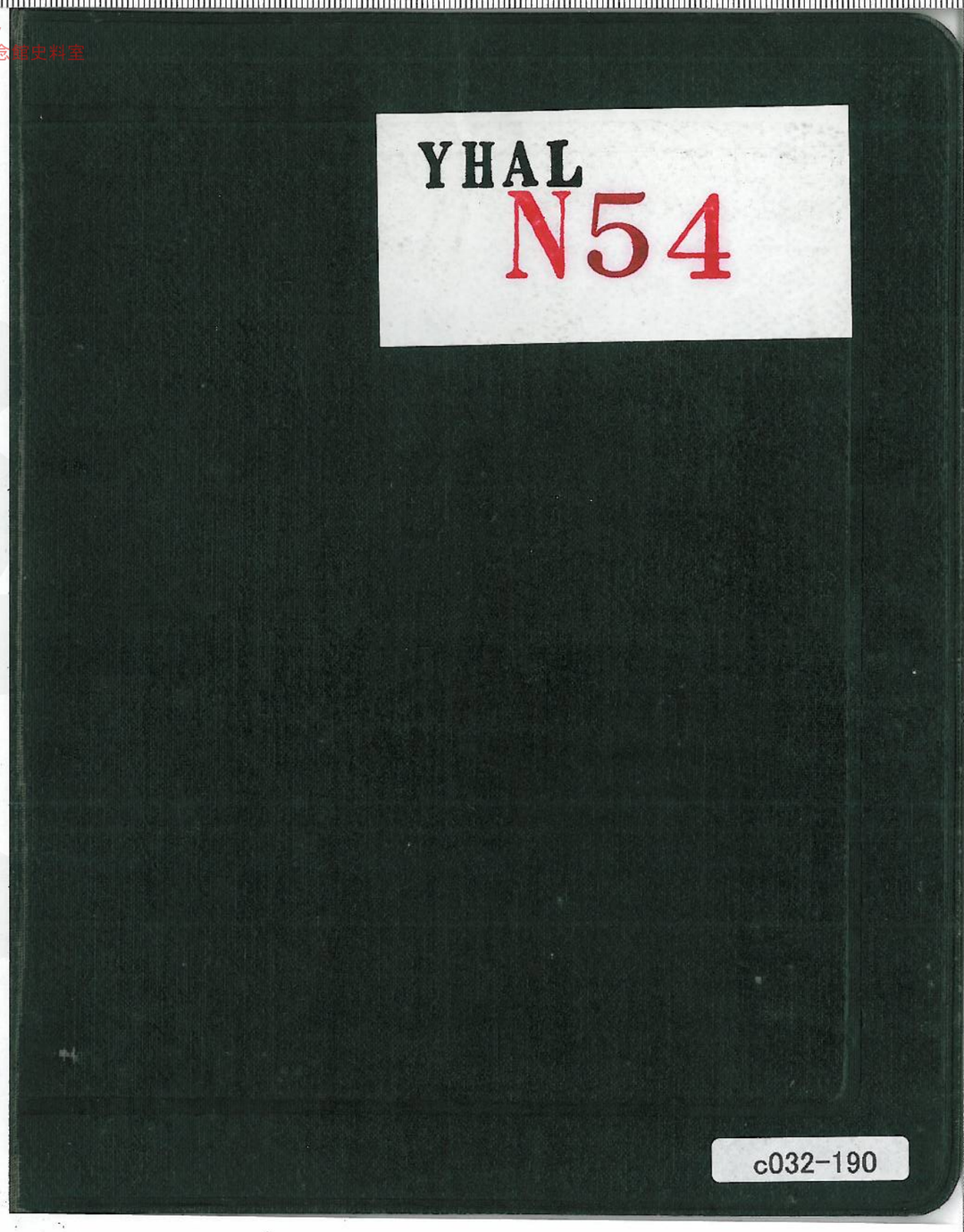
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

力學 第二部 N54

CONTENTS

PAGE PAGE

昭和十五年度 夏休み、
第四章のはへ 三次元の外回転運動
「空の頂」 空の運動経路。
「球状物体」 それに及ぼす抵抗の法則。

昭和十六年度 夏休み
1、球の振動、
2、Huygheus の原理、
1、細い棒の振動、

Karman's Vortex, 流体力学
4、Turbulence

NO. 4

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

CONTENTS

PAGE　　PAGE

参考書

玉城嘉十郎：弾性体の力学
な近著．　流体の力学

Lamb, Hydrodynamics
Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aerodynamik
(訳あり)
Ramsey, Hydromechanics I, II.
Treatise on
A. Love, Mathematical Theory of
Elasticity
Timoshenko, Theory of Elasticity
清水高慶　弾性学
Planck, Einführung in die Theoretische
Physik Bd II
(次、変形する物体の力学．)
Lamb Dynamical Theory of Sound
Rayleigh, Theory of Sound, I, II.

NO. 4

力学　第二部
弾性体および流体の力学　The Deformable or Conta Body

第一章　連続物体の力学的運動（一般原理）　General Laws of Motions

Strain の関係　一般的注意

§1. 緒言　1) 一般的考察　General Considerations

第一部においては一般の質点系およびその特別の場合として剛体の運動を論じたのであるが，自然界には剛体ならざる物体およびその運動に関してもまたその形を変える．この形を変形しうる物体（deformable body）の運動を論ずるのがこの第二部の目的である．

そこで空間の一部が物質によって連続的に満たされているとする．空間は物質からなる不連続な構造をもつかもしれないが，我々の日常の観察の範囲にある所謂巨視的現象（macroscopic phenomena）に対しては，物質を連続体と見做して少しも差支えない．

扨て，物体の運動を一般の変形しうる物体の運動まで完全に述べるには，これを構成する各質点の運動を知らねばならぬ，いいかえれば，物体内の各点が時間とともにどんな風に移動して行くか知らねばならぬ，例えば t=0 に於て a なる点にあった質点が t なる時刻にはどこにあるかを，

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

r は物質の任意点 a および時刻 t のある関数である。
それぞれの成分を (x, y, z), (a, b, c) とすると

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a\,b\,c\,t) \\ y &= y(a\,b\,c\,t) \\ z &= z(a\,b\,c\,t) \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

で、x, y, z は a, b, c および t のある関数であるから、物体の運動が定まれば定まる。

なお物体が少しも変形しない場合、即ち剛体である場合には物体内の任意の二点間の距離はその点の選び方に関係なく一定であるから t のみの関数であって、a および a' から出た二点が、t なる時に r および r' にあるとすると

$$|r' - r| = |a' - a| \quad (1.2)$$

なる関係が a', a' のいかなる場合にも成り立つ訳である。

逆に (1.2) の様な関係が a', a' および t のいかなる値に対しても成り立つ場合には、物体は剛体として運動する。
しかしながら物体が変形する場合には物体は変形および運動をなす訳である。

+ $(\delta u, \delta v, \delta w)$ を (x, y, z) 点における $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 点の相対変位 (relative displacement) と称する。

ii) 変形のテンソル Stress Tensor

今任意点 (x, y, z) が $(x+u, y+v, z+w)$ に移動したとすると、(x, y, z) に極めて近い $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ なる点はそれぞれ $(x+u, y+v, z+w)$ の極く近くに移ってあるから、それを

$$(x+\delta x+u+\delta u,\ y+\delta y+v+\delta v,\ z+\delta z+w+\delta w)$$

とすると、(u, v, w) は (x, y, z) の函数であるから

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

なる関係が成立する！

そこで $\frac{\partial u}{\partial x} = k_{xx}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = k_{xy}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = k_{xz}$ etc. (1.4)

と書き、

$$(k) = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ある2個の成分を加える事をくりかえしてゆく.

今座標系の回転を行って、旧座標(x, y, z)の新しい系に関する座標を(x', y', z'), 旧系(u, v, w)および相対変位(δu, δv, δw)の新しい系に関する成分をそれぞれ(u', v', w')および(δu', δv', δw')とすると,

おて, (x, y, z)と(x', y', z')の間には

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z \\ z' &= a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

なる一次の関係があるが、旧座標(x, y, z)間の距離$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$は新しい座標では$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$であるから

$$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \quad (1.6)$$

なる関係が任意座標に対して成立する. 従って(1.5)を(1.6)の右辺に代入し, x'^2, $x'y'$等の係数が等しくおけば, a_{xx}等の9個の係数の間に

$$a_{xx}^2 + a_{yx}^2 + a_{zx}^2 = 1 \quad \text{etc.}$$
$$a_{xx}a_{xy} + a_{yx}a_{yy} + a_{zx}a_{zy} = 0 \quad \text{etc.} \quad (1.7)$$

なる6個の関係が存在することが導かれる.

一般の2ベクトルは2つの座標系A及び新しい座標系に関する成分(v_x, v_y, v_z)及び(v_x', v_y', v_z')の間には, 前の(1.5)と同形の関係が存在することが容易に導かれる. 逆にこの様な関係が任意の座標回転に対して常に成立する場合これらの9成分が2階のベクトルを形成するといってもよい.

次に(1.5)を(x, y, z)について解くと(1.7)の関係を利用すると, 直ちに

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{xx}x' + a_{yx}y' + a_{zx}z' \\ y &= a_{xy}x' + a_{yy}y' + a_{zy}z' \\ z &= a_{xz}x' + a_{yz}y' + a_{zz}z' \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

が得られる.

さらにこれから通常の陰関数一次式を解く方法により

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{xx}}\cdot x' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{yx}}y' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{zx}}z' \\ y &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{xy}}x' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{yy}}y' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{zy}}z' \\ z &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{xz}}x' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{yz}}y' + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{zz}}z' \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

が与えられる．依し

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix} \qquad (1.10)$$

である．
(1.7)の如き関係である故には $a_{xx}a_{xy}$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{xx}^2+a_{xy}^2+a_{xz}^2 & a_{xx}a_{xy}+a_{yx}a_{yy}+\cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

∴ $\Delta = \pm 1$.

しかも，(1.9)式は座標軸の対称的な取り方を表わす関係と考えられ，従って a_{xx}, a_{yy}, a_{zz} は1に近く，その他は零に小さいから，$\Delta = +1$ であって，$\Delta = -1$ ではなく，$\Delta = +1$ の右、従ってそれが実現して出来た一般の回転に対しても $\Delta = 1$ の右である．)

これと (1.8) と (1.9) とを比較すると，

$$a_{xx} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{yx}} \quad \text{etc.} \qquad (1.11)$$

なる関係があらわされる．

次に (1.3) の関係から出発して新しい座標系では

$$\delta u' = \delta\frac{\partial u'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial u'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial u'}{\partial z'}\delta z' \qquad (1.12)$$

が成立する．
(x, y, z) と同様に
所で (u, v, w) は空間ベクトルを形成するから

$$u' = a_{xx}u + a_{xy}v + a_{xz}w$$
$$\text{etc.},$$

従って $\frac{\partial u'}{\partial x'} = a_{xx}\frac{\partial u}{\partial x'} + a_{xy}\frac{\partial v}{\partial x'} + a_{xz}\frac{\partial w}{\partial x'}$
etc.,

(1.5)より

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = a_{xx}a_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{xx}a_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{xx}a_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$+ a_{xy}a_{xx}\frac{\partial v}{\partial x} + \cdots + \cdots$$
$$+ \cdots + \cdots + \cdots$$

となる．
そこで $\frac{\partial u'}{\partial x'} = k'_{xx}$, $\frac{\partial u'}{\partial y'} = k'_{xy}$ etc
とおくと，

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$k'_{xx} = a_{xx}a_{xx}k_{xx} + a_{xx}a_{xy}k_{xy} + a_{xx}a_{xz}k_{xz} + a_{xy}a_{xx}k_{yx} + \cdots + a_{xz}a_{xx}k_{zx} + \cdots \quad \text{etc.} \qquad (1.13)$$

とある。

一般に k_{xx} などの9個の量の集合の組が任意に(1.13)のように変換される場合、これら9個の成分が全体として一つのテンソル (tensor) を形成するという。

そして上記のように $k_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc. を成分とするテンソル(量)を歪のテンソル (strain tensor) という。

$(\delta x, \delta y, \delta z)$ と $(\delta u, \delta v, \delta w)$ を成分とするベクトルをそれぞれ δr および δu とすると、(1.13)は次式のように

$$\delta u = (k)\,\delta r \qquad (1.14)$$

とかける。

但し、$(k)\,\delta r$ はテンソルとベクトルの一種の積で、その成分は

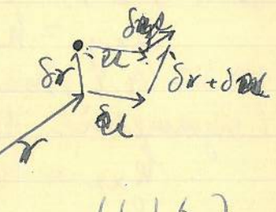
$$\left.\begin{aligned} &k_{xx}\delta x + k_{xy}\delta y + k_{xz}\delta z \\ &k_{yx}\delta x + k_{yy}\delta y + k_{yz}\delta z \\ &k_{zx}\delta x + k_{zy}\delta y + k_{zz}\delta z \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

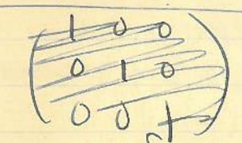
である。

このようにして、各点 r における小さい δr なるベクトルを一つ取れば、変形された $r+u$ における $\delta r + \delta u$ は

$$\delta r + \delta u = \delta r + (k)\delta r \qquad (1.16)$$

となることになる。





この(1)テンソルを (δ) とすると、

$$\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$$
$$\delta_{xy} = \cdots = 0$$

この(1)テンソル (δ) の9個の成分は

$$\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1$$
$$\delta_{xy} = \delta_{yx} = \cdots = 0$$

であるから

$$(\delta)\,\delta r = \delta r$$

であるから (δ) は単位テンソル (unit tensor) を表している。これを用いると(1.16)は

$$\delta s = \delta r + \delta u = (\delta)\,\delta r + (k)\,\delta r,$$

なるテンソルの和は各成分の和を成分とするテンソルであらわされるものと考えられる

$$\delta s = \delta r + \delta u = (\delta + k)\,\delta r \qquad (1.17)$$

とも書ける。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

iii) 歪の分解 Resolution of Strain

おてテンソルの中で次の

$k_{xy} = k_{yx}$, $k_{xz} = k_{zx}$, $k_{yz} = k_{zy}$

の様な性質を満たすものを 対称テンソル (symmetric tensor) と言い, これに対して

$k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = 0$

$k_{xy} = -k_{yx}$ $k_{xz} = -k_{zx}$ $k_{yz} = -k_{zy}$

の様な性質を満すものを 反対称テンソル (antisymmetric tensor) と称する.

~~反対称テンソルは対称~~ 任意のテンソル (k) は対称テンソル (f) と

$$f_{xx} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{xx})$$
$$f_{xy} = \frac{1}{2}(k_{xy} + k_{yx}) = f_{yx}$$
etc

なる形で作り, 又反対称テンソル (g) を

$$g_{xx} = \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{xx}) = 0$$
$$g_{xy} = \frac{1}{2}(k_{xy} - k_{yx}) = -g_{yx}$$
etc

なる形で作ると,

$$k_{xx} = f_{xx} + g_{xx}$$
$$k_{xy} = f_{xy} + g_{xy} \quad \text{etc}$$

となる様にする.

$$(k) = (f) + (g) \qquad (1.18)$$

となる.

任意のテンソルをこの様に対称なものと反対称なものとに分解したとすると, (1.17) は

$$\delta x + \delta u = (\delta)\delta x + (f)\delta x + (g)\delta x \qquad (1.19)$$

となる.

そこで, (f) と (g) がそれぞれ何らかの幾何学的な意味を持つて居るかを調べて見る.

先づ反対称な (g) に対して座標変換を行うと (1.13) より

$$g'_{xx} = a_{xx}a_{xy}k_{xy} + a_{xx}a_{xz}k_{xz} + a_{xy}a_{xx}k_{yx} + \cdots + a_{xz}a_{xx}k_{zx} + \cdots = 0$$

$$g'_{xy} = a_{xx}a_{yy}g_{xy} + a_{xx}a_{yz}g_{xz} + a_{xy}a_{yx}g_{yx} + a_{xy}a_{yz}g_{yz} + a_{xz}a_{yx}g_{zx} + a_{xz}a_{yz}g_{zy}$$
$$= (a_{xx}a_{yy} - a_{xy}a_{yx})g_{xy} + (a_{xz}a_{yx} - a_{xx}a_{yz})g_{zx} + (a_{xy}a_{yz} - a_{xz}a_{yy})g_{yz}$$
etc

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

が得られる.

(1.11) より

$$a_{zz} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{zz}} = a_{xx}a_{yy} - a_{xy}a_{yx}$$

etc.

であるから, 上式は

$$g'_{xy} = a_{zx}g_{yz} + a_{zy}g_{zx} + a_{zz}g_{xy}$$

etc

とも書ける.

そこで

~~$g_{xy} = g_{yz} = -w_x$~~

$$-g_{yz} = g_{zy} = w_x, \quad -g_{zx} = g_{xz} = w_y,$$
$$-g_{xy} = g_{yx} = w_z$$

と置くと, 上式は

$$w'_z = a_{zx}w_x + a_{zy}w_y + a_{zz}w_z \quad (1.20)$$

etc

なる形をとる.

これは (w_x, w_y, w_z) が一つのベクトル w を形成することを意味する. このような, 2階の

テンソル (g) を

十分で $w_x = g_{zy} = \frac{1}{2}(k_{zy} - k_{yz}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$

etc. 纏めてベクトルで書くと

$w = \frac{1}{2}\mathrm{curl}\, u$ となる*

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

この形に書くと, その中の三つの独立な成分 (w_x, w_y, w_z) がベクトル w の成分になる.

これを用いると (1.19) は

$$\delta\varsigma = \delta r + \delta u = (\delta)\delta r + (f)\delta r + [w\,\delta r] \quad (1.22)$$

と書ける. †

*†で $[w\,\delta r]$ とは r 点近傍の $r+\delta r$ なる点が r を中心として w の方向を軸として, w なる角丈回転したことを意味する.

であるから~~この角度を用いまして~~

~~r 点近傍の点は形状, 体積を変化せず~~, 図(後のもの), 全体として回転をすることである.

なお, 更に無限小の場合は

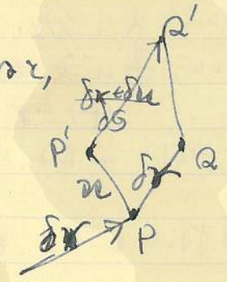
(†)δr

なる量を ~~δu~~ のみである.

