  による  
 $x, y, z$  座標系  $(\rho, \psi, z)$  と  $\rho, \psi, z$  の変化  
 する。  $\dot{\zeta} = \dot{\rho}$  と  $\dot{\eta} = \dot{\psi}$  と  $\dot{\zeta} = \dot{z}$  と  
 $\omega_x = \omega_y = 0$   $\omega_z = \dot{\psi}$  の角速度



ここで  $(0, x, y, z)$  座標系  $(x, y, z)$  と  $(0, \rho, z)$  座標系  $(\rho, \psi, z)$  と  
 $\rho, \psi, z$  の変化  $v_x = v_\rho = \dot{\rho}$   
 $v_y = v_\psi = \rho \dot{\psi}$   
 $v_z = v_z = \dot{z}$   
 $\left. \begin{aligned} \zeta &= \rho \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= z \end{aligned} \right\} (3.20)$   
 $\dot{\zeta} = \dot{\rho}$  と  $\dot{\eta} = \dot{\psi}$  と  $\dot{\zeta} = \dot{z}$  と  
 と  $(3.11)$  と一致する。

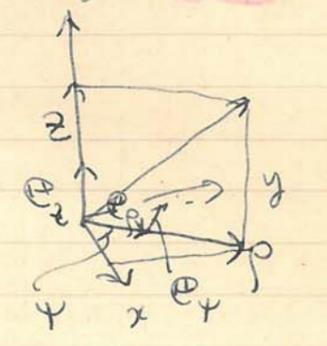


又球座標  $(r, \theta, \phi)$  と  $(0, x, y, z)$  軸とが重なる  
 $(0, \zeta, \zeta)$  軸とが重なる

角速度  $\omega$  (A) 回転座標の角速度  $\omega$ 。

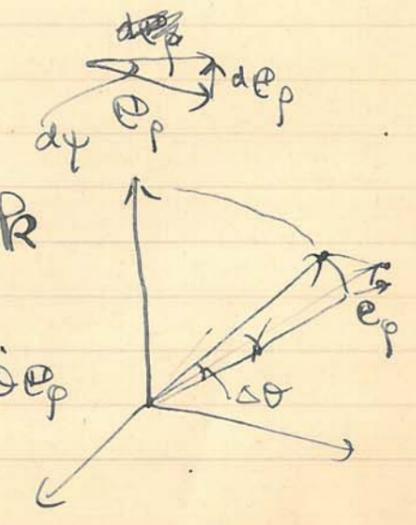
$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} e_z \\ r &= \rho e_\rho + z e_z \\ v &= \dot{\rho} e_\rho + \dot{z} e_z + \rho \dot{\psi} e_\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{e}_\rho &= \dot{\psi} e_\psi \\ \therefore v_\rho &= \dot{\rho} \\ v_\psi &= \rho \dot{\psi} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned}$$



又球座標の角速度  $\omega$ 。

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\theta} e_\phi + \dot{\phi} R \\ \therefore \omega &= \dot{\phi} \cos \theta e_r \\ &\quad - \dot{\phi} \sin \theta e_\theta + \dot{\theta} e_\phi \\ v &= r = r e_r \end{aligned}$$



$$v = v' + [\omega r]$$

$$= \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} e_\phi$$

$$v = \frac{dr}{dt} + [\omega r] = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} e_\phi$$

$$r = r e_r$$

$$\omega = \dot{\theta} e_\phi + \dot{\phi} k = \dot{\phi} \sin \theta e_r - \dot{\phi} \cos \theta e_\theta + \dot{\theta} e_\phi \quad (3.21)$$

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_y = -\dot{\phi} \cos \theta, \quad \omega_z = \dot{\theta} \quad (3.21)$$

$$\xi = r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

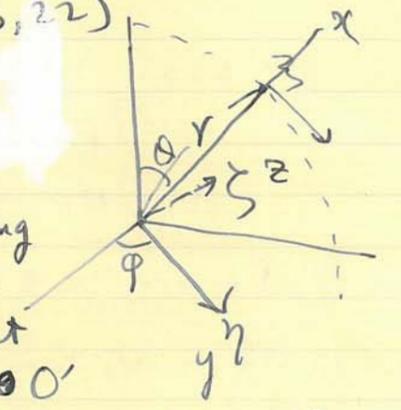
速さの成分

$$v_x = v_r = \dot{r}$$

$$v_y = v_\theta = r \dot{\theta}$$

$$v_z = v_\phi = r \dot{\phi} \sin \theta$$

(3.22)



一般の運動座標系 (moving coordinate system) の静止座標系との関係は、時間  $t$  内の位置の変化は原点  $O'$  の位置変化  $dr_0 = v_0 dt$  (第 1 式) と座標系の中心の位置変化  $dr_0 = v_0 dt$  と  $\omega dt$  の積算と等しい。  $x_i, x'_i = x'_i$   
 $\therefore$  任意時刻  $t$  における  $(\xi, \eta, \zeta)$  に対する単位 vector を  $e_i, e'_i, e'_j, (x, y, z)$  に対する単位 vector を  $i = e_1, j = e_2, k = e_3$  とすると、  

$$e'_i = \sum a_{ij} e_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$
 の関係が成り立つ。

ここで、静止座標系に関する時間  $t$  における  $O'$  の位置を  $r_0$  とし、座標系の中心の位置を  $r$ 、運動座標系に関する位置を  $r'$  とすると、



§4 加速  
 質点の速さ  $v$  の時間  $t$  と共に変化する場合、 $v$  の  
 $t$  の関数微分は

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (4.1)$$

を加速 (acceleration) と呼ぶ。1000

$$v = i v_x + j v_y + k v_z \\ = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt}$$

これから、加速の  $x, y, z$  方向の成分は

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{etc.} \quad (4.2)$$

すなわち、  
 物の速さが一定の場合、即ち加速  $a=0$   
 の場合、質点の等速運動 (constant velocity)  
 を運動してゐると稱する。この場合  $v$  の方向  
 は変わらないが、質点の一直線上を進む、(かま  
 りの大きい直線) であるから、質点の同じ速  
 さで進む。即ち直線等速運動  
 (rectilinear motion of constant speed) と呼ぶ。  
 加速が  $0$  ではない場合、一般に質点の曲線  
 運動 (curvilinear motion) を行う。この場合  
 一定ではない。この曲線上の任意点から質点の経過  
 の長さ  $s$  とし、この経過の軌道の切線の

方向の単位ベクトル  $t$  とする (3.2) のとき、14

$$v = \frac{ds}{dt} t$$

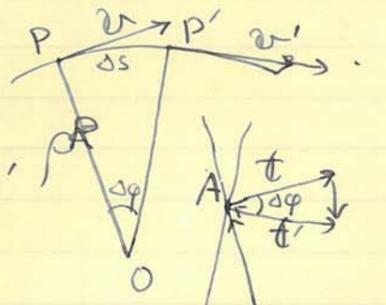
このとき、(4.1) の

$$a = \frac{ds}{dt^2} t + \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dt} \quad (4.3)$$

の右辺を書くと、左辺の第一項は切線の方向を指し、  
 これを切線加速 (tangential acceleration)  
 と呼ぶ。これを  $a_t$  と書くと

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} t \quad (4.4)$$

次に時刻  $t$  の  $v$  と  $t+\Delta t$  の  $v'$   
 の質点の位置を  $P, P'$  とし、  
 $P, P'$  の接線 = 軌道の接線  
 を引く方向の単位ベクトル  $t, t'$   
 を描き、一定の長さ  $A$  から



$v, v'$  の平行に単位ベクトル  
 $t, t'$  を引く。  $t, t'$  の平面内、  
 各点から垂直に直線  $AB, AC$  を引く。  
 点  $P, P'$  を通つて  $AB, AC$  に平行な直線を  
 引くと、 $P'$  が  $P$  の延長上に進む  $v' = v$  なる  
 一直線  $O$  を作る! ( $\because v, v' A$  の平面に  $v$   
 $PO, P'O$  の同一平面に  $A$  から引くと  
 なる) なる。  $O$  は曲率中心 (centre of curvature)  
 $PO = R$  は曲率半径 (radius of curvature)  
 $\dagger PO$  は  $P$  点の法線 (normal) の方向である

$\vec{p} \perp \vec{v}$  (normal),  $\vec{p} \perp \vec{v}$  (normal),  $\vec{p} \perp \vec{v}$  (normal)  
 normal),  $\vec{p} \perp \vec{v}$  (normal),  $\vec{p} \perp \vec{v}$  (normal)  
 (binormal) etc. #

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\rho R = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \phi} = \frac{ds}{d\phi} \quad (4.5)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{t}' - \vec{t}|}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \vec{n} \quad (4.6)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$a_n = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad (4.7)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   
 acceleration) と結合.  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$  (4.8)

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} t_x + \frac{(ds/dt)^2}{R} n_x \quad \text{etc} \quad (4.9)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$t_x = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} \quad \text{etc.}$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\frac{1}{\rho^2 R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \quad (4.10)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.11)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

$$\frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + [\omega \times \vec{r}] \quad (4.12)$$

半径  $R$ ,  $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   $\vec{p} \perp \vec{v}$   

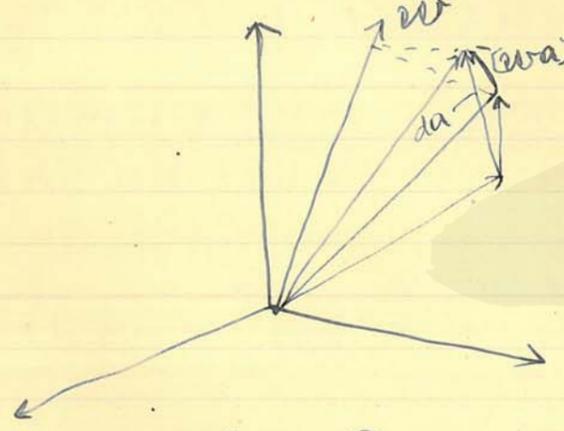
$$\frac{D\vec{a}}{Dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + [\omega \times \vec{a}] \quad (4.13)$$

静止系での加速度

∴ a の vector  $\times dt$  の内積  
 $da$  を変化して  $\times dt$  すると、 $da$   
 $da = [w a] dt$

したがって、 $da = [w a] dt$   
 となり、 $da = [w a] dt$

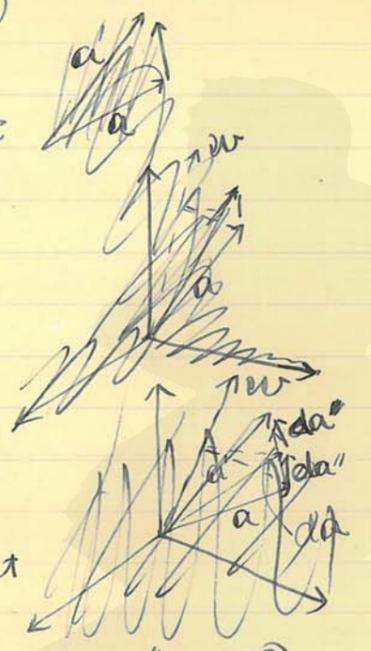
$da = [w a] dt$   
 として変化して行く...



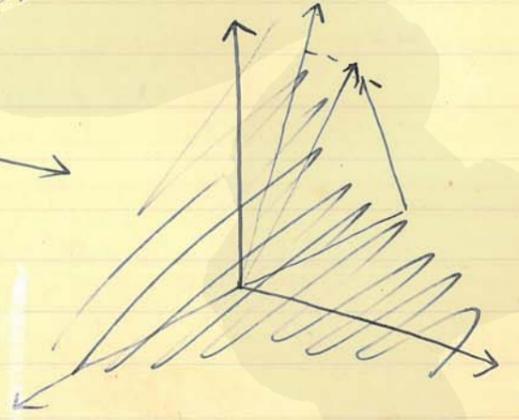
第 2 図

よって  $a = w \times r$  より  
 $\frac{Dw}{Dt} = \frac{dw}{dt}$

静止系に関して



第 3 図



一般の運動

静止系  $O'$  をとり、 $O$  を原点とする。  
 $O$  系において  $r_0$  の位置にあるとすると、  
 $O'$  系において  $r = r_0 + r'$

$$\frac{D}{Dt} r = r_0 + r' = v_0 + v' + [w r'] \quad (4.13)$$

$$v = \frac{Dr}{Dt} = \frac{Dr_0}{Dt} + \frac{Dr'}{Dt} = v_0 + \frac{dr'}{dt} + [w r']$$

したがって、 $v = v_0 + v' + [w r']$   
 $a, a_0, a'$  をそれぞれ  $O, O'$  系での加速度とすると、  
 $a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dv_0}{Dt} + \frac{Dv'}{Dt} + \frac{D}{Dt} [w r']$

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dv_0}{Dt} + \frac{Dv'}{Dt} + \frac{D}{Dt} [w r']$$

$$= a_0 + a' + [w v'] + \frac{d}{dt} [w r'] + [w [w r']]$$

$$= a_0 + a' + 2[w v'] + \left[ \frac{dw}{dt} r' \right] + [w [w r']] \quad (4.14)$$

静止系  $O'$  系で静止している質点の加速度  
 は  $a' = 0$  である (system acceleration) とする。  
 このとき  $a' = 0$  とすると、  
 $\frac{dr'}{dt} = \frac{d^2 r'}{dt^2} = 0$  より  $v' = a' = 0$

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^2 r'}{dt^2} = 0 \text{ より } v' = a' = 0$$

したがって

$$a_s = a_0 + \left[ \frac{dw}{dt} r' \right] + [w [w r']] \quad (4.15)$$

を得る。

=  $w$  in (4.14)  $\rightarrow \lambda + w$  etc,  

$$a = a_s + a' + 2[wv'] \quad (4.16)$$

と仮定。  
 この式中の  $w$ ,  $v'$ ,  $a'$  は運動座標系  $O\xi\eta\zeta$  に対する相対速度 (relative velocity), 相対加速度 (relative acceleration) と解釈。尤もこの最後の項は Coriolis の加速度 (Coriolis' acceleration) といふ。 (4.16) は静止座標系と運動座標系との間での速度の間の関係を述べ、 Coriolis の定理 (Coriolis' theorem) と呼ばれている。

(4.14) の右辺の最後の項を (2.27) を適用して  

$$[wv - wv'] = w(wv') - v'w^2$$
 と仮定して (4.14) より  

$$a = a_0 + a' + 2[wv'] + \left[\frac{dw}{dt}v'\right] + w(wv') - v'w^2 \quad (4.17)$$

と仮定。  
 この瞬間に運動座標系  $O\xi\eta\zeta$  の基底が  $Oxyz$  の基底と一致する一瞬として仮定し、(4.17) の  $x, y, z$  成分は  

$$a_x = \ddot{x}_0 + \frac{d^2z}{dt^2} + 2\left[w\frac{dz}{dt}\right] + \left[\frac{dw}{dt}v'\right] + 2(w_y \frac{dz}{dt} - w_z \frac{dy}{dt}) + \left(\frac{dw_y}{dt}\zeta - \frac{dw_z}{dt}\eta\right) + \dots$$

18

$$+ w_x(w_x\xi + w_y\eta + w_z\zeta) - \zeta(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) \text{ etc.}$$

と仮定して  $\frac{D}{Dt}$  を用いて、~~(4.13)~~  
 ~~$\frac{d}{dt}$~~   

$$= w$$
 等を用いて  

$$a_x = \ddot{x}_0 + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} - \eta w_z + \zeta w_y\right) - w_z\left(\frac{dy}{dt} - \zeta w_x + \xi w_z\right) + w_y\left(\frac{dz}{dt} - \zeta w_y + \eta w_x\right) \text{ etc.} \quad (4.18)$$

と仮定して  
 運動座標系  $O\xi\eta\zeta$  ~~と~~ して、 $O$  を圆柱座標系の原点と仮定； $O\xi$  を  $\rho$  の増えの方向、 $O\eta$  を  $\psi$  の増えの方向、 $O\zeta$  を  $z$  の増えの方向と仮定

と仮定して  

$$\xi = \rho, \eta = 0, \zeta = z; \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$$

$$w_x = 0, w_y = 0, w_z = \dot{\psi}; \quad \frac{dz}{dt} = \dot{\rho}, \frac{dy}{dt} = \dot{\psi}, \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$
 と仮定して  

$$\left. \begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\psi}^2 \\ a_\psi &= 2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\ddot{\psi} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned} \right\} (4.19)$$

第二章 質点の力学

次に球座標の場合に  $Ox, Oy, Oz$  を夫々  $r, \theta, \varphi$  の  
 座標軸と取る。

$$w_x = w_r = \dot{\varphi} \cos \theta, w_y = w_\theta = -\dot{\varphi} \sin \theta, w_z = w_\varphi = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = 0; \quad \xi = r, \eta = \theta, \zeta = \varphi$$

(4.20) 
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) \end{cases}$$

§5. 運動の法則

既に与えられた質点の位置の運動を記述するに用いられる  
 にはこれと、次に同じく自然発生的に  
 (この時、この問題を記述するに用いられる運動学 (kinematics) の  
 記述は、質点の自然発生的な何れの運動が実現  
 されるのかを論ずる場を以て、質点の運動を記述し  
 ための活動的 <sup>動的</sup> 側を知る自然発生的な運動は全然不規則  
 なものに似て、その規則、あるいはその法則から考へ  
 られてきた。たゞ Aristoteles は円運動が  
 完全な運動であると考えた。その考へが根拠を以て、  
 後の哲学者もまた円運動を以て、<sup>天体の</sup> 運動の法則を記述しようとした。

しかし、すべての物体の運動に共通と見られる法則  
 は初めて記述したのは Galilei である。  
 即ち彼は、外部からの影響が全く存在しない場合  
 質点は直線上の ~~等速運動~~ 一定の速度の運動を続ける。  
 即ち等速な運動を続ける。これを慣性の法則  
 (law of inertia) 又は Newton の第一法則  
 (first law of motion) と稱す。  
 この場合、加速度は 0

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (5.1)$$

即ち、外部からの影響が全く存在する場合、<sup>慣性の</sup> 一定の速度  
 の変化が起る。この場合、加速度が 0 である。





$L^x T^y M^z$ .  $x, y, z: 0$  また  $z$  の場合  
 の形に書ける. (5.2) 式より, 加速  $a$  の  
 $L T^{-2}$   
 の次元を考えると, (5.2) 式より, 力の次元  $L T^{-2} M$   
 の次元を考えると  $F = ma$  となる.

第二の同じ運動の要素相対的なものとしてある。管の断面、加速は何か、標準の座標系として  
 決められたものとする。しかし、Newton 系 - 法則の  
 系 - 法則のいかに座標系について成立しているか  
 かと、これを二つの  $\vec{r}$  相対運動 (5) の I 型に  
 帰して論ずる。

この相対運動の軌道の経路を  $r$  とする

次に、運動方程式は (5.2)  

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F \quad \text{or} \quad m a = F \quad (5.5)$$

と書ける。これを  $x, y, z$  成分に分けると

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \end{aligned} \right\} (5.6)$$

加速  $\frac{dv}{dt}$  (4.8) 式より

若くは管の断面  $\vec{r}$  の法線方向  $\vec{v}$  の法線方向  
 方向の成分  $v_t, v_n$  である。この力  $F$  も又  
 この方向の成分  $F_t, F_n$  である。  
 (4.4) (4.7) 式より, (5.5) 式

$$\left. \begin{aligned} m a \frac{ds}{dt} &= m \frac{dv}{dt} = F_t \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \end{aligned} \right\} (5.7)$$

と書くこともできる。  $F_t, F_n$  を接線力  
 (tangential force) と  $v$  の法線力 (normal  
 force) とする。  $F_n$  は  $m \frac{v^2}{\rho}$  と  
 $\vec{r}$  の法線方向の力  $F_n$  を  $\vec{r}$  の  
 法線方向の力  $F_n$  とする。

~~(5.2) 質量が一定の場合、運動量保存則は~~  
 ~~$P = mv$  と表す。~~

(5.2) 又 
$$\frac{dP}{dt} = F$$
 (5.7)

と表す。この  $P$  を運動量 (momentum) と呼ぶ。質量が一定の場合、運動量の時間的変化の割合は外力に等しい。

質量が一定なら (5.7) と (5.2) とは同一である。+ 質量が一定の場合、(5.7) の方が正しいことがわかった。

次に、(5.5) は  $x, y, z$  の 3 個の階微分方程式である。従って、その解は 6 個の任意定数を含む。これらの 6 個の任意定数  $t_0$  における位置  $(x_0, y_0, z_0)$  の初速度  $(v_{0x} = \frac{dx}{dt}|_{t_0}, \dots)$  を与えられる。これ以外の運動は一意に決定される。即ち、質点の運動は初期条件 (initial condition) によって完全に決まる。この意味において、古典力学は因果律 (causality) の

成立す。

或は又、任意の時刻  $t_0$  及び、 $n$  次元の位置  $(x_0, y_0, z_0)$  の  $v = (x, y, z)$  を與へれば、この途中の経路  $v$  を求めることができる。  
 i) 垂直線上の運動。

重力を各時刻の位置の運動。  
 最も簡単な例として、鉛直に落下する物体の運動を考慮する。この場合、重力  $F_z = -mg$  のみ作用する。

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad (5.1)$$

これを、これを積分すると

$$\frac{dz}{dt} = -gt + c \quad (5.2)$$

$c$  の値は、 $t=0$  の時刻  $t_0$  の位置が静止してあるとすると、 $c=0$  となる。従って、鉛直に落下する物体の速度は  $gt$  である。これを積分すると

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + c' \quad (5.3)$$

ここで  $z=0$  の平面とし、 $t=0$  の時刻に  $z=h$  の高さから

$$c' = h \quad \text{従って} \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad (5.4)$$

従って、 $t$  の時刻の同一経路に位置する  $t$  の位置は  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$  である。

地上の一定高さから垂直に上向き  $v_0$  の初速 (initial speed) で投げ上げると

$$c = v_0, \quad c' = 0 \quad \text{であるから} \quad \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c' \quad (5.5) \quad (5.6)$$

$t=0$  の  $z=0$  であるから  $c'=0$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad (5.7)$$

速度が 0 となる時刻  $t_1$  は  $v_0/g$  である。この時の高さ

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \quad (5.8)$$

この高さから落下し、(落下した瞬間) 開始する。

ii) 拋物線運動。  $x, y$  方向にも運動する

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad (5.9)$$

から、 $x, y$  は直線運動、 $z$  は鉛直落下運動。





これと変位の積分から

$$x = D - \frac{v_{0x}}{k} e^{-kt}$$

を得る。Dは積分定数で、 $t=0$  の瞬間に  $x=0$ ,  
 $z=0$  となることから、 $D = \frac{v_{0x}}{k}$  とする。  
 従って

$$x = \frac{v_{0x}}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (5.23)$$

とす。水平方向の進む距離は時間かいくと  
 長く短くしても  $\frac{v_{0x}}{k}$  以上にはならず、この値に  
 漸近する。

次に (5.21) の第2式を積分する

$$\frac{dv_z}{v_z + \frac{g}{k}} = k e^{-kt} dt$$

とすれば、積分すると

$$\log(v_z + \frac{g}{k}) = -kt + \log C'$$

即ち 
$$v_z = C' e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

積分定数  $C'$  は  $t=0$  において  $v_z = v_{0z}$  の  
 条件から定まり  $C' = \frac{g}{k} + v_{0z}$   
 とする。従って

$$v_z = (v_{0z} + \frac{g}{k}) e^{-kt} - \frac{g}{k} \quad (5.24)$$

より、変位をこれと積分すると、

$$z = -\frac{1}{k} (v_{0z} + \frac{g}{k}) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + D'$$

で、 $t=0$  の  $z=0$  の条件から、積分定数  $D'$  は

$$D' = \frac{1}{k} (v_{0z} + \frac{g}{k})$$

とす。結局

$$z = -\frac{g}{k} t + (v_{0z} + \frac{g}{k}) (1 - e^{-kt}) \quad (5.25)$$

を得る。

力が小さくなるにつれて、垂直速度  $v_z$  は (5.24)  
 により  $-\frac{g}{k}$  に等しくなり、一方水平速度は  
 (5.22) により  $0$  となるから、結局最終的に  
 $\frac{g}{k} = v_f$  の速度で垂直に落下する

ことになる。この  $v_f$  を終速 (final speed)  
 と稱する。

従って

$$x = \frac{v_{0x}}{k} = \frac{v_{0x} v_f}{g}$$

が漸近線 (asymptote) となる。

§6. ~~電荷の力場の運動を電荷の力学の諸量~~  
~~仕事と力~~

荷電粒子の力学と仕事、角運動量。  
 質量  $m$  の質点に  $F$  の力が作用して居る  
 場合、  
~~原点  $O$  からの位置  $r$  の運動~~

$$N = [rF] \quad (6.1)$$

と  $F$  の  $O$  点からの角運動量の増減、即ち  $N$  の  
 力の仕事 (motion of force) である。  
 第26図に示す如く、

$$\overline{OR} = \overline{OP} \sin \hat{rF}$$

よって、  

$$N = \overline{PQ} \cdot \overline{OR}$$

である。即ち力の仕事の大  
 さは力の大きさ  $F$  と腕の長さ  $\overline{OR}$   
 との積に等しく、その方向は  
 $r, F$  に垂直で、 $r, F, N$  の右手系  
 を形成して居る。

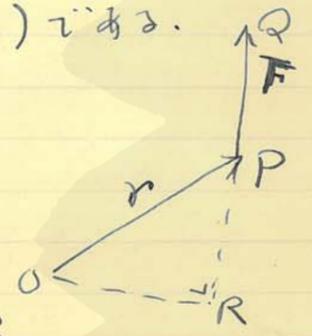
次に質点の運動量を  

$$B = m\dot{r} = m \frac{dr}{dt} \quad (6.2)$$

した場合、  

$$U = [rB] \quad (6.3)$$

と原点  $O$  からの角運動量の増減の率 (moment  
 of momentum) 又は角運動量 (angular  
 momentum) と等しい。  
 (6.3) の両辺を  $t$  について微分すると



第26図

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} [rB]$$

$$= \left[ \frac{dr}{dt} B \right] + \left[ r \frac{dB}{dt} \right]$$

(6.3) の  $v$  運動方程式 (5.2) を用いて、  

$$= \left\{ m \left[ \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \right] + [r \cdot F] \right\}$$

即ち 
$$\frac{dU}{dt} = N \quad (6.4)$$

を導く。これは運動量の増減の率の増減の割合が  
 力の仕事に等しいことを示す。

ii) 仕事。

次に質点  $P$  に力  $F$  が作用し、そのために質点  
 が微小変位  $d\mathbf{r}$  を為した場合、この力の

$$dW = F d\mathbf{r} = F \cos(\hat{F} d\mathbf{r}) dr \quad (6.5)$$

の仕事 (work) をしたと等しい。即ち仕事の大  
 きさは質点の微小変位  $d\mathbf{r}$  と、その方向に作用  
 力の成分との積に等しいと定義される。

$F$  の  $x, y, z$  成分を  $(F_x, F_y, F_z)$ 、  
 $(dx, dy, dz)$  とすると、  

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (6.6)$$

である。  
~~質点  $P$  が~~ 質点  $P$  が軌道  $C$  を走り、 $P$  から  
 $Q$  点まで有限の変位を行つたとすると、この  
 間に為された仕事は

\*これは又 位置関数  $\phi$  がスカラー場  $V$  から導き出されることを示して居る。

$$\begin{aligned}
 W &= \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_P^Q F \cos(\theta) dr \\
 &= \int_P^Q (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

上式より、もし積分路  $C$  の曲線に沿って  $P$  から  $Q$  へ行く ~~曲線積分~~ (curvilinear integral) である。  
~~(6.5)の両辺を  $dt$  で割る~~  $dr$  の各成分を  $dt$  で割ると、(6.5)から

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6.8) \quad \text{(power)}$$

即ち仕事の率

が得られる。これは、単位時間あたりに行われる仕事は力と速度の積のスカラー積、即ち活動 (activity) であることとを示す。

iii) ポテンシャル

単位質量の質点に作用する力  $\mathbf{f}$  が質点の位置の函数である場合、即ち  $\mathbf{f}$  が位置関数 (point function) である場合、空間の各点  $\mathbf{r}$  の位置関数  $\phi$  が存在して居るとする。