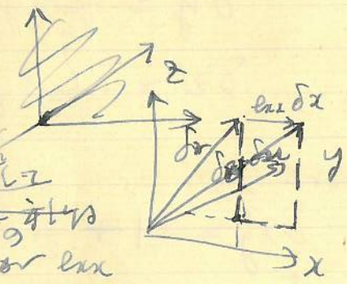
~~この意味して~~, 純粋の変のみ ~~を考え~~ が残れば

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~~~ 場合には，r 点の $r+\delta r$ 点の
~~~~ 変形 ~~~~ 量は ~~~~ 成分は次式で
$$\delta\xi = \delta\xi_{\delta x+\delta x} = (\delta)\delta x + (\beta)\delta y \qquad (1.23)$$
与えられる．
$$\delta\xi_x = \delta\xi_{\delta x+\delta x} = (1+f_{xx})\delta x + f_{xy}\delta y + f_{xz}\delta z \qquad (1.24)$$
etc.
で表わされる．
~~~~ そこで，
$$f_{xx} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = e_{xx} \quad \text{etc} \qquad (1.24)$$
$$2f_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy} = e_{yx} \text{ etc}$$
とおくと，(1.24)' は
$$\delta\xi_x = \delta\xi_{x+\delta x} = (1+e_{xx})\delta x + \frac{1}{2}e_{xy}\delta y + \frac{1}{2}e_{xz}\delta z \qquad (1.25)$$
etc.
となる．ここで $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ の6個を歪の成分 (components of strain) という：
そこで次の特別な場合として
a) e_{xx} 以外は Δ と 0 とおくと，
$\delta\xi_x = \delta x + \delta u = (1+e_{xx})\delta x$
$\delta\xi_y = \delta y + \delta v = \delta y$
$\delta\xi_z = \delta z + \delta w = \delta z$
~~~~ 従って，



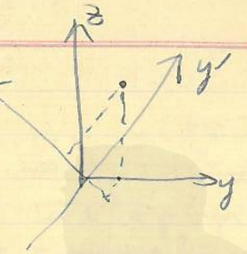
$\delta x = 1$，　$\delta y = \delta z = 0$
とおくと
$\delta\xi_x = \delta x + \delta u = e_{xx}$
$\delta\xi_y = \delta y + \delta v = 0$
$\delta\xi_z = \delta z + \delta w = 0$
~~~~ であり，これは ~~~~ x 軸上の
~~~~ 線素 ~~~~ 長さが e_{xx} 線素の変化したことを意味する
そこで e_{xx} を x 方向における 延長率 (elongation) と称する．
この様 y 軸および z 軸の方向でも長さの変化があり，この意味で 単なる 延長 (simple elongation) という．
$e_{xx} < 0$ のときは $|e_{xx}|$ ~~~~ を ~~~~ 縮率 (contraction) をあらわす．



b) e_{yz} 以外は Δ と 0 とおくと，
$\delta\xi_x = \delta x$　　$\delta\xi_y = \delta y + \frac{1}{2}e_{yz}\delta z$
$\delta\xi_z = \delta z + \frac{1}{2}e_{yz}\delta y$
この場合には x 方向では長さの変化は少しも考えない．yz 平面内では，変形後 x 軸と y ~~~~ ~~~~ のなす角 ~~~~ $\frac{\pi}{2}$ より ~~~~ $\frac{\pi}{2}$ より小さくなること

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

十この対応をを決めたり（ y_{xx} と $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ と比較する）

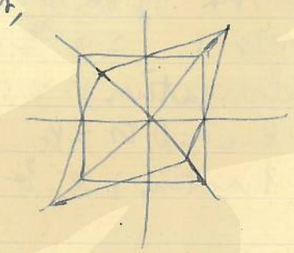


$$\delta y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta y + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta z$$
$$\delta z' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\delta y + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta z$$

であるから，

$$\delta s_{y'} = \left(1+\frac{1}{2}e_{yz}\right)\delta y'$$
$$\delta s_{z'} = \left(1-\frac{1}{2}e_{yz}\right)\delta z'$$

とする．即ち y'-軸の方向では長さは $\frac{1}{2}e_{yz}$ の相対変化，z'-軸の方向では縮率が $\frac{1}{2}e_{yz}$ である．思考実験この場合 ~~γ は~~ 元の正方形は，



各辺もわずかな小さな ~~長方形になる~~ その面積はその正方形の

$$\left(1+\frac{1}{2}e_{yz}\right)\left(1-\frac{1}{2}e_{yz}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}e_{yz}^2$$

~~である~~．なぜなら，~~主軸方向~~ 相対的な縮みの量を考えるとき，$e_{yz} \ll 1$ であるから，面積の変化率 $\left(\frac{1}{4}e_{yz}^2\right)$ は全く考えしない．

~~γ は e_{yz}~~

iv) 歪の主軸 Principal Axes of Strain

一般の変形の性質を調べるには次のような方向が役立つ．

(4.16) のような一般の変形に対して連続する二点 (x, y, z), $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ の距離 δr は δs と書きあらわす．

但し

$$\delta r^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$$

$$\delta s^2 = (1+\gamma_{xx})\delta x^2 + (1+\gamma_{yy})\delta y^2 + (1+\gamma_{zz})\delta z^2 + 2\gamma_{xy}\delta x\delta y + 2\gamma_{zx}\delta z\delta x + 2\gamma_{yz}\delta y\delta z$$

$$\gamma_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

~~また~~ 各形が微小の量なら，(1.24) より

$$\gamma_{xx} = 2e_{xx} + e_{xx}^2 + e_{xy}^2 + e_{xz}^2$$
$$\gamma_{xy} = e_{xy} + \frac{1}{4}(e_{xx}e_{xy} + e_{xy}e_{yy} + e_{xz}e_{yz})$$

である．

今 (x, y, z) 点を O とし，x 軸上の δx である距離の P，y 軸上の δy である距離の Q，z 軸上の δz である距離の R をとる．無論これらが

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

また O', P', Q', R' が結ばれたとすると

$$\overline{O'P'} = \sqrt{1+\gamma_{xx}}\,\delta x$$
$$\overline{O'Q'} = \sqrt{1+\gamma_{yy}}\,\delta y$$
$$\overline{O'R'} = \sqrt{1+\gamma_{zz}}\,\delta z$$

$$\overline{P'Q'} = \sqrt{(1+\gamma_{xx})\delta x^2 + 2\gamma_{xy}\delta x\delta y + (1+\gamma_{yy})\delta y^2}$$

etc

である。従って x, y, z 方向の延長率はそれぞれ

$$\sqrt{1+\gamma_{xx}}-1,\quad \sqrt{1+\gamma_{yy}}-1,\quad \sqrt{1+\gamma_{zz}}-1$$

であらわされる。

次に x 軸と y 軸とが変形後なす角度を θ_{xy} とすると

$$\cos\theta_{xy} = \frac{\overline{P'Q'}^2 - \overline{O'P'}^2 - \overline{O'Q'}^2}{2\,\overline{O'P'}\cdot\overline{O'Q'}}$$
$$= \frac{\gamma_{xy}}{\sqrt{1+\gamma_{xx}}\sqrt{1+\gamma_{yy}}}$$

となる。もし $\gamma_{xy}=0$ ならば変形後も直交している。

今 (1.5) 式の関係によって (x, y, z) 系の座標系から (x', y', z') なる新しい座標系に移ったとし、この座標系で変形後の二点間の距離 $\delta s'$ をもとめると

$$\delta s'^2 = (1+\gamma_{x'x'})\delta x'^2 + (1+\gamma_{y'y'})\delta y'^2 + (1+\gamma_{z'z'})\delta z'^2 + 2\gamma_{x'y'}\delta x'\delta y' + 2\gamma_{x'z'}\delta x'\delta z' + 2\gamma_{y'z'}\delta y'\delta z'$$

であらわされるとなお方 (1.8) により第の (1.) 式

$$\delta s'^2 = (1+\gamma_{xx})(a_{xx}\delta x' + a_{yx}\delta y' + a_{zx}\delta z')^2 + (1+\gamma_{yy})(a_{xy}\delta x' + a_{yy}\delta y' + a_{zy}\delta z')^2 + (1+\gamma_{zz})(a_{xz}\delta x' + a_{yz}\delta y' + a_{zz}\delta z')^2 + 2\gamma_{xy}(a_{xx}\delta x' + a_{yx}\delta y' + a_{zx}\delta z')(a_{xy}\delta x' + a_{yy}\delta y' + a_{zy}\delta z') + 2\gamma_{xz}(a_{xx}\delta x' \quad)(a_{xz}\delta x' + \cdots$$

であるから、 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ etc.,
$\gamma_{x'y'} = \gamma_{y'x'}$ etc.,

と書けば、

$$\gamma_{x'x'} = a_{xx}(a_{xx}\gamma_{xx} + a_{xy}\gamma_{xy} + a_{xz}\gamma_{xz}) + a_{xy}(a_{xx}\gamma_{yx} + a_{xy}\gamma_{yy} + a_{xz}\gamma_{yz}) + a_{xz}(a_{xx}\gamma_{zx} + a_{xy}\gamma_{zy} + a_{xz}\gamma_{zz})$$

$$\gamma_{x'y'} = a_{yx}(a_{xx}\gamma_{xx} + a_{xy}\gamma_{xy} + a_{xz}\gamma_{xz}) + a_{yy}(a_{xx}\gamma_{yx} + a_{xy} + \cdots\}$$
$$+ a_{yz}(a \quad + \quad +$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

とする。

次に $(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{pmatrix}$

は対称テンソルであり、

初に回転の系の中 a_{xx} と a_{xy} と a_{xz} が

$$\left.\begin{aligned} a_{xx}\gamma_{xx} + a_{xy}\gamma_{xy} + a_{xz}\gamma_{xz} &= a_{xx}\gamma_1 \\ a_{xx}\gamma_{yx} + a_{xy}\gamma_{yy} + a_{xz}\gamma_{yz} &= a_{xy}\gamma_1 \\ a_{xx}\gamma_{zx} + a_{xy}\gamma_{zy} + a_{xz}\gamma_{zz} &= a_{xz}\gamma_1 \end{aligned}\right\} *$$

の関係を満たすから、

$\gamma_{xx} = \gamma_1$
$\gamma_{xy}' = 0$
$\gamma_{xz}' = 0$

となる。但し γ_1 は γ に関する次方程式

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xx}-\gamma & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy}-\gamma & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz}-\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (\ )$$

の解でなければならぬ。

次に a_{yx}, a_{yy}, a_{yz} が

$$\left.\begin{aligned} a_{yx}\gamma_{xx} + a_{yy}\gamma_{xy} + a_{yz}\gamma_{xz} &= a_{yx}\gamma_2 \\ a_{yx}\gamma_{yx} + a_{yy}\gamma_{yy} + a_{yz}\gamma_{yz} &= a_{yy}\gamma_2 \\ a_{yx}\gamma_{zx} + a_{yy}\gamma_{zy} + a_{yz}\gamma_{zz} &= a_{yz}\gamma_2 \end{aligned}\right\} \dagger$$

を満足するから

$\gamma_{yy}' = \gamma_2$
$\gamma_{xy}' = 0$
$\gamma_{yz}' = 0$

となる。但し γ_2 も「上式の γ_1 とは異なる」次方程式の解である。

次に a_{zx}, a_{zy}, a_{zz} が

$$a_{zx}\gamma_{xx} + a_{zy}\gamma_{xy} + a_{zz}\gamma_{xz} = a_{zx}\gamma_3$$

を満足するから

$\gamma_{zx}' = \gamma_{zy}' = 0$　$\gamma_{zz}' = \gamma_3$

となる。

所で $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ が三次式 $(\ )$ の異なる三根であると、新しい x', y', z' 軸はそれぞれ定まる訳である。

ここで * 式の a_{xx}, a_{yx}, a_{yy}, a_{yz} を、† 式の a_{xx}, a_{xy}, a_{xz} をおけて正しい解へ導く（γ）が対称テンソルであるから、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$(\gamma_1-\gamma_2)(a_{xx}a_{yz}+a_{xy}a_{yy}+a_{xz}a_{yz})=0$
$\gamma_1=\gamma_2$
となる。

さらに $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ の中、例えば $\gamma_1=\gamma_2$ のときは、

$a_{xx}:a_{xy}:a_{xz}$
なる方向と
$a_{yx}:a_{yy}:a_{yz}$
なる方向とを含む平面内の各方向は凡て上の式を満たす。従ってこのような重根の方向を2つとることが出来る。

この様な純粋の伸縮の系に対して、互いに直交する3つの重根でない方向が存在し、これらを x', y', z' 方向にとると

$$\left.\begin{aligned}\delta s'_x &= \sqrt{(1+\gamma_1)}\,\delta x' \\ \delta s'_y &= \sqrt{(1+\gamma_2)}\,\delta y' \\ \delta s'_z &= \sqrt{(1+\gamma_3)}\,\delta z'\end{aligned}\right\}$$

即ち（elongation）又は縮伸のみがある。
これらの方向の過点

これらの方向を歪の主軸（principal axes）と称する。又上のように x', y', z' への座標変換を主軸変換（transformation to principal axes）という。 Hauptachsentransformation

（ ）の行列式は正しく書くと、

$$-\gamma^3+(\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz})\gamma^2$$
$$-(\gamma_{xx}\gamma_{yy}+\gamma_{yy}\gamma_{zz}+\gamma_{zz}\gamma_{xx}-\gamma_{xy}^2-\gamma_{yz}^2-\gamma_{zx}^2)\gamma$$
$$+\begin{vmatrix}\gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{vmatrix}=-(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)(\gamma-\gamma_3)$$
$$=0$$

—行列式をつくってみる

である。しかし $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はその間の各係を保いて従って、

$$\gamma_{xx}+\gamma_{yy}+\gamma_{zz}=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$$
$$\gamma_{xx}\gamma_{yy}+\gamma_{yy}\gamma_{zz}+\gamma_{zz}\gamma_{xx}-\gamma_{xy}^2-\gamma_{yz}^2-\gamma_{zx}^2=\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1$$
$$\begin{vmatrix}\gamma_{xx} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{vmatrix}=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

は歪変換の様な方向を内包する量（invariant）である。

上の主軸変換の幾何的意味を考えてみる。
最初 (x, y, z) を中心とする、小半径の球をとると、上記の如き歪によって、それは一般に二次曲面に変形されてゆくが、それは双曲線面、放物線面、又はあり得ないが、楕円面、これを歪の二次曲面（strain quadric）と称する。
hyperboloid　paraboloid

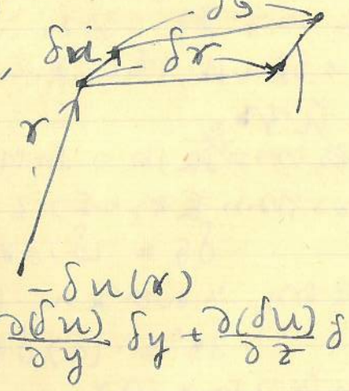
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$(1+\gamma_{xx})\delta x^2+(1+\gamma_{yy})\delta y^2$
$+(1+\gamma_z)\delta z^2 = \delta s = \text{const.}$

(ellipsoid) でなければならぬ。逆にこうで
~~この~~ 表わされる ~~ellipsoid~~ 楕円体は 変形後は $\delta s = \text{constant}$
球になってゐる。この楕円体の主軸が上に
おめた ~~x', y', z'~~ x'-, y'-, z'- 軸に他ならぬ。
~~この方向では その方向の~~ 逆にその
間は これらを主軸とし、軸の長さが
$1+\gamma_{x'x'} : 1+\gamma_{y'y'} : 1+\gamma_{z'z'}$
なる楕円体になってゐる。

1で上のやく、任意の点 ξ に於て、任意方向の
小線分を取ると、その両端の変形前の座標と変
形後の座標の間には一次的な関係が成立し、
従って直線は直線に、楕円体は楕円体
~~一般に二次曲面は二次曲面に~~ 変形される。
~~但し、例外なないこの線分を除けば、~~ 必ずしも
~~さうでない。~~
~~一般の~~ 例外 ~~(平行移動を除く)~~ を除いて、一次的な
関係が成立する場合 ~~おのを~~ を一様な
変形 (homogeneous strain) と称する。
~~以後述べる如く、弾性体の変形は~~ 多くの場合、
少くとも第一近似にて、一様な変形と考へ
(得る。

V) 補足な点。
~~一般の~~ 変形 ~~の~~ が ~~一般~~ 一般の ~~変形~~ を分ける ~~一般の~~ 一般の ~~変形~~ 時間の間 ~~一般の~~ 一般の ~~変形~~ をなす。従って極めて
短い時間の間には極めて小さい変形しか
行はれない。
~~即ち~~ 即ち t なる時刻に r なる ~~点~~ 点にあった質点が ~~時刻~~ $t+\delta t$ なる
時刻には ~~点~~ 点 $r+\delta r$ なる ~~点~~ 点に ~~移~~ 微小変位を行って
$r+\delta u(r)$
$r+\delta r+\delta u(r+\delta r)$
に移動してゐるとすると、 $\delta u + \delta r$
相対変位は δr
~~から~~
$\delta s = \delta r + \delta u(r+\delta r) - \delta u(r)$
$\delta s_x = \delta x + \delta u(r+\delta r) - \delta u(r)$
$= \delta x + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(\delta u)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(\delta u)}{\partial z}\delta z$
etc



を考慮して ~~ゐる~~ ゐる。
従って
$\delta s = (\delta)\delta r + (f)\delta r$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\delta s_x = (1+f_{xx})\delta x + f_{xy}\delta y + f_{xz}\delta z$$
etc.

と書ける。
但し、$f_{xx} = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}$ etc. はあまり小さい量である。
この如き変形を一般に微小変形 (infinitesimal strain) と称する。この場合には (iii) の方法として、一般の変形を微小過程、微小な線形の変形の合成と考える。
この場合には、任意の点に次の如き局所的関係が存在する。
最初の二点間の相対位置を δr、これが (f) なる微小変形によって δr 相対位置が

$$\delta s = (f)\delta r + (f)\delta r$$

となり、それがまた (g) の変形によって δs

$$\delta s' = (g)\delta s + (g)\delta s$$

になったとすると、

$$\delta s' = (g)\delta r + (f+g)\delta r$$

である。
(i.e. $\delta s_x' = \delta s_x + g_{xx}\delta s_x + g_{xy}\delta s_y + g_{xz}\delta s_z$
$= \delta s_x + f_{xx}\delta s_x + f_{xy}\delta y + f_{xz}\delta z$
$+ g_{xx}\delta x + \cdots + g_{xy}\delta y + \cdots + g_{xz}\delta z + \cdots)$

即ち、二つの微小変形の合成は、各点におけるそれぞれの変形テンソルの和で与えられる。
従って変形の合成は可換的な小過程にある。
また一般に有限の微小変形の合成は、それぞれのテンソルの和を結合として表わされる。
即ち一般に

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

なるテンソルで表わされる微小変形は

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & f_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

なる簡単な変形を次々に合成することで出来る。

微小変形の純粋回転に対しては
$\gamma_{xx} = 2e_{xx} = 2f_{xx}$ etc.
$\gamma_{xy} = e_{xy} = 2f_{xy}$ etc.
なる関係が成立する。
即ち $\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} = 2(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$
$= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

は座標の取り方に無関係である。次に電場がそれに加われば、全のテンソルは

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

の形に書ける。従ってこれを x', y', z' 軸に沿う

$$\sqrt{1+\gamma_1},\ \sqrt{1+\gamma_2},\ \sqrt{1+\gamma_3}$$

なる変化に分解出来る。従って元の

$$\sqrt{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(1+\gamma_3)} = 1+\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)$$
$$= 1+\tfrac{1}{2}(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})$$

これへうつる。

$$= 1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$= 1+\operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

でおへうつる。

次に(1.21)によると、回転をあらわすテンソルは

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

従って、$w_x = g_{zy} = \frac{1}{2}(k_{zy}-k_{yz})$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$
etc

従って、$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\operatorname{curl} \boldsymbol{u}$

次に純粋回転の場合には これを

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_z & 0 \\ w_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{etc.}$$

それ w_x, w_y, w_z なる角の

だけ x, y, z 軸のまわりの回転に分解出来る。

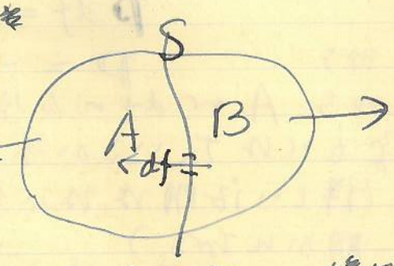
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§2. 応力 Stress

1) 一般的な考察 General Considerations

今までは考える連続体の変形，即ち運動学的な方面のみを考察したが，次にそれにこの力学的な原因を惹起する力に就いて考察しよう．

一つの物体を仮想の面Sによって二つの部分A, Bに分けて考へ，Aに働く力を両方から引張るか，押すかするとき



その場合，A, Bの物体が動かぬとすると，A, Bの二部分は互に離れまいとして力を及ぼし合って居る．その為めには A, Bの間には境界面Sを通して相互に力を及ぼすと考へねばならぬ．

（所謂表面力 surface force）

S上の微小面積 df を通して A が Bになす力を

$$\mathbf{P}\,df$$

とする．この $\mathbf{P}$ を A or F：これを A or df の上に働く応力又は張力（stress）と称する．A の B から A の方向に df の法線の方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_0$ とすると，$\mathbf{P}$ は一般には，A が B になす力に対しては必ずしも $\mathbf{n}_0$ の方向にあるとは限らない．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\mathfrak{p}_{n_0}$ と平行していない．$\mathfrak{p}_{n_0}$ が正なら，$\mathfrak{p}$ を張力（tension），負なら圧力（pressure）と称する．

同様にして B が df を通して A に及ぼす力を

$$\mathfrak{p}' df$$

とすると，作用と作用の法則により

$$\mathfrak{p} df = -\mathfrak{p}' df$$

すなわち $\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}'$，

すなわち A が df に及ぼす力と B が df に及ぼす力とは大いさが等しく方向が相反する．

（詳しい説明はなお述べる法をまたねばならない）

物体内の任意の微小，~~容積 dv 内における質点~~

物体内の任意の閉曲面 S をとり，これに包まれた部分 V を考えると，これに働く表面力を合成したものは

$$\mathfrak{F} = \iint_S \mathfrak{p}\, df$$

である．但し右辺の面積分は S 全体について行う．

（external force）17

この外に連続物体の各部分には物体の内部から表面力を及ぼし合う働く，これは物体の内部の力であり，又内力である．これに対して，外部から働く力すなわち外力（external force）は一般にその部分の質量に比例する．今微小部分の体積を dv，密度を ρ，~~比例定数~~ 今任意体積に働く力を $\mathbf{K}$ とすると，この部分に働く~~外~~外力は

$$\mathfrak{F}' = \rho \mathbf{K}\, dv \qquad (\ )$$

である．これを体積について~~積~~積分して容積力（body force）と称する．

~~任意の~~ r が原点からの dv の微小体積を与えると，その運動量は 体をは ρdv，かく与えた $\rho dv \cdot \frac{dr}{dt}$ 運動量は $\mathfrak{M} = \rho dv \frac{dr}{dt}$ である．

は $\frac{d^2r}{dt^2}$ であるから，運動方程式は

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \rho\, dv \frac{d^2r}{dt^2} = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}'$$

と表わされる．但し，$\mathfrak{F}'$ は外力で，$\mathfrak{F}$ は dv を包む面上についての表力の合成したもので ~~$\mathfrak{F} = \mathfrak{p}$~~ である．

又角運動量は $\mathfrak{L} = \rho dv \left[r \frac{dr}{dt} \right]$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ii) 応力のテンソル Stress Tensor

物体内の任意の微小表面を通じて働く応力は一般に $\mathbb{P}df$ は，一般に df の位置のみならず，df の向き，即ちその法線に関係する．今 df の法線の方向の単位ベクトルを n_0 とおくと，$\mathbb{P}$ は n_0 の方向に関する．$\mathbb{P}$ の n_0 の方向の成分を法線応力（normal stress），直接角方向のものを接線応力（tangential stress）と称する．なお $\mathbb{P}$ が n_0 を法線とする微小面 df に作用している応力であることを示すために $\mathbf{P}_n$ と書くこともある．

次に x, y, z を方向に垂直な微小平面 df_x, df_y, df_z に作用する応力を（x, y, z の大きい方から三つに限らなくともよい）それぞれ $\mathbb{P}_x, \mathbb{P}_y, \mathbb{P}_z$ とおき，それらの x, y, z 成分をそれぞれ

$$(P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}) \quad \text{etc}$$

と書くと，

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{P}_x &= \vec{i}P_{xx} + \vec{j}P_{xy} + \vec{k}P_{xz}\\ \mathbb{P}_y &= \vec{i}P_{yx} + \vec{j}P_{yy} + \vec{k}P_{yz}\\ \mathbb{P}_z &= \vec{i}P_{zx} + \vec{j}P_{zy} + \vec{k}P_{zz}\end{aligned}\right\}$$

であるから，

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \rho dv\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = [\mathbf{r}\mathbb{F}] + [\mathbf{r}\mathbb{F}'] \quad (\ )$$

任意の閉曲面 S で包まれた物体の体積 V において積分すると，これらの式は

$$\iiint_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dv = \iiint_V \rho\mathbf{K}\,dv + \iint_S \mathbb{P}\,df \quad (\ )$$

$$\iiint_V \rho\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]dv = \iiint_V \rho[\mathbf{r}\mathbf{K}]\,dv + \iint_S [\mathbf{r}\mathbb{P}]\,df \quad (\ )$$

従って，この体積が平衡状態にあるためには

$$\left.\begin{aligned}\iiint_V \rho\mathbf{K}\,dv + \iint_S \mathbb{P}\,df = 0\\ \iiint_V \rho[\mathbf{r}\mathbf{K}]\,dv + \iint_S [\mathbf{r}\mathbb{P}]\,df = 0\end{aligned}\right\} \quad (\ )$$

なる条件が満たされねばならぬ．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

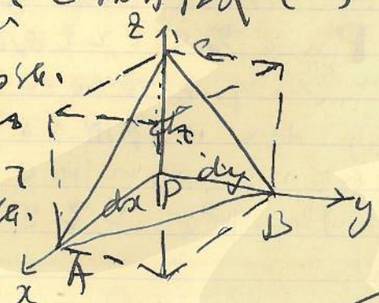
$\mathbf{P}$

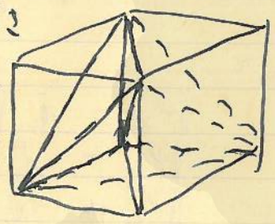
(作る四面体) .

である. ~~この P_x の符号~~

今 P_n と P_x, P_y, P_z の間にどのような関係があるか考えるために, 図のように P ~~点~~ の他に3点 n_0 を法線とする面をとり これが x を通って x, y, z 軸に平行な面積をそれぞれ A, B, C とし, PABC を頂点とする四面体を考え, また n_0 は四面体 ~~の~~ が含まれない向きのものとする. また, PA, PB, PC は夫々 dx, dy, dz とする.

この四面体に対して通知の式 ( ) を適用すると, ~~四面~~ を通ずる式の第一項は四面体の体積, $\frac{1}{3}dx\,dy\,dz$ に比例し, ~~これ~~ これに対して式の第二項は四面体の各面積, 例えば $dx\,dy$ 等に比例するから, 結局四面体を小さくしていけば, 式の第二項は消える. 従って四面体の各辺の長さ dx, dy, dz を小さくしていけば





$$\iint_S \mathbf{P}\,df = 0 \qquad (\ )$$

が成立つ. ~~任意の~~ S を一般の閉曲面 ~~として~~ にとって ( ) の関係が成立する.

今の場合

$$\iint_{\triangle ABC} \mathbf{P}\,df + \iint_{\triangle PAB} \mathbf{P}\,df + \iint_{\triangle PBC} + \iint_{\triangle PCA} = 0$$

即ち

$$\mathbf{P}_n\,df + \mathbf{P}_{-x}\,df_x + \mathbf{P}_{-y}\,df_y + \mathbf{P}_{-z}\,df_z = 0$$

但し, P_{-x} etc は ~~x の小さい方から x に垂直な方向の面積を~~ 法線の向きを $-x$ とする法線の面を通して働く力. df_x etc は $\triangle PBC$ の面積. ~~df~~ df は $\triangle ABC$ の面積.

$\therefore\ df_x = (i n_0)\,df \quad df_y = (j n_0)\,df$

$df_z = (k n_0)\,df$

なり

$$\mathbf{P}_n + \mathbf{P}_x(i n_0) + \mathbf{P}_{-y}(j n_0) + \mathbf{P}_{-z}(k n_0) = 0$$

しかも $P_{-x} = -P_x$ etc.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(　)

なお
$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_x(\vec{i}n_0) + \mathbb{P}_y(\vec{j}n_0) + \mathbb{P}_z(\vec{k}n_0)$$
x, y, z 方向の成分をとって書けば
$$\left.\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx}\,l + P_{yx}\,m + P_{zx}\,n \\ P_{ny} &= P_{xy}\,l + P_{yy}\,m + P_{zy}\,n \\ P_{nz} &= P_{xz}\,l + P_{yz}\,m + P_{zz}\,n \end{aligned}\right\}(\ )$$
ただし, (l, m, n) は n_0 の方向余弦 (direction cosine). ~~xxx~~ この形にして後の式も n が出てくる方向の和に依存しない量は

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix}$$

なる 9 個の成分によって一義的に決まる。これを 9 個の成分は集って全体として一つのテンソルを形成しているという事実と同様である。

∴ (x, y, z) を任意の ~~xxx~~ 新しい座標系では $(x' y' z')$ であらわすとし,
$$x' = a_{xx}\,x + a_{xy}\,y + a_{xz}\,z$$
etc.

この関係があるとして, 今
$$a_{xx}, a_{xy}, a_{xz}$$
は新しい x' 軸の方向余弦を表わす. 従って
$$\mathbb{P}_{x'} = \mathbb{P}_x a_{xx} + \mathbb{P}_y a_{xy} + \mathbb{P}_z a_{xz}$$
であらわされる. 従って, $\mathbb{P}_{x'}$ の x', y', z' 成分は
$$\begin{aligned} P_{x'x'} = {} & a_{xx}(P_{xx}a_{xx} + P_{yx}a_{xy} + P_{zx}a_{xz}) \\ & + a_{xy}(P_{xy}a_{xx} + P_{yy}a_{xy} + P_{zy}a_{xz}) \\ & + a_{xz}(P_{xz}a_{xx} + P_{yz}a_{xy} + P_{zz}a_{xz}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$
なお $P_{y'}$, $P_{z'}$ の x', y', z' 成分についても同様である. これは (1.13) であらわされるテンソルの座標の変換式である.

(PQR…) なる閉路を P とおく.
次に曲面積の代りに (x, y, z) 近傍の同じ方向に垂直な ~~xxx~~ 座標軸に平行な dx, dy, dz なる長さの微小な直方体 ( ) 式を適用すると, 体積積分は全表面の
$$\iint_S [\gamma \mathbb{P}]\, df = 0 \qquad (\ )$$
~~xxx~~ 微小体積に働く面力の総和は 0 である,

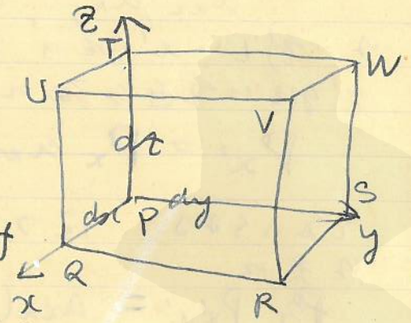
©2022 YHAL, RIMS, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$[r+\frac{i\,dx}{2},\ P_x+\frac{1}{2}\frac{\partial P_x}{\partial x}dx] = [r-\frac{i\,dx}{2},\ P_x-\frac{1}{2}\frac{\partial P_x}{\partial x}dx]$$

の関係が成立する。但し、Sは直方体の表面をとれば。次の

$$\iint_{PQRS}[rP]\,df + \iint \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = 0$$

$$\iint_{QRVU}[rP]\,df + \iint_{PSWT}[rP]\,df$$



$$= [(r+i\,dx),\ P_x+\frac{\partial P_x}{\partial x}dx]\,dy\,dz + [r,\ P_{-x}]\,dy\,dz$$

$$= \{[r,\ \frac{\partial P_x}{\partial x}] + [i\ P_x]\}\,dx\,dy\,dz$$

$r=0$ とおいても差しかえをせず

$$\iint_{QRVU} + \iint_{PSWT} = [i\,P_x]\,dx\,dy\,dz$$

$$= (k\,P_{xy} - j\,P_{xz})\,dx\,dy\,dz$$

同様にして他の2つの面の和をとると

$$i(P_{yz}-P_{zy}) + j(P_{zx}-P_{xz}) + k(P_{xy}-P_{yx}) = 0$$

ゆえに

+ r のかわりに $r+a$ とおいても $\left(\iint[aP]\,df\right)_z = \iint_S (a_x P_{xy} - a_y P_{yx})\,df$

$= a_x(\iint P_y\,df)_y - a_y S(\ )_x = 0$

21

$$P_{yz}=P_{zy},\quad P_{zx}=P_{xz},\quad P_{xy}=P_{yx}$$

の関係が得られる。即ち応力のテンソルは対称で、六つの成分で応力状態が決まることになる。

注) ~~応力の二次曲面~~

今任意点Pをとれば、それから各方向に線分 r_0 を取りこれを法線とする微小平面の上の応力を P とおくと、

$$P = P_x(i r_0) + P_y(j r_0) + P_z(k r_0)$$

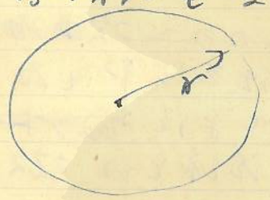
そこで P と r_0 とのスカラー積を~~とると~~、即ち r_0 上にある面に働く応力の法線の方向の成分、すなわち垂直応力（normal stress）を P_r とおくと、

$$P_r = P r_0 = (i r_0)(P_x r_0) + (j r_0)(P_y r_0) + (k r_0)(P_z r_0)$$

これに対して接線応力（tangential stress）は

$$P_t = P t_0 = (i r_0)(P_x t_0) + (j r_0)(P_y t_0) + (k r_0)(P_z t_0)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

とする。但し r_0 は微小平面Pのある方向の
定位ベクトルを表す。
所で r_0 の方向を変化すると P_r も変化
するが、原点から r_0 上において r を
$$r = \frac{r_0}{\sqrt{P_r}} = \frac{r_0}{\sqrt{P r_0}}$$
~~とする~~ とすると、r_0 の方向を変へて
行くと r は一つの閉曲
面を描く。この面を求
めよ

$$P_r r^2 = 1$$
即ち
$$(ir)(P_x r) + (jr)(P_y r) + (kr)(P_z r) = 1$$
( ) を代入すると、
$$P_{xx}x^2 + P_{yy}y^2 + P_{zz}z^2 + 2P_{yz}yz + 2P_{zx}zx + 2P_{xy}xy = 1 \quad (*)$$
これは二次曲面を表す。これを応力の
二次曲面 (stress quadric) と称する。
この二次曲面の三つの主軸の方向を座標軸にとれば (x', y', z'-軸) これは
$$P'_{x'x'}x'^2 + P'_{y'y'}y'^2 + P'_{z'z'}z'^2 = 1$$
となり、$P_{y'z'} = P_{z'x'} = P_{x'y'} = 0$ となる。
即ちこの三つの方向は応力の方向は、即
(垂直な面に働く)

$P_{x'x'}, P_{y'y'}, P_{z'z'}$ そのたいさは P_r にもしい。 22

n 重点で、ある、こんなの P_r を これを
三つの値を応力の主値 (Principal values of stress) と称する。これらの主値を与える平面を
応力の主平面 (principal plane of stress) という。
$P_{x'x'}, P_{y'y'}, P_{z'z'}$ は
$$\begin{vmatrix} P_{xx}-P & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy}-P & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz}-P \end{vmatrix} = 0$$
の三つの根としてあらわされる。
従って
$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$$
$$P_{xx}P_{yy} + P_{yy}P_{zz} + P_{zz}P_{xx} - P_{xy}^2 - P_{zx}^2 - P_{yz}^2$$
$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix}$$
は座標軸のとり方に不変な量である

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

応力方程式 Stress Equations

iii) Gaussの定理

任意の閉曲面 A の内部に場合がある任意の点 P (1)を中心とする微小な平行六面体、各辺が x, y, z 軸に平行で、各辺の長さが夫々 dx, dy, dz であるものを取り

i) で述べた一般の連続的な量の方程式の面積分と体積分との両方を含んでいる。

そこで面積分を体積分に書き換える問題を考へてみる。

φ を x, y, z の一価 (one valued) 連続 (continuous) 函数とし、任意の領域 V について

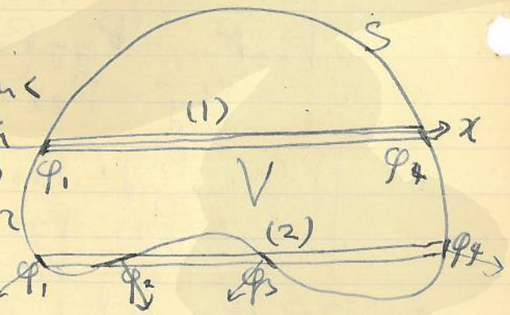
$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv$$

なる体積分を取る。

但し、領域 V は図の如く凹んだ所をなくてもよいし、又数個の孤立した領域からなりたってもよい。

$dv = dx \cdot dy \cdot dz$

と書いて、これについて積分するに (1) の如き dy dz なる面素を底とする柱について



$$(\varphi_4 - \varphi_1)\, dy\, dz$$

(2) の如き形では

$$(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3)\, dy\, dz \quad (\ )$$

となる、今同様に

但し、$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ なる函数と各辺が V の境界面 S と各々点における φ の値をとります、今函数と S との交る点における S の内部の面積を df_1, df_2, df_3, df_4 とし、この点における S に対する外方法線 (outward normal) と x 軸と成す角の cos を夫々

$$l_1, l_2, l_3, l_4$$

とおくと

$$dy\, dz = -l_1 df_1 = l_2 df_2 = -l_3 df_3 = l_4 df_4$$

従つて上の形の ( ) 内は

$$\varphi_4 l_4 \frac{}{df_4} + \varphi_3 l_3 \frac{}{df_3} + \varphi_2 l_2 \frac{}{df_2} + \varphi_1 l_1 \frac{}{df_1}$$

次に φ についての積分を行うには、これらの面素、函数を書き換えねばならないから、

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv = \iint_S \varphi l\, df$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

となる。

同様にして
$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dv = \iint_S \varphi m\, df$$
$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dv = \iint_S \varphi n\, df$$
が得られる。但し，(l, m, n) は S 上における外方法線の方向余弦を表す，これを一つのベクトルで書けば
$$\iiint_V \mathrm{grad}\,\varphi \cdot dv = \iint_S \varphi\, df$$
となる。但し，df は大いさが面積を表し df に等しく，外方法線の方向をもつ微小ベクトルを表す，すなわち $df = n_0 df$ である。

次に一つのベクトル A の代りに
一つのベクトル A の x, y, z 成分
A_x, A_y, A_z をとり，この場合について考えると，
$$\iiint_V \mathrm{div}\, A \cdot dv = \iint_S A\, df \quad (\ )$$
が得られる。これを Gauss の定理という。

次に ( ) 式において φ の代りに $\psi\varphi$ なる式をとると
$$\iiint_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dv + \iiint_V \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv = \iint_S \psi\varphi\, l\, df$$
この式の φ の代りに $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ をとり，( )式からも同様な式を作って辺々加えあわせると
$$\iiint_V \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{grad}\,\psi\, dv + \iiint_V \psi \Delta\varphi\, dv = \iint_S \psi \cdot \mathrm{grad}\,\varphi \cdot df$$
(Laplacian)
が得られる。但し，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
これから ψ と φ とを入換えたものを作り辺々相減ずると
$$\iint_S (\psi\, \mathrm{grad}\,\varphi - \varphi\, \mathrm{grad}\,\psi)\, df = \iiint_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\, dv$$
が得られる。これを Green の定理という。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

よって（　）式より

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_x(\boldsymbol{i}n_0) + \mathbb{P}_y(\boldsymbol{j}n_0) + \mathbb{P}_z(\boldsymbol{k}n_0)$$

ここで、

$$P_{yz} = P_{zy},\quad P_{zx} = P_{xz},\quad P_{xy} = P_{yx}$$

であるから、ここで

$$\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx}n_{0x} + P_{yx}n_{0y} + P_{zx}n_{0z} \\ &= P_{xx}n_{0x} + P_{xy}n_{0y} + P_{xz}n_{0z} \\ &= \mathbb{P}_x n_0 \end{aligned}$$

なり

$$\mathbb{P}_n = \boldsymbol{i}(\mathbb{P}_x n_0) + \boldsymbol{j}(\mathbb{P}_y n_0) + \boldsymbol{k}(\mathbb{P}_z n_0)$$

とも書ける。

故に任意の閉曲面 S になし、

$$\iint_S \mathbb{P}_n\, df = \iint_S (\mathbb{P}_x n_0)\boldsymbol{i}\, df + \iint_S (\mathbb{P}_y n_0)\boldsymbol{j}\, df + \iint_S (\mathbb{P}_z n_0)\boldsymbol{k}\, df$$

が成立する。

Gauss の定理により

$$\iint_S (\mathbb{P}_x n_0)\, df = \iint_S \mathbb{P}_x\, df = \iiint_V \operatorname{div}\mathbb{P}_x\, dv$$

etc.

であるから、

$$\iint_S \mathbb{P}_n\, df = \boldsymbol{i}\operatorname{div}\mathbb{P}_x + \boldsymbol{j}\operatorname{div}\mathbb{P}_y + \boldsymbol{k}\operatorname{div}\mathbb{P}_z$$

と書くと、

$$\iint_S \mathbb{P}_n\, df = \iiint_V \mathbb{P}^*\, dv$$

が得られる。

従って 運動方程式（　）は

$$\iiint_V \rho\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\, dv = \iiint_V \rho\boldsymbol{K}\, dv + \iiint_V \mathbb{P}^*\, dv$$

の形に書ける。この式が V が我う小さくても成立するためには、物体内の各点において

$$\rho\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \rho\boldsymbol{K} + \mathbb{P}^* \qquad (\ )$$

が成立せねばならぬ。x, y, z 成分について

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2} = \rho K_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}$$

etc.

が得られる。これを運動の基本方程式（stress-equation of motion）と称する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この式の左辺は物体の任意微小部分に働く力は全力ではなく、全力の勾配 ~~gradient~~ (stress gradient) であることである。この意味で全力は力積よりはむしろ力のポテンシャルに似ている。何れが一般な応力状態で物体運動の原因とはなり得ない。

よく同様にして ( ) 式はいえて、それで

$$\rho\left[x\frac{dv_x}{dt}\right] = \rho[xK] + [xP^*]$$

の関係が

外力物体の各部分が釣合の状態にある場合には

$$\rho K + P^* = 0$$

即ち

$$\rho K_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = 0$$

etc.

が成立する。これを弾性体の全力方程式 (stress equation of motion) と称す。

§3

§21. Hookeの法則 (Hooke's law)

第一章で一般の変形を生ずる外力と全力とを考えたが、これは応力のみのものではなく、全力が釣合すればそれぞれ、又全力がそれぞれ力を及ぼすのを考慮である。応力のみは全力の内力を与える。

所が通常の固体には力が働き、そのために極めて小さな変形をしている場合には第一近似として、全く力のない場合と同じ変形が容易によく知られている。しかし、物体が予め変形している場合には外力 K と全力 P の関係は

$$\rho K + P^* = 0$$

$$\rho K_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = 0$$

~~$K_y = K_z = 0$, $P_{xy} = P$~~
~~$P_{xx} = 0$ 又は 0 とおく~~

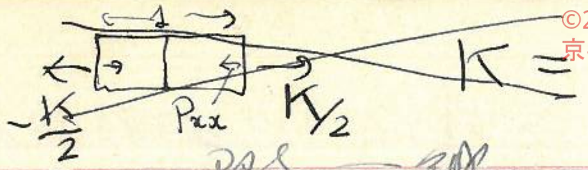
$$\rho K_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = 0$$

~~従って物体に働く外力を全体積にわたって積分したものは~~

$$\iiint \rho K_x \, dv = \iint P_{xx} \, dy\,dz$$

従って ~~外力の全体積にわたって積分したもの~~は

$$\iiint \rho K_x \, dv = \iint_S P_x \, dS \quad \text{etc.}$$



とする。然るに外力と歪力とは比例してゐる。然るに更には一般に歪力と歪の間にも比例関係があることを見出した。これ即ち Hooke の法則に他ならない。これをもっと一般的に「物体内の任意點における歪力の成分は其の點における歪の成分の一次的な函数である」と言表はし得る。これを擴張された Hooke の法則 (generalized Hooke's law) という。即ち

$$P_{xx} = c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{zz} + c_{14}e_{yz} + c_{15}e_{zx} + c_{16}e_{xy}$$

$$P_{yy} = c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{zz} + c_{24}e_{yz} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$P_{yz} = c_{41}e_{xx} + c_{42}e_{yy} + \cdots$$

但し、$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.,

$$e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{etc.,}$$

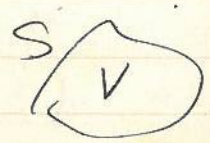
この法則が成立する範囲内では歪力が増せば歪が大きくなり、歪力が無くなれば歪も無くなり、物体は元の形に復る。この意味で物体は弾性 (elasticity) を有する、即ち弾性体 (elastic body) であるという。上述の c_{11} 等36個の係数を弾性常数 (elastic constants) という。歪の大いさがある一定値を超えると最早 Hooke の法則が成立しなくなるのが普通である。これを弾性の極限 (limit of elasticity) という。以下 Hooke の法則の成立する範囲内の問題のみを取扱ふことにする。

扨て物体に外力が作用して歪を生じたとすると外力が物体に対して為した仕事は

$$dW = dW_1 + dW_2$$

で與へられる。但し、

$$dW_1 = \iiint_V \rho K\, ds\, dv$$



は体積力のなした仕事、

$$dW_2 = \iint_S (P_n\, ds)\, df$$

は面力のなした仕事である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

運動方程式は

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho K + \mathfrak{P}^*$$

であるから

$$dW = \iiint \left(\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} \cdot d\xi\right) dv - \iiint \mathfrak{P}^* d\xi dv$$

$$+ \iint_S (\mathfrak{P}_n d\xi) df$$

$$= dt\,dt \iiint \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dv - \iiint \mathfrak{P}^* d\xi dv$$

$$+ \iint_S (\mathfrak{P}_n d\xi) df$$

$$= dT + dV$$

と書ける．但し

$$dT = d \iiint \frac{1}{2} \rho \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dv$$

は運動エネルギーの増加を表わす．（静止の場合には）

また

$$dV = \iiint \left(\mathfrak{P}_x \,\mathrm{grad}\, d\xi_x + \mathfrak{P}_y \,\mathrm{grad}\, d\xi_y + \mathfrak{P}_z \,\mathrm{grad}\, d\xi_z\right) dv = \iiint d\Xi\, dv$$

は，弾性勢力の増加を表わす．

ここで

$$d\Xi = \mathfrak{P}_x \,\mathrm{grad}\, P_{xx}\, d\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right) + P_{yy}\, d\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right) + P_{zz}\, d\left(\frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) + P_{yz}\, d\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y}\right) + \cdots$$

$$= P_{xx}\, de_{xx} + P_{yy}\, de_{yy} + P_{zz}\, de_{zz} + P_{yz}\, de_{yz} + P_{zx}\, de_{zx} + P_{xy}\, de_{xy}$$

従って

$$dV = \iiint d\Xi \cdot dv$$

の中の $d\Xi$ は弾性体の物質の各点毎に於いての仮定変力の増加を意味する．全体は各点を含めてある物体の各点仮想変位がもつ仮定変力と見做し得る．これは各の成分 e_{xx} etc の函数である．

$$d\Xi = \frac{\partial \Xi}{\partial e_{xx}} de_{xx} + \frac{\partial \Xi}{\partial e_{yy}} de_{yy} + \frac{\partial \Xi}{\partial e_{zz}} de_{zz} + \frac{\partial \Xi}{\partial e_{yz}} de_{yz} + \frac{\partial \Xi}{\partial e_{zx}} de_{zx} + \frac{\partial \Xi}{\partial e_{xy}} de_{xy}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{xx}} & P_{yz} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{yz}} \\ P_{yy} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{yy}} & P_{zx} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{zx}} \\ P_{zz} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{zz}} & P_{xy} &= \frac{\partial \Xi}{\partial e_{xy}} \end{aligned}\right\}$$

この Ξ を変勢力の函数（strain-energy function），$-\Xi$ を弾性 potential（elastic potential）という．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(P_{xx}e_{xx} + \cdots + P_{xy}e_{xy} \cdots)$

重は e_{xx} etc. の二次同次函数であるから

Hookeの法則を適用すると、その形は

$$2\mathfrak{D} = c_{11}e_{xx}^2 + 2c_{12}e_{xx}e_{yy} + 2c_{14}e_{xx}e_{yz}$$
$$(6) \quad + 2c_{15}e_{xx}e_{zx} + 2c_{16}e_{xx}e_{xy}$$
$$(5) \quad + c_{22}e_{yy}^2 + 2c_{23}e_{yy}e_{zz} + \cdots$$
$$(4) \quad + c_{33}e_{zz}^2 + 2c_{34}e_{zz}e_{yz} + \cdots$$
$$(3) \quad + c_{44}e_{yz}^2 + \cdots$$
$$(2) \quad + c_{55}e_{zx}^2 + \cdots$$
$$(1) \quad + c_{66}e_{xy}^2$$

$$c_{ij} = c_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

で 36個の弾性率は 21個に減ずる。
（中 $2\mathfrak{D}$ の符号をかえたもの）

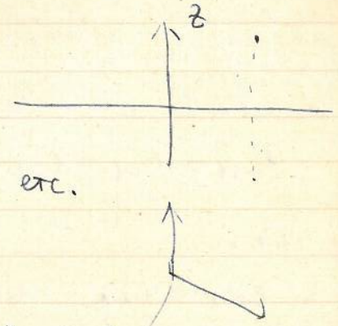
§22. 弾性の対称

一般に弾性体はかならずしも等方的であるが、しかしこれが多くの場合、我々の対称性をなっている。そのために我々の考えの方向を変えなければならない。

i) そ一つの対称面をもつ場合。この面をx-平面に取ると、これに関して対称、即ち

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z$$

なる変換を行っても、そのenergy函数 $\mathfrak{D}'$ は $\mathfrak{D}$ と全く同形のである。



いま
$$s_{x'} = s_x, \quad s_{y'} = s_y$$
$$s_{z'} = -s_z$$

$$e_{x'x'} = \frac{\partial s_{x'}}{\partial x} = \frac{\partial s_x}{\partial x} = e_{xx} \text{ etc.}$$

$$2\mathfrak{D}' = c_{11}e_{x'x'}^2 + \cdots$$
$$= c_{11}e_{xx}^2 + \cdots - 2c_{14}e_{xx}e_{yz}$$

これが $\mathfrak{D}$ と同形であるためには、
（一）の符号の項がなくて即ち

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

即ち 3対称軸のあるは 1つ含む。
計算して

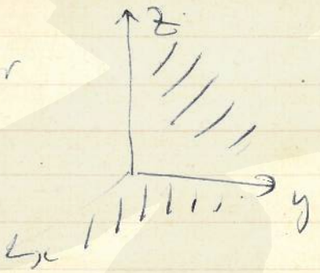
$$2\Phi = c_{11}e_{xx}^2 + 2c_{12}e_{xx}e_{yy} + 2c_{13}e_{xx}e_{zz} + 2c_{16}e_{xx}e_{xy} + c_{22}e_{yy}^2 + 2c_{23}e_{yy}e_{zz} + 2c_{26}e_{yy}e_{xy} + c_{33}e_{zz}^2 + 2c_{36}e_{zz}e_{xy} + c_{44}e_{yz}^2 + 2c_{45}e_{yz}e_{zx} + c_{55}e_{zx}^2 + c_{66}e_{xy}^2$$

ii) 次に z軸を垂直な1つの対称軸をもつならば
これをxy-および yz一平面とすると

$z' = -x$, $y' = y$, $z' = z$

なる直交変換について Φ' が
元と同形という条件から

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0$$



となる。

(∵ $e_{x'x'} = e_{xx}$　$e_{y'y'} = e_{yy}$, $e_{z'z'} = e_{zz}$
$e_{y'z'} = e_{yz}$　$e_{z'x'} = -e_{zx}$, $e_{x'y'} = -e_{xy}$)

なおこの場合 結晶が3対称軸のある 9個である。

$$2\Phi = c_{11}e_{xx}^2 + 2c_{12}e_{xx}e_{yy} + 2c_{13}e_{xx}e_{zz} + c_{22}e_{yy}^2 + 2c_{23}e_{yy}e_{zz} + c_{33}e_{zz}^2 + c_{44}e_{yz}^2 + c_{55}e_{zx}^2 + c_{66}e_{xy}^2 \quad (*1)$$

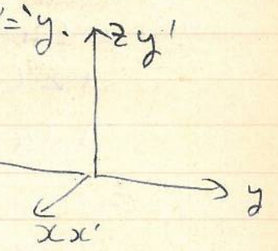
iii) 次に x軸 yz-平面を対称面とすると,

$x' = x$, $y' = -y$, $z' = z$

で Φ は (*1) と全く同じものになり, 3対称軸のある結晶の1つである。

iv) これまでの対称面の上に次に、対称面の2つの一つが $\pi/2$ の回転に対する対称軸になっているとすると。この軸を x 方向とすると,

$x' = x$, $y' = z$, $z' = -y$.



$e_{x'x'} = e_{xx}$, $e_{y'y'} = e_{zz}$,
$e_{z'z'} = e_{yy}$, $e_{y'z'} = -e_{yz}$, $e_{z'x'} = -e_{xy}$　$e_{x'y'} = e_{zx}$.

$2\Phi'$ = (*) は

$$2\Phi' = c_{11}e_{xx}^2 + 2c_{12}e_{xx}e_{zz} + 2c_{13}e_{xx}e_{yy} + \cdots$$

これが (*) と全く同形であるためには

$c_{12} = c_{13}$, $c_{22} = c_{33}$　$c_{55} = c_{66}$.

$$2\Phi = c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}(e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2c_{12}(e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz}) + 2c_{23}e_{yy}e_{zz} + c_{44}e_{yz}^2 + c_{55}(e_{zx}^2 + e_{xy}^2)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

で与えられる弾性率は6個ある。

v) 又 y 軸が $\pi/2$ の回転に関して不変ならば

$x' = -z$　$y' = y$　$z' = x$

として、$e_{x'x'} = e_{zz}$　$e_{y'y'} = e_{yy}$　$e_{z'z'} = e_{xx}$

$e_{y'z'} = e_{xy}$　$e_{z'x'} = e_{zx}$　$e_{x'y'} = -e_{yz}$

であるから

$$c_{11} = c_{22} \qquad c_{12} = c_{23} \qquad c_{44} = c_{55}$$

$$2\overline{E} = c_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2c_{12}(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + c_{44}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2)$$