27

この様に与えられた場合、その空間は力の場 (field of field) であるといふ。一般に力の大きい方向と場所によって異なり、一般に各点の位置関数  $\phi$  が所属して居るとする。この空間の部分を位置関数場 (vector field) と稱する。これによって、各点のスカラー場として居るとする。スカラー場 (scalar field) といふ。位置関数  $\phi$  が  $f_x, f_y, f_z$  である、これを

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (6.9)$$

場関数  $\phi$  によって導き出される場  $V$  を  $\phi$  のポテンシャル (potential) と稱し、 $\phi$  はポテンシャル  $V$  を導き出す。 (6.9) は位置関数の形式で書くと、

$$\mathbf{f} = -\text{grad } V \quad (6.10)$$

と表す。但し、grad は Gradient の略である。  
 $\text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.11)$   
 は位置関数の位置関数 (vector operator) であり、又微分演算子 (differential operator) である。或はこれを

$$\mathbf{f} = -\nabla V \quad (6.12)$$

と書くことも出来る。  $\nabla$  は Nabla と稱する。

ゆえ  $V$  は距離  $r$  の関数  $V(x, y, z)$  と書けば、  
 $C$  を定数とすると、

$$V(x, y, z) = C \quad (6.13)$$

を満足する距離  $r$  の一つの表面を形成して居る。  
 この表面上の potential は等しい。これを等 potential 面 (equipotential surface) とは  
 水準面 (level surface) と稱す。

(6.13) の面  $S$  の法線 (normal) の方向餘弦  
 (direction cosine) は  $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$  に比例する。  
 $\text{grad } V$  の vector は法線の方向を指す。そこで  
 法線の方向の単位ベクトルを  $n_0$  とし、この方向の  
 微小距離を  $dn$  とすると、

$$n_0 = i \frac{\partial x}{\partial n} + j \frac{\partial y}{\partial n} + k \frac{\partial z}{\partial n}$$

よって

$$n_0 \text{ grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \\ = \frac{dV}{dn}$$

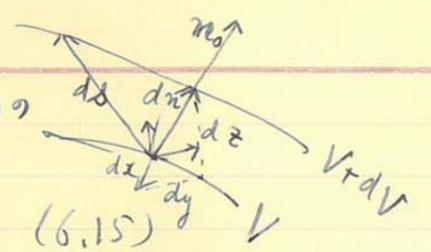
よって、従って

$$\text{grad } V = \frac{dV}{dn} n_0 \quad (6.14)$$

よって、すなわち、 $\text{grad } V$  は  $V$  を増加する方向への  
 normal に平行で、大きい  $V$  の変化の割合を示  
 す。

ゆえ、任意の方向  $S$  の方向の  
 変化の割合は、図の如く

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos(\hat{n}_0, S) \quad (6.15)$$



よって  $\text{grad } V$  は  $V$  の変化の割合

の最大なる方向を指して居る。この意味で gradient  
 と稱すのである。

例題. 力の場、特に重力場として地上に於ける重力の場  
 を考えて置くと、単位質量の質点に働く力は垂直下方  
 向き、 $g$  の大きさを有する。そこで地上に於ける  
 重力、地面との距離を  $z$  とし、potential  $V$  を

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = -g$$

の関係を満足する  $V$  を求めよ。よって

$$V = gz + C$$

地面上の potential を 0 とすると、 $C=0$ 、従って

$$V = gz \quad (6.15)$$

の形になる。即ち等 potential 面は地面  
 に平行な平面になる。

また、地球の重力場の範囲  
 を取れば、重力の方向は、向きの  
 場所により異なるが、等 potential 面も複雑な

形をしてある。

iv) ~~力~~ 勢力 <sup>(作用力)</sup>  $\vec{F}$  の場の中を  $\vec{F}$  の方向に  $A$  から  $B$  まで移動させたとき、 $\vec{F}$  がした仕事は、 $\vec{F}$  の方向に  $A$  から  $B$  まで移動させたとき、 $\vec{F}$  がした仕事は、

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (6.16)$$

である。これは一般に  $A$  から  $B$  までの経路の如何に關係する。

所が  $\vec{F}$  のポテンシャル  $V$  を有するときは (6.17) は

$$W = - \int_A^B ds \text{ grad } V \quad (6.18)$$

となり、(6.14) により

$$= - \int_A^B \frac{dV}{dn} n_0 ds$$

より (6.15) により

$$= - \int_A^B \frac{dV}{dn} \cos(\theta) ds$$

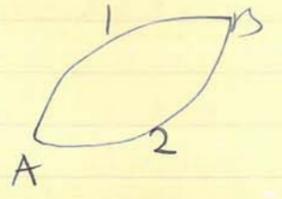
$$= - \int_A^B \frac{dV}{ds} ds$$

$$= - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

PPS  $W = V_A - V_B \quad (6.19)$

となり、この場合の仕事は、 $A, B$  両点のポテンシャルの差のみで決まり、経路の如何に關係しない。

例として 1. 経路を通つても、2. 経路を通つても仕事は同じである。即ち、 $B$  から  $A$  まで 2. 経路を通つても、1. 経路を通つても仕事は同じである。



第廿一回

よって  $A$  から  $B$  まで行く場合、1. 経路を通つても、2. 経路を通つても仕事は同じである。この場合、経路の終点  $B$  である。この場合、経路の終点  $B$  である。この場合、経路の終点  $B$  である。

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.19)$$

この場合の仕事は、 $A, B$  両点のポテンシャルの差のみで決まり、経路の如何に關係しない。この場合、経路の終点  $B$  である。この場合、経路の終点  $B$  である。この場合、経路の終点  $B$  である。

$$W_p = V_p - V_0 \quad (6.21)$$

位置 \$r\_0\$ での、即ち、任意の \$P\$ 点の位置 \$r\$ まで  
 移動したとき、この \$P\$ 点での力の場のポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。  
 この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。  
 この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

$$W_p = V_p \quad (6.22)$$

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。  
 この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。  
 この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

一般に力と質量 \$m\$ の粒子の運動方程式は

$$F = -\text{grad } V(r) \quad (6.23)$$

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

\$V(r\_0) = 0\$ の位置 \$r\_0\$ を標準とした任意の位置 \$r\$  
 での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V(r)\$ と定義する。

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

これを \$ds\$ で積分すると、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

$$\begin{aligned} F ds &= \frac{d}{dt}(mv) \cdot ds \\ &= \frac{d}{dt}(mv) v dt \\ &= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.25)$$

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

$$F ds = -dV \quad (6.26)$$

このとき、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$W\_p\$  
 は、この \$P\$ 点での位置 \$r\$ でのポテンシャル \$V\_p\$ と  
 位置 \$r\_0\$ でのポテンシャル \$V\_0\$ との差である。

(6.24), (6.26)から

$$d(T+V) = 0 \quad (6.27)$$

が得られる。即ち運動エネルギーと位置エネルギーの総和は運動によって変化しない。これを総エネルギー (total energy) 又は <sup>位置の</sup> 運動エネルギーと <sup>位置の</sup> 総和と稱す。

(6.27)を位置の異なる二点  $P_1$  から  $P_2$  まで移動した場合、位置の異なる二点  $P_1, P_2$  での速度  $V_1, V_2$ 、位置  $P_1, P_2$  での運動エネルギー  $T_1, T_2$ 、位置  $P_1, P_2$  での位置エネルギー  $V_1, V_2$  とすると、  
 $T_1 = \frac{1}{2} m V_1^2, T_2 = \frac{1}{2} m V_2^2$  とすると、

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (6.28)$$

$$W = T + V$$

が得られる。即ち、 $W$ 、即ち位置エネルギー、位置の総和は一定の値をとり、これを、これをエネルギーの保存則 (law of conservation of energy) と稱す。

一般に、この様なエネルギーの保存則の成立する力を保存力 (conservative force)、これを保存力の場 (conservative field of force) と稱す。

一般に運動によって変化しない値を運動の定数 (constant of motion) とす。従って保存力の場での位置エネルギーは運動の定数である。

例 9. 中心力場における質点の運動

例として、重力の場を以て見ると、地球の質量の無限大と仮定すれば、地球を基準として

$$V = mgz$$

の位置エネルギーを得る。これを以て運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

とすると、~~質点~~ 質点を上方へ抛り上げれば、速度  $v$  が漸次減少し  $T$  が減少すると共に、位置エネルギーが増し、 $V$  が増し、 $V+T$  は常に一定の値にとどまることが知られておる。

実際、(9.2)を以て  $t=0$  として  $z=0, v=v_0$  とすると

$$z = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$v = -gt + v_0$$

(9.3)を以て

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

$$V + T = -\frac{1}{2} m g^2 t^2 + m g v_0 t$$

$$T = \frac{1}{2} m (g t - v_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} m g^2 t^2 - m g v_0 t + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\text{即ち } V + T = \frac{1}{2} m v_0^2$$

PPS, 力の発勢力作, 抵抗の... 振り, 振り上げの時の  
 ついては運動方程式をい.

↑としてその大いこの距離を  $V$  大に同じく\*

32

§7. 有心運動 (central motion) : (1) - (2) (中心),  
 距離の短く力がポテンシャルを  $V$  を加える場  
 合の中,  $V$  が一定距離から  $r$  までの距離  $r$  の距離を  
 距離の  $r$  の関数として表わす場合をいふ。この場合,  
 この場合, 定距離を  $r=0$  と取り, 任意距離を  $r$  とする  
 とする。

$$F(r) = -\text{grad } V(r) \quad (7.1)$$

ここで, 等 potential 面は  $O$  を中心とする球面である。  
 $r = \text{const.}$  PPS 力はこれに  
 垂直である。この球面は  $r$  の法線方向に  
 PPS 原  $O$  の方向または反対方向に向く。この  
 場合, 各距離が引力又は斥力の中心となる。  
 この意味で \* の力が中心力 (central force)  
 と稱する。

この中心力の場合, 中心からの距離  $r$  のみで同じく  
 表わすポテンシャル  $V(r)$  を加える。

何故かといへば, この場合力の場合

$$F(r) = f(r) \frac{r}{r} \quad (7.2)$$

の形になる。よって

$$-\frac{dV(r)}{dr} = f(r) \quad (7.3)$$

この関係を満たす  $V(r)$  を加える。

$$F(r) = -\frac{r}{r} \frac{dV}{dr} = -\text{grad } V \quad (7.4)$$

が成立するからである。



軌道方程式.  $\Rightarrow$   $r$  の関数の軌道  $r = r(\theta)$  を求めるための方程式  
 PPS 軌道方程式 (equation of path) である.

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{f(r)r^2}{4ms^2} + \frac{1}{r} \quad (7.10)$$

又  $u = \frac{1}{r}$  とおくと

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(r)r^2}{4ms^2} - u \quad (7.11)$$

このとき  $r = r(\theta)$  とおくと  $\frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{du}{d\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 &= - \left( \frac{f}{4ms^2} r^2 + u \right) \frac{du}{d\theta} \\ &= - \frac{df}{d\theta} \left( \frac{1}{2ms^2} \int \frac{f}{u^2} du + \frac{1}{2} u^2 \right) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = C_1 - \frac{1}{2ms^2} \int \frac{f}{u^2} du - \frac{1}{2} u^2$$

$$\frac{du}{\sqrt{C_1 - \frac{1}{2ms^2} \int \frac{f}{u^2} du - \frac{1}{2} u^2}} = d\theta$$

$$\theta = \int \frac{du}{\sqrt{C_1 - \frac{1}{2ms^2} \int \frac{f}{u^2} du - \frac{1}{2} u^2}} + C_2 \quad (7.12)$$

軌道の偏心率

$\Rightarrow$   $r$  の関数  $\theta = \theta(r)$  と  $u(r, \theta)$  の間の関係は  $r = r(\theta)$  の関数として表すことができる。

ii) 惑星運動.

最も簡単な場合として距離の二乗に反比例する場合.

$$f(r) = -\frac{C}{r^2} = -C u^2 \quad (7.13)$$

この場合である.  $\Rightarrow$   $u = u(\theta)$  (7.12) の

$$\theta = \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + \frac{C}{2ms^2} u - u^2}} + C_2$$

~~$\frac{du}{d\theta} = 0$  の場合を除外する~~

$$u = x + \frac{C}{4ms^2}$$

$$\theta = \int \frac{dx}{\sqrt{(C_1 + \frac{C^2}{16m^2s^4}) - x^2}} + C_2$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1 + \frac{C^2}{16m^2s^4}}} + C_2$$

$$x = \sqrt{C_1 + \frac{C^2}{16m^2s^4}} \sin(\theta + C_2)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{C}{4ms^2} = \sqrt{C_1 + \frac{C^2}{16m^2s^4}} \sin(\theta + C_2)$$

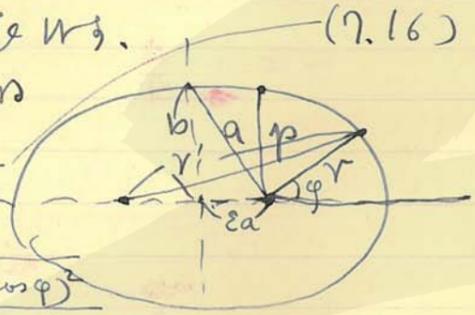
$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \frac{a \sin^2 \phi}{c^2}} \quad (7.14)$$

$$\phi = \theta + c_2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{16 m^2 s^4}{c^2}} \quad (7.15)$$

$$p = \frac{4 m s^2}{c}$$

(7.14) は 二次曲線  $\epsilon < 1$  の場合、  
 $\epsilon < 1$  の場合、 $\cos \phi = -\epsilon$



$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad b = \sqrt{p a}$$

$$r' = \sqrt{r^2 \sin^2 \phi + (2\epsilon a + r \cos \phi)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + 4\epsilon a r \cos \phi + 4\epsilon^2 a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} + \frac{4\epsilon p^2 \cos \phi}{(1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \phi)} + \frac{4\epsilon^2 p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}}$$

$$= \frac{p}{(1 + \epsilon \cos \phi)(1 - \epsilon^2)} \sqrt{(1 - \epsilon^2)^2 + 4\epsilon \cos \phi (1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \phi) + 4\epsilon^2 (1 + \epsilon \cos \phi)^2}$$

$$= \frac{p}{(1 + \epsilon \cos \phi)(1 - \epsilon^2)} [(1 + \epsilon^2) + 2\epsilon \cos \phi]$$

$$r' + r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \left\{ \frac{(1 + \epsilon^2) + 2\epsilon \cos \phi}{1 - \epsilon^2} + 1 \right\} = 2a$$

$\epsilon > 1$  の場合、双曲線 (hyperbola) の場合  
 $\epsilon = 1$  の場合、抛物線 (parabola) の場合  
 PPS.  $\epsilon < 1$  の場合、~~軌道は~~ 軌道は  $\epsilon < 1$  の場合、  
 「近日点の軌道は右端を無限大の距離で切り抜ける」  
 といふ Kepler の第一法則 (law) の導出。  
 一般の中心運動の場合と同様に右端運動の一般法則は  
 「近日点の軌道と同様の軌道は同一時間内に  
 同様の面積を掃く」といふ Kepler の第二法則  
 が成り立つ。

軌道の面積の面積は  

$$ab\pi = \frac{p^2 \pi}{(1 - \epsilon^2)^2} = \frac{4\pi m^2 s^4}{c^2 (1 - \epsilon^2)^2}$$

$$1 - \epsilon^2 = -\frac{16 m^2 s^4}{c^2} \quad (1 - \epsilon^2)^2 = \frac{64 m^2 s^8}{c^2}$$

$$ab\pi = \frac{\pi c^2}{16 c m s^2}$$

(7.15) (7.16) より  

$$T = \frac{ab\pi}{s}$$

$$PPS \quad T^2 = \frac{a^3 b^2 \pi^2}{s^2}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{4m}{c p} \frac{a^3 b^2 \pi^2}{s^2} = \frac{4m \pi^2 a^3}{c} \quad (7.17)$$

(universal gravitation)

太陽と星の間に働く重力は万有引力である

しかし万有引力は距離の逆二乗に反比例する。質量  $M$ ,  $m$  の物体間の重力  $f(r)$  は、

$$f(r) = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad (7.18)$$

ここで  $\gamma$  は (7.18) の  $\gamma$  と同じで  $C = \gamma mM$

である。但し  $\gamma$  はあらゆる物体の共通の重力定数 (gravitation constant) である。  $\gamma = 6.67 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (7.19)$$

この式は、地球の公転の周期  $T$  の二乗は楕円軌道の長径  $a$  の三乗に比例する。この Kepler の第三法則が知られる。

この式から、内側の楕円の剛性  $\gamma$  は Kepler の第三法則より、Newton の運動法則の万有引力の法則の共通の定数  $\gamma$  と一致することがわかる。また Kepler の第三法則から導き出した万有引力の法則と Newton の運動法則とを比較する。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{m\omega^2 r}{\gamma} = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{\gamma M}$$

iii) 重力場の性質

距離  $r$  の質量  $M$  の重力場の性質を調べる。このとき、(7.18) の重力  $f(r)$  は万有引力場のポテンシャル  $V(r)$  である。  $V(r) = -\frac{\gamma Mm}{r}$  (7.20) potential  
 Newton のポテンシャル (Newtonian potential) である。重力場の距離  $r$  の重力  $f(r)$  は、

$$f(r) = -\frac{\gamma Mm}{r^2}$$

これは、  $-\text{grad} V(r) =$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\gamma Mm}{r^3} x \\ f_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\gamma Mm}{r^3} y \\ f_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\gamma Mm}{r^3} z \end{aligned} \right\} (7.21)$$

従って  $r=0$  の点では、

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = -\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$$

$$= \left( \frac{\gamma Mm}{r^3} - \frac{\gamma Mm x^2}{r^5} \right) + \left( \frac{\gamma Mm}{r^3} - \frac{\gamma Mm y^2}{r^5} \right) + \left( \frac{\gamma Mm}{r^3} - \frac{\gamma Mm z^2}{r^5} \right) = 0$$

よって、  $\nabla \cdot \vec{f} = 0$  である。

$\text{div } f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$  (7.22)  
 このとき  $\text{div}$  を散度 (divergence) と呼ぶ。  
 又 2次関数  $V(x, y, z)$  に対して  

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
 (7.23)

このとき,  $\Delta$  を Laplace の演算子 (Laplace's operator) 又は Laplacian と呼ぶ。  
 この Newton のポテンシャル  $V$  は力の中心点を中心とする  
 Laplace の方程式 (Laplace's equation)  

$$\Delta V = 0$$
 (7.24)  
 を満たすことになる。

点  $i$  個の  $M_i$  の位置  $r_i$  の場合、 $r$  位置の点  $r$  に対する合力 (resultant force) は  

$$f = -\gamma \sum_i \frac{M_i (r - r_i)}{|r - r_i|^3}$$
 (7.25)  
 である。このポテンシャル  

$$V = -\gamma \sum_i \frac{M_i}{|r - r_i|}$$
 (7.26)

となる。この場合  $r_1, r_2, \dots$  は  $r$  から距離  $|r - r_i|$  の  
 Laplace 方程式 (7.24) を満たす。  
 又、連続体 (continuous body) にはある力のポテンシャル  
 は、体積  $V$  内の物質の密度 (density) を  $\rho(r)$  とすると  

$$V(r) = -\gamma \iiint \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV'$$
 (7.27)

である。  
 (ポテンシャル  $V(r)$  の代り  $\phi(r)$ )  

$$V(r) = -\gamma \phi(r)$$
 (7.28)  
 を代入すると 2次関数  $\phi(r)$  を導く。  
 (7.26) と (7.27) より  

$$\phi(r) = \sum_i \frac{M_i}{|r - r_i|}$$
 (7.29)  

$$\phi(r) = \iiint \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV'$$
 (7.30)

となる。この場合  $r$  は  $r$  から距離  $|r - r'|$   
 $\Delta \phi = 0$  (7.31)  
 である。この場合  $r$  は  $r$  から距離  $|r - r'|$   
 $\Delta \phi = -4\pi \rho$  (7.32)  
 である。 (この  $\Delta$  は  $r$  の関数  $\phi$  に対して) となる。  
 したがって  $\phi$  は  $r$  から距離  $|r - r'|$  の関数として、  
 $r$  から距離  $|r - r'|$  の関数として、(7.30) の関数として  
 なる。

~~球の重力ポテンシャル (7.30)~~

$$\phi(0) = \iiint \frac{\rho(r')}{r'} dr'$$

この場合、  
 半径 \$r\_0\$ の球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。  
 球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。  
 球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。  
 球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。



$$V(r) = -\gamma \iiint \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr' \quad (7.33)$$

この場合、\$V(r)\$ は \$r\$ の関数であるから、球座標 \$(r, \theta, \phi)\$ を取り、\$r\$ を \$r'\$ と置き換える。

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &= V(r, 0, 0) \\ &= -\gamma \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r') r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}} \\ &= 2\pi\gamma \int_0^{r_0} \frac{\rho(r') \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}}{rr'} r' dr' \end{aligned}$$

a) \$r > r\_0\$ の場合

$$V(r) = -\frac{2\pi\gamma}{r} \int_0^{r_0} \rho(r') (r+r' - |r-r'|) r' dr'$$

a) \$r > r\_0\$ の場合  

$$V(r) = -\frac{4\pi\gamma}{r} \int_0^{r_0} \rho(r') r'^2 dr'$$

球の全質量 \$M\$  

$$M = \iiint \rho(r') r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$= 4\pi \int_0^{r_0} \rho(r') r'^2 dr'$$

$$\therefore V(r) = -\frac{\gamma M}{r} \quad (7.34)$$

この場合、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルは、球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。

b) \$r < r\_0\$ の場合  

$$V(r) = -\frac{4\pi\gamma}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - 4\pi\gamma \int_r^{r_0} \rho(r') r' dr'$$

球の中心を \$O\$ とし、\$r\$ の点 \$P\$ の重力ポテンシャルを求めたい。  

$$V(r) = -4\pi\gamma \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' - 4\pi\gamma \int_r^{r_0} \rho(r') r' dr'$$

この、  
 地球の重力ポテンシャル  
 地球の中心から距離  $r$  の点での重力ポテンシャルは、地球を半径  $R$  の球と見做し、地球の中心を  $M$  とし、地球の半径を  $R$  とすると、地球の重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{\gamma M}{R}$$

地球の重力ポテンシャルのポテンシャルエネルギーは、  
 $\frac{\gamma M}{R^2}$

この、  
 地球の重力加速度  $g$  は、  
 $g = \frac{\gamma M}{R^2}$  (7.35)

これより、月の地球の重力ポテンシャルは、  
 地球の重力ポテンシャル  $T$ 、軌道の半径を  $a$  とすると、(7.19) が成り立つ。これより、  
 地球の重力ポテンシャル  $M$  は、  
 地球の重力ポテンシャル  $M$  を表す。これより (7.35)

$$g = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 R^2}$$
 (7.36)

この、  
 地球の重力ポテンシャル  
 $a = 60.1 R$   
 $R = 637 \cdot 10^6 \text{ cm}$   
 $T = 236 \cdot 10^4 \text{ sec}$

地球の重力ポテンシャル  
 $g = 981 \text{ cm/sec}^2$   
 この、  
 地球の重力ポテンシャルのポテンシャルエネルギーは、  
 地球の重力ポテンシャル  $T$ 、軌道の半径を  $a$  とすると、  
 地球の重力ポテンシャル  $M$  は、  
 地球の重力ポテンシャル  $M$  を表す。これより (7.35)

第一号

§8. 拘束運動 i) 曲面上の運動,

質点の運動が  $n$  次元空間の  $n-1$  次元の曲面に制限される場合、この運動を拘束運動

(constrained motion) と呼ぶ。

この場合、質点の位置は曲面  $\phi(x, y, z) = 0$  上の点で表され、この曲面の方程式は

$$\phi(x, y, z) = 0 \quad (8.1)$$

と仮定し、この曲面上の任意の点  $(x, y, z)$

から微小変位  $\delta x, \delta y, \delta z$  を

$$\phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0 \quad (8.2)$$

と仮定すれば、従って (8.2) (8.1) から

$$\phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \phi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta z = 0 \quad (8.3)$$

が満たされることになる。

これを  $\delta r$  と  $\text{grad } \phi$  と

$$\text{grad } \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\delta r = i \delta x + j \delta y + k \delta z$$

とすると (8.3) は

$$\delta r \cdot \text{grad } \phi = 0 \quad (8.4)$$

これは、 $m$  の質点の位置  $\mathbf{r}$  に対して  $\mathbf{F} = -\text{grad } \phi$  と仮定する。

この場合  $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$  の条件が満たされる。

この条件が満たされる時、質点の位置  $\mathbf{r}$  は (8.1) の曲面にあり、任意の変位  $\delta \mathbf{r}$  はこの曲面に接する。

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}) \delta \mathbf{r} = 0 \quad (8.5)$$

が成り立つ。従って、この場合  $\delta \mathbf{r}$  は任意の変位である。この意味で  $\delta \mathbf{r}$  を仮想変位 (virtual displacement) と

し、(8.5) を仮想変位の原理 (principle of virtual displacement) と呼ぶ。

質点の位置  $\mathbf{r}$  が (8.1) の曲面上にある限り、(8.4) が満たされる。従って、(8.4) を満たす  $\lambda$  を

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a} + \lambda \text{grad } \phi) \delta \mathbf{r} = 0 \quad (8.6)$$

と仮定すれば、(8.6) が成り立つ。

$$(\mathbf{F}_x - m\mathbf{a}_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}) \delta x + (\mathbf{F}_y - m\mathbf{a}_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}) \delta y + (\mathbf{F}_z - m\mathbf{a}_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z}) \delta z = 0 \quad (8.7)$$

これは、(8.4) に  $\delta x, \delta y, \delta z$  の中から  $\delta y, \delta z$  を消去すれば、 $\delta x$  だけが残る。従って、 $\lambda$  は

$$\vec{F}_x + m a_x + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

と仮定して、 $\vec{r} = (x, y, z)$  の変位を  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  とし、

$$(\vec{F}_y + m a_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}) \delta y + (\vec{F}_z + m a_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z}) \delta z = 0$$

と仮定して、 $\delta y, \delta z$  は任意の値を取ることができ、 $\delta y, \delta z = 0$  と仮定すると

$$\vec{F}_y + m a_y + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$\vec{F}_z + m a_z + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

あるいは、 $\vec{r}$  の変位を  $\delta \vec{r}$  とし、

PPS

$$\vec{F} - m \vec{a} + \lambda \text{grad} \phi = 0$$

また

$$m \vec{a} = \vec{F} + \lambda \text{grad} \phi \quad (8.8)$$

これは、自由運動 (free motion) の場合、 $\vec{F} = 0$  とし、

$$\vec{R} = \lambda \text{grad} \phi \quad (8.9)$$

これは、表面反力 (surface reaction) の力  $\vec{R}$  を表し、 $\phi(x, y, z) = 0$  の表面に垂直な方向を示す。

したがって、表面反力の大きさは  $\lambda |\text{grad} \phi|$  であり、 $\lambda$  は表面反力の係数である。

また、 $\vec{r} = (x, y, z)$  の変位を  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  とし、

$$\lambda \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta z \right) = 0 \quad (8.10)$$

これは、 $\delta x, \delta y, \delta z$  は任意の値を取ることができ、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{z}} \frac{dz}{dt} \right) = 0 \quad (8.11)$$

PPS

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} \right) + \dots = 0$$

$$a \text{grad} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} v_x^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} v_y^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} v_z^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} v_x v_y + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} v_y v_z + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} v_z v_x \right) = 0 \quad (8.11')$$

これは、(8.8) の式と (8.11) の式を比較すると、 $\lambda$  は  $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$  の関数である。

PPS

$$(\vec{F} + \lambda \text{grad} \phi) \text{grad} \phi + m \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \text{grad} \phi \right) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{|\text{grad} \phi|^2} \left\{ \vec{F} \cdot \text{grad} \phi + m \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \text{grad} \phi \right) \right\} \quad (8.12)$$