即ち この場合の弾性率は3個ある。

vi) 又 z 軸が $\pi/2$ の回転に関して不変の場合にも弾性率は変らない。

vii) 最後に物体がどの方向に対しても同じ性質をもつような場合、即ち等方性 (isotropic) な物体を考えよう。これに対して、物体によって性質の異なるものを異方性 (anisotropic) という。

等方性に対しては独立の弾性率は2つだけで他の弾性率は零となる。

これは

$$2\overline{E} = (c_{11} - 2c_{44})(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + 2c_{44}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2}e_{yz}^2 + \frac{1}{2}e_{zx}^2 + \frac{1}{2}e_{xy}^2) + 2(c_{12} - c_{11} + 2c_{44})(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx})$$

この内 $(\ )^2$, $(e_{xx}^2 + \cdots)$ は云う迄もなく座標軸の取り方に無関係な量である。残りの二次式もさうでなければならないから

$$c_{12} - c_{11} + 2c_{44} = 0$$

が成立しなければならないことになる。従って等方性の2次の弾性率は2つの独立な定数で与えられることになる。

そこで

$$c_{11} - 2c_{44} = \lambda, \quad c_{44} = \mu$$

と置くと、

$$2\overline{E} = \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}e_{yz}^2 + \cdots)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

λ, μ は Lamé の常数と称する。
この場合には

$$P_{xx} = \frac{\partial E}{\partial e_{xx}}, \quad P_{yy} = \frac{\partial E}{\partial e_{yy}} \quad \text{etc}$$

を計算すると

$$P_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} \qquad P_{yz} = \mu e_{yz}$$
$$P_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} \qquad P_{zx} = \mu e_{zx}$$
$$P_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} \qquad P_{xy} = \mu e_{xy}$$

但し

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

は体積の膨縮率をあらわす。式は流体の粘性率のみに関係し、切線応力は二つの方向のみに関係することを示す。この場合で切線応力を二つの応力 (shearing stress) として μ を二つの弾性率 (shearing modulus) または固り性率 (rigidity) という。

次に弾性体内の一点の体積が膨縮されて、そこで各方向の面に法線応力のみが作用し、しかもそれぞれの大きさが方向に無関係な場合

流体静圧 (hydrostatic pressure) が作用する場合には

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -p$$
$$P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = 0$$

であるから

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = -p \qquad e_{yz} = 0$$
$$\lambda\Delta + 2\mu e_{yy} = -p \qquad e_{zx} = 0$$
$$\lambda\Delta + 2\mu e_{zz} = -p \qquad e_{xy} = 0$$

ゆえに

$$3\lambda\Delta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = -3p$$
$$\Delta = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}$$

流体圧 p とこれによってもたらされた体積縮小率 $(-\Delta)$ の比

$$k = p/-\Delta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

を体積の弾性率 (volume elasticity) その逆数を圧縮率 (compressibility) という。

一般に流体圧力の和は

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = (3\lambda + 2\mu)\Delta$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ここで

$$2\mu e_{xx} = P_{xx} - \lambda\Delta$$
$$= P_{xx} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz})$$
$$= \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}P_{xx} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(P_{yy}+P_{zz})$$

~~ここで~~ これより

$$E e_{xx} = P_{xx} - \sigma(P_{yy}+P_{zz})$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

と書ける。
これから逆に

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

となる。
λ, μ の代りに E, σ を使って多くの場合を扱うと。

$$e_{xx} = E^{-1}\{P_{xx} - \sigma(P_{yy}+P_{zz})\}$$
$$e_{yy} = \cdots$$
$$e_{zz} = \cdots$$
$$e_{yz} = 2(1+\sigma)E^{-1}P_{yz}$$

E, σ の物理的な意味を explain するために、P_{xx} のみが 0 の場合を考えると

$$e_{xx} = E^{-1}P_{xx} \qquad e_{yy} = e_{zz} = -E^{-1}\sigma P_{xx} = -\sigma e_{xx}$$

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0$$

~~断面積一定~~ 角柱の周囲を取り、~~縦~~ 軸のまわりに P_{xx} なる張力が働くとすると、その伸びが、$E^{-1}P_{xx}$ であらわされるから、E は伸長の弾性率（elasticity of elongation）、又は Young 率（Young's modulus）とよばれて、$-e_{yy}, -e_{zz}$ は横の方向の縮みを表わす。その比は σ である。これを Poisson ~~比~~ 比（Poisson's ratio）という。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§5 弾性

viii) 等方性体における運動方程式

前に出た応力方程式において重力 $\frac{ds}{dt}$ が

極めて $\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ = 小さいとすると

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\cdot\mathrm{grad}\right)\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

$$\cong \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}$$

おいれば

であるから、等方で均質 (homogeneous) な弾性体

$$\rho\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \rho K_x + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\Delta + 2\mu e_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu e_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu e_{xz})$$

$$= \rho K_x + \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right)$$

$$= \rho K_x + \mu\nabla^2 s_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}$$

ベクトル表示

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2} = \rho\mathbf{K} + \mu\nabla^2\mathbf{s} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\Delta$$

$$\Delta = \mathrm{div}\,\mathbf{s}$$

ベクトル表示

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2} = \rho\mathbf{K} + \mu\nabla^2\mathbf{s} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}$$

これは弾性体内の任意点の変位が体内および
表面で与えられるとき定める式で弾性体が
従うべき運動方程式である。

ここで

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{s} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} - \nabla^2\mathbf{s}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}$$

を使うと、

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2} = \rho\mathbf{K} + (\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\Delta - 2\mu\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\omega}$$

成分で

$$\rho\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \rho K_x + (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} - 2\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\ \text{etc.}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第二章 弾性体の運動

弾性体に応力が作用した場合の、運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 s + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\Delta \quad (1)$$

i) (1)式の div をとると $\mathrm{div}\, s = \Delta$ であるから

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla^2 \Delta \quad (2)$$

ii) (1)式の curl をとると

$$\mathrm{curl}\, s = 2w$$

であるから

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 w \quad (3)$$

が得られる.

iii) (1)において. $2w = \mathrm{curl}\, s = 0$ とおくと s は potential φ から次のように,

$$s = -\mathrm{grad}\,\varphi \qquad \Delta = -\nabla^2 \varphi.$$

なる

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 s + (\lambda+\mu)\nabla^2(-\mathrm{grad}\,\varphi)$$

故に $\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla^2 s \quad (4)$

iv) 又 $\Delta = \mathrm{div}\, s = 0$ から, (1) は

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 s \quad (5)$$

©2021 YITAL, DIP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

下例で a)の場合には $\operatorname{curl} S = 0$ すなわち $\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}$ などもゼロ
なる量Sは波の進む方向のみをとる。即ち縦波
(longitudinal wave) である。
(b)の場合には $\frac{\partial S_x}{\partial x} = 0$ すなわち波なる量Sはこの方向には
即ち横波 (transverse wave) である。

(2), (3), (4), (5) の式より Ψ について

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Psi$$

なる形は波動方程式の形をしてゐる。なほ
Ψ をもなほ x だけの函数とすると、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

$\Psi(x,t) = \chi(\xi, \eta)$
$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ と置くと、上式は

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

これは、$\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$ は ξ だけの函数、$\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$ は η のみの函数、
即ち $\chi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$
なることを示す。即ち
故に $\Psi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$
なる形の波が x 方向に各々 $-x$ 方向に c なる速
さで進む波動を表す。

a) $\operatorname{rot} w = 0$、即ち非回転的波動 (irrotational wave)
又は等積変化の波 (dilatational wave) は

$$c = \sqrt{\frac{\chi + 2\mu}{\rho}}$$

b) $\Delta = 0$、即ち等形の波 (distortional wave) 又は
等容積の波 (equivoluminal wave) は
$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ なる速さで伝はつて行く。

§6. 第二種の境界値問題の一意性 (uniqueness of solution)

§23. 境界値問題の解の唯一性 (uniqueness)

等方性の弾性体内の変位に対する境界条件が与えられた場合、解は一意的に定まる。

しかるに、境界条件が外力の作用点における弾性体の場合を考えてみると、弾性体に働く体積力 K と表面に働く面力 P_n とを与えることによって境界条件の与え方の数は一意的に決まるものであらうか。

運動方程式として $\rho K + P^* = 0$

なほ $P_n = (i\nu_x) P_x + (j\nu_y) P_y + (k\nu_z) P_z$

が満たされねばならぬ。これは相等しき境界条件が二つあるとし、S_1, S_2 とおき、各々をそれ P_1, P_2 とおけば、$\rho K + P_1^* = 0$ 及び $\rho K + P_2^* = 0$ より

$$P_{1n} = (i\nu_x) P_{1x} + (j\nu_y) P_{1y} + (k\nu_z) P_{1z}$$
$$P_{2n} = (i\nu_x) P_{2x} + \cdots$$

そこで

$$S_1 - S_2 = S$$
$$P_1 - P_2 = P \qquad P_1^* - P_2^* = P$$

と置き得る。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\mathbb{P}^* = 0$,

を2つで. $(i\,n)\mathbb{P}_x + (j\,n)\mathbb{P}_y + (k\,n)\mathbb{P}_z = 0$

より.

$$\iint \mathbb{P}^* \cdot s \, dv = 0$$

これを変形すると.

$$\iiint (S_x \operatorname{div} \mathbb{P}_x + S_y \operatorname{div} \mathbb{P}_y + S_z \operatorname{div} \mathbb{P}_z) dv = 0$$

又は

$$\iiint \operatorname{div}(S_x \mathbb{P}_x + S_y \mathbb{P}_y + S_z \mathbb{P}_z) dv$$

$$= \iiint \{(\mathbb{P}_x \operatorname{grad}) S_x + (\mathbb{P}_y \operatorname{grad}) S_y + (\mathbb{P}_z \operatorname{grad}) S_z\} dv$$

Gaussの定理より, 左辺は

$$\iint (S_x \mathbb{P}_x + S_y \mathbb{P}_y + S_z \mathbb{P}_z) df$$

$$= \iint_S \{(S\,i)(\mathbb{P}_x n) + (S\,j)(\mathbb{P}_y n) + (S\,k)(\mathbb{P}_z n)\} df$$

$$= \iint_S S\,\mathbb{P}_n \, df = 0$$

$$\{(i\,n)\mathbb{P}_x + (j\,n)\mathbb{P}_y + (k\,n)\mathbb{P}_z\}$$

$$\iiint (P_{xx} e_{xx} + P_{yy} e_{yy} + P_{tt} e_{tt} + P_{yz} e_{yz} + P_{tx} e_{tx} + P_{xy} e_{xy}) dv = 0$$

となる.

はって全のenergyの如き量を Φ とすると

$$\iiint \Phi \, dv = 0$$

$$2\Phi = \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{tt})^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{tt}^2) + \mu (e_{yz}^2 + e_{tx}^2 + e_{xy}^2) \geq 0$$

この式が成立するためには必要十分条件で

$$\Phi = 0 \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{tt} = e_{yz} = \cdots = 0$$

でなければならぬ.

即ち

$$e_{xx}^{(1)} = e_{xx}^{(2)} \quad \text{etc.}$$

で全体は全体を通じて変らない場合は一般的に決定される. はって又全力も又一般的に決定される.

次に式が.

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = \frac{\partial S_y}{\partial y} = \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial z} = \frac{\partial S_x}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial x} = \frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} = 0$$

より

$$S_x(x+dx, y+dy, z+dz) = S_x^{(x,y,z)} + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx + \frac{\partial S_x}{\partial y} dy + \frac{\partial S_x}{\partial z} dz$$

etc.

これより

$$= S_x(x,y,z) + \frac{\partial S_x}{\partial y} dy + \frac{\partial S_x}{\partial z} dz \quad \text{etc.}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

§24. 剛体の運動を与えてゐる時の変位

任意方向の軸の廻りの一般の無限小回転を与えて
平行光線の場合、その光線の変と密とを
求めてゐる。球面上の点を極とする極座標 (r, θ, φ)
この場合動径は半径の方向の向き、大いさは
r よりの高さと考へるといゝ

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= \frac{x}{r}\psi(r) \\ \xi_y &= \frac{y}{r}\psi(r) \\ \xi_z &= \frac{z}{r}\psi(r) \end{aligned}\right\}$$

と置ける、すると

$w_x = w_y = w_z = 0$

で変形は起らない、即ち球の同心層としての
回転はしない、更に

$$e_{xx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d\psi}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\psi$$

etc.

$$e_{yz} = \frac{2yz}{r^2}\frac{d\psi}{dr} - \frac{2yz}{r^3}\psi$$

etc.

体積膨脹率は

$$\Delta = \frac{d\psi}{dr} + \frac{2}{r}\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\psi)$$

それで、 $\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z}\right) = w_x$

$$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,\xi = w$$

と置くと、

$\xi = \xi$

$\xi(r+dr) = \xi(r) + [w \cdot dr]$

即ち r を止めると、微小位置を変へると、全体として
$\xi(r)$ の変化を得ると共に、ある回転を得る；
これは丁度剛体としての運動の場合である、然
らずんばない！ 即ち ξ_1, ξ_2 は純粋な変としては
全く同じものである。

与へられた働く表積力 K のみをもつ系が
平衡 があるならば、それは一般な場合
かくあることを意味する訳である。

$\therefore \quad \mathfrak{P}_1^* - \mathfrak{P}_2^* = \mathfrak{P}^* = 0$

従つて $\iiint \mathfrak{P}^* \xi \, dv = 0$

即ち $\xi = 0$.

かくては物理の問題にならない。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

外力 $K=0$ で，弾性体内部において

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\Delta - 2\mu\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,w = 0.$$

よって $\mathrm{grad}\,\Delta = 0$

これは弾性体内部で体積膨張が一定であることを示す．

$\Delta = 3A = \mathrm{const.}$ とおくと，

$$\psi = Ar + \frac{B}{r^2}$$

$$e_{xx} = \frac{x^2}{r^2}\left(A - \frac{2B}{r^3}\right) + \frac{r^2-x^2}{r^3}\left(Ar + \frac{B}{r^2}\right), \text{ etc.}$$

$$e_{yz} = -\frac{6Byz}{r^5}, \text{ etc.}$$

yoz 平面上の歪を取れば，（x 軸を含む方向の成分がなくなる．）

$$e_{xx} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad e_{yy} = e_{zz} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0$$

従って各々の部分は

$$P_{xx} = (3\lambda+2\mu)A - \frac{4\mu B}{r^3}$$

$$P_{yy} = P_{zz} = (3\lambda+2\mu)A + \frac{2\mu B}{r^3}$$

$$P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = 0.$$

球の表面 $r = r_0$ において

p が外から働いているとすると，

$$-p = (3\lambda+2\mu)A - \frac{4\mu B}{r_0^3}$$

$r=0$ で応力のキくらで各力が

有限であるためには $B=0$.

$$P_{xx} = -p$$

$$A = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}$$

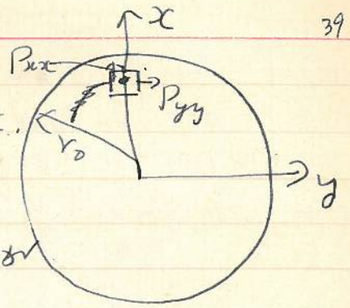
よって x 軸上の歪に対しは

$$e_{xx} = -\frac{p}{3\lambda+2\mu} = e_{yy} = e_{zz}$$

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0$$

$$P_{xx} = -p = P_{yy} = P_{zz}$$

即ち全ての方向に一定である．



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(3) 円柱の捩り. (Torsion)

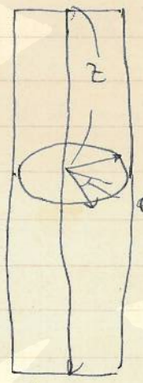
円柱の一端面は固定され, 他の端面は次いで偶力を働かせ, 円柱軸の周りに φ だけ角丈廻転せしめたとする. この際第一近似として, 軸に垂直な面内で廻転前と変らないが, そしてこれらの廻転角は固定面からの距離 z に比例すると考えられる.

$$\delta\varphi = \tau z$$

円柱の長さを l とすると, 他端面の廻転角は

$$\varphi = \tau l$$

$\tau = \varphi/l$ を捩りの量 (amount of torsion)



従って点 (x,y,z) の変位を $(\delta x, \delta y, \delta z)$ とすれば,

$$x+\delta x = r\cos(\varphi+\delta\varphi) \doteqdot x - y\delta\varphi$$
$$y+\delta y = r\sin(\varphi+\delta\varphi) \doteqdot y + x\delta\varphi$$
$$z+\delta z = z$$

従って $\delta x = -y\delta\varphi = -\tau yz$
$\delta y = x\delta\varphi = \tau xz$
$\delta z = 0$

従って
$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0$
$e_{yz} = \tau x$, $e_{zx} = -\tau y$, $e_{xy} = 0$ }

$\Delta = 0$ で体積の変化はない.

$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = 0$
$P_{yz} = \mu\tau x$, $P_{zx} = -\mu\tau y$ $P_{xy} = 0$
$P^* = 0$

従って $K = 0$, 即ち体積力は作用しないでも平衡状態にある.

外力は vector の垂直な方向に働く書力は

$$P_{nx} = -(kn)\mu\tau y$$
$$P_{ny} = (in)\mu\tau x$$
$$P_{nz} = -(in)\mu\tau y + (jn)\mu\tau x$$

}

次に円柱の側面に対しては

$(in) = x/r$, $(jn) = y/r$, $(kn) = 0$.

であるから

$$P_{nx} = P_{ny} = P_{nz} = 0$$

で, 少しも書力は作用しない.

又仰も端面では $n = k$.

$P_{nx} = -\mu\tau y$, $P_{ny} = \mu\tau x$ $P_{nz} = 0$
$mP_n = 0$.

書力の円柱軸の周りの能率は

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$[r\,P_n] = k\mu\tau(x^2+y^2) = k\mu\tau r^2$

従って全体の弾性のエネルギは

$$D = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mu\tau r^3\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi\mu\tau R^4$$

となる。これを捩れの剛性 の他のなかり
逆に R の半径の円柱の軸端面に
①の弾性の力を働かすと、上記のねじれ
角τを生ずることになる。

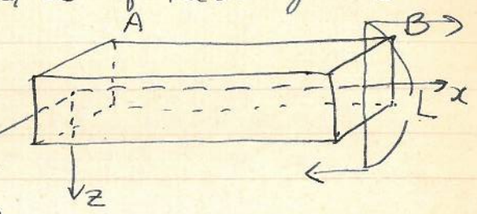
$$D = C\tau^2$$

$$C = \frac{1}{2}\pi\mu R^4$$

を捩れの剛性 (torsional rigidity)
といい、これは 半径の四乗に比例する。
そして捩れの全エネルギは捩れの弾性に比例する
この円柱に蓄えられる Coulomb のねじり
これを
という。

Bending 41

iii) 角柱の撓み (Flexure of Rectangular Prism)



断面 細長である
な角柱 が
横たえられてあるとする
今A端を固定し，B端
に L なる長さの撓を垂直に固着し，その
端に大きさ等しく 1方向がみな水平
が作用しているとする。このB面には KL なる剪
の偶力が作用しているわけである。
A，B面の中心を通るように Ox 軸をとり，A面の
中心を原点O．A面内に水平に y 軸，垂直
下方に z 軸をとる。偶力の方向は図のように
－y 方向に向く。
これによって，B端面は z 方向に，z>0
の側は圧縮され，z<0 は伸張されることは
たやすく了解される。
この材料の中立線 の z 方の成分を P_{xx}
とすれば

$$P_{xx} = -E\varphi z$$

が成り立つことを示す。ただし E は Young 率，
φ は常数。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

おと z の成分は

$$e_{xx} = E^{-1}\{P_{xx} - \sigma(P_{yy}+P_{zz})\} = -\varphi z$$
$$e_{yy} = E^{-1}\{P_{yy} - \sigma(P_{zz}+P_{xx})\} = \sigma\varphi z$$
$$e_{zz} = E^{-1}\{P_{zz} - \sigma(P_{xx}+P_{yy})\} = \sigma\varphi z$$
$$e_{yz} = 2(1+\sigma)E^{-1}P_{yz} = 0$$

etc

とね。従って角柱は長さの方向のみがるよ，これは垂直な方向にも伸縮しは発生してみる。

したがって

$$e_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x} = -\varphi z \qquad e_{yy} = \frac{\partial s_y}{\partial y} = \sigma\varphi z$$
$$e_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \sigma\varphi z$$

従って

$$s_x = -\varphi zx + f_1(y,z)$$
$$s_y = \sigma\varphi yz + f_2(z,x)$$
$$s_z = \frac{1}{2}\sigma\varphi z^2 + f_3(x,y)$$

また $e_{yz} = \frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0$ etc.

これに s_x, s_y, s_z を代入すると

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\sigma\varphi y$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} = \varphi x$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

なる三條件を満足せねばならぬ，所で境界條件としては，$x=0$ で $s_x=0$ でなければならぬから

$$f_1(y,z) = 0.$$

又 $y=0$ の平面上の點は変形後もこの上にあるべきであるから，$s_y=0$，即ち

$$f_2(z,x) = 0$$

従って上の條件は

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -\sigma\varphi y, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x} = \varphi x$$

$$\Longrightarrow \quad f_3(x,y) = \frac{1}{2}\varphi(x^2 - \sigma y^2)$$

（従って 0 點が固定されていることから $s_z=0$，$f_3=0$ なる條件を得る）

である。

$$s_x = -\varphi zx, \qquad s_y = \sigma\varphi yz$$
$$s_z = \frac{1}{2}\varphi\{x^2 + \sigma(z^2 - y^2)\}$$

又 $z=0$ の平面上の點は

$$s_x = s_y = 0$$

即ち角柱の底面上の點は変形後もこの上にある事となる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

変化しない，これを中立面(neutral plane)と称する．又 x 軸は高さの変化を受けない中立線(neutral line)という．曲げ後の変形後の形は，上式において $y=0$ として，

$$S_z = \frac{1}{2}\varphi x^2,$$

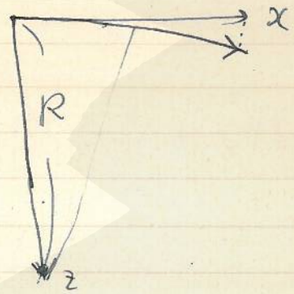
即ち，放物線になるが，S_z は極めて小さいから，曲率半径

$$R = \frac{1}{\varphi}$$

の円弧と見なしてよい．(∵ $x^2 + (S_z - R)^2 = R^2$

$x^2 = 2zR$.

$\therefore z = x^2 = 2RS_z$)



この中立線の曲率半径を R，この意味において一様な撓み(uniform flexure)と称しよう．

$x=$ const. なる任意の位置に垂直な断面は，変形後

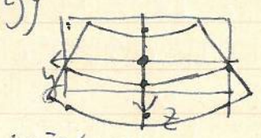