これは、

この運動は地球の表面に沿った軌道の  
 位置  $s$  に関して、重力、重力線  $\nu$  方向の  
 力の平衡の原理を  $s$  軸に用いて、 $s, \nu, \rho$   
~~と  $s, \nu, \rho$  とし、位置  $s$  方向の力の~~  
~~成分を  $F_t, F_n, F_b$  とおき、(8.8)式は~~  
~~(8.9)式は (4.4), (4.7) 及び (4.8) により~~

$$Q = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{v^2}{\rho} - R$$

$R = \lambda \text{ grad } \varphi$  であるから、(8.8)  
 ~~$R = \lambda \text{ grad } \varphi =$~~

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{d^2s}{dt^2} &= F_t \\ m \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + R_n \\ 0 &= F_b + R_b \end{aligned} \right\} (8.13)$$

と書くことが出来る。  
 外力が  $F=0$  の場合、  
 (8.13) の最後の式から

$$R_b = 0$$

従って  $R$  の方向は軌道の重力線と一致する。  
 重力線は  $\nu$  方向であるから、~~重力線~~  
 は重力線  $\nu$  の方向と一致する。この重力線は  
 一般に測地線 (geodesic curve) といい、  
 即ち、外力が  $F=0$  の場合、軌道は重力線

と軌道は測地線  $\nu$  方向と一致する。  
 式 (8.13) の最初の式から

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \quad \text{即ち} \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad (8.14)$$

即ち速度  $v$  は一定である。  
 外力が  $F=0$  の場合、軌道は重力線  $\nu$  方向  
 上の測地線  $\nu$  方向と一致する。

$$R = \frac{mv^2}{\rho} \quad (8.15)$$

これは、即ち重力線の向心力に等しい。  
~~(8.13) の  $F=0$  及び  $\lambda > 0$  即ち~~  
 ~~$R$  は重力線  $\nu$  方向の向心力に等しい。~~  
 地球の表面は重力線  $\nu$  方向の向心力に等しい。  
 地球の表面は重力線  $\nu$  方向の向心力に等しい。  
 地球の表面は重力線  $\nu$  方向の向心力に等しい。  
 (great circle) の軌道と一致する。

ii) 球面振り子  
 重力場の中の一の球面上を動く  
 場合を考へて置る。この場合、軌道は同一  
 半径  $\rho$  と高さの球面を動く。この場合、  
 球面振り子 (spherical pendulum) といい、  
 重力場の中心を球心とし、半径  $\rho$  と  
 高さ  $h$  とおき、球面の方程式は

$$-2l^2\lambda = \frac{4ms^2}{p^2} - mgz + v \frac{d\lambda}{dt}$$

©2022 PHAL WITP, Kyoto University  
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (8.16)$$

このとき、 $\vec{e}_r = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$   
 運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\lambda x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\lambda y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + 2\lambda z \end{aligned} \right\} (8.17)$$

$(x, y, z)$  の代わりに円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  を  
 用いる。(8.19) と (8.17) の両方を満たす

$$\left. \begin{aligned} m \left( \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) &= 2\lambda \rho \\ \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) &= 0 \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + 2\lambda z \end{aligned} \right\} (8.18)$$

φ の積分定数

$$\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = S = \text{const.} \quad (8.19)$$

また

$$\rho \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{4S^2}{\rho^3} \quad (8.19)$$

さらに、(8.18) の両方を満たす  $\lambda$  を求め

$$m \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{4ms^2}{\rho^3} + 2\lambda \rho \quad (8.20)$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 \quad m \rho \frac{d^2\rho}{dt^2} + m z \frac{d^2z}{dt^2} = -m \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 - m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$2\lambda \rho^2 + \frac{4ms^2}{\rho^2} + 2\lambda z^2 - mgz = -m \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 - m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (8.21)$$

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4ms^2}{\rho^2} + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$+ mgz = \lambda \frac{d}{dt} (\rho^2 + z^2) + \text{const.} \quad (8.21)$$

また (8.16) より

$$\rho^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (8.21)$$

このとき、(8.19) と (8.21) を用いて

$$\frac{m}{2} \left\{ \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} + mgz = \text{const.} \quad (8.22)$$

このとき、(8.22) はエネルギー保存則を示している。  
 左辺は運動エネルギー、右辺は重力ポテンシャルエネルギーと定数項である。  
 (8.22) は (8.21) と (8.19) から導かれる。

(8.22) を (8.21) と (8.19) を用いて整理すると

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + 2gz = c \quad (8.23)$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 \quad (8.24)$$

(8.19), (8.24) と (8.23) を用いて  $\lambda$  を求め、  
 (8.20) を解く。

$z > -$

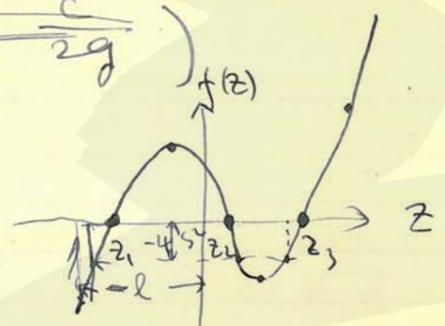
$$\frac{l^2}{l^2 - z^2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{4s^2}{l^2 - z^2} + 2gz = C \quad (8.25)$$

or  $dt = \pm \frac{l dz}{\sqrt{(l^2 - z^2)(C - 2gz) - 4s^2}} \quad (8.25)$

or  $\sqrt{\dots}$  の中の二次式を  $f(z)$  とすると  
 ~~$(8.25) f(z) = \dots$~~   
 $C - 2gz > 0$

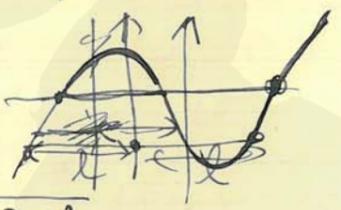
or  $z < \frac{C}{2g}$

$f(-\infty) = -\infty$   
 $f(-l) = -4s^2$   
 $f(+l) = \dots$   
 $f(+\infty) = +\infty$



or  $\frac{df}{dz} = -2g(l^2 - z^2) - 2z(C - 2gz) = 0$

$3gz^2 - Cz - gl^2 = 0$   
 $C^2 + 12g^2 > 0$



or  $z = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 12g^2}}{6g}$

or  $z$ ,  $f(z)$  の extreme value とする。or

$z$  は  $z_1 \leq z \leq z_2$  での  $\exists$  の実根  $z_1$  とする。  
 $z$  として  $z$  の実根  $z_1, z_2$  として  $f(z) \geq 0$  となる  $z_1 \leq z \leq z_2$  の範囲で  $z$  とする。  
 (8.25) の

$$dt = \pm \frac{l dz}{\sqrt{2g(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} \quad (8.26)$$

or  $z_3$  の  $z_3$  の  $s$ .

or  $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \sin^2 \theta$   $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = k^2 \quad (8.27)$

or  $z$  と  $z_1$  の  $d$  と  $dz$  の関係  
 $dz = \frac{d\theta}{2\sqrt{(z_2 - z_1)(z - z_1)}} = \frac{1}{\sqrt{z_2 - z_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$

$dt = \pm \frac{l dz}{\sqrt{g(z_2 - z_1) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}}$

$dt = \pm \frac{l d\theta}{\sqrt{g(z_2 - z_1)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$

or  $z = z_1$  ( $\theta = 0$ )  $t = 0$  とする  
 $t = \pm \frac{l}{\sqrt{g(z_2 - z_1)}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (8.28)$

(m. = m) 第一種楕圓積分, 通常

$$y = f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$$

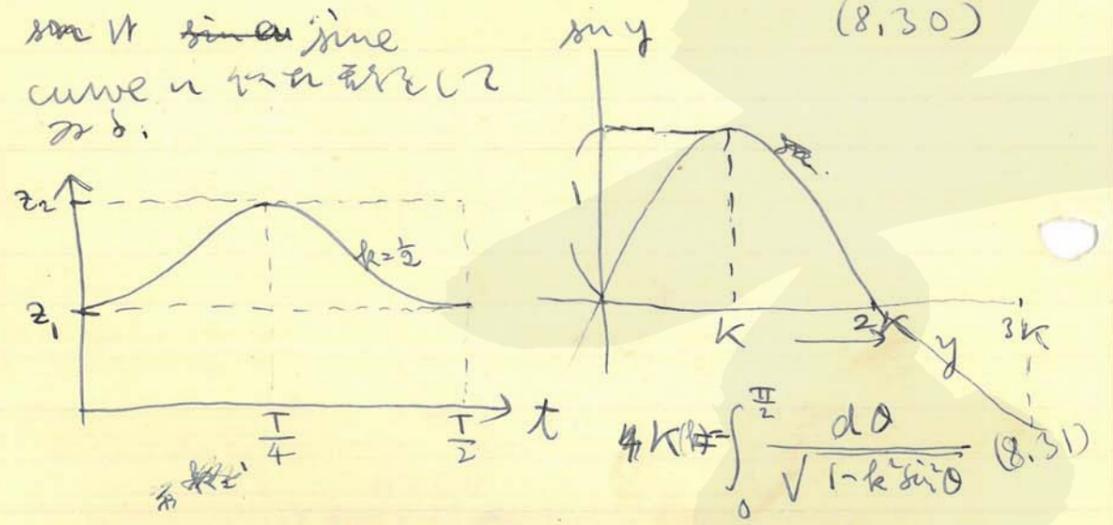
の逆曲線  $x = \operatorname{am} y$  と書く.

$$\theta = \operatorname{am} \pm \sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2}} \frac{t}{l} \quad (8.29)$$

又  $\sin \operatorname{am} y = \operatorname{sn} y$  と書く.

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) \operatorname{sn}^2 \left( \pm \sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2}} \frac{t}{l} \right) \quad (8.30)$$

この sine curve  
 curve の 楕圓積分  
 である.



従って z の 大と其の間の z1 から z2 へ  
 増し, 又 z1 に 戻ると 上下 運動を 繰り返す,  
 一上下の 時間  $\frac{T}{2}$  とする,

$$\sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2}} \frac{T}{2l} = 2\pi 2K(k)$$

$$T = 4l K(k) \sqrt{\frac{2}{g(z_3 - z_1)}}$$

次に (8.19) の  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{2s}{p^2} = \frac{2s}{l^2 - z^2}$

従って  $\frac{d\psi}{dz} = \pm \frac{2ls dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{2g(z - z_1)(z_2 - z)(z_3 - z)}} \quad (8.32)$

従って  $\psi = \pm \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot ls \int \frac{dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(z - z_1)(z_2 - z)(z_3 - z)}} \quad (8.33)$

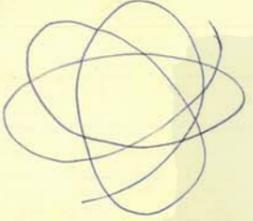
この第一種楕圓積分と 換せらるる  
 のである.  
 z が z1 から z2 へ 戻ると 上下 運動を 繰り返す  
 平均  $\frac{T}{2}$  と書くことにする

$$\Psi = \pm \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 2ls \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(z - z_1)(z_2 - z)(z_3 - z)}} \quad (8.34)$$

従って.

4

この軌道は、 $R=0$  の場合、 $\Psi=0$ ,  $z_1 = -l$  であり、 $R_1 = \frac{c}{2g}$ ,  $z_2 = l$  である。



この軌道は、 $C - 2gl > 0$  の場合、



この場合、軌道は垂直平面内、 $\frac{c}{2g}$  の高さから落下し、 $\frac{c}{2g}$  の高さまで上昇し、再び落下し、このように繰り返す。これは、粒子の運動は、

+ 磁場 第一 運動

$t \ll \tau$   $\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 t$   $\frac{d\phi_2}{dt} = 0$   
 $z$  は、 $z = l$  (8.36) から  $a \in [0, 2l]$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  あり、 $v$  の向きと (2) 一致する。 46

iii) 曲面上の運動、等価系、

対称性から  $\phi_1(x, y, z) = 0$   $\phi_2(x, y, z) = 0$  (8.35)  
 この曲面上にある場合、運動方程式 (8.8) の代り、

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda_1 \text{grad} \phi_1 + \lambda_2 \text{grad} \phi_2 \quad (8.36)$$

と、 $\text{grad} \phi_1, \text{grad} \phi_2$  は、曲面上の法線方向である。

この運動は、法線方向、接線方向、経緯線方向の

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= F_t \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + R_n \\ 0 &= F_b + R_b \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

この場合、法線方向と接線方向の外力  $\mathbf{F} = 0$  の場合、曲面上の等速運動である。

等価系、垂直平面内にある円周上の運動の場合、 $z = l$  の平面と  $z = -l$  の平面、円の中心は原点である。この場合、円周の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &\equiv x^2 + z^2 - l^2 = 0 \\ \phi_2 &\equiv y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

2. 従って 運動方程式の  $x, y, z$  成分は

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2\lambda_1 x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \lambda_2 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= +mg + 2\lambda_1 z \end{aligned} \right\} (8.39)$$

2m. (8.38) の 5

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 2 \left\{ x \frac{d^2 x}{dt^2} + z \frac{d^2 z}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$

$$= 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (8.40)$$

2m. 2.  $\lambda_2 = 0$

$$2\lambda_1 x^2 + mgz + 2\lambda_1 z^2 + m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -\frac{m}{2l^2} \left( +mgz + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \quad (8.41)$$

従って (8.39) は

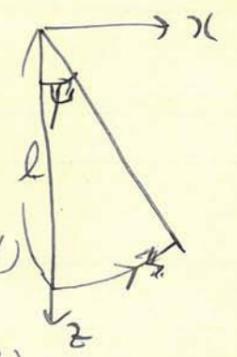
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{l^2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + gz \right\} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + mg + \frac{z}{l^2} = 0 \quad \therefore y=0$$

$$x = l \sin \psi, \quad z = l \cos \psi$$

よって  $x, z$

$$z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} + gx = 0$$



$$l \frac{d^2 \psi}{dt^2} + g \sin \psi = 0 \quad (8.41)$$

$$\left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \psi + C \quad (8.42)$$

2m.  $\psi=0$  の 2.  $\omega_0$  は  $\psi=0$  のときの角速度  $\omega_0$

$$\omega_0^2 = \frac{2g}{l} + C$$

2m.  $\left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l} (1 - \cos \psi)$

よって,  $\psi$  の 2.  $\psi_0$  は  $\psi=0$  のとき

$$\cos \psi_0 = -1 - \frac{\omega_0^2 l}{2g} \quad \text{for } -1 - \frac{\omega_0^2 l}{2g} > -2$$

$$\text{for } -1 - \frac{\omega_0^2 l}{2g} > -1 \quad \text{or } \omega_0 \geq 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\cos \psi_0 = -1. \quad \text{すなわち } \psi_0 = \pi$$

$$\text{for } \omega_0 \geq 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

これは単振り子の運動方程式を解く。京都大学基礎物理学研究所 藤川記念館史料室

a) 振り子の角速度  $\omega_0 < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$  の場合、振り子の振り幅  $\psi_0$  が  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  となる。振り子の振り幅  $\psi_0$  は  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  となる。

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\psi - \cos\psi_0)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}(\sin^2\frac{\psi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2})$$

$$\frac{1}{k} \sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\psi_0}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{k} \sin\frac{\psi}{2}\right| \leq 1$$

$$k = \sin\frac{\psi_0}{2} < 1$$

$$\frac{1}{2k} \cos\frac{\psi}{2} d\psi = \cos\psi \cdot d\psi$$

$$d\psi = \frac{k \cos\psi \cdot d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\psi}}$$

$$\sin^2\frac{\psi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2} = k^2(1 - \sin^2\psi) = k^2 \cos^2\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \quad (8.42)$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = \pm \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$

これは振り子の振り幅  $\psi_0$  と  $k$  の関係を示す。

$$\psi = \pm \text{am}\left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $t = t_0$  のとき  $\psi = \frac{\pi}{2}$  となる。

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}$$

$$= K(k)$$

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $t = 2t_0$  のとき  $\psi = 0$  となる。また、 $t = 4t_0$  のとき  $\psi = 0$  となる。

$$T = 4t_0 = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (8.43)$$

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $k = 0$  となる。

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 0$$

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $k = 1$  となる。

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $k = 1$  となる。

振り子の振り幅  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$  の場合、 $k = 1$  となる。

$$\frac{d\psi}{dt} \cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\psi_0^2 - \psi^2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l} (\psi_0^2 - \psi^2)} \quad (8.44)$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \pm \frac{d\psi}{\psi_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^2}}$$

$\frac{\psi}{\psi_0} = x \quad t=0 \quad x=0$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pm \arcsin x$$

$$\psi = \pm \psi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8.45)$$

この周期は  $\psi_0$  に無関係

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8.46)$$

このことは等時性 (isochronism) である。

b)  $\omega_0 > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$  の場合、この振り子  
 は  $\psi = \pi$  を通過して何回も同じ位置に

振動。

iv) 摩擦のある場合。  
 以上 管状の運動が 曲線面内曲線上に制限され  
 る場合、抗力 (~~Zwangsdruck~~)、その面乃至  
 線に垂直な方向に向く。これは運動  
 が滑らかに進む。反対に、この面の粗  
 い場合、運動は滑らかな方向と反対の方向に  
 向く。これは抵抗として働く。或る程度  
 摩擦 (friction) がある。又曲線面内  
 が空気や水の中を動く場合 (medium)  
 中の抵抗がある。この場合、抵抗 (resistance)  
 が働く。これは力の方向は速さの方向  
 の  $v$ 、<sup>速さの方向</sup> である。

質量  $m$  の作用する抵抗の大きさ  $k$  の  
 場合、(8.41) の代り

$$ml \frac{d^2\psi}{dt^2} = -mg \sin \psi - kl \frac{d\psi}{dt} \quad (8.47)$$

この場合、 $k$  は抵抗係数 (coefficient  
 of resistance) である。

$$\frac{g}{l} = a^2, \quad \frac{k}{m} = 2b$$

と置くと、(8.47) は

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2b \frac{d\psi}{dt} + a^2 \sin\psi = 0 \quad (8.48)$$

振動が小さい場合  $\sin\psi \approx \psi$ ,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2b \frac{d\psi}{dt} + a^2\psi = 0 \quad (8.49)$$

この式の解を  $\psi = e^{\lambda t}$

代入して (8.49) の  $\lambda$  は  $\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

i)  $a^2 > b^2$  の場合  $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$  とすると  $\lambda = -b \pm i\alpha$

(8.49) の一般解は

$$\psi = A e^{(-b+i\alpha)t} + B e^{(-b-i\alpha)t}$$

$$= C e^{-bt} \cos(\alpha t + \epsilon)$$

初期条件

したがって  $\frac{d\psi}{dt} = C e^{-bt} \{-b \cos(\alpha t + \epsilon) - \alpha \sin(\alpha t + \epsilon)\}$

$t=0$  の  $\psi = \psi_0$  の条件は  $C \cos \epsilon = \psi_0$

初期条件より

$$\psi_0 = C \cos \epsilon$$

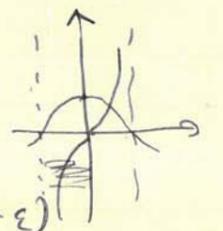
$$0 = -C (b \cos \epsilon + a \sin \epsilon)$$

したがって

$$\tan \epsilon = -\frac{b}{a}$$

$$C = \psi_0 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\psi = \psi_0 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} e^{-bt} \cos(\alpha t + \epsilon)$$



この振動は時間とともに  $e^{-bt}$  の項により減少して行く。これは減衰振動 (damped oscillation) である。  $e^{-bt}$  の減衰の割合は対数的減衰 (logarithmic decrement) と呼ばれる。

$$\tau = \frac{1}{b} = \frac{2m}{k}$$

この時間  $\tau$  は  $e^{-1}$  となる。

ii)  $a^2 < b^2$  の場合  $\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$

$$\psi = A e^{-(b - \sqrt{b^2 - a^2})t} + B e^{-(b + \sqrt{b^2 - a^2})t}$$

この  $\psi$  は  $t \rightarrow \infty$  で  $\psi \rightarrow 0$  となる。初期条件は  $\psi = \psi_0$  とする。

iii)  $a = b$  の場合  
 $\psi = A e^{-bt}$   
の一つの解と、 $\lambda = -b$  の一つの解を求めらる  
 $\psi = e^{-bt} \cdot X$

と置くと、(8.4a) に入ると  
 $\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad X = C_1 t + C_2$

と置くと、 $\psi = A e^{-bt} + B t e^{-bt}$

第一分題

### §9. 相対運動

i) 運動座標系、 $\mu$  座標系での運動方程式  
運動物体の位置は他の物体の位置を基準として決まる。従って運動即ち位置の変化は又他の物体を基準として記述する他、  
 $\mu$  座標系での一意の座標系を用いて再び位置の変化を記述する。運動を記述する。  
Newton の運動方程式も又  $\mu$  座標系を用いて成り立つ。力の同一成り立つ同一座標系で成り立つ。物と他の座標系での運動方程式は必ずしも (5.2) と同じ形とは限らない。

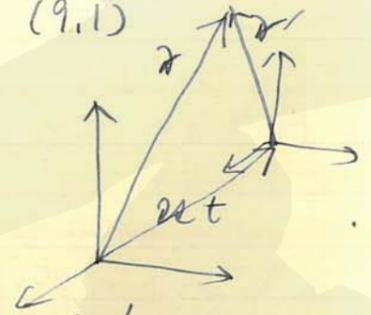
そこで、Newton の運動方程式が成り立つのは如何なる座標系であるか、  
座標系を替へることによって Newton の運動方程式が成り立つか。

この二つが重要な問いである。  
通常地上の物体の運動は地球を基準とし、又惑星の運動は太陽を基準とし、また天体の運動は太陽を基準とし、要するに同一の座標系を用いて Newton の運動方程式が成り立つのである。  
従って、  
一般に Newton の運動方程式の成り立つ座標系

本系を慣性系 (inertial system) と  
 稱する。右と右端の図は、慣性系  
 の慣性系である。又地上の物  
 体の運動の図は、地球の慣性系  
 系から見た慣性系と見做す。  
 併し、慣性系は決して唯一のもの  
 ではない。一つの慣性系を静止系と  
 すると、これに對して、  
 一定の速度で運動する系を  
 慣性系と見做す。この速度を  $v$  と  
 すると、 $v=0$  として、  
 両慣性系の原点が一致し  
 るとすると

$$r = r' + vt \quad (9.1)$$

この図は、 $v$  一如である。  
 二つの慣性系の原点を  
 Galilei の変換と稱す  
 (Galilei transformation)  
 併し、この場合、  
 速度の両慣性系  
 同様に  $v, v'$  とする



$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + v$$

即ち  $v = v' + v \quad (9.2)$   
 又、加速度を  $a, a'$  とすると

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r'}{dt'^2}$$

即ち  $a = a' \quad (9.3)$

換言すれば、  
 加速が異なる二つの慣性系  
 間で、 $r = r'$  なる  
 位置に働く力  $f, f'$  が  
 同様に働く。即ち

$$f = f' \quad (9.4)$$

この図は、  
 同様に成る場合、  
 Newton の運動  
 方程式  $f = ma$  の運動  
 慣性系でも (9.2) と同  
 様に成る

$$ma' = f' \quad (9.5)$$

である。  
 換言すれば、  
 Newton の運動方程式は Galilei  
 変換に対して不変である。  
 従って、一つの  
 慣性系に対して、  
 一定の速度で動いて  
 いる他の慣性系は、  
 慣性系である。  
 併し、この場合、  
 速度の両慣性系  
 同様に  $v, v'$  とする  
 (これは二つの慣性系  
 の原点が一致して居る)  
 併し、この場合、  
 速度の両慣性系  
 同様に  $v, v'$  とする  
 である。これを Gal  
 相対性 (relativity) といふ。  
 この相対性変換運動  
 の図は (transformation) の

同様の式, 観測運動は観測(静止)系に  
 同様に Galilei 変換により, 有質量の物体に力  
 が加わると,  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$  となる. Galilei の  
 相対性原理から, 静止系で観測  
 が加わると, 振動現象は同じである. したが  
 って, 観測系での観測と同様の運動で, 振動  
 系での観測も同様である. 振動系での観測も  
 振動系で観測される, したがって観測系での  
 観測も同様である.

一定速度の  
 滑り運動 (uniform translation) 以外の  
 一般の運動に対しては上記の相対性  
 (relativity) は成り立たない.