$$S_{x/2} = \varphi x - x/R$$

なる角度傾くことになる．

角柱の断面が高さ h，幅 b なる矩形

とすると．上下の面 $z = \pm h/2$ は下方へ共に

$$S_z = \frac{\varphi}{2}\{x^2 + \sigma(\tfrac{h^2}{4} - y^2)\}$$



なる曲線を作る．

又 $y = \pm b/2$ は共に y 方向に

$$S_y = \pm \sigma\varphi z \frac{b}{2}$$

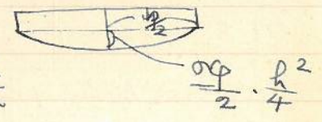
なる線を作る．

なお矩形の上方に等しい角度を以て，この断面と中立面($z=0$)との交線($x=$ const. $z=0$)は曲線

$$S_y = 0$$

$$S_z = \frac{\varphi}{2}\{x^2 + \sigma(\tfrac{h^2}{4} - y^2)\}$$

で結ばれ第一近似として高さが変らない，その形は



第一近似として．

$$R' = \frac{1}{\sigma\varphi} = \frac{R}{\sigma}$$

なる半径の円弧で近似される．

電線に

$$\mathfrak{D}^* = 0, \quad \mathfrak{P}_n = -\dot{e}\,(\dot{e}n)\,E\varphi$$

であるから，角柱状の変形に対応する応力と

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

○で，x軸に垂直な断面に働く応力が○の場合に相当す．
そして断面x軸に垂直な断面において，

$$\int_{-h/2}^{h/2} P_{xx}\, b\, dz = -\int_{-h/2}^{h/2} E\varphi b z\, dz = 0$$

であるから断面に働く力の法線は0．

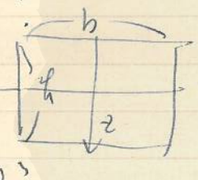
$$\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} P_{xx}\, y\, dz\, dy = -E\varphi \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} yz\, dz\, dy = 0$$

であるから z軸に関する能率は0．

$$\int_{-h/2}^{h/2} P_{xx}\, bz\, dz = -E\varphi b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$= -\frac{1}{12} b h^3 E\varphi$$

であるから，y軸に関する能率より力Pの作用点は，−y方向に $\frac{h}{2}$ の中立軸に関する慣性能率は（断面を



とすると）

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} bz'^2\, dz' = \frac{1}{12} b h^3$$

また，y軸のまわりの曲げ能率は…これは

$$M = \frac{EI}{R}$$

となる．（上のままは
即ち，Mなる…この能率の作用を両端に働かした場合にそのまま，適用出来る．
このMを撓みの能率（bending moment）という．これと，撓みによる角度の曲り方の大いさ，即ち曲率 $\frac{1}{R}$ とは比例する．比例の率 EI は角度の弾性と形とに関係し，撓みの固さ（flexural rigidity）という．
這いMとR，Rを測ることによって，角度のYoung率Eを算出しうる．
又，角度の厚さと垂直な方向にも同じ曲率または R' を持つ時は
（Rとの $\sigma = \frac{R}{R'}$
から，Poisson比σをも算する．

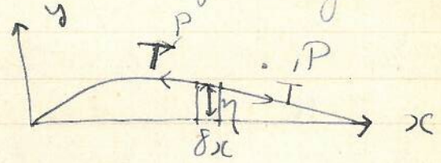
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第十章 弾性体の振動

33. Vibration of Elastic Body

§25 弦の振動 Vibration of String

P という張力で張られた弦を、少し曲げられた弦を、少し曲げられたとする。線密度 ρ は一定であり、弦の各点は x 軸上にあり、y 軸の方向の変位 η は x の関数 $\eta(x)$ で表わされるとする。



δx の微小区間の運動方程式は

$$\rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -T \sin\psi + T\delta(\sin(\psi)) = T\delta\psi$$

$(\sin\psi \ll 1.)$

ここで

$$\sin\psi \cong \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

であるから

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{P}{T} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

この一般解

この c の速さで x または $-x$ の向きに伝わる波を表わす。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\eta(x,t)$,

$$\eta = f(ct-x) + g(ct+x)$$

弦が全長 l の長い場合には、$t=0$ の初めに与えられた $\eta(x,0)$ および初速度 $\frac{\partial \eta(x,0)}{\partial t}$ が与えられれば、それ以後の振動が定まることを意味する。

弦が有限の長さ l をもち、両端 $x=0$, $x=l$ において固定されている場合には

$$\eta(0,t) = f(ct) + g(ct) = 0$$
$$\eta(l,t) = f(ct-l) + g(ct+l) = 0$$

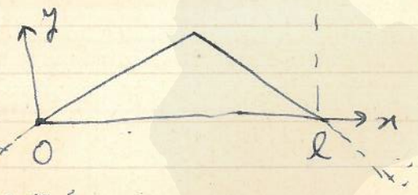
従って $-f = g$ $\qquad f(x+2l) = f(x)$

~~$f(0)$ $f(ct)$ $f(l)$~~

$$f(0) = -f(2l)$$

$$\eta(x,t) = f(ct-x) - f(ct+x)$$

$f(x)$ は $2l$ を周期とする周期函数である。



尚、三味線等は最終後くるそれは最初一個所 0 を指定せて放すのであるから

もこので $\qquad \eta = \phi(x)$.

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

と取ると、

$$f(-x) - f(x) = \phi(x)$$
$$cf'(-x) - cf'(x) = 0.$$

この式から

$$f(-x) + f(x) = \text{const.}$$

しかし $x=0$ おいては $f(0) = 0$ の点な

$$f(-x) + f(x) = 0,$$

なお

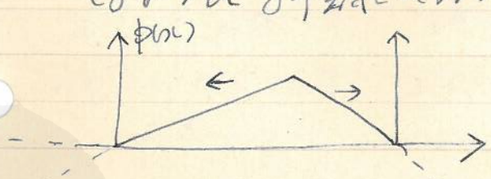
$$f(-x) = -f(x) = \frac{1}{2}\phi(x)$$

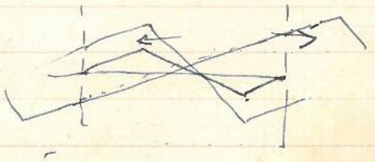
従って

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2}\{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\}$$
$$\phi(x+2l) = \phi(x).$$

と書ける。

従って最初の弦の形が折線であれば、$\eta(x,t)$ は任意の与えられた二つの折線の重ね合わせたものになるから、ある二つの折線/そなった折線になる。





©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

・弦を弾く(plucking), ~~こする~~
plucked string.

この様な場合を
と称する。

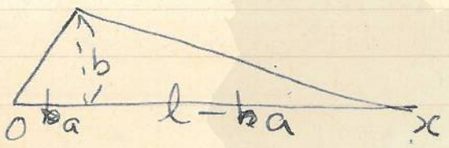
一方から見れば両端を固定した弦の振動は
色々な定在振動の重ね合わせとして

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\left(\frac{m\pi c t}{l} + \varepsilon_m\right) \quad (1)$$

なる形に書ける。これは両端を固定された場合の場合と同じである。基音の振動数は

$$\frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

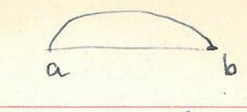
である。即ち振動数は張力の平方根に比例し、密度の平方根に逆比例し、又、長さに逆比例することを示す。
B_m, ε_m は初期条件によって決まる。



plucked stringの場合は、$t=0$ において $\dot\eta = 0$ であるから $\varepsilon_m = 0$ となり、

$$\eta = \frac{b}{a}x \quad \text{for} \quad 0 \le x \le \frac{b}{a}a$$

$$\int_a^b \sin^2 x\,dx = \frac{b-a}{2}$$



47

$$\eta = \frac{b}{l-a}(l-x) \quad \text{for} \quad a \le x \le l.$$

であるから、(1)式において $\varepsilon_m = 0$ とおき、両辺を $\sin\frac{p\pi x}{l}$ を乗じて 0 から l まで積分すると、

$$\int_0^l \sin\frac{p\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0 \quad \text{for } p \neq m$$

であるから

$$\frac{b}{a}\int_0^a x\sin\frac{p\pi x}{l}\,dx + \frac{b}{l-a}\int_a^l (l-x)\sin\frac{p\pi x}{l}\,dx = B_p\int_0^l \sin^2\frac{p\pi x}{l}\,dx$$

pp5

$$\frac{b}{a}\left[\left(\frac{l}{p\pi}\right)^2\left(-\frac{a}{p\pi}\cos\frac{p\pi a}{l}\right) + \left(\frac{l}{p\pi}\right)^2\sin\frac{p\pi a}{l}\right]$$
$$+\frac{b}{l-a}\left[\left(\frac{l}{p\pi}\right)\left(l\cos\frac{p\pi a}{l} - a\cos\frac{p\pi l}{l}\right) - \left(\frac{l}{p\pi}\right)^2\left(\cos\frac{p\pi a}{l} - \cos\frac{p\pi l}{l}\right) + \left(\frac{l}{p\pi}\right)^2\sin\frac{p\pi l}{l}\right]$$

$$\int_a^b x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_a^b + \int_a^b \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x\Big|_a^b + \sin x\Big|_a^b$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

t が $\sin\frac{p\pi a}{l}=0$ を満たす m, すなわち $\frac{ma}{l}=$ integer の場合には振幅は0, すなわち node となる振動が生ずる。

$$=B_{mp}\frac{l}{2}$$

$$\frac{2}{l}\left(\frac{b}{l-a}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{l}{p\pi}\right)^2\sin\frac{p\pi a}{l}=B_{mp}$$

$$B_{mp}=\frac{2bl^2}{p^2\pi^2a(l-a)}\sin\frac{p\pi a}{l}.$$

従って任意の初期条件に対する解は

$$\eta=\frac{2bl^2}{p^2\pi^2a(l-a)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi a}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\times\cos\frac{m\pi ct}{l}$$

なる形に書ける。すなわち m 番目の固有振動の振幅は基音の $\frac{1}{m^2}$ になっている。

次に振動の勢力について考える。運動勢力は

$$T=\frac{1}{2}\rho\int\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2dx$$

のところから、

$$=\frac{1}{2}\sigma\int\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2dx$$

次に T なる張力なる弦の δx なる部分が δs に伸びているから

$$\delta s-\delta x=\delta x\left(1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-\delta x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$$

の長さの縮みがあった筈であるから、張力 T による仕事

$$V=\frac{1}{2}\int_0^p T\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}T\int\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2dx$$

が位置勢力として算えられる。

今 l なる長さの弦の両端固定の場合には

$$\eta=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)$$

であるから、運動勢力は

$$T=\frac{1}{2}\rho\sum_m\int_0^l\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2B_m^2\sin^2\frac{m\pi x}{l}\sin^2\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)dx$$

$$=\frac{\rho m^2\pi^2c^2}{4l}\sum_m m^2B_m^2\sin^2\left(\frac{m\pi ct}{c}+\varepsilon_m\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(n)振動

$$V=\frac{\pi^2 T}{4l}\sum_m m^2 B_m^2 \cos^2\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)$$

ここに、

$$c=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

であるから

$$V=\frac{\pi^2 c^2\sigma}{4l}\sum_m m^2 B_m^2 \cos^2\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)$$

となる。

従って、全勢力は

$$W=T+V=\frac{\pi^2 c^2\sigma}{4l}\sum_m m^2 B_m^2$$

~~振動~~ 後者の振動の勢力を別々に考へたものが、一般の振動に於ける全勢力になる。

~~plucked~~ string の場合には

$$W=\frac{2b\,l\,c^2\sigma}{2\cdot a(l-a)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin^2\frac{m\pi a}{l}$$

となる。

§26. 棒の振動

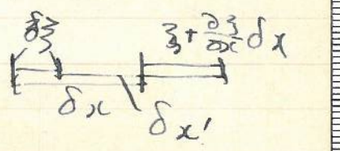
i) 棒の縦振動

棒を長さの方向に引張るか、屈折させて放せば、棒はその方向に振動する。これが縦振動である。棒の中心線を通って棒が曲がったとし、長さの方向を x 軸にとり、x 軸に直角な断面上の各点は x 方向に同じ大きさの変位 $\xi(x,t)$ をもつ。

故に $x+\delta x$ の軸面の点は $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x$ の変位を与へ、変形の δx は長さ $\delta x'$ に変形し

$$\delta x'=\delta x+\frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x$$

となる。



従って伸長率は

$$e_{xx}=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

であらはされる。

この棒の各点に張力を P_{xx} とすると

$$P_{xx}=E e_{xx}$$

但し E は Young 率をあらはす。

又この各点における断面積を S とすると力の大きさは

$$P_{xx}S=ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

の断面,

従って $x+\delta x$ の所では

$$P_{xx}S + \frac{\partial}{\partial x}(P_{xx}S)\delta x = ES\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\delta x$$

の力が働く,

従って δx は長さの微小なる棒における運動方程式は断面積が小さいとして,

$$\rho S\delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\delta x$$

であらわされる. 但し, ρ は棒の密度,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho S}\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

断面積 S が一様ならば, 振動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

であらわされる.

この式は弦の振動の場合と全く同形であり, 棒における振動の伝播速度が $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ であらわされることが分る.

従って振動方程式の一般解は

$$\xi = \sum_n \left(A_n \sin\frac{nx}{c} + B_n \cos\frac{nx}{c}\right)$$

$$\xi(x,t) = \left(A\cos\frac{nx}{c} + B\sin\frac{nx}{c}\right) \times \cos(nt+\varepsilon)$$

なる形であらわされる. A, B, n, ε は棒の両端における境界条件および初期条件によって定まる常数である.

例えば棒の端が固定されている場合には $\xi = 0$. 自由な場合には, そこでは力が働かないから $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ の条件である.

今棒の長さを l とし, $x=0$ の一端は固定され, $x=l$ の端は自由である場合を考えてみると,

$$\xi(0,t) = A\cos(nt+\varepsilon) = 0$$

より $A = 0$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(l,t) = \frac{n}{c}B\cos\frac{nl}{c}\cos(nt+\varepsilon) = 0$$

から, $\cos\frac{nl}{c} = 0$. より

$$n = \frac{2p+1}{2}\frac{c}{l}\pi$$

但し $x=0$ が振動の節. $x=l$ が腹 $p = 0, 1, 2, \cdots$ より,

従ってこの場合の振動の最も一般的な形は

$$\xi = \sum_{p=0}^{\infty} B_p \sin\frac{(2p+1)\pi}{2l}x\cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{2l}t + \varepsilon_p\right)$$

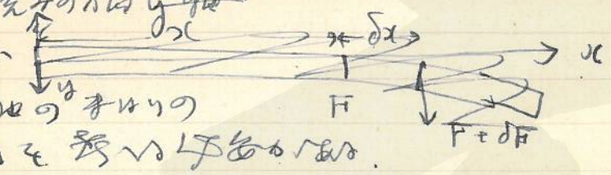
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(a Bar)

ii) 棒の撓みの振動. (Flexural Vibration)

棒が長さの方向に垂直に少しく曲げられて後、外力が取去られると、その棒は振動する。これを撓みの振動という。

任意点 x を通る断面に働く力で x に垂直な方向に働く力を撓みの方向の力、y 方向の力という。



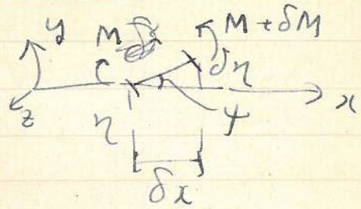
力の y 方向の成分 F および x 軸のまわりの力の能率 M を考える必要がある。

δx 間のこの棒の y 方向の垂直運動に対する運動方程式は

$$\rho S \delta x \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x \qquad (*)$$

でみちびかれる。

一方において δx 間の棒の x 軸に対する微角 ψ は小さいとすると、



$$\psi \simeq \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

でみちびかれる。

従って δx の棒の x 軸のまわりの回転運動方程式は

$$\rho S \kappa^2 \delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = F\delta x + \delta M \qquad (*)$$

でみちびかれる。但し、κ は棒の x 軸のまわりの回転半径 (radius of gyration) を意味する。すなわち δx 間の棒の x 軸のまわりの慣性能率は

$$I_x = \rho S \delta x \cdot \kappa^2.$$

でみちびかれる。

(*)と(*)から F を消去すると、

$\rho S \kappa^2$ を一括して、

$$\rho S\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

また、
しかし曲率 M と梁の撓みの
曲率 $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ の間には

$$M = EI\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

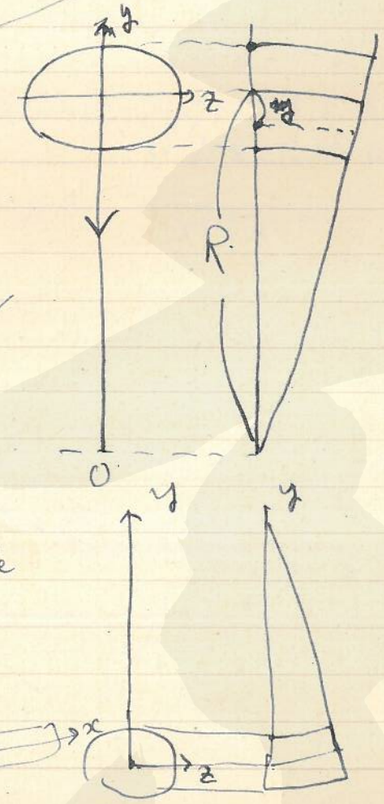
の関係が成立する。($\because \eta=0$ の平面
に対して y の平面
は $R-y/R$ の
割合で縮んでおり、
即ち伸長率は R の
$-\frac{y}{R}$
であるから、(この場合/
を引かれ ton いて

$$\frac{E}{R}\iint y\,dy\,dz$$

となる。(符号を負とすることによって
得るが、これは x 軸を
中心に取って凸な
側が負の値をとる)
従って、
撓みの弧率は

$$M = \frac{E}{R}\iint y^2\,dy\,dz$$

曲率半径を R とおく



$$M = EI/R$$
$$= ES\chi^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

従って η の満たすべき振動方程式は

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \chi^2\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{E\chi^2}{\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} = 0$$

となる。
この式を満たすとして

$$\eta = C\cos\frac{2\pi}{\lambda}(ct-x)$$

の形を仮定すると

$$-\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 c^2 + \frac{E\chi^2}{\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 = 0$$

$$c^2 = \frac{\chi^2}{\lambda^2+\chi^2}\frac{E}{\rho}$$

$$c = \frac{\chi}{\sqrt{\lambda^2+\chi^2}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

となる。即ち撓みの振動が梁を伝わる
速さは波長によって異なる。即ち
波の分散 (dispersion) が起る。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=0$

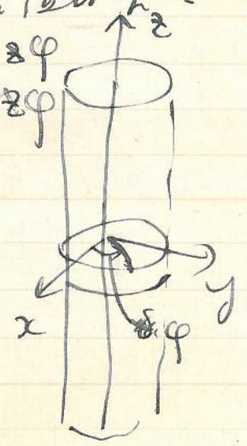
$e_{xy}=0$　$e_{zx}=-y\frac{\partial\varphi}{\partial z}$　$e_{yz}=x\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

~~回転を考え (r, φ, z) とおき~~
~~それぞれの軸における振れの~~ ~~角を~~ φ(z)
~~とおく~~ ~~τ=~~ ~~φ~~　~~δφ=~~ ~~z~~.　(φ≪1)

~~とおく~~. (x, y) 方向の変位は考えず

~~z~~ $\delta x=-y\,\delta\varphi=-xy\,\delta\varphi$

$\delta y=x\,\delta\varphi=x^2\,\delta\varphi$



~~x~~ 軸の方向に δx なる変位を
与えると,

$P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}=0$

$P_{yz}=\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}x$

$P_{zx}=-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}y$

$P_{xy}=0$

であるから δx なる円柱を回転させようと
するカの総和は 次式で与えられ,

$\frac{\partial}{\partial z}(xP_{yz}-yP_{zx})\delta x=\mu(x^2+y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

~~一方~~ この円柱の慣性は

そして色々な波長の光が各々つて
出来たはの形は色々に記つて現れて
行く.

なお入が極端に短くて
長い限り, 像は違わない近似は

$c=\frac{\kappa}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

であらわされ, 運動方程式は

$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{E\kappa^2}{\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0$

であらわされる.

iii) 棒の捩れの振動. torsional vibration

棒を捩って急にてはなすと, 各点のまわり
に極く短い周期を以て往復す. これを
捩れの振動という.
今特に R の円形の切れその形を
異にする棒の振動を取扱うことにする.
今棒の軸上の一点を z 軸に
取ると, 各点を (x, y, z),

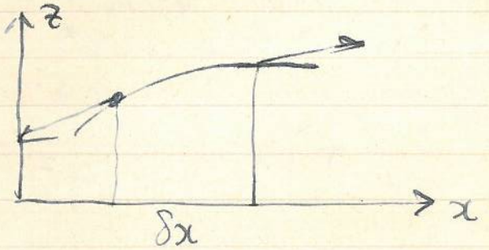
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§35. 膜の振動. i) 基礎方程式

一様な厚さの膜があり、周囲から強く張られている場合を考へてみる。今膜の面上に任意の曲線を想像し、これによつて膜を二つの部分に分けたとすると、一方は他の部分に対して張力を及ぼす。曲線の短い部分を考へると、そこに働く張力は線素の両側で接する膜の長さに比例してゐるであらう。従つて張力は単位長さに働く力として表はされる。cgs dyne/cm を単位として測られる。

さて膜は平行な多数の板として一つの平面上にあるとし、これを xy 平面とする。膜が外からの影響はうけて z 方向に変位したとすると、z は x, y および t の函数である。

膜の上の任意点 (x,y) 附近の $\delta x\,\delta y$ なる小面積を考へてみると、この部分の働く力は、



$x+\delta x$ および x なる両側の働く張力、および

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$y+\delta y$, y のところも同じ様な張力の作用である．従って張力は差引

$$T\delta x\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - T\delta x\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x} = T\delta x\delta y\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

又 x 方向についても同様にして

$$T\delta x\delta y\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}$$

が得られる．

従って運動方程式は 単位の質量と加速度 α との積を σ とすると．

$$\sigma\delta x\delta y\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = T\delta x\delta y\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

即ち

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$c=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

なる波動方程式が得られる．これが膜の横振動（transverse vibration）における方程式である．

今膜が $\frac{n}{2\pi}$ の振動をもって

$$\zeta = \varphi(x,y)\cos(nt+\varepsilon)$$

なる形で振動して居るものとする．これを運動方程式に代入すると

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+k^2\varphi=0$$

となる．但し，

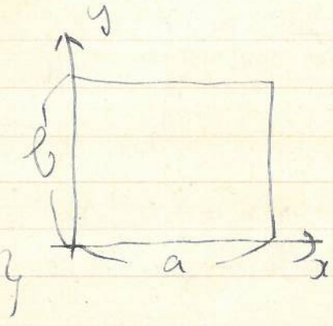
$$k=\frac{n}{c}.$$

(1) 方形膜の振動．

辺の長さが a, b なる矩形の膜の周辺が固定されている場合の振動を考へてみる．

この場合には

$x=0$, 又は $x=a$
$y=0$ 又は $y=b$ }



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

で ころ ある φ が 0 となる ということ。
そこで $\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$

この形を仮定して上式へ代入すると、

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 = 0$$

が得られる。この式の第一項は x だけの函数、第二項は y だけの函数となっている。これらの和が 0 となるためには各項が定数でなければならない。即ち X, Y はそれぞれ

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

の形の式を満足するものでなくてはならない。但し、k_x, k_y は

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2$$

なることが必要である。
この式の一般解は

$$X = A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x$$
$$Y = A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y$$

これが $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ において 0 となるためには

$$B_1 = B_2 = 0,$$
$$\sin k_x a = \sin k_y b = 0$$

即ち $k_x = \frac{n_x \pi}{a}$ $\quad n_x = 1, 2, 3, \cdots$

$k_y = \frac{n_y \pi}{b}$ $\quad n_y = 1, 2, 3, \cdots$

即ち $X_0 = A_1 \sin \frac{n_x \pi x}{a}$

$Y = A_2 \sin \frac{n_y \pi y}{b}$.

従って $k^2 = \pi^2 \left\{ \left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 \right\}$

となる。従って

$$n^2 = \frac{4}{c^2}\pi^2 \left\{ \left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 \right\}$$

$$\frac{n}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2}$$

$n_x, n_y = 1, 2, 3, \cdots$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次は振動数2の色に異なる振動が可能である。

次に膜が正方形の場合には

$a=b$,

$$\frac{n_x}{2\pi} = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2+n_y^2}$$

最も低い振動音、次に高音の振動数は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{c}{2a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{T}{2\sigma}} \qquad n_x=n_y=1$$

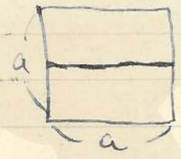
で与えられ、次に現われる振動音は基音の半分波長に比例し、逆比例し、音の高さに逆比例する。

n_x 等しいどこにも節をもたない振動であるが、n_x, n_y 共に一方を2にとれば1つの節線(nodal line)が生じ来る

例えば $n_x=1$, $n_y=2$ とすると

$$Y \propto \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$Y \propto \sin\frac{2\pi y}{a}$$



であるから $y=\frac{a}{2}$ の節線を有する。

これと、$n_x=2$, $n_y=1$ とは同じ振動数を

$$\frac{n}{2\pi} = \frac{c}{2a}\sqrt{5}$$

の振動である。

それ等を重ね合せると、

$$\varphi = XY = C_1 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

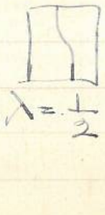
$$= C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \lambda\cos\frac{\pi y}{a}\right)$$

となる、

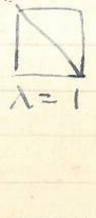
λ をそれ等と各々の節線の形をあらわす。

$\lambda=0$

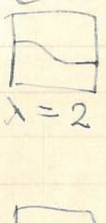
$\lambda=\frac{1}{2}$



$\lambda=1$



$\lambda=2$



$\lambda=\infty$

$\lambda=-\frac{1}{2}$

$\lambda=-1$

$\lambda=-2$

$\lambda=\pm\infty$: $\cos\frac{\pi x}{a} \pm \cos\frac{\pi y}{a} = 0$.

$x = a-y$, $x=y$.

$\lambda=\pm 2$: $\cos\frac{\pi x}{a} \pm 2\cos\frac{\pi y}{a} = 0$.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第四章 流体の静力学

Hydrostatics of Fluid

§8. 流体の基本的性質 Fundamental Properties

第一章においては一般の連続物体に対して成立する法則について述べた．固体・液体・気体の如き物質はそれぞれ特有の力学的性質を持っている．

これを大別すると

i) 固体
ii) 液体
iii) 気体

のようになることは周知の通りである．

固体の特徴は形の変化に対して強い抵抗を示すことであり，液体は形(および容積)の変化に対しての み強い抵抗を示し，形を容易に変じ得る．気体は容積および形のいずれをも容易に変じ得る．

液体と気体とを総称して流体 Fluid と称する．これ等の基本的性質を研究するのが所謂 Hydrodynamics 流体力学である．或は Hydrodynamics の基礎を拓め，これを Aerodynamics 航空力学等に発展させることも出来る．

いづれにしても流体の基本的性質はそれが形の変化に対して強い抵抗を示さないことで

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

あるが、このまを応力といい表わすれば、そこで流体が静止して居る場合を考へて見ると、その各面に働く力は必ず面に垂直になつて居る。我々はまず静止して居る流体について考へ、面に働く力は面に垂直であることを仮定する。この仮定は或は流体の定義とも云ひ得ることも出来る。

すると、我々は流体に対する最も基本的な力学的関係として次の

$$P_{xy} = P_{yz} = P_{zx} = 0 \qquad (2.1)$$

を得る。所で x_0 軸を任意の方向に垂直な面に働く応力

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_x(\dot{i}x_0) + \mathfrak{P}_y(\dot{j}x_0) + \mathfrak{P}_z(\dot{k}x_0)$$

であるから、(2.1) を代入すると

$$\mathfrak{P}_n = \dot{i}P_{xx}(\dot{i}x_0) + \dot{j}P_{yy}(\dot{j}x_0) + \dot{k}P_{zz}(\dot{k}x_0)$$

となる。

もかなれ、仮定により $\mathfrak{P}_n$ は x_0 に平行な

先、いひかへれば

$$P_{xx}(\dot{i}x_0) : P_{yy}(\dot{j}x_0) : P_{zz}(\dot{k}x_0) = (\dot{i}x_0) : (\dot{j}x_0) : (\dot{k}x_0)$$

なり

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}$$

従つて又

$$P_n = P_{xx}(\dot{i}(\dot{i}x_0) + \dot{j}(\dot{j}x_0) + \dot{k}(\dot{k}x_0)) = P_{xx}x_0$$

$$P_n = P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}$$

即ち静止せる流体に於ては任意の微小な平面に働く圧力は、その平面の方向如何に拘はらず（垂直であるとして）等しい大きさを持つてゐる。その方向は二つ考へられる。即ち面から外に向く場合は引張力 tension であり、内へ向く場合は圧力 pressure である。通常は圧力が働く。これを流体静圧 hydrostatic pressure と称す。その大きさを p とすると

$$P_n = P_{xx} = \cdots = -p$$

となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$p_n = -n_0 p$

従って

$$p^* = -\left(i\frac{\partial p}{\partial x} + j\frac{\partial p}{\partial y} + k\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$= -\mathrm{grad}\, p$$

~~従って~~ 次に重力の存在する方程式は

$$\rho K = -\mathrm{grad}\, p \qquad (3.)$$

である。~~これが流体静力学の~~ (hydrostatic) 静止している流体を取扱う学問を 流体静力学 (hydrostatics) と称し、(3.) はその基礎方程式 (fundamental equation) である。

~~勿論~~ これに対して流体が運動している場合を扱うのが我々の hydrodynamics である。流体が動いている場合には、~~形の変化~~ 一般に形の変化の速さが速い程より抵抗力が作用する。即ち流体は一般に多かれ少なかれ粘性 (viscosity) をおびている。いいかえれば重力場の存在しない流体でも止まろうとする、加減がなくなる。そのためには 速さが小さくなれば小さくなる。これについては後に述べる。

(これに働く力 ~~多かれ少なかれ~~ を考えて) 60

次に流体のおかれた ~~状態~~ 状態を考えよう。いいかえれば流体内の各点における ρ は、その点に働く圧力 p のきまった関数である。逆に p は ρ のきまった関数である。

$$\rho = \psi(p)$$
$$p = \chi(\rho)$$

次に圧力 p をいくら変えても密度 ρ が変化しない、極端な場合を非圧縮性流体 (incompressible fluid)。流体のおかれた状態の ~~如何~~ 如何に関せず一定の密度をもつ流体を圧縮性流体 (compressible fluid) である。気体の場合には、流体を一定にしておけば、圧力と体積との間に、Robert Boyle の法則

$$pv = \mathrm{const}$$

が成立する。従って

$$p/\rho = \mathrm{const.}$$

そして一般には p, ρ および温度 t の間に関係がある。物質状態方程式 (equation of state) である。

今流体内の小体積 $dv = \rho dv K$ なる力が働いているとすると、これと δs と釣合せば、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\rho \cdot dw$ が δs

の仕事がなされる．従って重力場において

$K\delta s$

$$= \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot \delta s$$

δs の方向の圧力 p の微分を $\frac{dp}{ds}$ とすると，

$$= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} \delta s$$

$$= \frac{1}{\rho} \delta p$$

但し，δp は δs だけ移動による圧力の変化，

そこで

$$U = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$$

と置くと，

$$K \delta s = \delta U \qquad (5.)$$

となる．

これが K が

$$K = -\operatorname{grad} \Omega$$

のときポテンシャル Ω を与えるならば

$$K \delta s = -\operatorname{grad} \Omega \cdot ds$$

$$= -\delta \Omega$$

である．

(5.) は

$$\delta(U + \Omega) = 0 \qquad (\ )$$

これは流体の微小部分の任意方向の微小変位に対して成立する式である．

が保存力場において平衡状態にある場合には

$$U + \Omega = \text{const}$$

が成立する．

$\Omega = \text{const.}$ の面は等 potential 面 (equi-potential surface) である．その面は同時に $U = \text{const.}$ 圧力の一定な面（等圧面 (isobar)）である．保存力場内で平衡状態にある流体の等圧面と等ポテンシャル面とは一致する．

§9. 重力場内に静止している流体

液体の表面を重直上方に z 軸をとれば

$$K_x = K_y = 0 \qquad K_z = -g.$$

potential は $\Omega = gz$ ．ρ は定数

i) 液体の場合には ρ は const. であるから

$$U = \frac{1}{\rho} \int_{p_0}^{p} dp = \frac{p - p_0}{\rho}$$

従って

$$\frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この等圧面は等ポテンシャル面と同じく，
$z=\mathrm{const}$ なる水平面である．
液体を容器のもれ入れた場合，容器と接して
ゐる面・面 および自由表面は，一定の
大気圧 (atmospheric pressure) p_0 が作用
してゐるが，それは等圧面，~~等ポテンシャル面~~
~~等ポテンシャル面~~ 水平面である．その高さを h と
おくと上の const の値は

$$\frac{p_0}{\rho}+gh$$

であり，ρ をかけて

$$p=p_0+\rho g(h-z)$$

で表わされる．
~~容器の底面を $z=0$ なる水平面にとって~~
液体内の圧力はその深さ $h-z$ に比例して
増加する．容器の底面を $z=0$ なる水平
面にとると，そこでの圧力は

$$p=p_0+\rho gh$$

であり，従って底面積を S とおくと底面の受
ける圧力は

$$(p_0+\rho gh)S$$

となる．これは容器の形状には関係
ない．これを Pascal の流体静力学的
逆説 (hydrostatical paradox) という．

等温状態 (isothermal state)

ii) 気体の場合，理想気体とおくと，

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}$$

但し，p_0 なる一定圧力に対する密度を ρ_0 とおく，

$$U=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}.$$

従って

$$\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}+gz=\mathrm{const},$$

この関係を地球をとりまく気体に対して適用
すると ~~$z=0$ 地表~~ を $z=0$ にとり，その圧力を
p_0 とすれば const $=0$．

$$\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}+gz=0$$

従って

$$p=p_0e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}$$

即ち等温状態における気体の圧力は高さと共に
exponential に減少する．

これに対して大気が~~の~~断熱状態 (adiabatic
state) にある場合には圧力と体積の間には

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この等圧面は ポテンシャル面と同じく，
$z=\mathrm{const}$ なる水平面になる．
流体を容器の中に入れた場合，容器と接して
流体と面する地面を面とは，一定の
大気圧（atmospheric pressure）p_0 が作用
しているが，それは等圧面，~~すなわち~~
~~高さが~~水平面である．その高さを h と
すると上の const の値は

$$\frac{p_0}{\rho}+gh$$

となり，従って

$$p=p_0+\rho g(h-z)$$

で表される．
~~容器の底面を $z=0$ なる水平面~~ 従って
流体内の圧力はその深さ $h-z$ に比例して
増加する．容器の底面を $z=0$ なる水平
面とすると そこでの圧力は

$$p=p_0+\rho gh$$

となり，従って底面積を S とすると 底面の受
ける~~力~~圧力は

$$(p_0+\rho gh)S$$

となる．これは 容器の形状には全く関係
ない．これを Pascal の 流体静力学的
逆説（hydrostatical paradox）という．

~~等~~温状態（isothermal state）
ii）等温の場合，理想気体であると，

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}$$

但し，p_0 なる一定圧に対する密度を ρ_0 とすれば，

$$U=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}.$$

従って

$$\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}+gz=\mathrm{const},$$

この関係を地球をとむ大気に対して適用
すると ~~$z=0$ 地表~~ $z=0$ で，大気圧を
p_0 とすれば $\mathrm{const}=0$．

$$\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0}+gz=0$$

従って

$$p=p_0e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}$$

即ち等温状態にある大気の圧力は 高さと共に
exponential に減少する．

これに対して大気が ~~は~~ 断熱状態（adiabatic state）にある場合には 圧力と体積の間には

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$p v^{\kappa} = \text{const.}$$

すなわち

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}$$

なる関係が成立する。但し κ は気体ごとの定まった定数である。例えば単原子気体（monoatomic gas）、ヘリウム、アルゴン等のごときものに対しては、$\kappa = \frac{5}{3}$、二原子気体（diatomic gas）の場合には、$\kappa = \sqrt{2}$ の値、実験値としては $\kappa = 1.408$。三原子気体（triatomic gas）なら $\kappa = 5/4$、水蒸気の場合 $\kappa = 1.26$。

この場合には

$$U = \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p^{1/\kappa}}$$

$$= \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(p^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - p_0^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right)$$

であり

$$U + gz = 0$$

から

$$p^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - p_0^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} g\rho_0 \frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}}$$

$$\alpha - \frac{\kappa}{\kappa - 1} = \frac{1}{\kappa}$$

$$p^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = p_0^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\rho_0}{p_0^{\alpha}} gz \right)$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{\kappa}$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\rho_0}{p_0^{\alpha}} gz \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

(iii) 空力場内に置かれた流体中に一つの物体が浮いているとすると、それが周囲の流体から受ける静力学的の合成したものすなわち合成圧力（resultant pressure）は

$$\mathbf{R} = -\int_S p \, d\mathbf{f}$$

である。これは全の物体表面 S についての面積分であるから、Gauss の定理によって

$$\mathbf{R} = -\iiint \operatorname{grad} p \cdot dv$$

と書き得る†。但し、V は物体のために占領せられる流体の体積を表わす。流体の自由表面を $z = 0$ の平面とし、z 軸を下方に取ると、

$$p = \rho g z$$

なる

$$\mathbf{R} = -\rho g \iiint \operatorname{grad} z \cdot dv$$

† この場合の p は流体内において初めと同じ水平面では流体圧が同じ値の他を取れない。

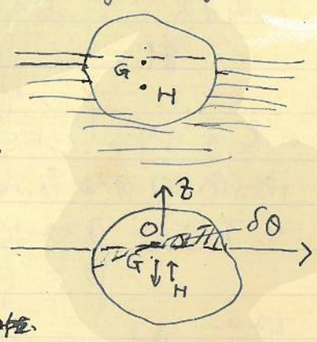
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って、x, y, z 軸から分けて書くと、

$$R_x = R_y = 0$$

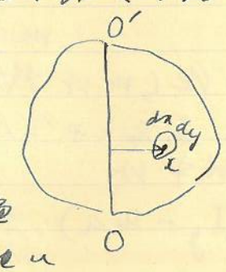
$$R_z = -\rho g \iiint_V dv = -\delta g V$$

但し
V は物体の体積，
即ち 流体中に置かれた物体には全浮力は 物体が占めて居た空間に流体があつ た場合の重さに等しく，その作用点は重心と 方，~~浮力と釣合う~~. これは よく知られた Archimedes の法則に他ならぬ。物体のこの力を浮力（buoyancy）といい、~~空間を~~ 占めた流体があつた場合の重心に相当する点を浮力の中心（centre of buoyancy）という。



今 水面上に浮んでゐる物体が、~~静止の~~平衡の位置から少し傾いたとすると、図の様にて 傾角を δθ，その水面と 前の水平面の交線を O とると，浮力は前と同じ 点で、z-軸を重心より取ると，水面上に出た体積は（水面下に入つたものと 同じ）

$$\iint_S \Sigma \, dx dy = \delta\theta \iint_S x \, dx dy = 0$$



但し，S は物体と その水平面と ~~物体の~~ 切口 で、この plane of floatation
従って O O' なる直線は S の重心を通る.

なお 浮上つた体積の ~~M_x =~~ 沈下した体積 に相当した流体の x 軸及び y 軸に関する 断面一次率の大いさを、それぞれ M_x, M_y とすれば

$$M_x = \rho g \iint z y \, dx dy$$
$$= \rho g \delta\theta \iint x y \, dx dy$$

$$M_y = \rho g \iint z x \, dx dy$$
$$= \rho g \delta\theta \iint x^2 \, dx dy$$

なお x, y 軸を S の重心 断面一次率の主軸にとれば，
$M_x = 0$

$$M_y = \rho g \cdot \delta\theta \cdot I_y$$

となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今その浮心をH．物体の重心をG，GH=aとすると，それらに働く浮力mgと重力mgは偶力を形成し，これによる回転能率の大きさは

$$mga\delta\theta$$

である．但しρは物体の密度．

従って，今回のその際における回転能率は

$$(\rho I_y - ma)\, g\delta\theta \quad \cdots (4.)$$

一方において新しい浮力の作用線をH'とし，これを通過する垂直線がGHと交わる点をMとする．Mを傾心（metacentre）という．そしてGM=h_yを傾心の高さ（metacentric height）という．

重力と新しい浮力とによる偶力の能率は

$$mgh_y\delta\theta$$

これは（4.）と同じものだから，従って

$$\rho I_y - ma = mh_y$$

$$h_y = \frac{\rho I_y}{m} - a$$

の関係が得られる．

物体の水面下にある部分の容積をvとすると

$$m = \rho v$$

なれば $h_y = \frac{I_y}{v} - a$

もし，$h_y > 0$ ならば，傾いた物体はそれを元へ戻そうとする偶力が働く．この方向に傾けようとする力に対しては安定であるが，I_yの最小の方向に対しても安定であるためには h_y が正でなければならない．（stable）

いずれかの方向に対して $h_y < 0$ となるならば，その方向へ傾いた場合元へは戻らない．この平衡は不安定である．（unstable）

どの方向に対しても $h_y = 0$ ならば中立（neutral）である．

船舶の安定の問題．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第五章 理想流体の力学

10 Dynamics of Ideal (Perfect) Fluid

§38. Eulerの方法

今まで述べた如く流体が静止状態にある場合には，その内外の任意の面を通じて働く圧力はその面に垂直である。これに反して，流体が動いている場合には必ずしもそうではない。面に沿うては必ず力が働く。即ち切線圧力も一般には0ではない。これは流体の粘性（viscosity）即ち内外摩擦（innere Reibung）に起因する。又流体と固体との境界でも一般には両者間の摩擦のために切線圧力が働く。依り粘性の強くない流体の運動を論じては粘性を全く無視する場合がある。そこで完全に切線圧力が少しも現われない場合（理想流体）について現実的な流体を考慮し，その運動を両者[illegible]することにより，これによって実際の流体の運動も近似的に知ることが出来るであろう。この如き流体を理想流体，ideal fluid, ideal Flüssigkeit, 完全流体，perfect fluid という。

この場合には前章と同様に

$$\mathfrak{P}^* = -\operatorname{grad} p$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

外力は体積力だけだから、流体内の任意の点における
運動方程式

$$\rho \frac{dv}{dt} = K - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

ここで流体の速さを v とすると
$v = \frac{dr}{dt}$ で、運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = K - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

となる。
所で左辺の $\frac{dv}{dt}$ は流体粒子の運動して行く
際に流れて ~~行く~~ 速さが時間的に変化して
ゆく割合を表わしてゐる。今ある時間 t に
ある流体の各部分の速さは ~~決まって~~ 各の点
めてゐる場所によって異なってゐるから、
v は $r(x, y, z)$ および t の函数となつてゐる、
そこで場所 r にゐる各の
時間的変化を

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial t}$$

と書くと、これは $\frac{dv(r,t)}{dt}$ とは異なり、各点の
速さは

$$\frac{dv(r,t)}{dt} = \frac{\partial v(r,t)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v$$

の関係が成立つ。
∵ dt 時間後には粒子は $r + v\,dt$ なる点
に移つてゐるから、

$$\begin{aligned} dv &= v(r + v\,dt, t + dt) - v(r, t) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial v}{\partial y} v_y dt \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial z} v_z dt. \end{aligned}$$

従つて運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v = K - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

の形に書ける。これを Euler の運動方程式
といふ。
（前者と同様に、力 K が Ω なるポテンシャル
をなす場をなし、且つ流体の密度 ρ が圧力 p のみ
の函数なるときは、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v = -\operatorname{grad}(\Omega + U)$$

となる。）
十分らんかけて書くと

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_x = K_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

etc.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

流れ 流体内の任意の閉曲面 S を考へ，単位時間に 表の方向に 流出する 流体の質量を Q とすると，それは明かに

$$Q = \iint_S \rho v \, df$$

であらう．
一方 S の内部 V にある 流体の全質量は

$$\iiint_V \rho \, dv$$

である．所で 質量不変の法則 (law of conservation of mass) は，S を通じて 流出した丈け，V の中の質量の減少として 現はれる筈である．即ち

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dv = \iint_S \rho v \, df$$

これを Gauss の定理を用ひて 書き直すと

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \iiint_V \mathrm{div}(\rho v) \, dv$$

これが S の如何なる形のものに対しても 成立するためには 被積分函数が恒等しくなければならない．即ち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0 \qquad (\ )$$

が成立せねばならぬ．これを 連続方程式 (equation of continuity) といふ．
左辺は又

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \, \mathrm{grad})\rho + \rho \, \mathrm{div} \, v$$

$$= \frac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div} \, v = 0$$

とも書ける．
直交座標で書けば 上式は，勿論

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

であるが，極座標 (r, θ, φ) にとると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin\theta)$$
$$+ \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho w) = 0 \ \text{と}$$

又円柱座標にとると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

である．

以上の如く，流体の密度 ρ，速度 v および座

T 従て，(u, v, w) はそれ (r, θ, φ) の増す方向の

©2023 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

すこのまた v_x をおもと、その各 [illegible] の位置
をおおと考える。

五つの

ρ が x(x,y,z) および t の単価函数で、これを
対する三つの運動方程式と連続方程式
を四つの方程式があり、ρ と ρ の間の
一つの関係が存在するから、残る函数は
初期条件 (initial condition) および境界条
件 (boundary condition) のもとにこれらの
五つの函数の値をきめることが出来る。
この扱い流体内の一定の物質の運動に着目し、
その運動の時間的変化を追うのを
Euler の方法と称する。

§1. Lagrange の方法。
これに対して、流体内の任意の物質に着目
し、この物質が時間とともにその位置を
どう変えるかを追うのを Lagrange
の方法と称する。†
今この物質が t=0 なる時刻に r₀(a,b,c)
にあり、時刻 t には r(x,y,z) の位置に
移るものとしよう。これは r, v 等を r₀ および t の函数
に流体の密度 ρ は originally ρ₀ の値で、圧力 p
は potential Ω を用いるとすれば、Euler
の運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}(\Omega+U)$$

v_x 等を a, b, c, t の

(4)

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+U)$$

と

でおきかえられ!! この式において左の v_x の
(x, y, z) および t を a, b, c および t
の函数と見做し、これを解いて
$\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ を求めてみると、

v_x 等は a, b, c および t の函数と考へると、
$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$ etc. であるから、

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial v_z}{\partial t}=\\&-\left\{\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+U)+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial}{\partial y}(\Omega+U)\right.\\&\left.+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial}{\partial z}(\Omega+U)\right\}\\&=-\frac{\partial}{\partial a}(\Omega+U)\\&\text{etc.}\end{aligned}\right\}(\ )$$

ここで $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$ etc. であるから
上式は

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial a}(\Omega+U)\qquad(\ )$$

となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これを Lagrange の連続方程式と称する.
この式では a, b, c, t が独立変数で, x, y, z はそれらの函数である.

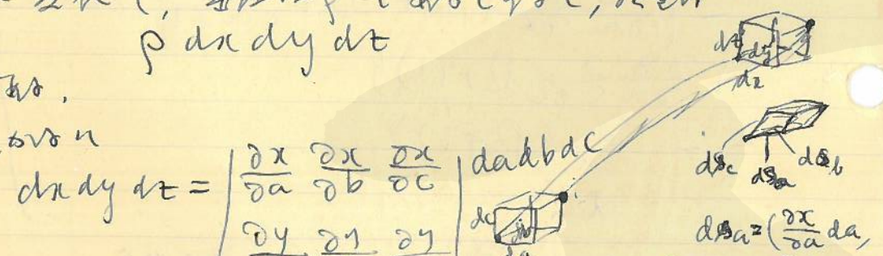
次に Lagrange の ~~方法では~~ 場合の連続方程式を求める. $t=0$ のとき $x_0(a,b,c)$ を中心とする微小直方体 $dadbdc$ ~~直方体~~ 内の流体の方を考えてみると, ~~直方体~~ その点の $t=0$ のときの密度を ρ_0 とすると, 質量は

$$\rho_0 da db dc$$

である. t のとき流体は $x(x,y,z)$ の点に移り, $dadbdc$ の各辺は $dxdydz$ に変化し, 密度が ρ であるとすると, 質量は

$$\rho dx dy dz$$

である.



よって,

$$dxdydz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} dadbdc$$

$$= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} dadbdc$$

質量は

$$\rho \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} dadbdc$$

これが ~~この~~ 質量保存則から

$$\rho \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = \rho_0 = \text{const.}$$

でなければならない. これが Lagrange の連続方程式である.

特に流体が

$$\rho = \rho_0$$

となるとき,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = 1$$

となる.

Lagrange の運動方程式 ( ) の左辺を t について積分すると

$$\int_0^t \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right\} dt$$

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial t} \right]_0^t$$

$$- \int_0^t \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \cdots + \cdots \right\} dt$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial t}\right]_0^t$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\} dt$$

しかるに $t=0$ において $x=a$ etc
すなわち $\frac{\partial x}{\partial a} = 1$　　$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial a} = 0$

また $t=0$ における流体の速度を (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) とすれば上式は

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial t} - v_{0x}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\Big\}_0 \Big\} \Big\} dt$$

となる。また Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} - v_{0x}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\} dt$$
$$- \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t (\Omega + U)\, dt$$

そこで
$$\chi(a,b,c,t) = \int_0^t \left[\Omega + U - \frac{1}{2}\left\{\quad\right\}\quad\right\}\Big] dt$$
とおくと、

運動方程式は

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} - v_{0x} = -\frac{\partial \chi}{\partial a}$$
etc.

なお、これらの式は Weber の運動方程式と称する。

「おとこれら三つの式、連続の式、χ のとおりの式とから x, y, z, p, χ を a, b, c, t の函数として定めることができる。

但し、$t=0$ において
$x=a$, $y=b$, $z=c$, $\chi=0$
なる初期条件 (initial condition) を満足せしめるため。」

流体が保存力の場内にある場合、potential Ω はその点における単位質量の流体の有する位置力をあらわす。従って流体の微小部分のもつ位置力は

$$V = \iiint_\Delta \rho\, \Omega\, dv$$

である。一方この流体の運動勢力は