何故かといえば, 一つの慣性系を静止系と  
 見做し, これに対して一般の運動をして  
 いる運動系を  $\mathbf{a}$  とし,  $\mathbf{a}'$  の間では  
 $(9.4)$  の如き関係がある, したがって (9.2) から  
 $\mathbf{f} = \mathbf{f}'$

の限り, 運動系標準系と同様の運動方  
 程式は

$$m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2[\mathbf{w} \mathbf{v}'] + \left[ \frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r}' \right] + [\mathbf{w}[\mathbf{w} \mathbf{r}']]) = \mathbf{f}' \quad (9.6)$$

の形をとり,

これは (9.5) の  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$  の場合である

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

この場合, これらの運動系標準系の  
 反作用一定速度  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  運動で,  
 座標軸の運動がなければ, 即ち Galilei  
 変換を用いて静止系標準系以外では

ii)  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_0 = \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} \neq \mathbf{0}$ , 即ち加速  
 運動 (accelerating translation) による  
 場合である

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f}' - m\mathbf{a}_0 \quad (9.7)$$

したがって, 運動系と静止系との観測結果は,  $\mathbf{f}'$  の他に

$$-m\mathbf{a}_0$$

の力が加わるといえる. これは慣性系  
 での観測結果からいえる. 意味は「見かけ上  
 の力」に相当する.

ii)  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ,  $\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ , 即ち



地球の半径  $R \ll R+r \approx R$  である。  $R+r \approx R$  と仮定する。

また  $O$  点の方位角  $\beta \ll 1$ ,  $x, y, z$  軸をそれぞれ  
 南方, 東方, 上方に取る。

$$m\ddot{x} = f_x$$

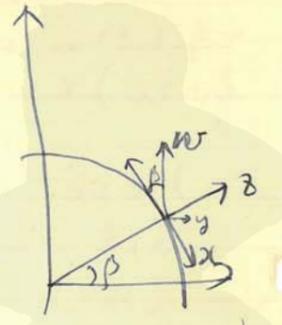
$$\begin{cases} \omega_x = -\omega \cos \beta \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega \sin \beta \end{cases} \quad (9.11)$$

したがって, 回転方程式の成り立ち

$$m\ddot{x} = f_x + 2m\omega \dot{y} \sin \beta + m\omega^2 R \sin \beta \cos \beta$$

$$m\ddot{y} = f_y - 2m\omega (\dot{x} \sin \beta + \dot{z} \cos \beta)$$

$$m\ddot{z} = f_z + 2m\omega \dot{y} \cos \beta + m\omega^2 R \cos^2 \beta \quad (9.12)$$



外力がゼロの場合

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = -mg$$

第一に  $\dot{x} = 0$

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -mg \quad m\ddot{z} = -mg$$

ここで  $t=0$  のとき  $x=0, y=0, z=h$

$z=h$  の高さから、地球の中心から見た  
 軌道は、第一に  $\dot{x} = 0$

$$x=0, \quad y=0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad (9.13)$$

$$\frac{g}{\pi} = \frac{55}{3.14} \approx 17.5$$

また  $R \ll R+r \approx R$  である。

したがって  $(9.11)$  の  $\omega$  を用いて  $(9.12)$  を

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 R \sin \beta \cos \beta \\ \ddot{y} = +2\omega g t \cos \beta \\ \ddot{z} = -g + \omega^2 R \cos^2 \beta \end{cases} \quad (9.14)$$

これを

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \omega^2 R t^2 \sin \beta \cos \beta \\ y = \frac{1}{2} \omega g t^2 \cos \beta \\ z = h - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} \omega^2 R t^2 \cos^2 \beta \end{cases} \quad (9.15)$$

$$R = 6.4 \times 10^3 \text{ km} = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

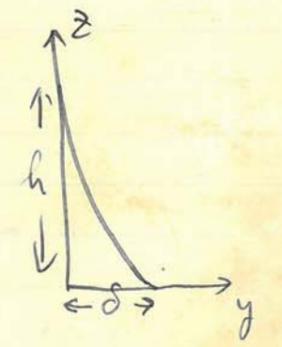
$$R\omega^2 = 6.4 \times (0.73)^2 \ll g = 980$$

したがって

$$y \approx \frac{\omega}{g} \cos \beta \sqrt{8(h-z)^3} \quad (9.16)$$

すなわち、地球の中心から見た  
 軌道は、地球の中心から見た  
 軌道は、地球の中心から見た

$$y = \frac{\omega}{g} \cos \beta \sqrt{8h^3}$$



from W  $\beta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ,  $r = h = 10^4 \text{ cm}$   
 $\delta = 1.5 \text{ cm}$   
 2nd.  $\dots$

iii) Foucault's gyro

次は地球の自転による球の振り子の振るるる  
 運動、運動方程式は

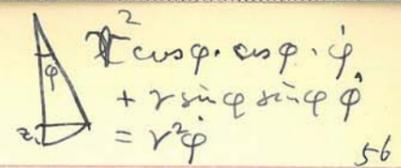
$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \beta + 2\lambda x \\ \ddot{y} = -2\omega(x \sin \beta + \dot{z} \cos \beta) + 2\lambda y \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \beta + 2\lambda z \end{cases} \quad (9.17)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} &= 0 \\ \dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} &= 0 \\ \dot{x}^2 + x(2\omega \dot{y} \sin \beta + 2\lambda x) &+ \dot{y}^2 + y(-2\omega(x \sin \beta + \dot{z} \cos \beta) + 2\lambda y) \\ + \dot{z}^2 - g z + 2\omega z \dot{y} \cos \beta + 2\lambda z^2 &= 0 \\ -2\lambda l^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - g z + 2\omega(x \dot{y} - y \dot{x}) \sin \beta &+ \\ + 2\omega(y \dot{z} - z \dot{y}) \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= l(1 - \sin \varphi) \\ &= l \frac{\varphi^2}{2} \\ \dot{z} &= \end{aligned}$$



2nd,  $\dots$   
 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = -2gz + \dots + C \quad (9.18)$

2nd.  $\dots$   
 $x\dot{y} - y\dot{x} = -2\omega \sin \beta (x\dot{x} + y\dot{y}) - 2\omega \dot{z} \cos \beta$

$\dots$   
 $x\dot{y} - y\dot{x} = -\omega \sin \beta (x^2 + y^2) + 2S \quad (9.19)$

$\dots$   
 $z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = -l \left( \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right)$   
 $x^2 + y^2 = C - \frac{g}{2l} (x^2 + y^2) \quad (9.20)$

$x = \rho \cos \psi, y = \rho \sin \psi$   
 $\rho^2 \dot{\psi} = 2S - \omega r \sin \beta$   
 $\dot{\rho}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = C - \frac{g}{2} \rho^2 \quad (9.21)$



$$m_1(v_1' - v_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt$$

$$m_2(v_2' - v_2) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt$$

又此、従つて (10.2) の

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt$$

又此、

これよりして 相互作用の起つて居る系内間にて

$$\bar{F}_1 = - \bar{F}_2 \quad (10.4)$$

相互作用の成立するところと推定される  
 相互作用の起る 1 の作用力である。これを  
 作用 (action) とし、 $\bar{F}_2$  の反作用 1 の  
 2 の作用力と、反作用 (reaction) とする。  
 故に (10.4) の  
 「作用」と反作用とが同一方向

反作用である。  
 更に、Newton の 2 の法則より、  
 2 の作用の同じ物に働く力にして如何なる  
 場合でも成立するに依り、これを  
 Newton の運動の第三法則 (third law  
 of motion) 又は反作用の法則 (law of  
 reaction) とす。併し Newton の  
 作用と反作用の間に、  
 勢力の如きものを生ずるものと  
 して置く。此の如きものを  
 $\bar{F}_1, \bar{F}_2$  とし、 $\bar{F}_1$  と  $\bar{F}_2$  の作用  
 反作用は、 $\bar{F}_{12}, \bar{F}_{21}$  と書くと  
 (10.4) の  $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$  となる。  
 $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \quad (10.5)$

又此、  
 1, 2, 3, ... n の n 個の質点  
 1 個は、  
 質点系 (system of material particles)  
 とす。此の質点系は、  
 力学系 (dynamical system) の一様  
 である。  
 1, 2, 3, ... n の n 個の質点

の系 (system) を任意に選んで場合、任意の  
 間の作用力の総和は一般に

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{21} &= 0 \\ F_{13} + F_{31} &= 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} F_{ij} = 0 \quad (10.6)$$

とある。これは、 $i$  番目の質点に働く  
 合成力

$$F_i = F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{i,i-1} + F_{i,i+1} + \dots + F_{in}$$

であるから、(10.6)より

$$\sum_i F_i = 0 \quad (10.7)$$

とある。PPS 系の任意の質点間の力、系内  
 の他の質点から働く合成力の総和は 0 である。  
 即ち、一般に、質点間の力の総和は 0 である  
 (internal force) とする。  
 と、系外から作用する外力 (external force) との  
 区別が出来る。PPS 合成力

$$F_i = F_i + F_i'$$

(10.8) 質点の位置

とある。但し、 $F_i, F_i'$  はそれぞれ内力  
 外力である。質点  $i$  に対して (10.7) の式が成り  
 立つ。従って、任意の質点  $i$  に対して、  
 外力が 0 としても作用して 20 になる。自由  
 (free) である。

ii) 質量中心。 0 点を取って  
 各  $m_1, m_2, \dots, m_n$  の質点の位置を  
 表す  $r_1, r_2, \dots, r_n$  とする。この場合

$$R = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i r_i}{M}$$

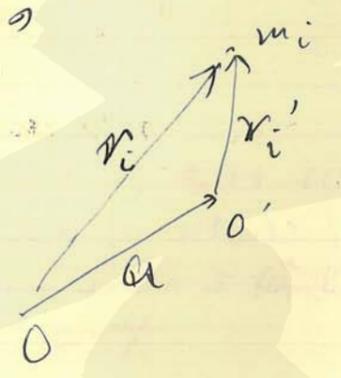
この位置を 質量中心 (centre of mass) とする。  
~~質量中心~~  $X =$

但し、 $M = \sum_i m_i$

この系の全質量  $M$  である。  
 空間座標  $X$  である。

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ Y &= \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ Z &= \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{aligned} \right\}$$

今原点<sup>0</sup>の位置を $\alpha$ と同じ $\alpha$ の位置  
 の位置を新しい原点の位置(取れば),  
 二つの間の $i$ 番目の質点の  
 位置を $r_i'$ と取り、新しい  
 原点の間の位置関係は  
 $\leftarrow$



$$\begin{aligned} R' &= \frac{\sum m_i r_i'}{M} \\ &= R - \alpha \\ (\because r_i' &= r_i - \alpha) \end{aligned}$$

二つの元の質点中心の新しい原点の間の  
 距離は変わらない。  
 即ち 質点中心の系に因りずとも  
 原点

の位置、即ち座標系の取方の違いは、  
 今 $\alpha$  質点中心に因りずとも  
 位置を  $r_i''$  と取り

$$r_i'' = r_i' - R$$

よって、

$$\sum_i m_i r_i'' = \sum_i m_i r_i' - M R = 0$$

が成り立つ。

今二つの質点の間に  $K_1, \dots, K_n$  の  
 力の作用が与えらる。各質点の運動  
 方程式は

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = K_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

よって、両辺を  $m_i$  で割ると

$$\sum_i \frac{d^2}{dt^2} (m_i r_i) = \sum_i K_i$$

即ち

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = K$$



上式は又  $\frac{dP}{dt} = K$   
 とわかる。但し  $P = \sum_i m_i \frac{dx_i}{dt}$   
 は系の全運動量 (total momentum)  
 $K = \sum_i K_i$

各質点の運動に外力が作用しているとき、  
 この式は「質点系の質点中心に、各質点に及ぼす  
 外力の和としておこなう場合と同じ運動  
 である」とを示す。

質点系に外力が作用している場合、  
 この式は「各質点に及ぼす外力の和として  
 おこなう場合と同じ運動である」ともいえる。  
 この意味で「質点中心」  
 中心を重心 (centre of gravity)  
 とすることもできる。

質点に及ぼす力を内力  $F_i$  と外力  $F_i'$  とすると  
 $K_i = F_i + F_i'$

よって、  

$$K = \sum_i K_i = \sum_i F_i + \sum_i F_i'$$

PPS  $K = \sum_i F_i'$

但し、  

$$F' = \sum_i F_i'$$

は A の質点に及ぼす外力の和として  
 のである。従って

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = F'$$

よって、<sup>質点中心</sup>「各質点に及ぼす外力の和として  
 おこなう場合と同じ運動である」といえる。

外力が作用していない場合、PPS  
 系は自由な場合、 $K = F' = 0$

従って  $\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$

PPS 系は自由な場合、<sup>質点中心の運動</sup>  
 従って  $\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$

$$V = \frac{dR}{dt}$$

よって、この式は外力の和としておこなう場合と同じ運動である。

即ち「質点系に外力が作用して居るから  
 中心の運動の保存法則 (Principle  
 of Conservation of Motion of the Centre  
 of Mass) である。」

次にこの系の質点に働く力の総和の  
 総率に於て

$$N_i = [r_i K_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

であるから、  
 又  $i$  番目の質点の運動量を  $P_i$  とす

$$P_i = m v_i$$

と、運動量の原点に於ける総率は

$$U_i = [r_i P_i]$$

であるから、 $N_i$  と  $U_i$  の間には  
 以下の関係がある

$$\frac{dU_i}{dt} = N_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

したがって、これらの質点に於ける  
 力の総率に於て

$$\sum_i \frac{dU_i}{dt} = \sum_i N_i$$

よって

$$U = \sum_i U_i$$

$$N = \sum_i N_i$$

と書くと、これはこの系の全運動量の  
 総率 (total moment of momentum)  
 又は総角運動量 (total  
 angular momentum)  $L$  の  
 力の総率に於ける即ち total resultant  
 moment of momentum force に等しい。

従って上式は

$$\frac{dU}{dt} = N \quad (*)$$

即ち質点系の全角運動量の時間的変化の割合は  
 系の中心に於ける力の総率に等しいことを示す。

この原語の訳を  $R$  とす、これを同様に各質  
 点の相対座標を  $r'_i$  とす

$x_i = a + x_i'$   
 $K_i = K_i'$   
 $B_i = B_i'$   

$$U = \sum_i [(a + x_i') B_i]$$

$$= [a, \sum B_i] + \sum [x_i' B_i]$$
 又  $B = \sum_i B_i$   

$$U' = \sum_i [x_i' B_i] = \sum_i [x_i' B_i']$$
 又  $B = \sum_i B_i = \sum_i B_i'$   

$$U = [a, B] + U'$$

$$N = [a, K_i] + [x_i' K_i]$$

$$K = \sum K_i = \sum K_i'$$

$$N' = \sum_i [x_i' K_i'] = \sum_i [x_i' K_i]$$

上式より

$$N = [a, K] + N'$$

従って (\*) 式より

$$[a, \frac{dP}{dt}] + \frac{dL'}{dt} = [a, K] + N'$$

よって

$$\frac{dB}{dt} = K$$

よって

$$\frac{dL'}{dt} = N'$$

2PS 二の式より 座標系の違いに因り  
 成る。

今系  $i$  の  $i$  粒子の位置と  $j$  粒子の位置の間に  
 力  $F_{ij}$  が働く。

$$F_{ij} = -F_{ji}$$

一方  $j$  粒子が  $i$  の位置に  
 いる。

vector  $x_{ij}$

$$x_{ij} = -x_{ji}$$

証明 ~~して~~ ~~する~~

$$r_j = r_j + r_{ij}$$

then  $[r_j F_{ij}] = [r_j F_{ij}] + [r_{ij} F_{ij}]$

(also  $[r_{ij} F_{ij}] = 0$ )

(i)  $r_{ij} \parallel F_{ij}$

then  $[r_{ij} F_{ij}] + [r_j F_{ji}] = 0$

then  $\sum_i [r_i F_i] = \sum_{i+j} [r_i F_{ij}] = 0$

then ~~the total torque~~

$$N = \sum_i N_i = \sum_i [r_i F_i] = 0$$

つまり、PPS 力の <sup>位置</sup> 能率の <sup>位置</sup> 変換 <sup>位置</sup> の外力  
 に対して  $\frac{dU}{dt}$

つまり、  
 に対して 内力の対称性 <sup>位置</sup> の場合

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

つまり「自由系」の全運動量は一定不変  
 である。\*

(内力の対称性 (作用反作用) の場合のみ  
 $K = -P = 0$ )

つまり  $\frac{dP}{dt} = 0$

つまり「自由系」の全運動量は一定不変  
 である。)

\* の場合  $L$  の方向に不変軸 (invariable axis),  $\perp$  の面を不変平面 (invariable plane) と稱す。

$r_i$  ~~の~~  
 $r_i$  の位置  $S_i$  の運動の速化の割合、PPS 面積  
 変化

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{2} [r_i v_i]$$

つまり、  
 に対して 位置エネルギー

$$U = 2 \frac{d}{dt} \sum_i \mu_i S_i$$

( 物体系の質点の位置を  $A$  とする。場合  
 別 )

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$$

の場合に、位置ベクトルは

$$U = m \sum_i \frac{d^2 S_i}{dt^2}$$

$\vec{r}$ , 各質点の位置ベクトルは  $\vec{r}_i$  の和に等しい。  
 中心位置の系に於ては 位置ベクトルは  
 一定である。 )

§11.1) = 二体問題 ( Two Body Problem )  
 前者に太陽を固定した力の中心と取り、場合  
 の位置の運動を論じた。

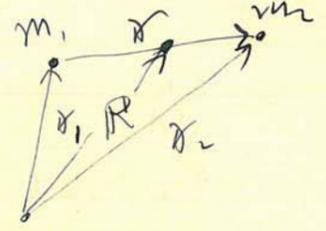
相互作用の場を知りし上、太陽が恒星に及ぼす  
 力と同一直線の反対側の力から太陽に作用  
 して居る。このために太陽も又  
 運動をせねばならぬ。

~~今  $r$  は二つの質点の間の、それ等の距離の  
 二乗に逆比例する力が働く。~~

$r = \vec{r}$  = 二つの質点から重心の位置ベクトル  
 である。各々の位置を  $m_1, m_2$  とし、  
 $r_1, r_2$  とする  
 重心の位置は

$$R = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$



$m_1$  と  $m_2$  の相対座標は  
 $r = r_2 - r_1$

以上より、  
 この二つの質点間の相互作用は引力であり、相対座標  
 座標のみに依存する力  $F$  のみで作用し、

よって、運動方程式は位置  $r$  (Mの中心) に対し

$$m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -F(r)$$

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = +F(r)$$

中心の運動を求めると  
 $\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$

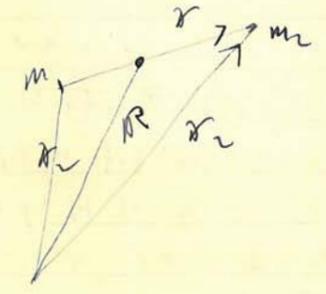
$r$ , 中心の位置を  $R$  とし、  
 中心の運動方程式より  $\frac{m_2}{m_1+m_2} r$  と  $\frac{m_1}{m_1+m_2} r$  と  
 相加して  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r)$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r)$$

ここで、 $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

この式は  $m_1$  の方が  $m_2$  の方が大きいとき、  
 $F$  の力が  $m_1$  の方が大きいとき、  
 $m$  ( $< m_1$ ) は減少したときと同じになる  
 ことがわかる。この  $m$  を減少質量  
 (reduced mass) とする。

お絵描き  
 中心の位置  $R$  を原点として  $r_1$  と  $r_2$  を  
 位置ベクトルとして表すと、  
 $r_2 = R + \frac{m_1}{m_1+m_2} r$   
 $r_1 = R - \frac{m_2}{m_1+m_2} r$



また、 $r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} r$   
 $r_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} r$

よって、 $r_1$  と  $r_2$  の位置ベクトル  $m_1, m_2$  の位置  
 は  $r_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} r$  と  $r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} r$  と  
 表すことができる。

よって、 $m_1, m_2$  の間の相互作用力  $F$  は、  

$$F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

この相互作用力  $F$  は  $r$  に反比例する。

Kepler's law  $\rightarrow$  2nd law

$\gamma$  の軌道は  $(7.11)$  の軌道  
 軌道は二次曲線に属するが、 $\gamma$  の軌道  
 は  $m_2$  の軌道に属する。  
 $\gamma$  の軌道は  $m_1$  の軌道に属するが、  
 $\gamma$  の軌道は二次曲線に属する。

$\gamma$  の軌道は  $m_1$  の軌道に属するが、  
 $\gamma$  の軌道は二次曲線に属する。  
 $\gamma$  の軌道は  $m_2$  の軌道に属するが、  
 $\gamma$  の軌道は二次曲線に属する。

したがって、 $\gamma$  の軌道は  $m_1$  の軌道に属するが、  
 $\gamma$  の軌道は二次曲線に属する。  
 $\gamma$  の軌道は  $m_2$  の軌道に属するが、  
 $\gamma$  の軌道は二次曲線に属する。

(7.17) の軌道は  $T$  の軌道に属する。  

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{C}$$

したがって、 $C = \gamma m_1 m_2$

したがって  $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma m_1 m_2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma (m_1 + m_2)}$

したがって  $\frac{a^3}{T^2}$  は  $m_1$  と  $m_2$  の比に比例する。  
 $m_2/m_1 \sim 1/1000$  程度であるから、  
 $\frac{a^3}{T^2}$  は  $m_1$  に比例する。

ii) 衝突問題 (Collision Problem)  
 二つの物体の衝突の問題は、  
 運動量の保存

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

したがって、 $v = \frac{dR}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

したがって  $v = v'$



$$\frac{v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1}{v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2} = e$$

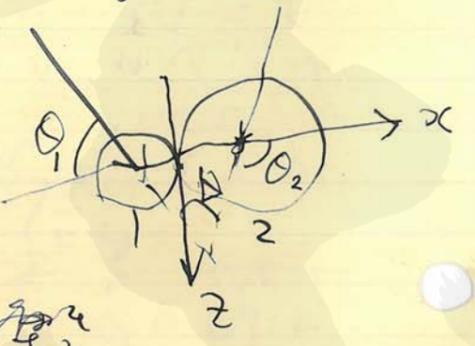
衝突後の

69

回復係数 (Coefficient of Restitution)  $e$  の場合

$e=1$  の場合  $v_1$  と  $v_2$  の速度が  
 衝突前後で逆になる (perfectly  
 elastic) である。この場合  
 $v_1' = -v_1$  と  $v_2' = v_2$  となる。  
 $e=0$  の場合  $v_1' = v_2' = v$  となる。  
 $v' = v'' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$   
 となる。

次のように衝突の角度を定める。両球  
 が共に滑らかな球面を滑り落ちて  
 衝突する方向が  $\theta$  となる。  
 衝突後の速度を  $v_1'$  と  $v_2'$  とする。  
 $\theta = \theta_2 - \theta_1$   
 と、両球の衝突後の速度を



共  $v_1, v_2$  と  $\theta_1, \theta_2$  が既知ならば  $v_1', v_2'$  を  
 求める。

$$\frac{v_1' \cos \theta_1 - v_2' \cos \theta_2}{v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1} = e$$

又  $x$  方向の運動量保存の式は  
 $m_1 v_1 \cos \theta_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2$

$$v_1 \sin \theta_1 = v_1' \sin \theta_1$$

$$v_2 \sin \theta_2 = v_2' \sin \theta_2$$

$$m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2$$

この3つの式から  $v_1', v_2', \theta_1', \theta_2'$  を  
 求める。

↑ 2つの例  $q_1, q_2 \dots q_{3n}$  を一般化座標 (generalized coordinates) とし、

§12. Lagrange の方程式 (Lagrange's Equations of Motion)

3n個の質点  $P_1, P_2, \dots, P_{3n}$  の一般力学系を  $x_i, y_i, z_i$  により表す。運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \quad i=1, 2, \dots, 3n$$

この3n個の運動方程式が成り立つ。

この場合変数は  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_{3n}, y_{3n}, z_{3n}$  の3n個である。この代りに他の  $3n$  個の変数  $q_1, q_2, \dots, q_{3n}$  を導入する。これらは

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \\ y_i &= y_i(\dots) \\ z_i &= z_i(\dots) \end{aligned}$$

である  $q_i$  の変換として導入する。これら

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \frac{dq_\lambda}{dt} \dot{q}_\lambda \quad i=1, 2, \dots, 3n$$

である。ここで  $\dot{q}_\lambda = \frac{dq_\lambda}{dt}$  とする。

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\lambda} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\lambda^2} \dot{q}_\lambda^2 + \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\lambda \partial q_\mu} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu$$

この方程式を、この運動方程式に

$$\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \ddot{q}_\lambda + \sum_{\lambda, \mu} \sum_i m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\lambda \partial q_\mu} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu = F_\lambda$$

運動エネルギー  
 位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial r_i}{\partial q_{\nu}} \dot{q}_{\mu} \dot{q}_{\nu}$$

従って  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\lambda}} = \sum_{\mu} \sum_i m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial r_i}{\partial q_{\mu}} \dot{q}_{\mu}$

従って  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\lambda}} \right) = \sum_{\mu, \nu} \left( m_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{\lambda} \partial q_{\mu} \partial t} \dot{q}_{\nu} + m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \dot{q}_{\mu} \dot{q}_{\nu} \right) + \sum_{\mu} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{\mu} \partial t}$

従って  $\frac{\partial T}{\partial q_{\lambda}} = \sum_{\mu, \nu} m_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{\lambda} \partial q_{\mu} \partial t} \dot{q}_{\nu} + \sum_{\mu} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{\mu} \partial t}$

従って  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\lambda}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\lambda}} = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \left( m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \right) = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} F_i$

$$* \sum_i F_i \delta r_i = \sum_{\lambda} Q_{\lambda} \delta q_{\lambda}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\lambda}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\lambda}} = Q_{\lambda} \quad (T)$$

3n個の方程式or変数. 2次元 Newton  
 の方程式  $q_1, \dots, q_{3n}$  の一般座標の場  
 での Newton 変数  $q_1, \dots, q_{3n}$  の Lagrange  
 の方程式  $q_{\lambda}$  2次元

$$Q_{\lambda} = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} F_i$$

位置エネルギー potential 2次元場  
 $F_i = -\text{grad}_i V_i(r_i)$

従って 位置エネルギー potential 2次元場  
 $V = \sum_{i=1}^n V_i(r_i)$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i(r_i)$$

従って  $F_i = -\text{grad}_i V$

$$F_i = -\text{grad}_i V$$

従って

$$Q_{\lambda} = - \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\lambda}} \text{grad}_i V$$

$$= - \frac{\partial V}{\partial q_{\lambda}}$$

従って Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = - \frac{\partial V}{\partial q_\lambda}$$

の形になる。

また  $L = T - V$

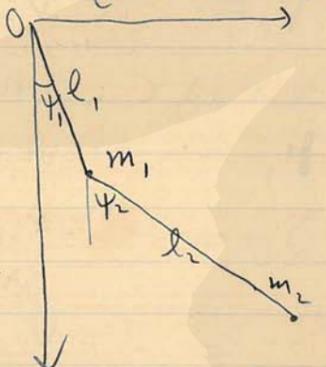
の式を代入すると、これは Kinetic Potential と呼ぶ。これは Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \quad \lambda = 1, 2, \dots, 3n$$

である。L は Lagrange 関数 (Lagrangian) と呼ぶ。

example. i) 振り子 (Double Pendulum)

① 長さ  $l_1$  の糸の  
 糸の先に  $m_1$  の球を  
 懸架する。また  $l_2$  の  
 糸の先に  $m_2$  の球を  
 懸架する。この糸の  
 長さは  $l_1$  と  $l_2$  である。  
 糸の長さは  $l_1$  と  $l_2$  である。  
 糸の長さは  $l_1$  と  $l_2$  である。



②  $m_1, m_2$  は同一の重力加速度  $g$  を受ける。この重力加速度

また  $m_1, m_2$  の質量が  $m_1, m_2$  の重力加速度  $g$  を受ける。

$x = r, y$  を座標とする。この座標系で、  
 $m_1, m_2$  の位置を  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  とする。一般に、  
 $\psi_1, \psi_2$  は角度である。この中  $\psi_1$  は  $\psi_2$  である。

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \psi_1 & x_2 &= l_1 \cos \psi_1 + l_2 \cos \psi_2 \\ y_1 &= l_1 \sin \psi_1 & y_2 &= l_1 \sin \psi_1 + l_2 \sin \psi_2 \end{aligned}$$

この場合  $\psi_1, \psi_2$  は第一、第二の座標  
 として取り扱う。

座標の位置関係として、  
 $x_1 \approx l_1, \quad x_2 \approx l_1 + l_2$   
 $y_1 \approx l_1 \psi_1, \quad y_2 \approx l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2$

この座標系での運動エネルギー  
 $\frac{1}{2} \left\{ m_1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + m_1 \left( \frac{dy_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + m_2 \left( \frac{dy_2}{dt} \right)^2 \right\}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ m_1 l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2^2 + m_2 (l_1 \dot{\psi}_1 + l_2 \dot{\psi}_2)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2$$

また 位置エネルギー  
 $V = m_1 g l_1 (1 - \cos \psi_1) + m_2 g \{ l_1 (1 - \cos \psi_1) + l_2 (1 - \cos \psi_2) \}$

$$\cong \frac{1}{2} m_1 g l_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \dot{\psi}_2^2$$

従って Lagrange の方程式

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \psi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \psi_2^2$$

(1) Lagrange の方程式

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_1} = (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\psi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi}_2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \psi_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_2} = m_2 l_2 \ddot{\psi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi}_1 + m_2 g l_2 \psi_2 = 0$$

これらの  $\psi_1, \psi_2$  に関する 2 階の微分方程式 (simultaneous differential equations of 2nd order)

これを  $\psi_1 = A_1 e^{i\omega t}, \psi_2 = A_2 e^{i\omega t}$

の形の解を方程式に代入して

$$A_1 \{ (m_1 + m_2) g l_1 - (m_1 + m_2) g l_1 \omega^2 \} - A_2 m_2 l_2 \omega^2 = 0$$

$$-A_1 m_2 l_1 \omega^2 + A_2 \{ m_2 g l_2 - m_2 l_2 \omega^2 \} = 0$$

これを  $A_1 = 0, A_2 = 0$  とすると、解を得るため  
 係数の行列式

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -l_1 \omega^2 & g - l_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

これを解く

これを

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g \omega^2 + (m_1 + m_2) g^2 = 0$$

これを

$$\omega^2 = \frac{g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)}{2m_1 l_1 l_2}$$

$$\pm \frac{g \sqrt{m_1 + m_2}}{2m_1 l_1 l_2} \sqrt{m_1 (l_1 - l_2)^2 + m_2^2 (l_1 + l_2)^2}$$





この形は 1) 運動エネルギー  
 2) 位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu$$

この形は 1) 運動エネルギー  
 2) 位置エネルギー

この形は 1) 運動エネルギー  
 2) 位置エネルギー

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(q, p)}{\partial q_\lambda} &= \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_\lambda} + \sum_{\mu} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_\lambda} \\ &= \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_\lambda} + \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_\lambda} \end{aligned}$$

ここで  $T(q, \dot{q})$  の  $\dot{q}_\lambda$  に関する 2 次式  
 Euler の定理より

$$\begin{aligned} 2T(q, \dot{q}) &= \sum_{\lambda} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_\lambda} \dot{q}_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} p_\lambda \dot{q}_\lambda = 2T(q, p) \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \frac{\partial T(q, p)}{\partial q_\lambda} = \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_\lambda}$$

$$\frac{\partial T(q, p)}{\partial q_\lambda} = - \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_\lambda}$$

この Lagrange の 2 次形式 (T) は

$$\frac{d}{dt} p_\lambda + \frac{\partial T(q, p)}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda \quad \lambda = 1, 2, \dots, k$$

これは Hamilton の 2 次形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(q, p)}{\partial p_\lambda} &= \sum_{\mu} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\lambda} \\ &= \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\lambda} \end{aligned}$$

$$2 \frac{\partial T(q, p)}{\partial p_\lambda} = p_\lambda \dot{q}_\lambda + \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\lambda}$$

$$\frac{\partial T(q, p)}{\partial p_\lambda} = \dot{q}_\lambda \quad (*)$$

これは Hamilton の 2 次形式

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} \quad \lambda=1, 2, \dots, k$$

この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である

$$Q_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial q_\lambda} \quad \lambda=1, 2, \dots, k$$

この系は位置エネルギー  $V$  の存在する場の中での運動方程式である

$$\dot{p}_\lambda + \frac{\partial}{\partial q_\lambda} (T(q, p) + V(q)) = 0$$

ここで

$$L = T - V$$

$$H(q, p) = T(q, p) + V(q) = \sum_\lambda \dot{p}_\lambda q_\lambda - L$$

この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である。この系は位置エネルギー  $V$  の存在する場の中での運動方程式である。Hamilton 変数 (Hamiltonian) と呼ばれる。この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である。

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}$$

$\lambda=1, 2, \dots, k$

ここで (\*) 式は

$$\dot{q}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}$$

ここで  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$

77

この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である。この系は位置エネルギー  $V$  の存在する場の中での運動方程式である。

Hamilton の正則運動方程式 (Canonical Equations of Motion) と呼ばれる。

ここで  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$  を正則変数 (Canonical variables) とし、この系は  $p_\lambda$  と  $q_\lambda$  とは互いに正則共役 (canonically conjugate) である。

正則方程式は

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \dot{p}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial t}$$

この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である。この系は位置エネルギー  $V$  の存在する場の中での運動方程式である。Hamilton 変数 (Hamiltonian) と呼ばれる。この系は  $\lambda=1, 2, \dots, k$  の自由系である。

正則変換の - 変換の条件

変換  $p_i \rightarrow p'_i, q_i \rightarrow q'_i$  は  $2k$  個  
 の変換変数  $z$  を用いて  $z = (z_1, \dots, z_{2k})$   
 正則変換式 or '変換条件' として

変換条件. これを正則変換条件とする.  
 一つの正則変換から他の正則変換  
 への変換を 正則変換 (Canonical  
 Transformation) とする:

すなわち  $p_i, p'_i, \dots, p'_k, q_i, q'_i, \dots, q'_k$   
 が新しい変換条件として,  $z$  変換正則変  
 換条件とする

$$\delta H'(p', q') = H(p, q)$$

つまり

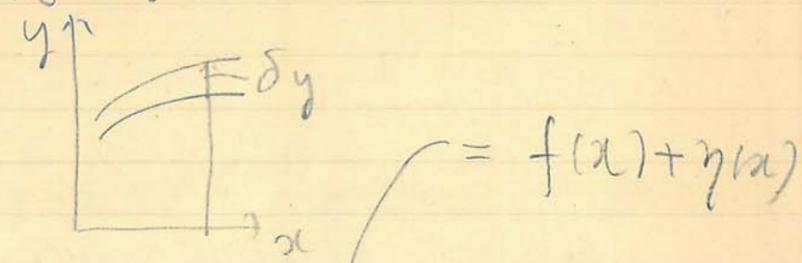
$$\dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \quad \dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}$$

変換条件を求めると,

$$\sum_m \left( \frac{\partial p'_i}{\partial p'_m} p'_m + \frac{\partial H'}{\partial q'_i} \frac{\partial p'_m}{\partial q'_i} + \frac{\partial H'}{\partial q'_m} \frac{\partial q'_i}{\partial q'_m} \right) = 0$$

$$\sum_m \left\{ \frac{\partial H}{\partial q'_m} \left( \frac{\partial q'_m}{\partial p'_i} - \frac{\partial p'_i}{\partial q'_m} \right) + \frac{\partial H}{\partial p'_i} \left( \frac{\partial p'_m}{\partial q'_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial p'_m} \right) \right\}$$

変換条件として



$y = f(x)$  の変換条件を求めると  
 変換条件  $y = g(x)$  とし

$y$  の  $\delta y = g(x) - f(x) = \eta(x)$ .  
 変換条件  $y = g(x)$  とし  $y$  の変分  
 (variation) とする.

$$\frac{d}{dx} \delta y = \frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\eta}{dx}$$

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \delta \left( \frac{df}{dx} \right)$$

すなわち  $\frac{df}{dx}$  は  $f \rightarrow f + \eta$  によって  
 $\frac{d(f+\eta)}{dx}$  と変換される.