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho v^2\, dv$$

で与えられる。等位面の流体が座力の近

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に

運動方程式を解くには一般に初期條件の他に境界條件(boundary condition)が必要である。即ち例えば流体が容器に入れてある場合には容器の壁をどう扱うかが必要である。

又流体が大きく拡がっている場合には遠くで速さは大体0に等しくなければならない。

又周囲との境界面においては流体の全ての物理量が連続的に変化しなければならない。即ち境界面上の任意点における流体の方向の単位vectorをnとし，その点に於ける周囲と流体の速度をそれぞれv_0, vとすると

$$n(v-v_0)=0$$

なる周囲が静止していたならば

$$nv=0$$

もって一般に流体の境界面の方程式を

$$F(x,y,z,t)=0$$

とおき，$t+dt$に於ける境界面とtとの

その点の一点(x,y,z)の

$t=0$における

$(x+dx, y+dy, z+dz)$とすると，流体の上の点は$t+dt$においても常に境界面上にあり

$$F(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)=0$$

即ち

$$F(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - F(x,y,z,t)=0$$

即ち

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial t}+(v\,\mathrm{grad})F$$

$$\text{或}\quad \frac{DF}{Dt}=0$$

但し，vはtと共に変化する(x,y,z)なる流体の速さを表す。

十七年第一学期終了

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§7. Classification of Motion　渦流体運動の分類.

前節に述べたように，一般の流体の運動は Euler 又は Lagrange の運動方程式および連続の式を満足せねばならぬ．

扨て，一般の可能な運動を次のように，幾つかの種類に分類することが出来る．

今或る瞬間に於ける点 (x, y, z) に於ける流体の微小部分の速さを $v(v_x, v_y, v_z)$ とし，これに極めて近い $r+\delta r$ $(x+\delta x, \cdots)$ に於ける速さを $v+\delta v$ $(v_x+\delta v_x, \cdots)$ とすると，

$$\delta v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\delta z$$

etc.

即ち

$$\delta v = (\delta r \cdot \mathrm{grad})\, v$$

であらわす．

$$\alpha = \frac{\partial v_x}{\partial x},\quad \beta = \frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \gamma = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{\partial w_z}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}, & g = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial w_z}{\partial x}, & h = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \\ \xi = \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}, & \eta = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}, & \zeta = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

と書くと，

$$\delta v_x = (\alpha\delta x + \tfrac{1}{2}h\delta y + \tfrac{1}{2}g\delta z) + \tfrac{1}{2}(\eta\delta z - \zeta\delta y)$$

$$\delta v_y = (\tfrac{1}{2}h\delta x + \beta\delta y + \tfrac{1}{2}f\delta z) + \tfrac{1}{2}(\zeta\delta x - \xi\delta z)$$

$$\delta v_z = (\tfrac{1}{2}g\delta x + \tfrac{1}{2}f\delta y + \gamma\delta z) + \tfrac{1}{2}(\xi\delta y - \eta\delta x)$$

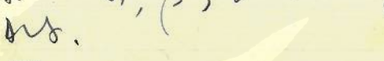
となる．即ち 各点の 流体部分の 各点 ~~の点は~~ α, β, γ …… による 流体部分に対する 相対速度 δv は α, β, γ …… 等九個 の量で 特徴づけられる．

各別の場合として

i) $\alpha \neq 0$，他は 皆 0 となると

$$\delta v_x = \alpha\delta x, \quad \delta v_y = \delta v_z = 0$$

即ち．x に対し，x 軸上に δx なる 距離にある 流体の 相対速度は x-方向に向い，大きさは $\alpha\delta x$ である．



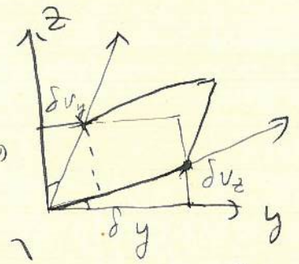
次の 相対速度 $(\beta)\delta x$ は 即ち，β は x-方向に ある 伸長の 速さ を表わす．この場合には 体積 係数の 変化を 伴う．

ii) 次の f も 0 他は 皆 0 となると，

$$\delta v_x = 0 \qquad \delta v_y = \tfrac{1}{2}f\delta z$$

$$\delta v_z = \tfrac{1}{2}f\delta y$$

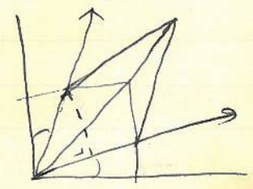
で，図の如く，γ 軸 を 含む 面 に 垂直な 陽方．



xy 平面 ~~上の 点は~~ を x 軸 を 軸として 各 軸の 方向へ 回転し，同時に z を 平面は y 軸方向へ 同じ 角度 回転する．~~即ち~~ 例えば，各 流体 ~~方向~~ x，y，z 方向に 色を 着色 なして 置いて ~~と~~ 方向は，y と 平行の 断面が 着色 されて ~~いる~~ 物は 平行六面体に 変形する．

~~この場合も 上の 如き 小さい 場合には~~ 体積の 変化を 伴わない．

（第一章 参照）



（δt の 間の 体積 変化は $\cos(\cdot\delta t) - 1 \propto (\delta t)^2$ の 程度 のもの）

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ξ, η, ζ を渦動名 vorticity
ξ, η, ζ は一つの vector を組,
これを $\mathfrak{w}$ と書くと, これは流体ゆらの
回転速さを表わす. これを渦動速さ
又は渦動名 (vorticity) と名付ける.
又は渦動ベクトル
(vortex vector)

$$\mathfrak{w} = \mathrm{rot}\, v$$

$$\delta v = \frac{1}{2}[\mathfrak{w} \cdot \delta r]$$

となる.
(場合によって $\mathfrak{w}$ を $\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}\eta, \frac{1}{2}\zeta$
渦動名 $\mathfrak{w}$ を

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v$$

でそれをおこともあり, すると

$$\delta v = [\mathfrak{w}\, \delta r]$$

となる)

一般に $\mathfrak{w}$ が 0 でない場合流体は
静止する運動 (rotational motion) と
渦動運動 (vortex motion) とでなる
といい.
これにたして $\mathfrak{w} = 0$ なる場合は

前) に上の ~~xxx~~ i) ii) と区別されるものが純
の変形の歪 (pure strain) を表す.
iii) $\alpha = \beta = \gamma = f = g = h = 0$ の場合
には

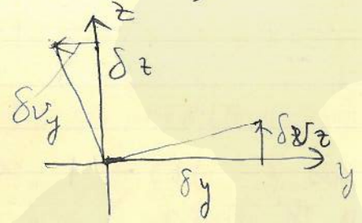
$$\left.\begin{aligned} \delta v_x &= \frac{1}{2}(\eta \delta z - \zeta \delta y) \\ \delta v_y &= \frac{1}{2}(\zeta \delta x - \xi \delta z) \\ \delta v_z &= \frac{1}{2}(\xi \delta y - \eta \delta x) \end{aligned}\right\}$$

となり,
例えば $\xi \neq 0$, $\eta = \zeta = 0$ の場合には

$$\delta v_x = 0, \quad \delta v_y = -\frac{1}{2}\xi \delta z$$

$$\delta v_z = \frac{1}{2}\xi \delta y$$

で, これは x 軸を中心とする流体の純粋
ゆらが発生して回り始めるような x 軸の回り
の回転なことを表す. そして ~~xxxxxxxxxx~~
$\frac{1}{2}\xi$ が回転の角速さを表す.
(δz の場合には δy と
同様 $\frac{1}{2}\xi \delta z \cdot \delta y$
と面積を考えるべし)

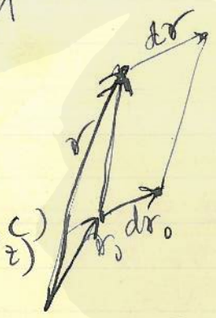


©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

流体は非回転運動をしているという！
(irrotational motion)
*だから、渦巻運動とか回転運動とかの
ときのみ　おも場合には極めて不適当な
ものである.
即ち
「流体の密度が圧力のみの函数で、
且つ保存力の場で運動している場
合には、非回転運動は何時迄も続き、
初期時刻に於ける 渦なし 運動
も何時迄も続く.」
これは Lagrange の定理と称する.
注意. Weber の方程式において du, db
$d\zeta$ を消してかんへ変ずると、

$$v\,dr - v_0\,dr_0 = -d\chi$$

を得る.



今最初非回転運動をして
これを場合となおして

$$v_0\,dr_0 = -d\varphi_{(a,b,c)}$$

そして初速度の函数 $\varphi_0(x,y,z)$
が存在する.
そこで $v\,dr = -d(\varphi_0+\chi)$ となる#

T 非回転運動の場合には

$$v\,dr = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

なる式は完全微分 (total differential) になる)
即ち 完全微分であるべき必要にして充分な条件は

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = \cdots = 0$$

が満足されている. 従って

$$v\,dr = -d\varphi$$

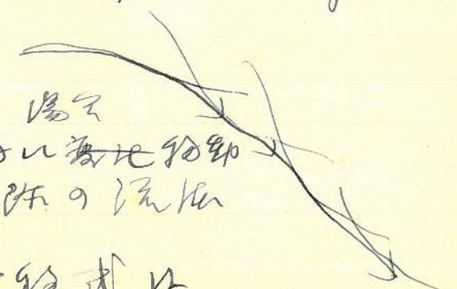
なる函数 $\varphi(x,y,z)$ が存在する、これを速度 potential (velocity potential) と称する. *この vel. pot. が存在するから運動は irrotational である*

従って $\varphi_0 + \chi = \varphi$ とおけば

$$v\,dr = -d\varphi$$

即ち 初め非回転運動である.
逆も云える！即ち
「この場合注意すべきことは非回転運動をして
ある流体は（Weber の方程式に従って）
常時非回転運動をして行くことである.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

流体の運動は又定常運動と非定常運動 (stationary and non stationary motions) に分けることが出来る。
前者は運動の状態が時間と共に変らないもので、詳しくいえば、任意点 x, y, z を通る流体の密度、速さその他の流れを決める諸量が時間 t を陽に含まないことを場合をいい、しからざるものを非定常運動という。
流体内に一つの曲線をとり、その上の各点において流体の方向がその点における接線の方向と一致するような場合、この曲線を流線 stream line と称する。定常な流体は空間に固定した流線で表わされる。(流体の中の各点における速度ベクトルの描く曲線 (Velocity line) ということもある。)
これに対して流体の中のある流体質点の描く通路 trajectory とは一般には一致しない。(この通路をも流線という場合もある)
何故かというと一般には流れは時間的に変化し、従って、流体中の各点は時間と共に異る流線の上に移ってゆく訳で通路は流線群になる envelope を流線と他ならぬ。

ある場所が定常流動をしている場合には流線は時間的に変化しない、そして各点の流体の通路と一致する。
このとき流線の微分方程式は
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$
で与えられる。所が一般の場合には時間 t の函数であるからこの微分方程式の解は
$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = c_1 \\ f_2(x, y, z, t) = c_2 \end{cases}$$
なる形であらわされ、c_1, c_2 は常数で、これに種々の値を与えることによって流線の形が変るのである。各々 v_x, v_y, v_z は一定の時間において流点で一定の値を持つ。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

各時間ごとに流体粒子が変わることではない。
又流体中で流体が全然ないという場合はない、空洞は除くが又は流体、境界から始まって境界に終る。境界とは
dt 間には流体の湧き出し源(source)
消えてなくなる源(sink)も含まれてよい。
これらをして各点の微分方程式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x\\ \frac{dy}{dt} &= v_y\\ \frac{dz}{dt} &= v_z\end{aligned}\right\}$$

でおきかえる。v を (x,y,z,t) の函数としてみる。$t=0$ のときは x,y,z が始点の座標 (a,b,c) をあらわすと、x,y,z は (a,b,c,t) の函数として表わされ、これが運動の状態である。

一つの

次に各点の一点をとって

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0$$

を満たすような (dx,dy,dz) は方向を
微小量と考えるとそれはその点を通る

そこで今しも この様な方程式を満足するものが存在するならば、それはその点で流体に垂直な面である。
動かない面の一つを

$$\phi(x,y,z)=0$$

とおくと

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=0$$

となる。これが前の式と一致するためには

$$\frac{v_x}{\frac{\partial\phi}{\partial x}}=\frac{v_y}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}=\frac{v_z}{\frac{\partial\phi}{\partial z}}=f(x,y,z)$$

であることが必要である。
これから

$$v_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+v_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0$$

すなわち　$v\cdot\operatorname{curl} v=0$

又は　$v\cdot w=0$

ということが必要なことが出てくる。
又この條件が満足されて $\psi=0$ なる surface が存在する。　任意の一組の

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

二次元運動では、この保存は満たされない。
なお $w=0$ の場合、即ち水面波運動の場合許されるが、この保存は満足されるその場合には、速度 potential ϕ が存在し、$v=\pm\operatorname{grad}\phi$ で、$\phi=\text{const.}$ が流線を直交する曲線となる。

§8. Bernoulli の定理

流体の方程式密度 ρ が圧力 p の函数で、

$$U=\int^{p}\frac{dp}{\rho}$$

の形の圧力流体に働く力 K が potential Ω をもつ場合、即ち

$$K=-\operatorname{grad}\Omega$$

ならば、Euler の方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\nabla)v=-\operatorname{grad}(\Omega+U)$$

の形をとる。
grad
特別の場合として
i) 定常運動をしてゐるならば

$$(v\nabla)v=-\operatorname{grad}(\Omega+U)$$

grad
即ち

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+U)$$

etc.

ii) 流線の方向の線素を ds (dx, dy, dz) とすると

$$ds=v\,dt$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

であるから (grad)
$ds\cdot\{(v\nabla)v\} = -\rho\, ds\cdot \mathrm{grad}(\Omega+U)$
また
$v\,dt\cdot\{(v\nabla)v\} = v\cdot(ds\cdot\nabla)v$
$= (ds\cdot\nabla)\frac{1}{2}v^2$

従って上式は
$(ds\cdot\mathrm{grad})\left(\frac{1}{2}v^2+\Omega+\int\frac{dp}{\rho}\right)=0$
これは ( ) の中の量が流線に沿って変化しないことを示す。即ち
$\frac{1}{2}v^2+\Omega+\int\frac{dp}{\rho} = C$
但し、C は流線ごとに異なる定数である。
これを Bernoulli の定理という。

ii) 非回転運動の場合には
$v = -\mathrm{grad}\,\varphi$ $\mathrm{curl}\,v=0$
であるから
$(v\,\mathrm{grad})v_x = -(\mathrm{grad}\,\varphi)(\mathrm{grad})v$
$= v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}$
$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$
であるから運動方程式は
$-\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,v^2 = -\mathrm{grad}(\Omega+U)$

従って積分すると
$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2 = -(\Omega+U)+F(t)$
ここで、但し、$F(t)$ は時間 t のみを含む任意関数、すなわち
$\int\frac{dp}{\rho} =$
が一定常圧力の場合には他のすべての量は t に無関係であるから $F(t)$ も定数となり
$\frac{1}{2}v^2+\Omega+\int\frac{dp}{\rho} = C'$
となる。但しこの式の C' は流線ごとに異なる定数である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

次に非圧縮流体の場合には Bernoulli の定理は

$$\frac{1}{2}v^2+\Omega+\frac{p}{\rho}=C$$

と書ける。これからしてよくわかることは、流体が重力を受けてない場合、外力が働いてないとすると、$\Omega=$const. で従って速さの大きい所程圧力 p は小さいということである。これはよく知られた動圧 (kinetic pressure) の現象に他ならぬ。

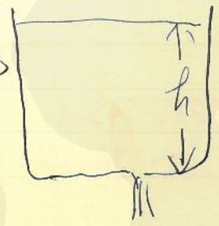
$\Omega=gz$ であるから

次に流体が重力が作用している場合には上式の z 軸を鉛直上方にとると

$$\frac{1}{2}v^2+gz+\frac{p}{\rho}=C$$

が定常流れに対して成立する。

今液体が一つの容器の中に入れられ、その底に極めて小さな穴を穿つたとすると、液体は極めて徐に流れ出てゆくから、その高さ h の変化は少なく、ほぼ定常運動と



六つのおよそ等

見做しうる。その容器の高さ、$z=h$ を水面とし、大気圧を p_0 とすると水面では $v\cong 0$ と見做しうるから

$$gh+\frac{p_0}{\rho}=C$$

底からある物体の速さを v_0 とすると

$$\frac{1}{2}v_0^2+\frac{p_0}{\rho}=C$$

従って

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

となる。即ち液体のきて来る速さ v_0 は液の表面、容器、その形等に無関係で水面の高さ h の平方根に比例する。これを Torricelli の定理と称す。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

i) Point source

第6章　球面波運動

14

§ 4. 湧出点と流入点（Source and Sink）

空間の球面波運動において Bernoulli の定理が成立する。

流体内の一点から四方八方に拡がる流体の内外に任意の面 S を取り，S を外向きに この面を通る流体の全量を求めて見ると，

$$\iint_S v\,df$$

これを流束 flux という。

これは、dfは面素，vはその点における流体の速さをあらわす。

この面を通る流体の flux 流束 S を閉曲面とすると流束は0ならば，この閉曲面の内外に流入する流体の量と流出する流体の量とは相等しいことをいう。これをみして上の値が0ならば全体として流出する方が大いことになる。これは内部のどこかが流体の湧き出る源（source）になっていることを示す。反対に上の値が負ならば流入する方が大いことになり，このどこかが流体の流れ込みになっている（sink）訳である。

多く湧き出る源をもつ流れが一点に集中

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

してお場合である。即ち湧出点（(Point) Source），流入点（(Point) Sink）が~~存在する~~ について考えて見る。即ち例へば、湧出点を囲む極小さな閉曲面 S をとると

$$\iint_S v\,df$$

は S をいくら小さくとっても 0 にはならず、ある程度以上の正な場合がある。これを

$$4\pi m = \iint_S v\,df$$

と書いた場合，m を湧出点の強さ（$m>0$）又は流入点の強さ（$m<0$）strength と稱する。

今流体が此の如く運動をして居る場合は

$$v = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

なる如き potential が存在する。

$$4\pi m = -\iint_S \mathrm{grad}\varphi \cdot df$$

かうして湧出点を中心とする半径 r の球を取ると

$$4\pi m = -\iint \frac{\partial\varphi}{\partial r} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

となる。十分小さい球から流体が四方八方へ一様に流出するものとすると φ は r のみの関数と考へられる。それ故偏微分から全微分に直すと上の積分が一寸できるので

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$$

即ち

$$\varphi \propto \frac{1}{r}$$

故に

$$\varphi = \frac{m}{r}$$

とおけば上式は満足される。これは即ち m なる強さの湧出点があった場合の流体の potential を表はす。

従って球面から r なる距離の点に於ける流体の速さは球面から遠ざかる方向（$m>0$）にして

$$v_r = \frac{m}{r^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}$$

の大いさを有する。

次に P 点に m なる強さの source（$m>0$）があり，P' 点に $-m$ なる強さの sink がある場合

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

それは、おて 数n
一般に S は閉曲面で包まれた領域を V とおと
Gauss の定理により

$$\iint_S \mathrm{grad}\varphi \cdot d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)\cdot dv$$
$$= \iiint_V \Delta\varphi \cdot dv$$

である。但し Δ は Laplacian を表わす。従って
S についての流束は

$$= -\iiint_V \Delta\varphi\, dv$$

であらわされる。S の中に source 又は sink を含まないとすると流束は 0 の筈。これは S をどんなに小さくとっても成立つ筈だから source 又は sink の外にあっては

$$\Delta\varphi = 0$$

が成立つ。即ち potential は source 又は sink 以外では Laplace の式を満足せねばならぬ。
source (sink) に於ては φ の分岐点になっている。
これらを一般に $P_1, P_2, \cdots P_n$ とする

十分近くの source のみの場合の流束の密度は各 source のみの流束密度の密度の vector sum に等しい。

質量が $m_1, m_2, \cdots m_n$ である任意の source が存在している場合の流束の P 点の potential は

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{r_\nu}$$

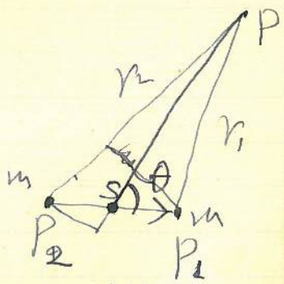
流束的に任意点 P 並べられた点で
ゆえにこれが成立つことは明らか。但し、r_ν は P_ν との距離を表わす。$P_1, P_2 \cdots P_n$ 点において
何なることへば、この式は明かに Laplace の式を満足し、$P_1, P_2, \cdots P_n$ 点で所要の境界を満足しているからである。

今 P_1 に m, P_2 に $-m$ である任意の source が存在する場合には

$$\varphi = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

今 $S = P_1 P_2$ の距離 S が極めて小さく、且つ $\mu = mS$ が有限 $-m$ であるような極限の場合を考えてみると

$$\varphi \simeq \frac{m}{\sqrt{r^2 + \frac{S}{2}\cos\theta}} - \frac{m}{r + \frac{S}{2}\cos\theta}$$



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\cong \frac{\mu \cdot \cos\theta}{r^2} = (\mu \operatorname{grad})\left(\frac{1}{r}\right)$$

このような場合を 複源 (Doublet, Double source) と称し,

$\mu = m\delta$

を その強さ (moment), $\mu = m\delta$ を doublet の強さと称する. 又し

但し, 上式の grad は doublet を原点とし, これに対する P 点の相対座標に関する微分を意味する.

(3) Space and Surface Distribution of Sources

次に source の与えかたのことなく, 互いに異なった形状として source が流体中に連続的に分布している場合を考えよう. 即ち微小体積 Δv 内にある source の強さの代数和を Δm とし,

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} = \sigma$$

なる有限値が存在するとき, これを P 点における source の 容積密度 (volume density) と称する.

従って流体内の各点で

σ が与えられ $\operatorname{div} v = 4\pi\sigma$ の

ような 連続的な

この様な source が空間に分布されている場合の P 点の速度 potential は 各々の微小体積の場合の和として

$$\varphi = \iiint \frac{\sigma\, dv}{r}$$

で与えられる. 但し r は dv なる点積要素から P 点までの距離を表す. 従って 結局 source は 空間に於ける 空間に於いて 与えられることと 同じである.

この場合には 任意の閉曲面 S について 流量は S 内にある source の強さの総和の 4π 倍の値である, 即ち

$$\iint_S v\, df = 4\pi \iiint_V \sigma\, dv \quad (*)$$

従って (*) 式より

$$-\iint_S \operatorname{grad}\varphi\, df = -\iiint_V \Delta\varphi\, dv$$

であるから

$$\iiint_V (\Delta\varphi + 4\pi\sigma)\, dv = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これは領域Vの如何に拘らず成立する。従って流体内の各点に於て

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

が満足されねばならぬ。
即ち 流体内のsourceの分布の密度が0でない点に於ては，上記の如き Poisson の式を満足せねばならぬ。

次に或る閉曲面Sに囲まれた領域Vに於て φ, ψ を共に連続で一次微分係数も連続な二次の函数とすると

$$\iint_S (\varphi \,\mathrm{grad}\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,df = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dv$$

が成立する。これは Green の定理に他ならぬ。
特に φ, ψ が共に Laplace の式を満足すれば

$$\iint_S (\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi)\,df = \iint_S (\psi\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,df$$

そこで P点に単位の強さのsourceがあった場合の速度potential

$$\psi = \frac{1}{r}$$

をとる。P点を中心とする小さな半径の球面 s 内の点を領域から除いて考えると，ψ は至る所 $\Delta\psi = 0$ を満足し，而して

$$\iint_s \varphi\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot df = \iint_s \varphi \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \iint_S \frac{1}{r}\,\mathrm{grad}\,\varphi\cdot df - \iint_s \frac{1}{r}\,\mathrm{grad}\,\varphi\cdot df$$

球面 s の半径を極めて小さくした極限では 左辺の第二項は $4\pi\varphi_P$ になる。
又右辺の第二項は $\mathrm{grad}\,\varphi$ が P 点近くで有限なら 0 に収斂する。
従って

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, df - \varphi\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) df\right)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§15. 循環 (Circulation)

物理学 運動の一般的性質

一般の物理的運動が持たねばならぬ性質を述べる

i) 閉じた一つの流体内の任意閉曲線を縁とする任意の曲面 S を考へ

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, df = \frac{1}{4\pi}\iint_S \varphi\, d\omega$$

但し $d\omega$ は立体角要素を意味する

なる面積分を取る。これは速度 potential の S 上における平均値を表す。

扨て $\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, d\omega$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, df$$

しかるに φ 内部に source も sink もなければ

$$\iint_S v\, df = -\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, df = 0$$

$$\therefore \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = 0$$

即ち 球面 S 上の φ の平均値は球の半径

とする。

これは S である閉曲面上の $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ の積分

仮定により source がなく、且つ境界面上を連続的に doublet が $\frac{1}{4\pi}\varphi$ なる面密度で分布してゐる場合、内部の φ の速 potential は

上の如き面積分に等しい

は φ 面上の値なることを示す。いひかへれば、くさぐさの強度の任意の物理的運動が最初の境界面 の内部にある source および doublet の如き分布の状態とを比較し得る。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

vが空間全体にわたって連続で、なおかつ至る所で有限な potential φ は恒久的に小さくなる。

ii) 外向き単位法線をもつ流体の一つの閉曲面 S をとり、これに対してGaussの定理を φ grad φ に適用すると

$$\iint_S \varphi \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{f} = \iiint_V \varphi \Delta\varphi \, dv + \iiint_V \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dv = \iiint_V v^2 \, dv \qquad (*)$$

が得られる。

従って S の上の至る所で $\varphi = 0$ または $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ であったとすると

$$\iiint_V v^2 \, dv = 0$$

即ち流体の V の中の至る所で

$$v = 0$$

Sが完全の壁であったとすると、そこでは

$$v_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

であるから、その中の流体は静止の状態を考えられる。

又 外向き単位法線をもつ流体の充満した

閉じた

てみる管を急に止めると、中の流体も静止することになる