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\delta y)$$
 2つの場合、 $\delta y$  と  $\delta x$  の関係から  
 5.  $\delta x = \delta y \cdot \frac{dx}{dy}$  の関係を利用  

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \delta \left( \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right)$$

$$= \frac{dx}{dt} \delta \left( \frac{dy}{dt} \right) - \left( \frac{dy}{dt} \right) \delta \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

$$= \frac{\delta \left( \frac{dy}{dt} \right)}{\frac{dx}{dt}} - \frac{\frac{dy}{dt}}{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \delta \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

$$= \frac{d}{dx}(\delta y) - \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx}(\delta x)$$

$$= \frac{d}{dx}(\delta y) - \frac{dy}{dx} \frac{d(\delta x)}{dx}$$

§14. Hamilton's Principle (Hamilton's Principle)  
 n個の粒子からなる系において、各粒子の  
 位置を  $m_1, m_2, \dots, m_n$  とし、 $i$  粒子の  
 力  $K_1, K_2, \dots, K_n$  とする。運動方程式

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = K_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

の両辺を  $\delta r_i$  で乗る

$$\sum_i m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \delta r_i = \sum_i K_i \delta r_i$$

ここで  $\delta r_i$  は仮想変位 (virtual displacement) とし、 $K_i$  は外力  
 として扱う。

$$\delta W = \sum_i K_i \delta r_i$$

ここで、 $\delta W$  は仮想仕事の原理より

$$\delta W = \sum_i m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \delta r_i$$

よって  $\frac{d}{dt} \left( \frac{d r_i}{dt} \delta r_i \right) = \frac{d r_i}{dt} \delta r_i + \frac{d r_i}{dt} \frac{d}{dt} (\delta r_i)$   
 となり、仮想変位の時間微分は  $\delta \dot{r}_i$  と表す。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr_i}{dt} \delta r_i \right) = \frac{d^2 r_i}{dt^2} \delta r_i + \frac{1}{2} \delta \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2$$

従って

$$\delta W = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left( \frac{dr_i}{dt} \delta r_i \right) - \sum_i \frac{1}{2} m_i \delta \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i v_i \delta r_i \right) - \delta \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

次に 運動エネルギー

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

従って

$$\delta W + \delta T = \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i \delta r_i$$

この式の両辺を  $t_0$  から  $t_1$  まで積分すると

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta T) dt = \left[ \sum_i m_i v_i \delta r_i \right]_{t_0}^{t_1}$$

このとき、 $t=t_0$  のとき  $v=0$ 、 $t=t_1$  のときは終点の位置が固定されているから、 $\delta r_i=0$  である。従って

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W+T) dt = 0$$

このときの Lagrangian は  $L = T - V$  である。従って、 $\delta W = -\delta V$  である。

従って

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0$$

これを Lagrange の原理と見做す。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

この Lagrange の原理は、 $t_0$  から  $t_1$  までの時間積分  $\int$  (time integral) を取ると、系の実際の経路は、この積分の極値 (extreme value) である。これを Hamilton の原理と見做す。この場合、 $L = T - V$  である。

この原理は

粒子系が外部の場を、次の如く変化する  
 と仮定する。

電磁場系が外部の電磁場

$E = T + V$   
 が一定の場を仮定して

粒子の運動方程式は、電場の経路積分  
 力の変化に伴って、電磁場も変化し、  
 従って粒子の軌道も変化する。

この場合、粒子の位置の経路積分は、  
 粒子の位置の経路積分は、  
 $t_0$  から  $t_1$  までの経路積分を  
 $t_0$  の値を  $0$  とする。従って

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \delta x - \frac{dx}{dt} \frac{d\delta t}{dt}$$

より、

$$\left( \frac{d}{dt} \delta x - \frac{dx}{dt} \delta\left(\frac{1}{dt}\right) \right)$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_i}{dt} \delta r_i \right) &= \frac{dx_i}{dt} \delta r_i + \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dt} \delta r_i \\ &= \frac{dx_i}{dt} \delta r_i + \frac{dx_i}{dt} \delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right) + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \frac{d\delta t}{dt} \\ &= \frac{dx_i}{dt} \delta r_i + \frac{1}{2} \delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \frac{d\delta t}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i \delta r_i - \delta \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &\quad - \frac{d}{dt} (\delta t) \cdot \sum_i m_i v_i^2 \end{aligned}$$

従って

$$\delta W + \delta T + 2T \cdot \frac{d\delta t}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i \delta r_i$$

これは  $T_0$  から  $t_1$  までの積分を

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W + 2T \frac{d\delta t}{dt}) dt = \left[ \sum_i m_i v_i \delta r_i \right]_{t_0}^{t_1}$$

境界条件として  $t_0$  から  $t_1$  まで  $\delta r_i = 0$

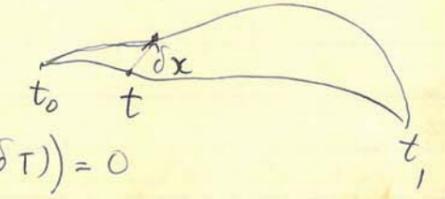
$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta T + 2T \frac{d\delta t}{dt}) dt = 0$$

$$\delta W = -\delta V = \delta T$$

従って

$$\int_{t_0}^{t_1} (2\delta T \cdot dt + 2T d(\delta t)) = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0$$



この

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T dt = A$$

作用 (action) とは、上記の経路の  
 経路の作用は他に比べて、他の経路  
 の経路の作用よりも 常に大か、或は  
 常に小か、(又は extreme value を取  
 る) 二つの中間の値を取らぬ) 通常の場合  
 最小の値を取る。故にこれを 最小作用の  
 原理 (Principle of Least Action) と  
 いう。

上記 Hamilton の原理から 高橋の Lagrange  
 の方程式を導くことが出来る。この逆も可能  
 である。

即ち

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_\lambda, \dot{q}_\lambda) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \frac{d}{dt} (\delta \dot{q}_\lambda) \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta q_\lambda \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) \delta q_\lambda \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) \right\} \delta q_\lambda dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta q_\lambda \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

$t_0, t_1$  において  $\delta q_\lambda = 0$  であるから  
 第一の項は  $\delta q_\lambda$  によって 0 になるから  
 他は 0

即ち 導く

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0$$

即ち Lagrange の方程式を導くことが出来る。







の条件を与える。  
 q の変換が t を explicit に含むならば, W は  
 t に無関係な。という。

$$K(Q, P) = H(q, p)$$

と置き,  
 従って新しい変数  $Q_\lambda, P_\lambda$  によって  
 正則方程式

$$\dot{Q}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda} \quad \dot{P}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial Q_\lambda}$$

が成り立つ。PQS 変換は正則変換である。  
 正則変換は一つの群を成るという。  
 ∴ 一つの正則変換の連続変換を繰り返して  
 正則方程式の方向に成るため、連続変換も  
 正則変換である。又恒等的な変換も  
 当然正則変換の一つである。

従って正則変換を繰り返して行くと必ず  
 元の系に帰る。正則方程式の成り立つ。PQS  
 二つの正則変換の積も又正則変換である。  
 如、上の図の如く、正則 W を t に無関係ならば

$$dW = \sum_\lambda \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} dq_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial W}{\partial Q_\lambda} dQ_\lambda$$

$$= \sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda - \sum_\lambda P_\lambda dQ_\lambda$$

PQS 正則変換について

$$\sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda - \sum_\lambda P_\lambda dQ_\lambda$$

は元々微分形式  
 PQS 空間 (phase space)

と置く。p, p', q, ... q', ... を座標とすると  
 2次元空間に一つの閉曲線 C を取る

$$\int_C \sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda$$

の保形性を示す。これは正則変換によって  
 不変 (invariant) である

∴  ~~$\int_C \sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda$~~  新座標  $P_1 \dots P_k, Q_1 \dots Q_k$   
 の空間に C' を取る

$$\int_{C'} \sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda - \int_{C'} \sum_\lambda P_\lambda dQ_\lambda$$

$$= \int_C W \sum_\lambda p_\lambda dq_\lambda - \sum_\lambda P_\lambda(q, p) dQ_\lambda(q, p)$$

$$= \int_C dW = 0$$

PQS 上の積分の積分形式 (Integral  
 正則変換について)

Invariant) である。

(48)の曲面

2次元の曲面 (two dimensional manifold) である、  
 座標  $u, v$  による変換  $x, y$  の変換行列は

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial (p_{\lambda}, q_{\lambda})}{\partial (u, v)} = \sum_{\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \\ \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

不変式 (invariant) である

変換行列  $W$  は  $q_{\lambda}, p_{\lambda}$  の変換行列である。  
 $p_{\lambda} = \frac{\partial W(q, p)}{\partial q_{\lambda}}$   $q_{\lambda} = \frac{\partial W(q, p)}{\partial p_{\lambda}}$

$$\sum_{\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \\ \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial q_{\lambda} \partial p_{\mu}} \frac{\partial p_{\mu}}{\partial u} \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} + \dots$$

$$\sum_{\mu} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\mu}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\mu}}{\partial u} \\ \frac{\partial p_{\mu}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\mu}}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial p_{\lambda} \partial q_{\mu}} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial q_{\mu}}{\partial u} + \dots$$

$$\therefore \sum_{\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \\ \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{\mu} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\mu}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\mu}}{\partial u} \\ \frac{\partial p_{\mu}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\mu}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

これは双一次変換式 (bilinear covariant) である。

この変換式は Lagrange の変換である。

$$= \sum_{\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \\ \frac{\partial W}{\partial p_{\lambda}} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial p_{\lambda}} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \end{vmatrix}$$

系を考慮して  
 同様にして  
 同様にして

$$\frac{\partial(P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k)}{\partial(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k)} = 1$$

これは正準変換の条件。  
 この変換の条件の表式  
 $\int \dots \int dp_1 dp_2 \dots dp_k dq_1 \dots dq_k$   
 が不変積分。不変式の形は表示する。

同様にして  
 $[u, v] = \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial v} \right)$

これは Lagrange の括弧式 (Lagrange bracket) と呼ぶ。  
 同様にして

$$[p_{\lambda}, p_{\mu}] = [q_{\lambda}, q_{\mu}] = 0$$

$$[q_{\lambda}, p_{\mu}] = \delta_{\lambda\mu} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, k$$

同様にして  
 これは正準変換の条件。この変換の条件の表式  
 $[P_{\lambda}, P_{\mu}] = [Q_{\lambda}, Q_{\mu}] = 0$

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial(p_{\lambda}, q_{\lambda})}{\partial(u, v)} du dv = \sum_{\lambda} (\delta p_{\lambda} \delta q_{\lambda} - \delta q_{\lambda} \delta p_{\lambda})$$

$$[Q_{\lambda}, P_{\mu}] = \delta_{\lambda\mu} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, k$$

これは正準変換の条件。  
 この変換の条件の表式

$$(*) \begin{cases} [P_{\lambda}, P_{\mu}] = \sum_{\nu} \left\{ \frac{\partial q_{\nu}}{\partial P_{\lambda}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial P_{\mu}} - \frac{\partial p_{\nu}}{\partial P_{\lambda}} \frac{\partial q_{\nu}}{\partial P_{\mu}} \right\} \\ [Q_{\lambda}, Q_{\mu}] = \sum_{\nu} \left\{ \frac{\partial q_{\nu}}{\partial Q_{\lambda}} \frac{\partial q_{\nu}}{\partial Q_{\mu}} - \frac{\partial p_{\nu}}{\partial Q_{\lambda}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial Q_{\mu}} \right\} \\ [Q_{\lambda}, P_{\mu}] = \sum_{\nu} \left\{ \frac{\partial q_{\nu}}{\partial Q_{\lambda}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial P_{\mu}} - \frac{\partial p_{\nu}}{\partial Q_{\lambda}} \frac{\partial q_{\nu}}{\partial P_{\mu}} \right\} \end{cases}$$

これは正準変換の条件。  
 この変換の条件の表式 W を用いて P, Q の変換を表す。

$$dW = \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial Q_{\lambda}} dQ_{\lambda} + \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial P_{\lambda}} dP_{\lambda}$$

$$\sum_{\lambda} p_{\lambda} \frac{dq_{\lambda}}{dt} = H = \sum_{\lambda} P_{\lambda} \frac{dQ_{\lambda}}{dt} - K + \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial Q_{\lambda}} \frac{dQ_{\lambda}}{dt} + \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial P_{\lambda}} \frac{dP_{\lambda}}{dt}$$

$$\sum_{\lambda} p_{\lambda} \left( \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial Q_{\lambda}} \frac{dQ_{\lambda}}{dt} + \frac{\partial q_{\lambda}}{\partial P_{\lambda}} \frac{dP_{\lambda}}{dt} \right) = H$$

$$= \sum_{\lambda} P_{\lambda} \frac{dQ_{\lambda}}{dt} - K + \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial Q_{\lambda}} \frac{dQ_{\lambda}}{dt} + \sum_{\lambda} \frac{\partial W}{\partial P_{\lambda}} \frac{dP_{\lambda}}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Q_\lambda} &= \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\lambda} - P_\lambda \\ \frac{\partial W}{\partial P_\lambda} &= \sum_{\mu} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial P_\lambda} \end{aligned} \right\} (1)$$

2nd. 1st. n  
 (\*) の系 = 式 n  

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu} \left( \sum p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\lambda} - P_\lambda \right) = \frac{\partial}{\partial Q_\lambda} \left( \sum p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial P_\nu} \right)$$

2nd  

$$\frac{\partial W}{\partial P_\mu \partial Q_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial Q_\lambda \partial P_\nu}$$

1st n 物理 L,  
 系 = 式 n  

$$\frac{\partial W}{\partial Q_\lambda \partial Q_\nu} = \frac{\partial W}{\partial Q_\nu \partial Q_\lambda}$$

系 = 式 n  

$$\frac{\partial W}{\partial P_\nu \partial P_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial P_\lambda \partial P_\nu}$$

n 物理 L. 2nd n  
 W(P, Q) の系  
 物理 L. 1st n  
 ~ 物理 L. 2nd n

Lagrange の Lagrangian 式と Poisson の Lagrangian 式  
 L

$$(u, v) = \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial q_\lambda} \frac{\partial v}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial u}{\partial p_\lambda} \frac{\partial v}{\partial q_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{\lambda} \frac{\partial(u, v)}{\partial(q_\lambda, p_\lambda)}$$

Poisson の Lagrangian 式 (Poisson Bracket) と Poisson 式

Poisson の Lagrangian 式 の Poisson 式  

$$\sum_{i=1}^{2n} (u_i, v_j) [u_i, u_k] = \delta_{jk}$$

Poisson の Lagrangian 式

Poisson の Lagrangian 式  
 Poisson の Lagrangian 式  

$$(\cdot) \sum_i (u_i, u_j) [u_i, u_k] = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial q_\lambda} \frac{\partial u_j}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial u_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial u_j}{\partial q_\lambda} \right)$$

$$\times \left( \frac{\partial q_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial p_\mu}{\partial u_k} - \frac{\partial p_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial q_\mu}{\partial u_k} \right)$$

$$= \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial u_j}{\partial p_\lambda} \frac{\partial p_\lambda}{\partial u_k} + \frac{\partial u_j}{\partial q_\lambda} \frac{\partial q_\lambda}{\partial u_k} \right) = \delta_{jk}$$

Poisson の Lagrangian 式 u<sub>1</sub> ... u<sub>2n</sub> の Poisson 式 P<sub>1</sub> ... P<sub>n</sub>

$Q_1, \dots, Q_k$  の場合  
 $[P_\lambda, P_\mu] = (Q_\lambda, Q_\mu) = 0$   
 $(Q_\lambda, P_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$

この系は  $p_1, \dots, p_k$  の場合の Poisson bracket の表現  
 として与えられる。

これを Poisson bracket の表現として  
 与えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_x \left( \frac{\partial u}{\partial q_\lambda} \frac{\partial v}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial u}{\partial p_\lambda} \frac{\partial v}{\partial q_\lambda} \right) \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \left( \frac{\partial u}{\partial q_\lambda} \frac{\partial v}{\partial p_\mu} + \frac{\partial u}{\partial p_\mu} \frac{\partial v}{\partial q_\lambda} \right) \\ & \times \left( \frac{\partial Q_\mu}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial P_\mu}{\partial p_\lambda} \right) - \left( \frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial P_\mu}{\partial q_\lambda} \right) \\ & \times \left( \frac{\partial Q_\lambda}{\partial q_\mu} + \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\mu} \right) \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \left( \frac{\partial u}{\partial q_\lambda} \frac{\partial v}{\partial p_\mu} - \frac{\partial u}{\partial p_\mu} \frac{\partial v}{\partial q_\lambda} \right) \end{aligned}$$

Poisson bracket の表現として  
 与えられる。

$(u, v) = -(v, u) \quad \text{and} \quad (u, u) = 0$

$(u, c_1 v + c_2 w) = c_1 (u, v) + c_2 (u, w)$   
 $(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0$   
 (Jacobi の恒等式)

$\frac{d}{dt} (u, v) = \left( \frac{du}{dt}, v \right) + \left( u, \frac{dv}{dt} \right)$

$(F, v) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(f_1, \dots, f_m)}{\partial f_i} (f_i, v)$

ここで  $F$  は  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k, t$  の関数として  
 $\frac{\partial F}{\partial q_\lambda} = (F, p_\lambda), \quad \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} = (q_\lambda, F) = -(F, q_\lambda)$

従って Poisson bracket の

$\frac{dp_\lambda}{dt} = (p_\lambda, H), \quad \frac{dq_\lambda}{dt} = (q_\lambda, H)$   
 $\lambda = 1, 2, \dots, k$

の表現形式として

ここで  $F$  は  $p, q, t$  の関数として  
 $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial q_\lambda} \frac{dq_\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} \frac{dp_\lambda}{dt} \right)$   
 $= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial q_\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} \frac{\partial H}{\partial q_\lambda} \right)$   
 $= \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H)$

正則変換の積分 of Canonical

§15.) Hamilton-Jacobi の方程式 Equations  
 (Hamilton-Jacobi Partial Differential Equation) Methods of Integration  
 $F$  は  $p, q$  の関数と仮定する。

$\frac{dF}{dt} = (F, H)$   
 従って  $(F, H) = 0$  の場合  $F$  は  
 $F$  は運動の定数 (Constant of Motion)  
 である。

$F(p, q) = \text{const.}$   
 は運動方程式の一つの積分である。  
 同様に  $(H, H) = 0$  である。  
 $H(p, q) = E$  はエネルギーの  
 i)  $H$  の  $p, q$  での関数と仮定して積分する  
 ii) 又  $H$  は  $q_\lambda$  を含み得る場合  $(p_\lambda, H) = -\frac{\partial H}{\partial q_\lambda} = 0$

従って  
 $p_\lambda = \alpha_\lambda$  (const)  
 は座標の積分である。  
 iii)  $p_\lambda, q_\lambda$  は  $H$  の中に  $F_\lambda(p_\lambda, q_\lambda)$  の形  
 で含まれる場合  
 $(H, F_\lambda)$   
 $(F_\lambda, H) = (F_\lambda, F_\lambda) \frac{\partial H}{\partial F_\lambda} = 0$

従って

$F_\lambda(p_\lambda, q_\lambda) = \alpha_\lambda$

$\alpha \rightarrow \alpha$  の積分である。

iv) For Jacobi の方程式  $u, y$   
 $((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0$   
 故に  $F, G$  の積分  $F, G$  は又積分である。

従って ~~変換~~ 高次元正則変換  $(p, q) \rightarrow$   
 $(P, Q)$  によって Hamiltonian  $H$  は  $P, -P_k$   
 の関数と仮定して  $(P, H) = 0$  とする

$P_\lambda = \alpha_\lambda \quad \lambda = 1, 2, \dots, k$   
 は  $k$  の定数であり、  
 $Q_\lambda = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda} = \beta_\lambda(P_1, \dots, P_k)$

も又定数である。

$Q_\lambda = \beta_\lambda t + \gamma_\lambda t + \beta_\lambda$

ここで  $\beta_\lambda$  は定数である。  
 $\beta_\lambda$  の定数と仮定して  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$  の  
 $t$  の関数として仮定すると、 $t$  の関数として  
 $2k$  個の定数定数  $\beta_\lambda, \gamma_\lambda$  の関数として仮定  
 される。

粒子の運動

ex. i) 質点の  $V(x, y, z)$  の potential  $\vec{r}$  による力の場の下の運動の場合  
 $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$L = T - V$

$\vec{r}$  変数  $x, y, z$  の変数の運動

$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$  etc.

従って  $T = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$

Hamilton 変数

$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z)$

変数は、

自由粒子の場合  $V=0$  のとき  $p_x = \alpha_x, p_y = \alpha_y, p_z = \alpha_z$  となる

$x = \frac{\alpha_x}{m} t + \beta_x$   
 $y = \frac{\alpha_y}{m} t + \beta_y$   
 $z = \frac{\alpha_z}{m} t + \beta_z$

即ち  $\vec{r}$  の変数の運動は直線運動

ii) 又中心力場の場合、力の中心を原点

と球座標  $(r, \theta, \phi)$  の場合、  
 運動エネルギー

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$

$\vec{r}$  変数  $(r, \theta, \phi)$  の変数の運動

$p_r = m \dot{r}, p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, p_\phi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$

$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}) + V(r)$

$H = \alpha_1$  の場合、

従って  $\phi$  の  $H$  の  $p_\phi$  に含まれる項のみから

$p_\phi = \alpha_2$

また  $\theta$  の場合、

$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} (\frac{p_\theta^2}{\sin^2 \theta} + \alpha_2^2)) + V(r)$

$\theta$  の  $p_\theta$  の  $H$  の  $p_\theta$  の項のみから

$p_\theta^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_3^2$

また  $r$  の場合、

~~従って~~

$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2}) + V(r)$

$r$  の場合、半径  $r$  の軌道の一次元の運動

$\int d\alpha_2 = r \sin \theta \cdot m r \sin \theta \dot{\phi}$   
 ~~$\int d\alpha_2 = r \sin \theta \cdot m r \dot{\phi}$~~   
 右と左  $\int d\alpha_2$  は  $\alpha_2$  の方の運動エネルギー成分。  

$$d\alpha_2 = r \cdot m \sqrt{r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2}$$

は運動エネルギーの大きさを示す、これの - を  
 -  $\dot{\alpha}_2$  分の  $\dot{\alpha}_2$  である。

$\phi, \alpha_2$  の  $(p_1, p_2)$  の変換  $\alpha_2$  である。  
 $(p_1, p_2) \rightarrow (p_1, p_2, \alpha_1, -\alpha_2)$  の  
 変換  $\alpha_1, \alpha_2$  である。

$$p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda}, \quad \text{or } p_\lambda = -\frac{\partial W}{\partial Q_\lambda}$$

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + H$$

$$Q_\lambda = \frac{\partial K}{\partial p_\lambda}, \quad P_\lambda = -\frac{\partial K}{\partial Q_\lambda}$$

変換  $\alpha_1, \alpha_2$  である。他  $\alpha_1$  は  

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + H$$

変換  $\alpha_1, \alpha_2$  である。  
 (  $W$  は  $t$  を explicit に含んでいない。  
 $K = H$  である。  $p_1, \dots, p_k$  と  $Q_1, \dots, Q_k$  を含んでいない  $W$   
 を取り除く場合  $\alpha_1, \alpha_2$  である。)

$K=0$  と  $\alpha_1$  の場合  $\alpha_2$  である。  $W$  である。

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + H \left( \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}, q_1, \dots, q_k \right)$$

$= 0$   
 この偏微分方程式を満足する  $W$  である。  
 これは Hamilton-Jacobi の方程式 (Hamilton-Jacobi's Partial Differential Equation) である。

この方程式の解として  

$$W = W(q_1, \dots, q_k, t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

変換  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  の変換  $k$  個の変換  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  を含んで  
 解が得られると  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  は  $W$  の偏微分方程式  
 の完全積分 (complete integral) である。  
 ( $W$  は  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  を含んで  $\alpha_{k+1}$  を  $t$  の関数  
 $k+1$  個の変換  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  を含む。)

$$p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda}, \quad \beta_\lambda = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_\lambda} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} p_\lambda \\ \beta_\lambda \end{matrix}} \right\} \lambda = 1, 2, \dots, k$$

2k個の座標を  $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$  とし、 $t$  から  $t_0$  までの経路  $\alpha$  を考える。この経路は  $q_\lambda(t)$  と  $p_\lambda(t)$  によって与えられる。この経路の作用  $W$  は

Hamilton の原理の汎関数  $W$  は

$$W = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t) dt$$

変分  $\delta W$  は

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta \dot{q}_\lambda \right) dt \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) \right) dt \cdot \delta q_\lambda \\ &\quad + \sum_\lambda \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta q_\lambda \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

経路  $\alpha$  の path 上の  $W$  の変分は

$$\delta W = p_\lambda \delta q_\lambda - p_\lambda^{(0)} \delta q_\lambda^{(0)}$$

経路  $\alpha$  は  $q_i^{(0)} = q_k^{(0)}$ ,  $q_i = q_k$  の変分  $\delta q_\lambda$  と

$$p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda}, \quad p_\lambda^{(0)} = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda^{(0)}}$$

$$\frac{dW}{dt} = L = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \left( \frac{\partial W}{\partial q}, q, t \right) = 0$$

これは  $W$  は Hamilton-Jacobi 方程式  $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t) = E$  を満たす。ここで  $q_i = q_k$  の変分  $\delta q_\lambda$  と  $p_\lambda = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda}$  と  $p_\lambda^{(0)} = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda^{(0)}}$  とは、 $W$  は Hamilton の主関数 (Principal function) である。

この Hamilton 変換  $W$  は  $W = S(q_i, q_k) - Et$  と表す。

$$W = S(q_i, q_k) - Et$$

$$H \left( \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial q_k}, q_i, q_k \right) = E$$

この式の  $E = \alpha_1, \dots$  への変換を、 $k=2$  の  
 $k-1$  個の変数  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$  を用いて表す  
 ことにする

$$S = S(q_1, \dots, q_k; \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

変分法を用いて

$$\beta_\lambda = \frac{\partial S}{\partial q_\lambda} \quad (= \frac{\partial W}{\partial q_\lambda}) \quad \lambda=1, 2, \dots, k$$

$$\beta_\lambda = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_\lambda} \quad (= -\frac{\partial W}{\partial \alpha_\lambda}) \quad \lambda=2, \dots, k$$

$$\beta_1 = -\frac{\partial S}{\partial E} + t \quad (= -\frac{\partial W}{\partial E})$$

この  $2k-1$  個の式 ~~と  $\beta_1$  の式~~ から  $\beta_1, \dots, \beta_k$  の  
 $q_1, \dots, q_k$  の関数として表すことができる。  
 式から軌道の方程式を得る。

$$\beta_1 = -\frac{\partial S}{\partial E} + t \quad (= -\frac{\partial W}{\partial E})$$

この式から変数と時間の関数を得る。

例、中心力場の場合、 $k=2$  の場合  
 この変数  $\alpha_2 = E$  と  $\alpha_1 = L$  と  $S$  の関数  
 の関数として表す。

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + V(r) = E$$

変分法

変分法を用いて、  
 $S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi)$   
 と置く。

$$r^2 \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2$$

$$= 2m(E - V) = 0$$

この式から、 $r, \theta, \phi$  の関数として  $S_r, S_\theta, S_\phi$  を  
 求めることができる。

$$r^2 \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - 2m(E - V) = \alpha_3$$

$$\left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 = \alpha_3^2$$

$$S_r = \int^r \sqrt{2m(E - V) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}} dr$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \alpha_2 \quad S_\phi = \alpha_2 \phi + \text{const}$$

$$\frac{dS_\theta}{d\theta} = \pm \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta}}$$

$$S_\theta = \pm \int^{\theta} \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta}} d\theta$$

従って

$$S = \pm \int \sqrt{2m(E-V) - \frac{a_3^2}{r^2}} dr \pm \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + a_2 \varphi + \text{const.}$$

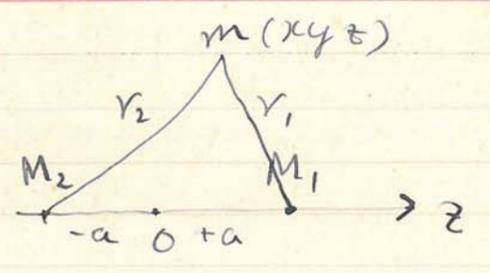
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} &= \beta_1 \\ -\frac{\partial S}{\partial a_2} &= \beta_2 \\ -\frac{\partial S}{\partial a_3} &= \beta_3 \end{aligned} \right\}$$

から運動方程式。  
 これは系の Newton の運動方程式を解く  
 ための標準的な方法 (参考)

例. = 中心問題

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$- \gamma m \left( \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right)$$



$$z = r \frac{r_1 + r_2}{a} = u, \quad \frac{r_1 - r_2}{a} = v$$

とL. 又 m と z 軸を常軌平面 or x-z 平面  
 とする時  $\varphi$  と  $r$  と

$$r_1 = \sqrt{(z-a)^2 + x^2 + y^2} = (z-a)^2 + r^2$$

$$r_2 = \sqrt{z^2 + y^2 + (z+a)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

これから

$$\left. \begin{aligned} z &= a u v \\ x &= a \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \cos \varphi \\ y &= a \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

とL.  $u, v, \varphi$  を楕円座標  
 (elliptic coordinates) とする。  
 $u, v$  は  $z$  軸上の点

$$v^2 = a^2 \left\{ (u^2 - v^2) \left( \frac{\dot{u}^2}{u^2 - 1} + \frac{\dot{v}^2}{1 - v^2} \right) + (u^2 - 1)(1 - v^2) \dot{\varphi}^2 \right\}$$

ここで 運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2ma^2} \left[ \frac{1}{u^2 - v^2} \left\{ (u^2 - 1)p_u^2 + (1 - v^2)p_v^2 \right\} + \frac{p_\varphi^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \right]$$

ここで 位置エネルギー  $V$  は

$$V = - \frac{2\gamma m}{a} \left\{ \frac{M_1}{u+v} + \frac{M_2}{u-v} \right\}$$

ここで

Hamilton-Jacobi の方程式は

$$\frac{1}{u^2 - v^2} \left\{ (u^2 - 1) \left( \frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + (1 - v^2) \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right\} + \frac{1}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \left( \frac{\mu_1}{u+v} + \frac{\mu_2}{u-v} \right) = 2ma^2 E$$

ここで  $\mu_1, \mu_2$

$$\mu_1 = 4\gamma a m^2 M_1, \quad \mu_2 = 4\gamma a m^2 M_2$$

∴  $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$  は定数  $\beta_3$  とする

$$S = \alpha_1 \varphi + S_1(u) + S_2(v)$$

ここで  $S_1, S_2$  は未知関数

$$\frac{dS_1}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \left\{ \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{u^2 - 1} + (\mu_1 + \mu_2)u + 2ma^2 E u^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dS_2}{dv} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left\{ -\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - v^2} + (\mu_1 + \mu_2)v + 2ma^2 E v^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ここで  $\alpha_1, \alpha_2$  は定数と仮定する  
 ∴  $S_1, S_2$  は定積分

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t + \beta_3$$

∴ 定数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

一般に  $S = \sum_r S_r(q_r)$  (\*)  
 と置いて高次元の力学系を降次元化して変換  
 の組の力学と見なす。  $\Rightarrow$  の力学の適用  
~~を妨げる~~

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r} = \frac{dS}{dq_r}$$

Hamilton 形式

$$H(F_1(p_1, q_1) \dots F_N(p_N, q_N))$$

この系の書き換え (\*\*) と見ると  
 H, T の式は

$$H(F_1(\frac{dS_1}{dq_1}, q_1) \dots F_N(\frac{dS_N}{dq_N}, q_N)) = E$$

と見ると  $F_1, \dots, F_N$  は  $S_1, \dots, S_N$  の  
 変換である。  $\Rightarrow$  の力学系を降次元化

$$F_\lambda(\frac{dS_\lambda}{dq_\lambda}, q_\lambda) = \alpha_\lambda$$

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = E$$

これを解いて  $S_\lambda(q_\lambda, \alpha_\lambda)$  の形を求めればよい。  
 である。

第 16 章 剛体の力学  
 Dynamics of a Rigid Body

§16. 剛体の運動 Motion of a Rigid Body

剛体とは連続した物質から成る。この物質の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。  
 剛体の各部分の位置と向きは、剛体の位置と向き  
 によって決まる。剛体の各部分の位置と向きは、  
 剛体の位置と向きによって決まる。剛体の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。  
 剛体の各部分の位置と向きは、剛体の位置と向き  
 によって決まる。剛体の各部分の位置と向きは、  
 剛体の位置と向きによって決まる。剛体の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。

剛体とは連続した物質から成る。この物質の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。  
 剛体の各部分の位置と向きは、剛体の位置と向き  
 によって決まる。剛体の各部分の位置と向きは、  
 剛体の位置と向きによって決まる。剛体の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。  
 剛体の各部分の位置と向きは、剛体の位置と向き  
 によって決まる。剛体の各部分の位置と向きは、  
 剛体の位置と向きによって決まる。剛体の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。  
 剛体の各部分の位置と向きは、剛体の位置と向き  
 によって決まる。剛体の各部分の位置と向きは、  
 剛体の位置と向きによって決まる。剛体の各部分の  
 位置と向きは、剛体の位置と向きによって決まる。

有

又剛体内の一点  $O'$  の  $O$  に関する位置ベクトルを  $R'$ ,  $O'$  に関する  $P$  の速度を  $V'$  とすると  

$$V = V' + \omega R'$$

この関係から  
 $P$  点の速度を  $v$  とすると  $O'$  点の速度を  $V'$  とすると、  

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV'}{dt} + \frac{dR'}{dt}$$

すなわち、  

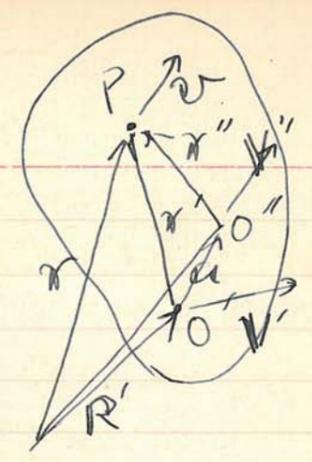
$$\frac{dv}{dt} = [\omega R']$$

これから  

$$v = V' + [\omega R']$$
  
 この関係からわかる。但し、 $\omega$  は  $O'$  を原点とし、剛体に関する座標系の元の座標系に関する回転の角速度である。

次に剛体内の他の一点  $O''$  を取り、これを  $P$  の位置ベクトル  $R''$ ,  $O''$  に関する速度  $V''$  をその速度、 $\omega''$  は  $O''$  を原点とした剛体に関する座標系の回転の角速度とすると、

$$v = V'' + [\omega'' R'']$$
  
 所て  $O''$  点の速度は  $a = R' - R''$  とすると、  
 $O''$  点の速度は  $v = V'' + [\omega'' a]$  と表される。



$$V'' = V' + [\omega' a]$$

したがって  

$$v = V' + [\omega' a] + [\omega' R'']$$

よって  

$$R' = a + R''$$

よって  

$$[\omega' R''] = [\omega'' R'']$$
  
 したがって剛体内の任意点  $P$  について成り立つ  

$$\omega' = \omega''$$

つまりこれは、  
 剛体に関する座標系の原点を  $O$  とし、  
 任意点  $P$  の位置ベクトル  $R$  とすると、  

$$v = V + [\omega R]$$
  
 となる。  
 剛体内の任意点  $O'$  を固定せよとすると、  

$$v = V' + [\omega R']$$
  
 となる。  
 剛体内の任意点  $O''$  を固定せよとすると、  

$$v = V'' + [\omega R'']$$
  
 となる。  
 したがって剛体に関する座標系は、  

$$v = V + [\omega R]$$
  
 と表される。

よって、  

$$v = V + [\omega R]$$
  
 と表される。  
 剛体内の任意点  $O'$  を固定せよとすると、  

$$v = V' + [\omega R']$$
  
 と表される。  
 剛体内の任意点  $O''$  を固定せよとすると、  

$$v = V'' + [\omega R'']$$
  
 と表される。

直線運動として運動する。

$V'$  が零でない場合でも、~~角速度~~  $\omega$  と直線運動

$$V' + [\omega a] \Rightarrow$$

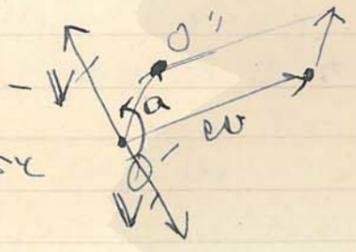
を満ちる距離  $a$  を見出し得る。

軸を  $O'$  から  $O''$  へ  $a$  の vector の  
 移動を  $O''$  とすると、 $V'' = 0$  となる。

従って、

$$v = [\omega r'']$$

即ちこの場合でも  $O''$  を中心として  
 純粋な回転運動となる。



また  $V'$  が  $\omega$  と直線運動の場合でも、 $\omega$  と  
 平行な成分  $V_1$  と  $\omega$  と垂直な成分  $V_2$  とに分け  
 られる。

$$V_2 = -[\omega a]$$

を満ちる距離  $a$  を探すと、 $O''$  の位置は

$$V'' = V' + [\omega a] = V' - V_2 = V_1$$

となる。

$$v = V' + [\omega r']$$

$$= V'' + [\omega r'']$$

となる。即ち、 $V''$  と  $\omega$  と平行運動となる。

P 点の螺旋運動 (screw motion) を  
 する。これ  $V' \omega \neq 0$  となる。これは  
 回転運動。

この場合、剛体の一般の運動は  
 並進運動 (translational motion) と回転運動  
 の合成と見られる。これを Charles 定理と  
 呼ぶ。これを Charles 定理と呼ぶ。

§17. 剛体の運動方程式

剛体中の任意点 P での微小体積  $\Delta v$  内の  
 質量  $\Delta M$  とし、 $\Delta v$  中の  
 密度  $\rho$  とする。P.P.S. 軸をとり

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta v} = \frac{dM}{dv} = \rho$$

この場合、密度  $\rho$  を P 点での密度  
 (density) と呼ぶ。すると剛体の質量  $M$  は

$$M = \iiint \rho dv$$

となる。但し、これは任意の微小体積  
 剛体の中心に、任意の点 P から剛体の  
 中心に向かう。

$$R = \frac{\iint p r dv}{M}$$

ここで定義する。  
 質量中心を  $C$  とし、 $C$  を原点とする座標系  $(x, y, z)$  の位置の密度を  $\rho$  とする。  
 $v = R + r'$

したがって

$$\iint p r dv = \iint p R dv + \iint p r' dv$$

次に  $\iint p r' dv = 0$   
 理由: 同様に  $\iint p r' dv = 0$  となる。  
 $C$  を原点とする座標系  $(x, y, z)$  の位置の密度を  $\rho$  とする。  
 $v = V + v'$   
 $v = V + [w r']$

同様に  $\iint p r' dv = 0$

$$P_D = \iint p v dv$$

$$= \iint p V dv + \iint p [w r'] dv$$

$$= M V + [w, \iint p r' dv]$$

同じく  $\iint p r' dv = 0$  の証明

次に  $P_D = M V$   
 同様に  $\iint p r' dv = 0$  の証明  
 $C$  を原点とする座標系  $(x, y, z)$  の位置の密度を  $\rho$  とする。  
 $v = V + v'$   
 $v = V + [w r']$

したがって

$$U = \iint p [r v] dv$$

$$= \iint [r v] dv = \dots$$

$$\frac{dU}{dt} = \iint p [r \frac{dv}{dt}] dv = \iint [r f] dv$$

したがって  $\iint p r' dv = 0$   
 $p [r v] = p [r V] + p [r [w r']]$   
 $= p [R V] + p [r' V] + p [R [w r']]$   
 $+ p [r' [w r']]$

したがって

$$U = \iint p dv [R V] + [\iint p r' dv, V]$$

$$+ [R, [w, \iint p r' dv]] + \iint p [r', v'] dv$$

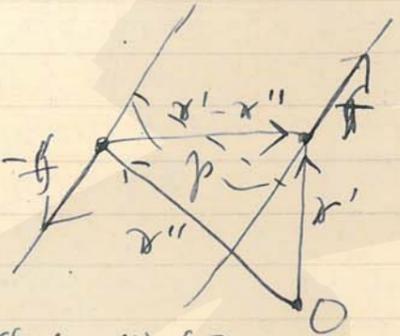
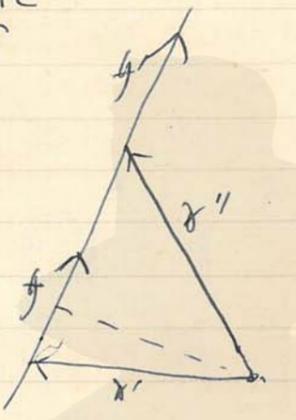
$$= M [R V] + \iint [r', v'] dv + U_c$$





2つの図形を比較して、同一作用面  
 への相対し、力の互に同形  
 あり。

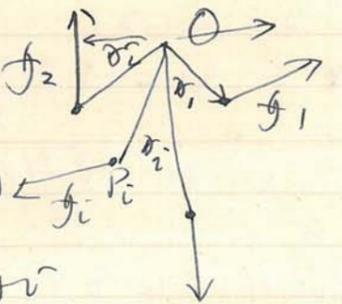
大いさか等しく、方向の反対で、  
 平行な作用面への力の  
 系を 偶力 (Couple) と  
 いう。これ等の二つの作用面  
 の互に平行で、これを  
 偶力平面を (偶力の平面  
 (plane of couple))  
 とする。任意の一点 O  
 から  $f$  及び  $-f$  の力の距  
 りの長さを  $r'$  と  $r''$  とし、  
 $r'$  と  $r''$  との差、力の距率  
 を  $p$  とする。



$$[r'f] - [r''f] = [(r' - r'')f]$$

これは O 点の位置に依らずに等しい。これを  
 偶力の距率 (Moment of Couple), その大  
 いさを  $p$  とし、方向は (右回りに上  
 向き) である。  $p$  を 偶力の腕 (arm) と  
 いう。

$P_1 \dots P_n$   
 一平面内の任意の点 O から各点  $P_1, P_2, \dots, P_n$   
 への距離を  $r_1, r_2, \dots, r_n$  とし、  
 それぞれの点  $P_i$  への力の加算  
 を  $f_1, f_2, \dots, f_n$  とする。



この代り O 点へ  $f_1, f_2, \dots, f_n$   
 の力の加算  $F$  を  $P_1, P_2, \dots, P_n$   
 への力の加算  $(-f_1, f_1), (-f_2, f_2), \dots, (-f_n, f_n)$   
 の力の加算  $N$  とする。

$$F = \sum_{i=1}^n f_i$$

$$N = \sum_{i=1}^n [r_i f_i]$$

力の加算  $N$  の力の加算  $N$  とする。

任意の点 O' へ  $f_1, f_2, \dots, f_n$  の力の加算  $F$  を  $O'$  点へ  
 の力の加算  $N'$  とする。  $N'$  は  $N$  と等しい。

$$N' = \sum_{i=1}^n [r_i - a, f_i]$$



§18. 慣性モーメント (Moment of Inertia)  
 系内  $v$  回転軸の角速度  $\omega$  に関する  
 角速度は

$$U_C = \iiint [r, \omega r] \rho dv$$

これは  $r$  の関数として  
 可変な

$$U_C = \iiint \{ \omega r^2 - x'(\omega x') \} \rho dv$$

と書き換える。  
 今  $C$  を原点とし  $L$  軸が  $z'$  軸と一致する  
 座標系で書く。

$$U_{Cz'} = \iiint \rho dv \{ \omega x' (x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(\omega x') \}$$

$$= \omega x' \iiint \rho (y'^2 + z'^2) dv - \omega y' \iiint \rho x' y' dv - \omega z' \iiint \rho x' z' dv \text{ etc.}$$

従って

$$t_{xx'} = \iiint \rho (y'^2 + z'^2) dv \text{ etc.}$$

$$t_{x'y'} = t_{y'x'} = - \iiint \rho x' y' dv \text{ etc.}$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} U_{Cx'} &= t_{x'x'} \omega x' + t_{x'y'} \omega y' + t_{x'z'} \omega z' \\ U_{Cy'} &= t_{y'x'} \omega x' + t_{y'y'} \omega y' + t_{y'z'} \omega z' \\ U_{Cz'} &= t_{z'x'} \omega x' + t_{z'y'} \omega y' + t_{z'z'} \omega z' \end{aligned} \right\}$$

これは  $\omega$  の直線ベクトル変換 (linear vector function) と見做す。これは、行列

$$(t) = \begin{pmatrix} t_{x'x'} & t_{x'y'} & t_{x'z'} \\ t_{y'x'} & t_{y'y'} & t_{y'z'} \\ t_{z'x'} & t_{z'y'} & t_{z'z'} \end{pmatrix}$$

は  $3 \times 3$  の行列を形成し、これは  $3$  の vector を他の vector に換える演算子 (operator) である。この行列は対称行列 (symmetrical operator) である。

(x, y, z) 上の関数  $U$  は他の座標系で表すと

$$\left. \begin{aligned} U_{Cx} &= t_{xx} \omega x + t_{xy} \omega y + t_{xz} \omega z \\ U_{Cy} &= t_{yx} \omega x + t_{yy} \omega y + t_{yz} \omega z \\ U_{Cz} &= t_{zx} \omega x + t_{zy} \omega y + t_{zz} \omega z \end{aligned} \right\}$$

とある。  
 2つの座標系, の間  

$$w_i' = \sum_j a_{ij} w_j \quad (i, j = x, y, z)$$

$$U_{qij} = \sum_{j,k} t_{ij} a_{jk} w_k \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow &= \sum_j a_{ij} U_{qj} \\ &= \sum_j a_{ij} t_{jkl} w_k \quad a_{il} \end{aligned}$$

この座標系から他の座標系への基底の基底の基底

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

の基底の基底の基底。  $(i, j) w_i = \sum_j a_{ji} w_j'$

$$t_{ik} w_k = t_{ij} a_{il} a_{jk} w_k$$

基底の基底の基底

$$t_{ik} = t_{ij} a_{il} a_{jk}$$

基底の基底の基底。  $A_i B_j$  と基底

(t) とある  
 基底の基底の基底

基底の基底, 基底の基底 Tensor と基底, 基底の基底 Tensor (Symmetrical Tensor) と基底.

(t) の基底の基底 Tensor と基底, 基底の基底の基底 中  $t_{xx}$  etc を基底の基底 (moment of inertia),  $t_{xy}$  etc を基底の基底 (product of inertia) と基底, 基底の基底の意味は,  $\text{sum of } t_{xx}$  の基底の基底の基底の基底の基底の基底の基底

基底の基底の基底

$$U_{ij} = (t) w$$

基底の基底の基底 と基底の基底の基底 (t) の基底の基底

$$r \cdot (t) r = \sum_{ij} t_{ij} x_i x_j$$

基底の基底の基底,  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , 基底の基底の基底

$$\sum_{ij} t_{ij} x_i x_j = 1$$

主慣性軸の軸  $O\xi, O\eta, O\zeta$  への座標変換  
 $I = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C$

任意の点  $P$  の座標  $(x, y, z)$  は二次曲面上にあり、この二次曲面の中心の主軸 (principal axes)  $\xi, \eta, \zeta$  を座標軸とすると、この二次曲面は

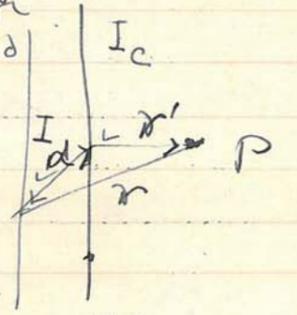
$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

と表すことができる。  
 $t_{\xi\xi} = A, t_{\eta\eta} = B, t_{\zeta\zeta} = C,$   
 $t_{\xi\eta} = t_{\eta\xi} = t_{\xi\zeta} = t_{\zeta\xi} = 0$

ここで  $A, B, C > 0$  のときは楕圓 (ellipsoid of inertia) の主軸 (Principal Axes of Inertia)  $\xi, \eta, \zeta$  と主慣性軸 (Principal Moments of Inertia)  $A, B, C$  との関係を示す。

上記の議論より、任意の点  $P$  への距離  $r$  と中心  $O$  への距離  $r'$  との関係は、  
 $r^2 = r'^2 - 2r'd + d^2$  (ただし  $d$  は  $O$  から  $P$  への距離)。  
 この場合、中心  $O$  を原点とした座標系 (Central Ellipsoid) とし、

任意の点  $P$  への距離  $r$  と中心  $O$  への距離  $r'$  との関係は、  
 $r^2 = r'^2 - 2r'd + d^2$  (ただし  $d$  は  $O$  から  $P$  への距離)。  
 この場合、中心  $O$  を原点とした座標系 (Central Ellipsoid) とし、



$$I_c = \iiint \rho \, dv \cdot r'^2$$

$$I = \iiint \rho \, dv \cdot r^2$$

$$= \iiint \rho \, dv (r'^2 - 2r'd + d^2)$$

$$= I_c - 2(d, \iiint \rho \, dv \cdot r')$$

$$+ M d^2$$

ここで、質量中心  $O$  の位置は  $\iiint \rho \, dv \cdot r' = 0$

$$I = I_c + M d^2$$

例. 半径  $\rho$  の球の中心を原点とする座標系で、

その質量  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

の中心を原点とする座標系で、

その中心を原点とする座標系で、

$$I_x = \iiint \rho (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta \text{ と置くと}$$

$$I_x = \rho abc^3 \iiint \eta^2 d\xi d\eta d\zeta + \rho abc^3 \iiint \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta$$

とあり、極座標系の変換式  $(\xi, \eta, \zeta)$  を用いて

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\iiint \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta = \iiint \eta^2 d\xi d\eta d\zeta = \iiint \xi^2 d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{1}{3} \iiint r^2 dr \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$I_x = \rho abc (b^2 + c^2) \times \frac{4\pi}{15} \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta$$

ここで  $M =$

$$M = \iiint \rho dx dy dz = \frac{4\pi}{3} \rho abc$$

$$I_x = \frac{1}{5} (b^2 + c^2) M, \text{ etc.}$$

§19. Euler's 運動方程式 (Euler's Equations of Motion)

$$\frac{dU_c}{dt} = \iiint [\rho' f] dv$$

\* 各部分の運動を、その部分の慣性モーメントの中心の座標  $x, y, z$  を用いて表す。

$$= \rho A \frac{dw_x}{dt} = \text{慣性モーメント}$$

$$(t) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

つまり、

$$U_c = (t) \omega$$

$$U_{cx} = A \omega_x, U_{cy} = B \omega_y, U_{cz} = C \omega_z$$

つまり、各部分の運動方程式は

$$A \frac{d\omega_x}{dt} = N_x$$

$$B \frac{d\omega_y}{dt} = N_y$$

$$C \frac{d\omega_z}{dt} = N_z$$

つまり、

各部分の慣性モーメントが異なると、軸と軸との間の角速度の力が異なることになる。この運動方程式



U のための方程式

$$\begin{aligned}
 U_{cx} &= Aw_x, & U_{cy} &= Bw_y, & U_{cz} &= Cw_z \\
 A \frac{dw_x}{dt} - (B-C)w_yw_z &= \iiint dv (y f_z - z f_y) \\
 B \frac{dw_y}{dt} - (C-A)w_zw_x &= \iiint dv (z f_x - x f_z) \\
 C \frac{dw_z}{dt} - (A-B)w_xw_y &= \iiint dv (x f_y - y f_x)
 \end{aligned}$$

回転の角速度  $\omega$  は Euler の回転角速度  
 $\hat{A}$  と  $\hat{B}$ ; 二の式 ~~を~~  $U_c$  と  $U_r$ ; - 項の

角速度の回転の運動のエネルギー

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho v^2 dv$$

$v$  は  $v = V + [\omega r']$ ,  $V$  は 剛体の運動の速度  
 $\omega$  は 角速度,  $\rho$  は 密度,  $r'$  は 位置ベクトル

$$\begin{aligned}
 v &= V + [\omega r'] \\
 T &= \frac{1}{2} \iiint \rho \{ V + [\omega r'] \}^2 dv \\
 &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} V \cdot [\omega \iiint \rho r' dv] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \iiint \rho [\omega r']^2 dv
 \end{aligned}$$

$$\iiint \rho r' dv = 0$$

したがって  $T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \iiint \rho [\omega r']^2 dv = T_c + T_r$

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \iiint \rho [\omega r']^2 dv = T_c + T_r$$

角速度  $\omega$  の場合,  $M$  は 剛体の質量  
 $T_c$  は 剛体の運動のエネルギー,  $T_r$  は 剛体の回転運動のエネルギー

$$\begin{aligned}
 [\omega r']^2 &= \omega^2 r'^2 \sin^2(\omega \hat{r}') \\
 &= \omega^2 r'^2 - \omega^2 r'_{\parallel} r'_{\parallel} = \omega^2 r'^2 - (\omega \cdot r')^2 \\
 &= \omega \cdot [r' [\omega r']]
 \end{aligned}$$

したがって  $T_r = \frac{1}{2} \iiint \rho \omega \cdot [r' [\omega r']] dv$

$$\begin{aligned}
 T_r &= \frac{1}{2} \iiint \rho \omega \cdot [r' [\omega r']] dv \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \iiint \rho [r' [\omega r']] dv \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot L_c
 \end{aligned}$$

したがって  $T_r$  は  $L_c$  の  $\omega$  による



剛体、水平軸を固定せしめ、  
 重力場にて動く場合の運動  
 方程式は

$$I \ddot{\varphi} = -Mgh \sin \varphi$$

2点への軸。但し、 $h$  は軸  
 から重心までの距離である。  
 これを単振り子の運動方程式と  
 比較すると

$$\frac{I}{Mh} = l$$

—の運動長さを

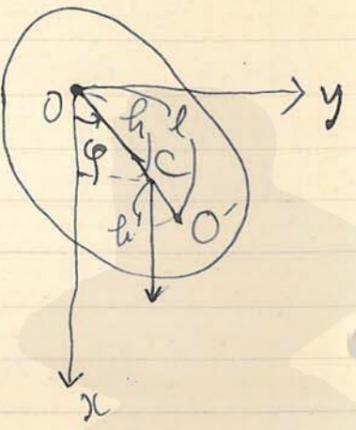
この長さの単振り子の場合と同様に、これを  
 相当単振り子の長さ (length of the equivalent  
 simple pendulum) とし、  
 重心から水平軸までの距離を  $h$  とし、  
 $O$  とし、 $OC$  を保る

$$OO' = l$$

この場合を満足する  $O'$  点を求め、 $O'$  を  
 水平軸の振り子の懸架点とすれば

$$I' = I_0 + MCO'^2 = I_0 + Mh'^2$$

2点への軸。但し  $I_0$  は重心  $C$  を通る水平



軸の振り子の運動方程式.

—万

$$I = I_0 + Mh^2$$

$$I' = I - Mh^2 + M(l-h)^2$$

$$\frac{I'}{h'} = \frac{I - Mh^2 + M(l-h)^2}{l-h}$$

$$= \frac{I - Mh^2 + M(\frac{I}{Mh} - h)^2}{\frac{I}{Mh} - h}$$

$$= Mh + M(\frac{I}{Mh} - h) = \frac{I}{h}$$

即ち  $O'$  をこの水平軸を固定せしめ、  
 相当単振り子の長さを  $l$  とす。

$O$  を固定点の場合、これを centre of suspension,  
 $O'$  を振動中心 (centre of oscillation) とす。

即ち  $O'$  を振動中心とする  $O$  の振動中心  
 となる。この条件を満足する  $O'$  の位置を  
 振り子の可逆点 (reversible pendulum)

とす。この点  $O'$  の距離  $l$  を求め、この  
 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  として、振り子の加減  $g$  の値を



決定した。これは、Katerの可逆振り子 (reversible pendulum) と呼ぶ。

{ 21. 固定距離の振り子の運動。  
 振り子内の一振り子固定距離の場合。この振り子と Euler の方程式を解くことができる。固定距離の場合。

a) 固定距離の場合  $\omega$  が 0 の場合。Euler の方程式は

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dw_x}{dt} &= (B-C) w_y w_z \\ B \frac{dw_y}{dt} &= (C-A) w_z w_x \\ C \frac{dw_z}{dt} &= (A-B) w_x w_y \end{aligned} \right\}$$

この系は  $w_x, w_y, w_z$  を使って表す。  
 $A w_x \frac{dw_x}{dt} + B w_y \frac{dw_y}{dt} + C w_z \frac{dw_z}{dt} = 0$   
 $2T = A w_x^2 + B w_y^2 + C w_z^2 = \text{const.}$   
 これは、振り子のエネルギー保存則を示している。

$T = \frac{1}{2} \frac{dU}{dt} = 0$  であるから、この系はエネルギー保存則を示している。振り子のエネルギーは、振り子の運動エネルギーと振り子の重力エネルギーの和である。

振り子の運動方程式は  $A w_x, B w_y, C w_z$  を使って表す。  
 $A w_x \frac{dw_x}{dt} + B w_y \frac{dw_y}{dt} + C w_z \frac{dw_z}{dt} = 0$

また、振り子のエネルギー保存則は  $U^2 = A w_x^2 + B w_y^2 + C w_z^2 = \text{const.}$

振り子の運動方程式を  $U$  を使って表すことができる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{w_x^2}{w^2} = \frac{BC}{(A-B)(A-C)} (w^2 - \alpha) \\ \beta &= \frac{w_y^2}{w^2} = \frac{CA}{(B-C)(A-B)} \frac{(w^2 - \alpha)}{\beta - w^2} \\ \gamma &= \frac{w_z^2}{w^2} = \frac{AB}{(C-A)(C-B)} (w^2 - \alpha) \end{aligned}$$

これより、振り子の固有周期  $\alpha, \beta, \gamma$  は、振り子の長さ  $L$  と振り子の質量  $M$  を使って表すことができる。

$$\alpha = \left( \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) 2LT - \frac{L^2}{BC}$$

$$\beta = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{A} \right) 2LT - \frac{L^2}{CA}$$

$$\gamma = \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) 2LT - \frac{L^2}{AB}$$

- Eulerの方程式から

$$w_x \frac{dw_x}{dt} + w_y \frac{dw_y}{dt} + w_z \frac{dw_z}{dt}$$

$$= \left( \frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C} \right) w_x w_y w_z$$

よ  $A > B > C$  と仮定し、

$$\frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} = \pm \sqrt{(w^2 - \alpha)(\beta - w^2)(w^2 - \gamma)}$$

ここで  $t=0$  で  $w^2 = w_0^2$  と仮定し

$$2t = \pm \int_{w_0^2}^{w^2} \frac{dw^2}{\sqrt{(w^2 - \alpha)(\beta - w^2)(w^2 - \gamma)}} \quad (*)$$

よって、 $A, B, C, T, U$  の他  
 が必要で、 $w^2$  の関数として  
 仮定し、 $w_x^2, w_y^2, w_z^2$  の  
 時間的変化をわかった。

この  
 (3) 項の  $w$  の vector として  
 周知の  $w$  vector の方向に  $w$  の  
 方向性標同線と交わる点を  $P$  とし  
 Point の方向を  $w$  とし、その場  
 の方向性を示す。

0 の方向  
 標同線と交わる点  $P$  の座標  
 $(\xi, \eta, \zeta)$  とすると、  
 $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$

ここで、  
 $P$  の座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  を  
 $\xi = \frac{w_x}{w} \rho, \eta = \frac{w_y}{w} \rho, \zeta = \frac{w_z}{w} \rho$

とすると、  
 $\frac{\rho^2}{w^2} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) = 1$

よって  $\rho = \frac{w}{\sqrt{AT}}$

この  $\rho$  は  $w$  の方向に  $w$  の  
 方向性標同線と交わる点  $P$  の  
 座標  $(x, y, z)$  の座標として  
 $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$

よって  $\frac{\rho}{w} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) = 1$

PPS  $U_x x + U_y y + U_z z = \sqrt{2T}$   
 この平面の法線の方向が 速度ベクトル  $\vec{U}$  の方向と一致することを示す。

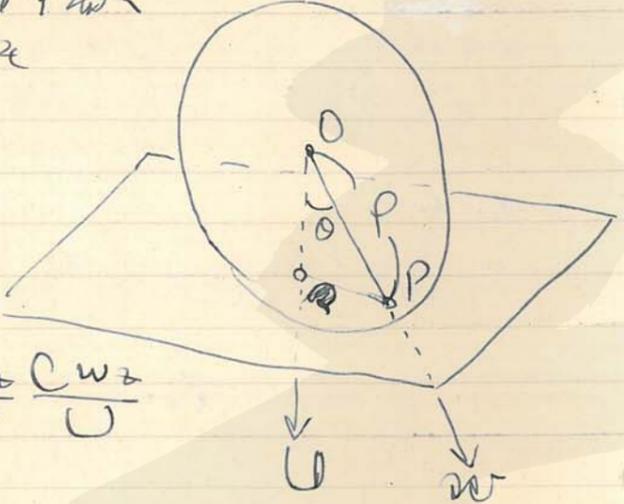
$z=0$  の平面、  
 法線の座標の長さを  $h$  とすると、

$$h = \rho \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{w_x}{w} \cdot \frac{A w_x}{U}$$

$$+ \frac{w_y}{w} \cdot \frac{B w_y}{U} + \frac{w_z}{w} \cdot \frac{C w_z}{U}$$

$$= \frac{2T}{wU}$$



従って

$$h = \frac{\rho}{w} \cdot \frac{2T}{U} = \frac{\sqrt{2T}}{U} = \cos \theta$$

PPS  $\theta$  から平面の法線は一意的に決まる。  
 (これは  $\vec{U}$  の方向は空間の任意の方向、  
 2次元平面も空間の任意の位置にあり得る、これは  
 不変平面 (invariable plane) と呼ぶ。

各座標軸  $OP$  の座標を  $\xi, \eta, \zeta$  とする

この平面の法線の方向は  $\vec{U}$  の方向と一致することを示す。  
 $OP$  の長さの比は  $A, B, C$  とする

法線  $P$  の座標を  $\xi, \eta, \zeta$  とすると、この方向は  $\vec{U}$  の方向と一致することを示す。  
 polhode と呼ぶ。この方向は  $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = \frac{U^2}{2T} = \lambda$$

この二つの楕円の交りの曲線として知られる。  
 (又不変平面とある  $P$  の軌跡は polhode と呼ぶ。)

この  $\xi, \eta, \zeta$  の軌跡は  $A > B > C$  の場合、  
 楕円の軌跡となる。軌跡は  $\xi, \eta, \zeta$  の軌跡として知られる。

$$B(A-B)\eta^2 + C(A-C)\zeta^2 = A - \lambda$$

$$C(B-C)\zeta^2 - A(A-B)\xi^2 = B - \lambda$$

$$A(A-C)\xi^2 + B(B-C)\eta^2 = \lambda - C$$

この軌跡は楕円、双曲線、特異点となる。従って

$$A \geq \lambda \geq C$$

$$2AT \geq U^2 \geq 2CT$$









©2022 YHAL, YITP, Kyoto University  
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$\beta = \frac{Cw_z \cos \theta}{A} \quad \alpha = \beta \frac{l}{A} \frac{(AC - U_{z'}^2)}{2Mgl} \quad \lambda = \frac{2Mgl}{A} \quad (w_z^2 \gg \frac{AMgl}{2C^2})$$

第三式から

$$Cw_z = U_z = \text{const.}$$

又

$$A(w_x \frac{dw_x}{dt} + w_y \frac{dw_y}{dt}) = Mgl \sin \theta \times (w_x \cos \varphi - w_y \sin \varphi)$$

また  $v = Mgl \sin \theta \cdot \dot{\theta}$

また

$$A(w_x^2 + w_y^2) = -2Mgl \cos \theta + C \text{const.}$$

C: 定数.

また

$$w_x^2 + w_y^2 = \alpha - \lambda \cos \theta$$

また  $\alpha = \frac{2C}{A} \quad \lambda = \frac{2Mgl}{A}$

運動のエネルギーは  $Oz'$  の方向に正負なし.

$$U_{z'} = \frac{1}{2} A v^2 = \text{const.}$$

また

$$A \sin \theta (w_x \sin \varphi + w_y \cos \varphi) + Cw_z \cos \theta = U_{z'} = \text{const.}$$

また

$$\beta = \frac{U_{z'}}{A}, \quad \mu = \frac{U_z}{A}$$

$$-2\zeta(\alpha - \lambda\zeta) - \lambda(1 - \zeta^2) + 2\mu(\beta - \mu\zeta) = 3\lambda\zeta^2 - 2(\alpha + \mu^2)\zeta + 2\mu\beta - \lambda$$

$$\zeta = \frac{(\alpha + \mu^2) \pm \sqrt{(\alpha + \mu^2)^2 - 3\lambda(2\mu\beta - \lambda)}}{3\lambda}$$

また  $\sin \theta (w_x \sin \varphi + w_y \cos \varphi) = \beta - \mu \cos \theta$

また  $w_x, w_y$  の方向  $\theta, \psi, \varphi$  を用いて

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \alpha - \lambda \cos \theta$$

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta = \beta - \mu \cos \theta$$

また  $\zeta$  から  $\dot{\psi}$  を消去すると

$$(\beta - \mu \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = (\alpha - \lambda \cos \theta)^2 \sin^2 \theta$$

$\cos \theta = \zeta$

$$\dot{\zeta}^2 = (1 - \zeta^2)(\alpha - \lambda\zeta) - (\beta - \mu\zeta)^2$$

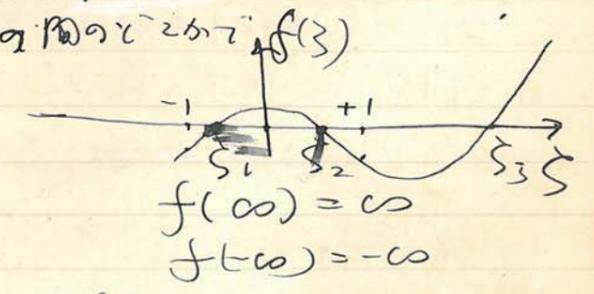
$$= f(\zeta) = \lambda(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)$$

$\zeta$  は 5 桁の下端から 3 桁の左の 0 を  $Oz'$  軸の方向に正負なし.

また  $-1 \leq \zeta \leq 1$  の間の  $\zeta$  に対して  $f(\zeta) \geq 0$

$f(1) \leq 0$   
 $f(-1) < 0$   
 $f(\infty) = \infty$   
 $f(-\infty) = -\infty$

また  $f(\zeta)$  の図の如く  $\zeta$  は



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University  
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念史料室

$$\alpha(1-\zeta^4) - (\rho - \mu\zeta)^2 = -\left\{ \frac{\rho\mu \pm \sqrt{\rho^2\mu^2 + (\alpha - \rho^2)(\alpha + \mu^2)}}{\alpha + \mu^2} \right\}^2$$

$$\zeta = \frac{\rho\mu \pm \sqrt{\rho^2\mu^2 + (\alpha - \rho^2)(\alpha + \mu^2)}}{\alpha + \mu^2}$$

$\alpha \ll \beta, \mu \leq \zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$

PPS  $f(\zeta)$  の正の根  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$   
 を求め、  
 $-1 < \zeta_1 < \zeta_2 < +1 < \zeta_3$

の範囲にある。  $\zeta^2 \leq 1$  のとき  $f(\zeta) \geq 0$   
 の条件は  $\rho \mu \geq \sqrt{\rho^2\mu^2 + (\alpha - \rho^2)(\alpha + \mu^2)}$  のとき

の範囲にある。  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$   
 の範囲にある。  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$

i)  $\zeta_1 = \zeta_2$  の場合  
 $\theta = \text{const.}$  PPS.  $\cos\theta = \zeta_1$   
 のとき  $\dot{\psi} = \frac{\rho - \mu\zeta_1}{1 - \zeta_1^2} = \text{const.}$

PPS 軌道の範囲は  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$  の範囲である。  
 軌道は  $\zeta_1$  から  $\zeta_2$  まで移動し、  
 再び  $\zeta_1$  まで戻ってくる。  $\zeta_1$  のとき  $\dot{\psi} = \text{const.}$   
 規則的歳差 (regular precession)  
 のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$  のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$

ii)  $\zeta_1 \neq \zeta_2$  の場合  
 $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = f(\zeta) = \lambda(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)$   
 $t = 0$  のとき  $\zeta = \zeta_0$  (PPS  $\theta = \theta_0$ )  
 $t = \pm \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\lambda(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)}}$

PPS  $\omega_z$  の値が大きいとき、 $\omega_x, \omega_y$  の値が  
 小さい場合  
 $\mu = \frac{Uz}{A}, \beta = \frac{Uz'}{A}$

のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$

$$\alpha = \frac{C}{A}, \lambda = \frac{2Mgl}{A}$$

のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$   
 (PPS  $f(\zeta)$  の式から  $\zeta^2$  の係数を  
 求めると)

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \frac{\alpha + \mu^2}{\lambda}$$

のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$   
 のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$   
 のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$

PPS  $\zeta$  の値が大きいとき

$$f(\zeta) \approx -(\rho - \mu\zeta)^2$$

このとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$   
 のとき  $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx \frac{\beta}{\mu}$

$$\mu^2 \gg \lambda$$

$$\left(\frac{Cw_2}{A}\right) \gg \frac{2MgR}{A}$$

$$\left(\frac{Cw_2}{A}\right) \gg \frac{c}{A}$$

1) の条件が成り立つ場合  
 1)

ii)  $\zeta_1 \neq \zeta_2$   

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \lambda(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)$$

$t=0$   $\zeta = \zeta_0$  ( $\theta = \theta_0$ )  $\cos\theta_0 = \zeta_0$   
 $\zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2$

$$t = \pm \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\lambda(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)}}$$

$$\zeta_2 + (\zeta_1 + \zeta_2) \alpha$$

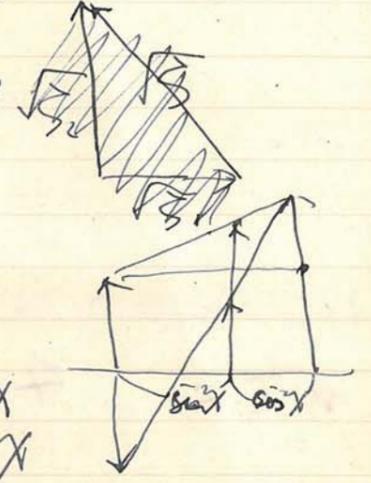
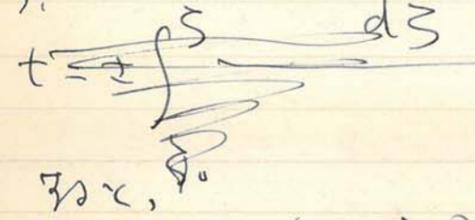
$$\zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) \sin^2 \chi$$

$$\zeta = \zeta_1 \cos^2 \chi + \zeta_2 \sin^2 \chi$$

$$\zeta_1 < \zeta_2$$

$$\chi = 0 \text{ or } \frac{\pi}{2}$$

$$\zeta = \zeta_1 \text{ or } \zeta_2$$



$$\zeta - \zeta_1 = (\zeta_2 - \zeta_1) \sin^2 \chi$$

$$\zeta_2 - \zeta = (\zeta_2 - \zeta_1) \cos^2 \chi$$

$$\zeta_3 - \zeta = (\zeta_3 - \zeta_1) - (\zeta_2 - \zeta_1) \sin^2 \chi$$

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_1} = k^2 < 1$$

$$\zeta_3 - \zeta = (\zeta_3 - \zeta_1)(1 - k^2 \sin^2 \chi)$$

$$d\zeta = 2(\zeta_2 - \zeta_1) \sin \chi \cos \chi d\chi$$

$t = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda(\zeta_3 - \zeta_1)}} \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}$



従って

$$\chi = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda(\zeta_3 - \zeta_1)}}{2} \tau$$

PPS

$$\cos \theta = \zeta = \zeta_1 \cos^2(n\tau) + \zeta_2 \sin^2(n\tau)$$

$$n = \frac{\sqrt{\lambda(\zeta_3 - \zeta_1)}}{2}$$

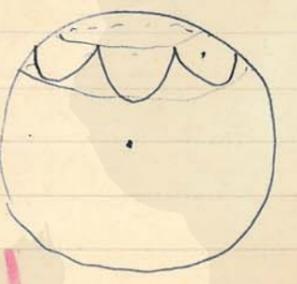
PPS 歳差の軸の比を  $\chi$  とする

$$\tau = \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{\lambda(\zeta_3 - \zeta_1)}} = \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}$$

$$= \frac{4K(k)}{\sqrt{\lambda(\zeta_3 - \zeta_1)}}$$

この周期は  $\tau$  である。  $\cos \theta_1 = \zeta_1$ ,  $\cos \theta_2 = \zeta_2$  の間を上下に振動する。これを歳差 (nutatation) と呼ぶ。

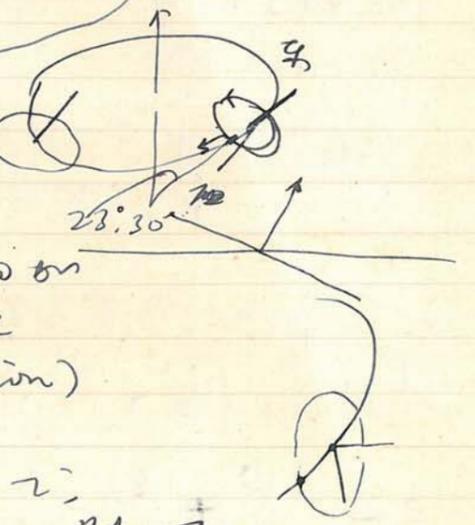
地球の軸の傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。又、その傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。



地球の軸の傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。又、その傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。

地球の軸の傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。又、その傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。

これは逆歳差 (retrograde precession) と呼ぶ。地球の軸の傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。又、その傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。



この周期は 26,000 年である。このため、地球の軸の傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。又、その傾きの揺らぎは、その軸の長さも変化する。

$$\frac{2A(\beta - \mu \cos \theta)}{\sin^3 \theta} \quad (\beta + \mu) \cos \theta$$

d) 繩索の運動の安定性。  
 繩索の軸を垂直に吊る。T: の糸の  
 2つの W 間の角を  $\psi$  とし、この場合、  
 糸の長さは  $2l$  である。糸の中心を  $\theta$  とし、  
 $\psi = 0$  とし、 $\dot{\psi} = 0$  とし、 $\dot{\theta} = 0$  とし、  
 この場合、

$$A \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) = Mg l \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(\beta - \mu \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

糸の長さを  $2l$  とし、

$$\frac{1}{2} A \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\theta}^2 + \frac{(\beta - \mu \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right\} = Mg l \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$A \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{2A \cos \theta \cdot (\beta - \mu \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} + \frac{2A(\beta - \mu \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

$$= Mg l \sin \theta$$

$$A \ddot{\theta} = Mg l \frac{\sin \theta}{\sin^3 \theta} + \frac{2A(\beta - \mu \cos \theta)}{\sin^3 \theta} \cdot (\beta \cos \theta - \mu)$$

$$\mu = \frac{c}{A} \cdot w \quad \beta = \frac{U^2}{A}$$

at=0  $\theta = \theta_0$   $\dot{\psi} = 0$  である。  
 $\sin^2 \theta_0 = \beta = \mu \cos \theta_0$

$$A \ddot{\theta} = Mg l \frac{\sin \theta}{\sin^3 \theta} + \frac{2A \mu^2}{\sin^3 \theta}$$

$$\left( \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta_0 \cos \theta - 1} \right)$$

$\theta \ll 1$  の場合

$$A \ddot{\theta} = \left\{ \theta \left[ \frac{Mg l}{\sin^3 \theta} + \frac{2A \mu^2}{\theta^3} \left( \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0^2}{2} \right) \left( \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta_0^2}{2} \right) \right] \right\}$$

$$= - \left( \frac{2A \mu^2}{4} - Mg l \right) \theta$$

$$- \frac{A \mu^2}{4} \frac{\theta_0^4}{\theta^3}$$

$$\therefore A \ddot{\theta} = - \left( \frac{A \mu^2}{4} - Mg l \right) \theta^2$$

$$+ \frac{A \mu^2}{2} \frac{\theta_0^4}{\theta^2}$$

糸の長さを  $2l$  とし、  
 この場合、

$$\frac{A \mu^2}{4} = \frac{A c^2 w^2}{4 A^2} > Mg l$$

つまり  $w^2 > \frac{4 A M g l}{c^2}$  である。



### Motion of a Rigid Body in a Plane

#### § 23. 剛体の平面運動

剛体の各点の運動は、空間内に固定した一つの平面に平行な平面内に限られて動く場合、平面運動と稱す。

(「平面運動」は、この目的を述べたもの)  
固定物の各点の運動は平面運動の特殊の場合と見做す。

今剛体固定平面を  $xy$  平面と取り、重心の運動は  $xy$ -方向にのみ進められる。

$$M\ddot{X} = F_x, \quad M\ddot{Y} = F_y$$

$$F_z = 0$$

但し、 $F$  は剛体の重心に作用する力の合力である。

又剛体の回転の角速度  $\omega$  の方向は  $z$  軸に平行であるから、

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

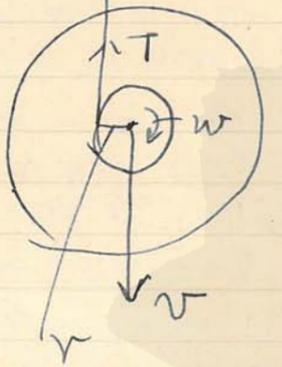
剛体の慣性係数 (剛体の重心の一つが固定平面の重心と取ると、

Euler の運動方程式は

$$\iiint dv (y dx - z dy) = \iiint dv (z dx - x dz) = 0$$

$$C \frac{d\omega_z}{dt} = \iiint dv (x dy - y dx)$$

例 1. 滑車の軸に  
 糸を巻きつけて天井  
 から吊した場合、  
 重力の作用の下に滑車  
 が如何なる運動をする  
 かを考察して見る。  
 中心の運動の速度  
 下方に  $v$ 、  
 角速度  $\omega$ 、  
 糸の半径  $r$



$$M\dot{v} = Mg - T$$

ここで、 $T$  は糸の張力  
 である。

糸の半径を  $r$ 、糸の巻き方向の慣性  
 モーメント  $I = Mr^2$  とすると、Eulerの式  
 は

$$Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = Tr$$

ここで、

$\omega$  は 糸の巻き方向の回転角速度  
 である。

この場合  $\frac{d\omega}{dt}$  は 回転角速度の  
 時間的微分である。これは 角速度  
 $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$   
 である。

中心の  

$$\vec{v} = v\vec{w}$$

回転角速度  

$$\vec{\omega} = \omega\vec{w}$$

ここで、

$$M\dot{v} = \frac{Mg}{1 + (\frac{r}{R})^2}$$

$$T = \frac{Mg}{1 + (\frac{r}{R})^2}$$

ここで、

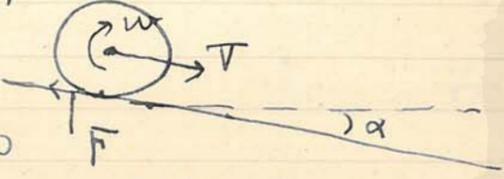
糸の張力  $T$  は、糸の巻き方向の重力  $Mg$   

$$\frac{g}{1 + (\frac{r}{R})^2}$$
 である。張力は  $\frac{Mg}{1 + (\frac{r}{R})^2}$

である。

例2, 車が水平面と  $\alpha$  の傾斜面

平面と滑り  
 する車  
 場合, 車の  
 軸の中心を  
 中心として  
 中心の速度は



$$M\dot{v} = -F + Mg \sin \alpha$$

と仮定して, 傾斜面上の摩擦係数は  $\mu$  とする

$$\mu Mg \cos \alpha = F$$

$$Mk^2 \dot{\omega} = Fr$$

と仮定して

$$M\dot{v} = g \sin \alpha (1 - \mu \cot \alpha)$$

滑り止まる場合  
 $\dot{v} = r\dot{\omega}$

↑ 車は - 傾斜面上を  
 滑り止まる.  
 $Mk^2 = \int_0^r \rho r^3 dr$

$$\therefore \left. \begin{aligned} r\dot{\omega} &= g \sin \alpha (1 - \mu \cot \alpha) \\ \frac{k^2}{r} \dot{\omega} &= \end{aligned} \right\} = \frac{2\pi\rho}{4} r^4 = \frac{M}{2} r^2$$

滑りの速度を  $v$  とすると

$$v = r\omega + \dot{v}$$

従って

$$r\dot{\omega} + \dot{v} = g \sin \alpha (1 - \mu \cot \alpha)$$

$$k^2 \dot{\omega} = \mu g \cos \alpha \cdot r$$

$$\dot{v} = g \sin \alpha \left\{ 1 - \mu \cot \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \right\}$$

従って

$$\mu \cot \alpha \left( 1 + \left( \frac{r}{k} \right)^2 \right) > 1 \quad \uparrow$$

の条件が満たされず

$$\mu \tan \alpha < 1 + \left( \frac{r}{k} \right)^2$$

滑り止まる場合  $\dot{v} < 0$  であるから  
 止まるまで;

仮定

$$\mu \cot \alpha \left( 1 + \left( \frac{r}{k} \right)^2 \right) < 1$$

が成り立つ。滑り止まる場合, この条件が  
 成り立つ。

今この条件が満たされずの場合に就いて,

↑ 角速度の運動

最初  $v_0$  の速さで滑る (無摩擦)  
 $v - v_0 = g \sin \alpha t \left\{ 1 - \mu \cos \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \right\}$

経つて

$$\tau_{\text{止}} = \frac{v_0}{g \sin \alpha \left\{ \mu \cos \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{k^2} \right) - \sin \alpha \right\}}$$

角速度の運動 滑る時と止る時  
 の角速度の運動の運動

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \frac{\mu g \cos \alpha \cdot r}{k^2} \\ &= \omega_0 + \frac{v_0 r}{(k^2 + r^2) - \frac{\tan \alpha}{\mu}} \end{aligned}$$

↑ 止る、角速度の運動

$$V = \omega_0 r + \frac{v_0 r^2}{(k^2 + r^2) - \frac{\tan \alpha}{\mu}}$$

$$\left( \alpha = 0: V = v_0 - \frac{k^2 v_0}{(k^2 + r^2)} + \frac{\omega_0 r}{1} \right)$$

$$= (v_0 + \omega_0 r) - \frac{v_0 k^2}{(k^2 + r^2)}$$

↑ 止る、角速度の運動

滑る  $\tau$  時間  
 $\int_0^{\tau} \mu M g \cos \alpha \cdot v dt$

$$= \mu M g \cos \alpha \left\{ v_0 \tau - \frac{\tau^2}{2} g \right\}$$

$$\left\{ \mu \cos \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{k^2} \right) - \sin \alpha \right\}$$

$$= \mu M g \cos \alpha \tau \cdot \left\{ v_0 - \frac{v_0}{2} \right\}$$

$$= \frac{M \cos \alpha v_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left( 1 + \frac{r^2}{k^2} \right) - \frac{\tan \alpha}{\mu}} \right\}$$

↑ 止る、角速度の運動



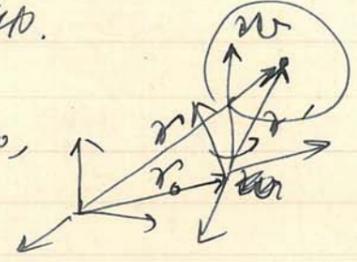
~~運動力学~~ 運動力学系に関する

§22. 剛体の運動

剛体  $\mathcal{V}$  の位置

$r_0$ , 速度  $v_0$ , 角速度  $\omega$ ,  
 座標系  $S$  の原点  $O$  での位置

or  $\mathcal{W}$  での位置



運動力学系に関する  $S$  の原点  $O$  の運動方程式

$$m \{ a_0 + a' + 2[\omega v'] + \left[ \frac{d\omega}{dt} r' \right] + [\omega[\omega r']] \} = f'$$

$\mathcal{W}$  での  $m, r', v', a'$  は  $S$  の

運動力学系に関する位置, 速度, 角速度を指す。

これら  $\mathcal{W}$  での位置, 速度, 角速度を  $\mathcal{B}$  とし,

$$M a_0 + \frac{dB}{dt} + 2[\omega B]$$

$$+ \left[ \frac{d\omega}{dt} \cdot MR \right] + [\omega[\omega R]] = F$$

ここで  $\mathcal{W}$  での  $r'$  を  $\mathcal{B}$  とし,

$$1 \{ [a_0, MR] + [MR, a_0] + \frac{d}{dt} \int_V [r \frac{d\omega}{dt}] \rho dv + 2[\omega, I] \}$$

$$+ 2 \int_V \rho dv [r^2 [\omega v]] + \int_V \rho dv [r \frac{d\omega}{dt}, r] + \int_V \rho dv [r, [\omega[\omega r]]] = \int_V [r f] dv$$

$$\frac{dU}{dt} + [M\dot{R}, \alpha_0] + 2 \iiint \rho dv [r \cdot \omega v]$$

$$+ \iiint \rho dv [r \cdot \frac{d\omega}{dt}, r] + \iiint \rho dv [r \cdot \omega (\omega r)]$$

$$= \iiint (r \cdot f) dv \cdot N$$

第五章 管束系の振動 (132)

§24 管束振動  
 - 一般の管束系の運動は Lagrange の  
 運動方程式より  $r$  を座標として  
 $x, y, z$  の座標系に  $r$  を変換し、一般座標を  
 $q_1, \dots, q_k$  とし、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r$$

$r=1, 2, \dots, k$

$r$  軸方向の運動。管束

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} A_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (\equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2)$$

$$Q_r = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} F_i$$

管束系が平衡状態にあるとき

$$\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_k = 0 \quad (\text{故して } T=0)$$

$$\text{故して } \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \quad ; \quad \text{故して}$$

$$Q_r = 0 \quad r=1, 2, \dots, k$$

この場合、 $V$  の stationary value を取る。  
 $Q_r = - \frac{\partial V}{\partial q_r}$

$$Q_r = - \frac{\partial V}{\partial q_r}$$

この場合、 $V$  の stationary value を取る。  
 $V$  は stationary value を取る。

$V$  は stationary value を取る。

今  $q_r = q_r^{(0)}$  ( $r=1, 2, \dots, k$ ) として  $V$  の stationary value を取る。この場合、 $V$  は stationary value を取る。

$$V = V_0 + \sum_r \left( \frac{\partial V}{\partial q_r} \right)_0 (q_r - q_r^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \right)_0 (q_r - q_r^{(0)}) (q_s - q_s^{(0)}) + \dots$$

この場合、 $\left( \frac{\partial V}{\partial q_r} \right)_0 = 0$  ( $r=1, 2, \dots, k$ )

この場合、 $q$  の値として  $q_1^{(0)}, \dots, q_k^{(0)}$  を取る。  
 $V_0 = 0$  とする。

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s} b_{rs} q_r q_s$$

この場合、 $T$  の stationary value を取る。  
 $T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

この場合、 $T$  の stationary value を取る。

$$a_{rs} = (A_{rs})_{q_r = q_s = 0} = a_{sr}$$

この場合、 $T$  の stationary value を取る。  
 $T$  は stationary value を取る。

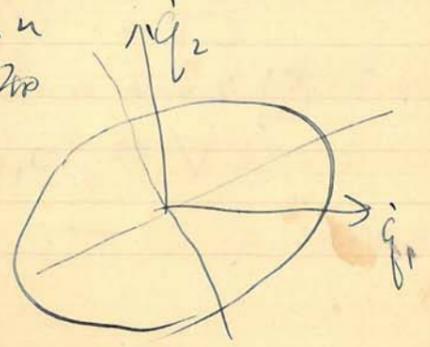
この場合、 $T$  の stationary value を取る。

今  $q_r = q_r^{(0)}$  ( $r=1, 2, \dots, k$ ) として  $T$  の stationary value を取る。

$$2T = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2$$

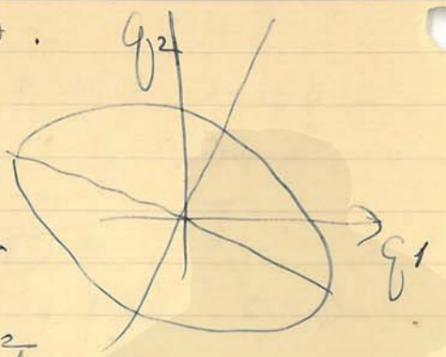
$$2V = b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2$$

この場合、 $T$  の stationary value を取る。  
 $T$  は stationary value を取る。



この場合、 $V$  の stationary value を取る。

平面の二次曲線である。  
 即ち  $q_1, q_2$  と  $q'_1, q'_2$   
 と同じ様な変換は  
 一次変換による。  
 したがって、~~座標軸を~~  
~~座標軸を~~  $q_1, q_2$   
 座標軸を  $q'_1, q'_2$  地方  
 中の  $q_1, q_2$  である。



次に  $q_1, q_2$  の方が座標軸である  
 として

$$2T = a'_1 \dot{q}'_1{}^2 + a'_2 \dot{q}'_2{}^2$$

の形である。  
 したがって

$$2V = b'_{11} q'_1{}^2 + 2b'_{12} q'_1 q'_2 + b'_{22} q'_2{}^2$$

である。

$$\text{次に } \sqrt{a'_1} q'_1 = q''_1 \quad \sqrt{a'_2} q'_2 = q''_2$$

$$\text{と置くと, } 2T = \dot{q}''_1{}^2 + \dot{q}''_2{}^2$$

即ち 図 である。  $q_1, q_2$  である。

$$2V = b''_{11} q''_1{}^2 + 2b''_{12} q''_1 q''_2 + b''_{22} q''_2{}^2$$

である。

$(q_1, q_2)$  平面内

134  
3

従って座標軸  $q_1, q_2$  の座標軸  $Q_1, Q_2$   
 と、  $T$  の座標  $Q_1, Q_2$

$$2T = \dot{Q}_1{}^2 + \dot{Q}_2{}^2$$

$$2V = B_1 Q_1{}^2 + B_2 Q_2{}^2$$

と、この形である。

かくして  $Q_1, Q_2$  の座標  $Q_1, Q_2$   
 と、座標軸  $Q_1, Q_2$  と一致する。

即ち  $Q_1, Q_2$  の座標軸  $Q_1, Q_2$  の  
 座標  $Q_1, Q_2$  を求める。

$$q_r = \sum_i C_{ri} Q_i \quad r=1, 2, \dots, R$$

この一次変換による

$$2T = \sum_i \dot{Q}_i{}^2$$

$$2V = \sum_i B_i Q_i{}^2$$

(a)

この形  $Q_1, Q_2$  の座標  $Q_1, Q_2$

$$2T = \sum_{r,s} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

$$= \sum_{\substack{r,s \\ i,j}} C_{ri} a_{rs} C_{sj} \dot{Q}_i \dot{Q}_j = \sum_i \dot{Q}_i^2$$

$$2V = \sum_{r,s} b_{rs} q_r q_s$$

$$= \sum_{\substack{r,s \\ i,j}} C_{ri} b_{rs} C_{sj} Q_i Q_j = \sum_i b_i Q_i^2$$

の基底の  $Q_i Q_j, Q_i \dot{Q}_j$  等の係数を  
 共に等しくする  $\lambda$  の値を  $\lambda$  とする

$$\left. \begin{aligned} \sum_{rs} C_{ri} a_{rs} C_{sj} &= \delta_{ij} \\ \sum_{rs} C_{ri} b_{rs} C_{sj} &= b_i \delta_{ij} \end{aligned} \right\} (*)$$

従って  $\lambda \in \mathbb{R}$  とし

$$\sum_{rs} C_{ri} (\lambda a_{rs} - b_{rs}) C_{sj} = (\lambda - b_i) \delta_{ij} \quad (†)$$

基底の正規化を仮定して

$$\det a(C_{ri}) \det (\lambda a_{rs} - b_{rs}) \det (C_{sj}) = \prod_i (\lambda - b_i)$$

従って

$$\det (C_{ri}) \neq 0$$

( $\because q_r = \sum C_{ri} Q_i$  かつ  $q_r$  の基底である  
 基底  $Q_i$  の基底であるから)

$$\det (C_{ri}) \neq 0$$

$$\lambda = \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\det (b_i a_{rs} - b_{rs}) = 0$$

従って  $b_1, b_2, \dots, b_k$  の  $k$  個の  
 $\lambda$  の値は  $\lambda a_{11} - b_{11}, \lambda a_{22} - b_{22}, \dots, \lambda a_{kk} - b_{kk}$   
 $\Rightarrow 0 \quad (**)$

の根  $\lambda$  の値  $\lambda_i$  とする

$\lambda = \lambda_i$  の  $k$  個の方程式  $b_i$  の基底  
 を作る。  $(*)$  の基底  $C_{sj}$

$$\sum_{rs} C_{ri} (b_j a_{rs} - b_{rs}) C_{sj} = 0$$

基底  $C_{sj}$  を用いて

$$\sum_{rs} (b_j a_{rs} - b_{rs}) C_{sj} = X_r$$

と置く



$\sum c_{ri} X_r = 0$   
 係数の行列式  $\det(c_{ri}) \neq 0$  ならば  
 $X_r = 0$  ( $r=1, 2, \dots, k$ ) となる。  
 従って  $\sum_s (b_{rs} a_{rs} - b_{rs}) c_{sj} = 0$   
 $r=1, 2, \dots, k$   
 (この  $b_{ij}$  の行列式  $(**)$  の方が 2 重の。  
 $\det(b_{rs} a_{rs} - b_{rs}) = 0$   
 従って  $c_{sj} \neq 0$  ( $s=1, 2, \dots, k$ )  
 の場合  $c_{sj}$  を使えば  $T, V$  の  
 形式を得る。  
 (この場合  $a_{rs} = 0$  の場合も  
 含む)

$q_r = \sum_i d_{ri} q_i$   
 (この  $d_{ri}$  は  $c_{ri}$  の逆行列)

変換  $T$  は  
 $2T = \sum_i q_i^2, \quad 2V = \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j$

この形式からわかる。  $q_i$   
 $q_i = \sum_j e_{ij} Q_j$   
 変換  $Q_j$  (この  $Q_j$ )  $T$  の形は  
 $V$  の形もわかる。

$e_{mk} \left( \sum_j b_{ij} e_{ik} e_{jl} \right) = b_{kl} \delta_{kl}$

左辺は  $\rightarrow$   
 $f_r = \sum_{ij} d_{ri} e_{ij} Q_j$   
 $b'_{ij} = \sum_{rs} d_{ri} d_{sj} b_{rs}$   
 $\delta_{ij} = \sum_{rs} d_{ri} d_{sj} a_{rs}$   
 $\delta_{kl} = e_{ik} e_{jl}$

$b'_{ij} e_{ij}$   
 $\sum_j b'_{ij} e_{ij}$   
 $= b_{kl} e_{kl}$   
 $\sum_j b_{ij} e_{ij}$   
 $= \sum_j (b_{ij} \delta_{ij}) e_{ij}$

$b_{ij}$  の  $\det(b_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$   
 の根。 従って  
 $\det \left( \sum_{rs} d_{ri} d_{sj} b_{rs} - \lambda \sum_{rs} d_{ri} d_{sj} a_{rs} \right) = 0$

9 根。  $\dots$   
 $\det(d_{ri}) \det(d_{sj}) \det(b_{rs} - \lambda a_{rs}) = 0$   
 $* = 0$

9 根。  $\dots$   
 $\det(b_{rs} - \lambda a_{rs}) = 0$   
 の根。 ( )



例 (i) 重力場の置かれた一つの曲面の  
 安定な平衡点附近での質点の振動。  
 平衡点を原点に取り、~~この点を原点~~  
~~面を  $x, y$  軸、この面を  $z$  軸~~  
 とする。  
 この曲面の方程式を  $z = z(x, y)$   
 とすると、この曲面の  $V = -mgz$   
 $(\frac{\partial V}{\partial x})_0 = (\frac{\partial V}{\partial y})_0 = (\frac{\partial V}{\partial z})_0 = 0$   
 である。この曲面の  $(x, y, z)$   
 座標系で  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  の方向に  
 $V = \alpha x + \beta y + \gamma z$   
 $\alpha + \gamma (\frac{\partial z}{\partial x})_0 = 0$   
 $\beta + \gamma (\frac{\partial z}{\partial y})_0 = 0$   
 $\alpha, \beta \neq 0$  とする  $V$  の振動

組って基底基底  $\vec{e}_i$ 。  
 $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$   
 $r = (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_0, s = (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})_0$   
 $t = (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})_0$   
 この平面の方程式は  $f(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$   
 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)$   
 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = 0$   
 である。この平面は水平面である。  
 $V = \frac{1}{2}mg(rx^2 + 2sxy + ty^2)$   
 $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$   
 $(\therefore \dot{z} = \frac{1}{2}(rx\dot{x} + sx\dot{y} + sx\dot{y} + t\dot{y}^2) \ll \dot{x}, \dot{y})$



与えられた等曲線を求め、  
 $yx' + 2sxy + ty' = 1$   
 の場合、この等曲線の方向を求め、 $x, y$  軸  
 へ投影する。

$$V = \frac{1}{2}mg \left( \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} \right)$$

この等曲線を求め、この方向に曲線の正方向、  
 又は曲線に垂直な方向を求め、  
 (Vが極小の時  $s = 0$   $R_1, R_2 \geq 0$ )  
 $R_1, R_2$  が互いに垂直

~~$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{dx^2}{R_1} + dx^2 + dy^2 + \left( \frac{y dy}{R_2} + \frac{x dx}{R_1} \right)^2$$

$$= \left( 1 + \frac{x^2}{R_1^2} \right) dx^2 + \left( 1 + \frac{y^2}{R_2^2} \right) dy^2 + \frac{2xy}{R_1 R_2} dx dy$$~~

$dy = 0$ :  $dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{2x^2}{R_1^2}}}$

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)_{x=0} = \frac{-\frac{2x}{R_1^2}}{\left( 1 + \frac{2x^2}{R_1^2} \right)^{3/2}} \Big|_{x=0} = 0$$

~~$$dz = \frac{x dx}{R_1} + \frac{y dy}{R_2}$$

$$\frac{dz}{ds} = d$$~~

$y=0$  と仮定  $z = \frac{x^2}{2R_1}$   
 したがって  $(z - R_1)^2 + x^2 \approx R_1^2$  ( $z^2 \ll x^2$ )

したがって  $x, y$  軸に垂直な等曲線を求め、  
 等曲線の方向を求め、

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{R_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{g}{R_2}}$$

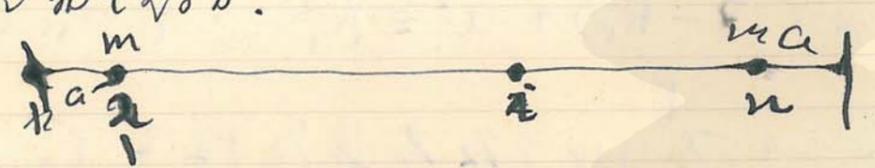
と仮定、

$$x = A_1 \cos(v_1 t + \epsilon_1)$$

$$y = A_2 \cos(v_2 t + \epsilon_2)$$

この等曲線は、 $z$  軸に垂直な等曲線、  
 したがって  $R_1 = R_2 = R$  と仮定、  
 したがって  $x, y$  軸に垂直な等曲線の方向を求め、  
 と同様、 $z$  軸に垂直な等曲線の方向を求め、

ii)  $n$ 個の質点を長さ  $l$  の弦に等距離に並べ、  
 距離  $a$  を与える。弦の速度  $v$  について  
 考える。  
 両端を固定して、弦の方向に各質  
 点に質量  $m$  の質点を並べ、 $n$  個の  
 質点を並べた。



平衡の位置  $0 \leq x \leq l$  の変位を  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  
 とする。

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2$$

各質点の弾性係数を  $\kappa$  とすると

$$V = \frac{1}{2} \kappa \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1})^2 \quad \left( \begin{array}{l} q_0 = 0 \\ q_{n+1} = 0 \end{array} \right)$$

PPS

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} q_i q_j$$

$$b_{ii} = 2\kappa \quad b_{i,i-1} = b_{i,i+1} = -\kappa$$

従って運動方程式は

$$\sum_j (b_{ij} a_{rs} - b_{rs}) C_{sj} = 0$$

$n$ 個の質点方程式は

$$b_j = v^2, \quad c_{sj} = c_s \quad \frac{\kappa}{m} = \mu$$

と置く。

$$M C_{r-1} + (v^2 - 2\mu) C_r + \mu C_{r+1} = 0$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

$$C_0 = C_{n+1} = 0$$

$$C_r = A e^{i r \alpha} + B e^{-i r \alpha}$$

$$\mu e^{-i \alpha} + (v^2 - 2\mu) + \mu e^{i \alpha} = 0$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{2\mu}$$

或は  $C_r = R(A e^{i r \alpha})$  と置く  
 $\alpha$  は  $2\pi$  の整数倍である。  
 $C_0 = C_{n+1} = 0$  とする。  
 $A = i A'$   $A'$  は実数。  
 $(n+1)\alpha = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
 $k=0$  は除外。

従って  $c_r^{(k)} = A_k \sin \frac{kr\pi}{n+1}$

また  $v^2 = 2\mu(1 - \cos\alpha)$   
 $= \frac{4\mu}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$V_k = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin \frac{kr\pi}{n+1}$

つまり  $k=1, 2, \dots, n$  の振動は  $n$  個の  
 異なる振動モードがある。一般に

$q_r = \sum_{k=1}^n A_k \sin \frac{kr\pi}{n+1} \cos(\nu_k t + \epsilon_k)$

の形になる。

~~...~~

運動方向と  $x$  方向と

§25. 多重周期運動 (multiply periodic motion, mehrfach periodische Bewegung)

これは 2 次元系が平衡の位置の近くに  
 振動するときの振動として取り扱われる  
 が、平衡位置から離れたところでは、運動  
 は複雑になる。

ここで、エネルギー  $E$  の位置  $x$  での  
 振動のエネルギー  $E$  と  $V(x)$  との  
 関係の図から、 $E$  と  $V(x)$  との

$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = E - V(x)$

従って  $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$   
 $\pm \int \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = t + \text{const}$

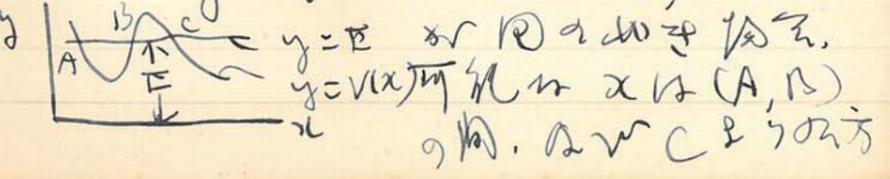
この式より

運動の可能な範囲は

$E - V(x) \geq 0$

に限定され、 $x$  は  $A$  と  $B$  の間である。

ここで  $y = V(x)$  と  $E$  の値



の間。A, B, C, D の位置



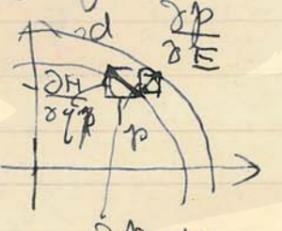


$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} + \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial E} = 1$$

$$p = \frac{dq}{dt}$$

$n \rightarrow 2$  の場合、C上の各点  $z = \dots$  に対して  
 振動する。従って  $P$  の  $C$  上の  $q$ -座標を  
 含めて  $H = E$  の一般化の時刻  $t$  の  
 位置  $q(t)$  と同じ  $\int p dq$  の値を  
 得る。  $H = E$  を  $p = p(q, E)$  と  
 $q = q(t)$  の

$$t + \beta = \int \frac{\partial p}{\partial E} dq$$



からなる。従って周期  
 $T = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq$   
 となる。この周期を  
 (libration) と呼ぶ。

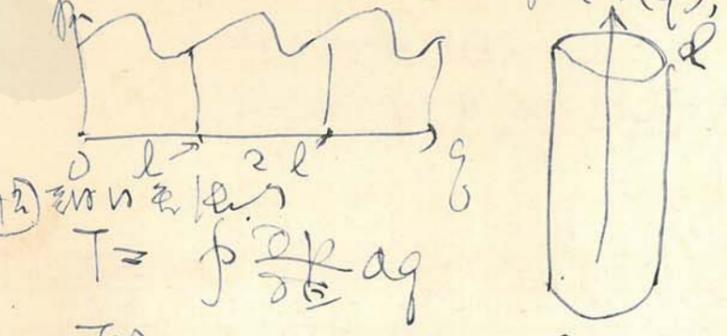
$$l = \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dq}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

係数  $l$  を用いて、(Eが大きいとき)  
 $H(p, q) = E$   
 から  $p = \sqrt{2(E - V)}$   
 若し  $q$  が振動の位置  
 $n \rightarrow 2$  の場合  $n$  位の軌道は  
 $\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{\sqrt{2(E - V)}}$

運動の周期  $T$  は、  
 係数  $l$  の振動の位置  $q$  の  
 軌道  $q(t)$  の一般化の時刻  
 $t$  の位置  $q(t)$  と同じ  $\int p dq$   
 の値を  $H = E$  の一般化の時刻  
 の位置  $q(t)$  と同じ  $\int p dq$   
 の値を  $H = E$  の一般化の時刻

(軌道  $q(t)$  は  $q$  は  $(\text{mod } l)$   
 の周期運動である。  
 $\oint p dq = \oint p(V(q), E) dq$



となる。  
 $n \rightarrow 2$  の場合 (rotation) と呼ぶ。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p)}{\partial p} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{dp}{dt} = 0.$$

これは  $p, q$  の  $W$  の変数  
 $P, Q$  の変数として  $L$ .

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}$$

従って  $W(q, P) = \frac{W}{2\pi} \oint p(q, P) dq$

これは  $H(p, q) = \dots$  と  $Q = \int \frac{\partial p}{\partial E} dq = t - t_0$

$$J = \frac{\partial W}{\partial W} \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}$$

これは  $(J, w)$  の変数として  $L$

$$W(J, w) = \frac{W}{2\pi} \oint p(q, P) dq$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad Q = \frac{1}{2\pi} W$$

$$w = \nu Q = \nu t + \delta \quad \nu = \frac{2\pi}{T}$$

$w$  は  $2\pi$  の  $\delta$  を増やせば  $Q$  が  $1$  だけ増える  
 角変数 (angle variable, Winkelvariabel-Veränderlich)

$J$  は  $2\pi$  の  $\delta$  を増やせば  $W$  が  $2\pi$  だけ増える  
 作用変数 (action variable, Wirkungsvariabel)  $\frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J}$

~~$$w = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$$~~

これは  $W = \frac{2\pi}{T} \int \frac{\partial p}{\partial E} dq$

$$W = \frac{2\pi}{T} \int \frac{\partial p}{\partial E} dq$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$$

$$T = \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{2\pi}{T} \int p dq \right) = 2\pi \frac{\partial J}{\partial E}$$

$$\therefore W = \frac{dE}{dJ} \int \frac{\partial p}{\partial E} dq = \frac{\partial}{\partial J} \int p dq$$

$p$  は  $q$  の関数として  $W$  は  $q$  の関数として  
 $\int \frac{\partial p}{\partial E} dq$  は  $T$  の関数として  $W$  は  $2\pi$  だけ  
 増える。これは  $q$  の他の関数として  
 (角変数) 或は  $W$  の関数として (作用変数)  
 従って  $q$  は  $W$  の関数として  
 $W$  は  $q$  の関数として

$$q = \frac{lw}{2\pi} + (w \text{ の Fourier 展開})$$

従って

$$q = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{lw}{2\pi} \end{array} \right\} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw + b_n \sin nw)$$

の Fourier 展開が本題。

以上は  $W$  が  $q_i$  の関数として与えられる。  
 一般に  $W$  は  $q_i$  の関数として、座標が各  
 座標可能、座標  $q_i$  である。 P.S

$$W(q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$= \sum_{i=1}^k W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

座標  $q_i$  の変換座標  $q_i$  の関数として  $W$  は

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

が成り立つ。

したがって Hamilton 関数  $H(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  は