iii) 閉曲面 S 上において至る所で有限な potential をとると、その内部においても

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

とおいて (*) を適用すると V の中の至る所で

$$v_1 - v_2 = 0$$

が成立せねばならぬことになる。

又流体が多重に連がって居て、その中に閉曲面 S と外部に大きな閉曲面 S' とを境界面として (*) 式を適用すると

$$\iint_S \varphi \operatorname{grad}\varphi \, d\mathbf{f} + \iint_{S'} \varphi \operatorname{grad}\varphi \, d\mathbf{f} = \iiint_V v^2 \, dv$$

で、従って無限遠で静止して居る流体の中では、周囲が静止して居る時

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

外回転定和はそうでない。

又周径の定和によって表される外回転定和は組一重しかない。ことが言われる。

§1b. 循環 (Circulation) 定和 (Cyclic Motion)

(i) 空間領域の連結性 (Connectivity)

一般に流体が満たして占める領域中の任意の一閉曲線を連続的に変形して一点に縮めることができる場合、その一方を固定後任意の一点に固定して、領域外に出ることなしに他方の曲線に一致せしめることが出来る場合、この領域は単一連結されている (simple connected) という。いいかえれば、任意の閉曲線を領域外に出ることなしに一点に収縮せしめ得る、この領域を単一連結又は単結領域 (simply connected region) という。

この条件が満足されていない領域を一般に多重連結又は多結領域 (multiply connected domain region) という。

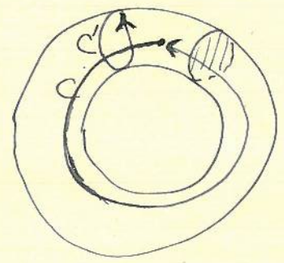
この多結領域内に幾つかの障壁 (barrier) を作り、これを横切ることを許さないようにすることが出来る。一般に $n-1$ 個の障壁によって単結領域において

球の内外の領域は勿論単一連結領域である。これに対して

域に出来る場合、その領域を二重連結領域 (doubly connected region) という。

例えば環 (torus) の如きものは内外の領域の如きものは二重連結領域 (doubly connected region) である。

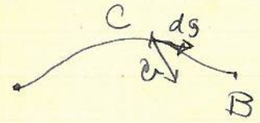
環を一つの平面で切ればそれは単一連結領域になる。



環の内外で C' の如き閉曲線を取ると、これは一点に収縮しないが、C の如きものは出来ないから単結領域ではない。しかし

(ii) 循環 (Circulation)

流体中の任意の二点 A, B をこれを結ぶ曲線で結んだ場合、これに対して



$$\int_{AC} v_s ds = \int_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

なる線積分を行うものを、これに対して

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

A から B への流れ (flow) とは、
記号で $I(AB)$ と書く。
特に (閉曲線の場合の流れを
循環 (circulation) という

$$\oint_C (v\,ds) = \oint_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

と書くことにする。

今、流体の占める領域内の一つの曲面 S を考え、その境界の閉曲線 C について循環を取ると、これに関して次の様な Stokes の定理が成立する。

$$\oint_C v\,ds = \iint_S \mathrm{curl}\, v \cdot df$$

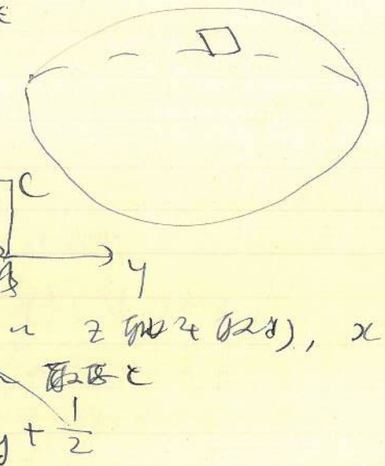
ここで、C の方向は S を右ねじが進む向きとする。

$$\oint_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\,dy \right.$$

となる。

証明。S を曲面を
細かく小さな多角形
の集まりと分ける。
その中の一つ
を ABCD
とし、
AB の方向を x 軸、AD の方向を z 軸とする)、x 軸と
線形の角を左回りに取ると



$$I(AB) = v_y + \frac{1}{2}$$

すると各辺は
ほぼ
ほぼ
ほぼ

近似的に平面図形と見なし
yz-平面に取ると、

$$\iint_S \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy\,dz = \oint_C v_z\,dz$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\iint_S \frac{\partial v_y}{\partial z}\,dy\,dz = -\oint_C v_y\,dy$$

よって $\iint_S \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy\,dz = \oint_C (v_y\,dy + v_z\,dz)$ (*)

~~これは~~ これは vector で書けば

$$\iint_S \mathrm{curl}\, v \cdot df = \oint_C v\,ds$$

~~これから~~ これから、~~(*)~~ (*) の閉曲線が任意の曲線のまわりまで
~~拡~~ 拡がれば、
前で元の S なる曲面についての

$$\iint_S \mathrm{curl}\, v \cdot df$$

は上記の S をおおう S についての積分の任意
であり、従ってこれは S 自身の境界曲線
についての v の循環からのみ定まり、
しかも、この拡がれて S の境界線 C はか
の曲線や点に一回収縮され、しかも方向が逆
であるから、つぎの和おし、結局

$$\oint_C v\,ds$$

又が出る。

この Stokes の定理によって 単純領域内で作った
全微分して得る流体 A の任意の閉曲線に沿う
循環は 0 であることが直ちに証明される。
いいかえれば 任意の二点 A, B に対する
流れ

$$I(AB) = \int_A^B v\,ds$$

$$= -\int_A^B d\varphi = -\varphi(B) + \varphi(A)$$

で、これは 途中の径 C に無関係に定まる。
そして velocity potential は 一義的に決まる。

これに反して多重連結領域では 任意の閉
曲線の循環は 一般には 0 にならない。開曲線が一
点に収縮し得る場合は 一般には 0 にならない。

今 多重連結領域の場合を考えてみる。任意の二つ
の閉曲線 C, C' をとり、これまでは 一点
に収縮し得ないとおく。
次に 領域 一つの点 P を作って 単連結

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

一般の n 重連結領域では n-1 個の異なる一点に始めも終りも一致しない閉曲線が存在する．その各々に対して独立な循環者数 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots \kappa_{n-1}$ が対応する．

一般の多重連結領域において AB = 任意の流れは適当の径路によって分類出来る．PP'S A 点を固定し

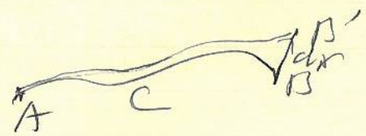
$$-\varphi(B) = \int_{A(C)}^{B} v\,ds$$

ここで B 点の空間の曲線とすると $\int_{A(C)}^{B}$ は C によって異なる多価函数 (many valued function) である．所で B から dx 丈離れた B' 点をとると

$$-\varphi(B') = \int_{A(C')}^{B'} v\,ds$$

は，曲線 C' を C に極めて近く取れば

$$-\varphi(B') + \varphi(B) = v\,dx.$$



故に

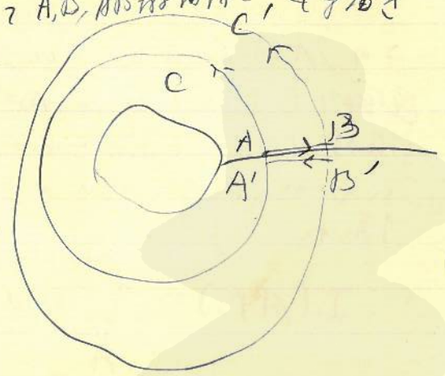
$$-\mathrm{Grad}\,\varphi = v.$$

PP'S φ なる函数は，この場合の速度ポテンシャルと考えられる．

残れしたとすると．C, C' はいづれもこの障害を通過する点．そこで障害に沿って A, B, B' が C', C' となる AB B' A' A なる閉曲線に対する循環を作ると 0

$$I(AB B' A' A) = 0$$

∵ これは障害を横切らないからである．



故って

$$I(AA') + I(B'B) + I(AB) + I(B'A') = 0$$

しかるに

$$I(AB) = -I(B'A')$$
$$I(B'B) = -I(BB')$$

故に

$$I_C(AA') = I_C(BB')$$

PP'S 一般に循環しない任意の閉曲線に対する循環数を零と約束し，この約束の下に各 ~~連結~~ 多重連結領域 ~~に~~ が 0 でない 場合の運動を 循環運動 (cyclic motion) という．上の各連結領域に応じた循環数 κ を cyclic constants) という．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§12. 二次元の非圧縮流動 (Irrotational Motion in Two Dimension)

1) 流れの函数 (Stream Function)

流体の運動が到る所平行平面内に起って居て(従ってこれに垂直方向の速度成分が0)且つ各平行平面上で同じな運動をなして居る場合、二次元の運動 (Two Dimensional Motion) と称する。

この場合には $v_z=0$ で平行平面に垂直に z 軸をとると $v_z=0$ で v_x, v_y は x, y だけの函数になる。

この場合の $z=0$ の平面と、この平面内で任意の運動を考えると、流体は

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

即ち $v_x dy - v_y dx = 0$ (*)

で表わされる。

特に、流体が非圧縮性であるとすると、連続方程式は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

or $$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これは(x)の先端が先を彼らなることを示す。
従って

$$d\psi = v_x dy - v_y dx$$

と書き、ψ満たす ψ一定な曲線が求められる。

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

なお ψ(x,y) = const は流線の一つを表す、故に ψ を流れの函数と称する。
そこで渦度は

$$w_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$w_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

$$w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

これで、2次元運動の場合には渦度の vector は常に z 方向の定数平行な量となっている。

今に流体が非回転運動をしているとすると

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

即ち流れの函数は二次元の Laplace の方程式を満足せねばならぬ。

一方において非回転運動の場合には

$$v = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

即ち速度 potential φ なる函数を用いて

これを連続方程式に入れると

$$\mathrm{div}\, v = 0 \quad \Delta\varphi = 0$$

二次元運動なら

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

二次元の Laplace

即ち φ も又 Laplace 式を満足する。
故にて

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

即ち

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

即ちを知る。これは equipotential line と流線 (stream line) とが直交する。
φ=const. ψ=const.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

ϕ, ψ が x, y の関数と
なる。

ことを示す。

今 $x+iy$ の複素函数 $\varphi+i\psi$ を考えて
$$\varphi+i\psi = f(x+iy)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x} = f'(x+iy)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y} = if'(x+iy)$$

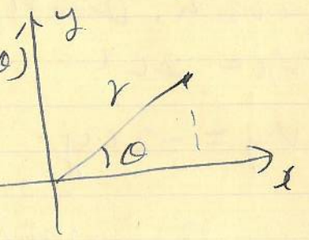
であるから、両辺の虚実
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
が得られる。これは Cauchy-Riemann
の式と呼ばれる。 $z=x+iy$ の任意の函数
の実部及び虚部を取ると、それ等が
共に或る種の非圧縮流体の速度 potential
と stream function とになっていることが
知られる。(若し (φ,ψ) がこれらなら $(\psi,-\varphi)$ もそう
である。)

Ex.i) $\phi+i\psi = C(x+iy)^n$

を考えて、 r,θ を極座標にとれば

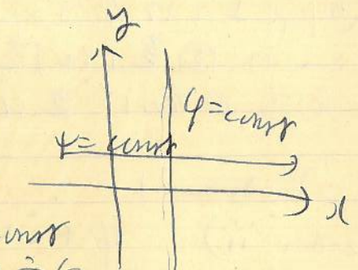
$$\phi+i\psi = C(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$= Cr^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

従って
$$\varphi = Cr^n\cos n\theta$$
$$\psi = Cr^n\sin n\theta$$



となる。

(i) $n=1$ とおくと
$$\phi = Cr\cos\theta = Cx$$
$$\psi = Cr\sin\theta = Cy$$

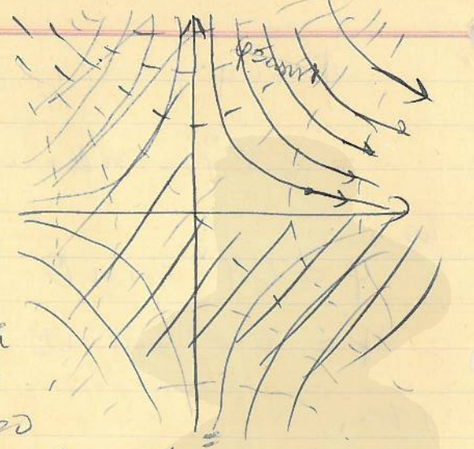


即ち potential flow
$x=$const, 流線は $y=$const
であるから、これは水平
流れの一方向な流れを表わす。

(ii) $n=2$
$$\phi = Cr^2\cos 2\theta = C(x^2-y^2)$$
$$\psi = Cr^2\sin 2\theta = 2Cxy$$
$\phi=$const. $\psi=$const は共に直角双曲線 (rectangular hyperbola) で、

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

— $\psi = \mathrm{const}$



ある。
この場合、速さは
$v_x = 2cx$
$v_y = -2cy$
であり、時計流れは原点から遠い所程速い。
この場合 $x=0$ $y>0$
速度上では速さは面内の平行である。ゆえにこの図全体に流体があったとしても、流れの面動は変化しない。 ※一般的な

(1) $\kappa = 1$
又、(1) $\varphi + i\psi = -m \log(x+iy)$
とおくと
$\varphi + i\psi = -m \log(re^{i\theta})$
$= -m \log r + i m\theta$
$\varphi = m \log r$
$\psi = -m\theta$
この φ potential 線は $r = \mathrm{const}$.
即ち円となり、ψ 流線は $\theta = \mathrm{const}$.

で原点から放射状になってある。
速さは
$v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pm \frac{m}{r}$
即ち ~~※原点で~~ $m>0$ が原点 source, $m<0$ が sink があった場合の ~~post~~ 運動をあらわす。

~~速さ~~ $\psi =$ ~~const~~ なる線を境とおくと
$\varphi + i\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \log(x+iy)$
$= -\frac{\kappa}{2\pi}\theta + \frac{\kappa}{2\pi} i \log r$
と書くと
$\varphi = \frac{\kappa}{2\pi}\theta$
$\psi = +\frac{\kappa}{2\pi}\log r$
となり、
原点を一周する circulation について
は
$\oint_C (v_x dx + v_y dy) = \kappa$
となる。 即ち原点を含んでこれを正に一周する閉曲線を考えた場合
循環定数を表わす。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(ii) 円柱の運動 (Motion of a Cylinder in Perfect Fluid)

完全に滑らかな流体の中で，半径 a の円柱が軸に垂直な方向の一定の速さ U で動いてゐる場合を考へてゐる．この軸の方向を z 軸にとると，運動は xy 平面内のみに限られ，ここでは円柱の周囲の流体の運動を考へてゐる．流れの速度 ψ は至る所

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

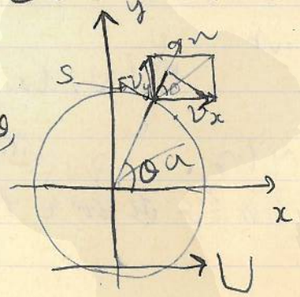
を満足し，半径 a で，流体が静止してゐるから $x=y=0$ で

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

これから次のことが分る．円柱の進む方向と反対向きに流体と円柱との境界では

$$v_x\cos\theta+v_y\sin\theta=U\cos\theta$$

なる条件が満たされねばならぬ．



ゆゑに

$$\cos\theta=\frac{dx}{dn}=\frac{dy}{ds}$$
$$\sin\theta=\frac{dy}{dn}=-\frac{dx}{ds}$$

ゆゑに

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=U\frac{dy}{ds}$$

従って φ を速度 potential とすると

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=a \text{ で}$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta.$$

でなければならぬ

扨て函数論によると，$|z|\geq a$ で連続且つ一価解析的な函数 $W(z)$ は

$$W=C_0+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\cdots$$

(Laurent) の形に展開される．

これを極形式 $z=re^{i\theta}$ で書くと

$$W(z)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^{-n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

C_n は複素数であるから

$$C_n=a_n+b_n i$$

と書くと

$$\phi+i\psi=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(a_n+b_n i)(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って 一般の φ, ψ が次の形に表わされる

$$\varphi(x,y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$\psi(x,y) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

とする。

このとき $r=a$ において

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = a \sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n-1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$= U \cos\theta$$

これがなりたつ、これが θ のあらゆる値について

成立するためには

$$a_n = b_n = 0 \qquad n > 1$$

$$b_1 = 0 \qquad a_1 = U a^2$$

従って

$$\varphi = \frac{a^2 U \cos\theta}{r} \qquad \psi = \frac{-a^2 U \sin\theta}{r}$$

($a_0 = b_0 = 0$ と取ってよい)

$$\phi + i\psi = \frac{a^2 U}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

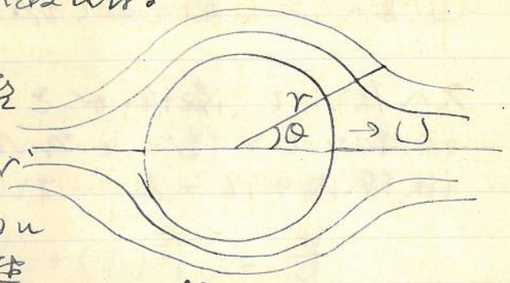
$$= \frac{a^2 U}{z}$$

この時 $x = y = \infty$ では $r = \infty$ で

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

の境界条件を満足している。

次の φ, ψ が表わす速度 potential の流れの図は



stream line:

これに対して円柱が静止して右から一様の速さで $-x$ 方向に U なる一様の速さで来る場合の速度 potential は $r = \text{const} \cdot \sin\theta$ 流れの図は

$$\varphi = +U x = +U r \cos\theta$$

従って 流れの図は

$$\psi = +U r \sin\theta$$

であらわされる。

従って

$$\varphi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

これは円柱が静止して（円柱上で流れの垂直成分は0）遠方で一様に U の速さで流れが流れている場合に当っている。この場合の流線は

この速度 potential は

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta = \text{const.}$

であらわされる曲線である。

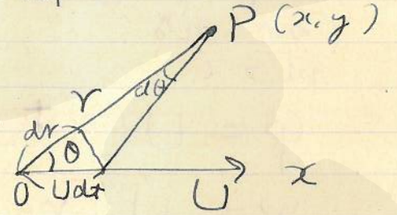
次に流体がきって流れ、円柱が動いている場合を考える。
流体内の任意点における圧力 p は

$$\frac{p}{\rho} = F(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2$$

で与えられる。
ただし流体に関係した物に関して、r, θ は u 座標であるから

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{dU}{dt}\cdot\frac{a^2}{r}\cos\theta - \frac{Ua^2}{r^2}\cos\theta\frac{dr}{dt} - \frac{Ua^2}{r}\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

(ここで
$\frac{dr}{dt} = -U\cos\theta$
$\frac{d\theta}{dt} = \frac{U}{r}\sin\theta$)



従って

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{dU}{dt}\cdot\frac{a^2}{r}\cos\theta + \frac{U^2a^2}{r^2}\cos^2\theta$$

$$-\frac{U^2a^2}{r^2}\sin^2\theta = \frac{dU}{dt}\frac{a^2}{r}\cos\theta + \frac{U^2a^2}{r^2}\cos^2\theta$$

一方求めて

$$v_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Ua^2}{r^2}\cos\theta$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{Ua^2}{r^2}\sin\theta$$

ゆえに

$$v^2 = \frac{U^2a^4}{r^4}$$

となる。

$$\frac{p}{\rho} = F(t) + \frac{dU}{dt}\frac{a^2}{r}\cos\theta + \frac{U^2a^2}{r^2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\frac{U^2a^4}{r^4}$$

円柱の単位の長さの受ける流体の圧力の運動方向の分力は ~~$r=a$ から円周に沿って~~

$$R = -\int_0^{2\pi} p_{(a,\theta)}\cdot\cos\theta\cdot a\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\rho\frac{a^2}{}\frac{dU}{dt}\cdot\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= -\pi\rho a^2\frac{dU}{dt}$$

(ゆえに円柱の単位長さのための流体の

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

+ 運動を垂直な方向の分力を考慮しなければならない。

円柱は

従って、なるべく抵抗力を少なく運動するためには

$$\frac{\sigma-\rho}{\sigma}MX \qquad \frac{\sigma-\rho}{\sigma}MY$$

を減る。但しσは円柱の密度である。

従って $Y=0$ であれば x-方向の運動は

$$M\frac{dU}{dt} = -M'\frac{dU}{dt} + \frac{\sigma-\rho}{\sigma}MX$$

しかし $M+M' = \frac{\sigma}{\rho}$ であるから

$$\text{故に}\quad \frac{dU}{dt} = \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho}X$$

となる。

X-軸となる液体中で一定の重力の場で静止水平方向に体をおきながら円柱が落下する場合には、その加速度は

$X=g$ であるから $\quad \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho}g$

であろう。

最後に液体中を円柱が動く場合に円柱を囲む液体運動がどんな影響をおよぼすかを調べてみる。

見よ。

$$M' = \pi\rho a^2$$

であるから

$$R = -M'\frac{dU}{dt}+$$

この結果から見ると、抵抗はゼロで任意の加速度運動をしてこの円柱が受ける抵抗は加速度に比例し、比例常数は円柱の質量に等しい。

従って円柱が等速運動をする場合には抵抗はないことになる。これは実際と合わない。みかけの重さも水中で一定な速さで動かすには外力を必要とし、これは重さも水が抵抗をなすためである。なお円柱の場合にも一般に抵抗は消え去り、そのために抵抗を生ずる。

しかし、円柱から離れた液体は流れのなかで球として速さの一定なる流れを起すことはもはや気にしなくてもよい。

次に円柱の単位の長さの質量に働く力をX, Yとすると、液体中では Archimedes の

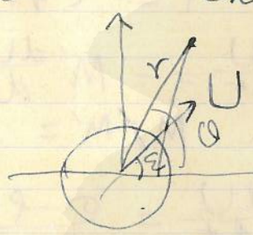
x, y 方向の成分

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

の速さで U, 右向きに x 方向と ε

~~まと同じ~~ 円柱の~~速さ~~ ~~x 方向の~~ U は
~~速さで~~ 動いているから その分だけ x 方向
に流れる考えの流れを重ねあわせると.
速度 potential は

$$\varphi = \frac{Ua^2}{r}\cos(\theta-\varepsilon) - \frac{\kappa\theta}{2\pi} +$$



従って

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\cos(\theta-\varepsilon)\frac{dU}{dt}$$
$$-\frac{Ua^2}{r^2}\cos(\theta-\varepsilon)\frac{dr}{dt}$$
$$-\frac{Ua^2}{r}\sin(\theta-\varepsilon)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{d\varepsilon}{dt}\right) - \frac{\kappa}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}$$

ここで $\frac{dr}{dt} = -U\cos(\theta-\varepsilon)$
$\frac{d\theta}{dt} = \frac{U}{r}\sin(\theta-\varepsilon)$

であるから, 円柱の表面では

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r=a} = \dot{U}a\cos(\theta-\varepsilon) + U^2\cos^2(\theta-\varepsilon)$$
$$-U^2\sin^2(\theta-\varepsilon) - Ua\sin(\theta-\varepsilon)\cdot\dot{\varepsilon}$$
$$-\frac{\kappa U}{2\pi a}\sin(\theta-\varepsilon)$$

+ 流れの関数は $\psi = -\frac{a^2U\sin\theta}{r} + \frac{\kappa}{2\pi}\log r$

$$= \dot{U}a\cos(\theta-\varepsilon) + U^2\cos 2(\theta-\varepsilon)$$
$$+ Ua\sin(\theta-\varepsilon)\dot{\varepsilon} - \frac{\kappa U}{2\pi a}\sin(\theta-\varepsilon)$$

~~これから~~ すべて

$$v_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Ua^2}{r^2}\cos(\theta-\varepsilon)$$
$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{Ua^2}{r^2}\sin(\theta-\varepsilon)$$
$$+\frac{\kappa}{2\pi r}$$

従って 円柱の表面では 流体の速さは

$$(v^2)_{r=a} = U^2 + \frac{U\kappa}{2\pi a}\sin(\theta-\varepsilon) + \frac{\kappa^2}{4\pi^2a^2}$$

また 円柱の表面における圧力 p は

$$\frac{p}{\rho} = F(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\dot{U}a\cos(\theta-\varepsilon)$$
$$+U^2\cos 2(\theta-\varepsilon) + Ua\sin(\theta-\varepsilon)\cdot\dot{\varepsilon}$$
$$-\frac{\kappa U}{2\pi a}\cdot\sin(\theta-\varepsilon) - \frac{1}{2}U^2 - \frac{\kappa U}{2\pi a}\sin(\theta-\varepsilon)$$
$$-\frac{\kappa^2}{8\pi^2a^2}$$

となる

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

円柱運動の方向の流体圧力の成分は

$$R = -\int_0^{2\pi} p(a,\theta)\cos(\theta-\varepsilon)\,a\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} p a^2 \dot{U}\cos^2(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

$$= -\pi a^2 \rho \dot{U}$$

で附加の質量に関係して，
速さに比例して運動に逆向きの方向の成分は

$$P = -\int_0^{2\pi} p(a,\theta)\sin(\theta-\varepsilon)\,a\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \rho U a^2 \sin^2(\theta-\varepsilon)\,\dot{\varepsilon}\,d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \rho \frac{\varkappa U}{\pi}\sin^2(\theta-\varepsilon)\,d\theta$$

$$= -\pi a^2 \rho U\dot{\varepsilon} + \varkappa\rho U$$

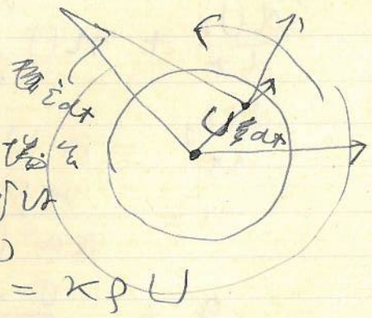
となる。

従って円柱が等速運動をしている場合，
循環速度があれば，運動の方向に直角な
方向に $\varkappa\rho U$ なる力を受ける
これを揚力（　　）という。
この事実を Kutta-Joukowski の定
理という。この定理は任意形状の
柱状物体に対して一般的に成立する。
（なぜなら）

この場合の流線は

$$-\frac{a^2 U\sin\theta}{r} + \frac{\varkappa}{2\pi}\log r = \text{const.}$$

で与えられる



「循環」の方向
円柱に作用する力は
運動方程式は

$$(M+M')\dot{U} = 0$$
$$(M+M')U\dot{\varepsilon} = \varkappa\rho U$$

と書ける。
従って速さ U は一定で，角速度は

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varkappa\rho}{M+M'}$$

であり，これを $\frac{U}{\dot{\varepsilon}}$（円柱運動の）$= \frac{U(M+M')}{\varkappa\rho}$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\omega^2 + n^2\omega + n\zeta' = 0$$
$$\omega = \frac{-n^2 \pm \sqrt{n^2(n^2 - 4\zeta')}}{2}$$

の事実の固定観念すること を示す。

次に x-方向の運動 X, Y のみが働く場合には 運動方程式は

$$(M+M')\frac{dU_x}{dt} = MX - \kappa\rho U_y$$
$$(M+M')\frac{dU_y}{dt} = MY + \kappa\rho U_x$$

となる。

ここで 初めに y 方向の運動のない場合 即ち $X=0$ $Y = \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho}g$ から

$$\frac{dU_x}{dt} + nU_y = 0$$
$$\frac{dU_y}{dt} - nU_x = g'$$
$$n = \frac{\kappa\rho}{\pi a^2(\sigma+\rho)}$$
$$g' = \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho}g$$

これらの式から直ちに U_y, U_x を消去すると

$$\ddot{U}_x + n^2 U_x + n\zeta'' = 0$$
$$\ddot{U}_y + n^2 U_y = 0$$

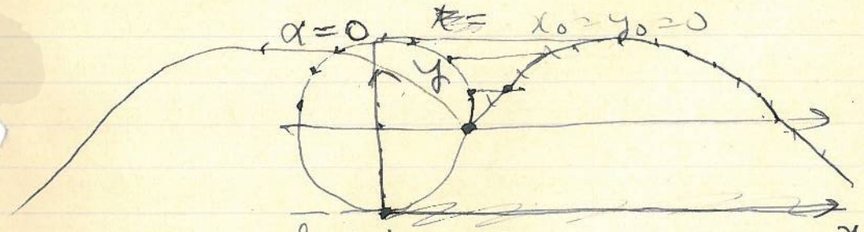
を得る。

これを解くと

$$U_x = -\frac{g'}{n} - C\sin(nt+\alpha)$$
$$U_y = C\cos(nt+\alpha)$$

従って

$$x = x_0 - \frac{g'}{n}t + \frac{C}{n}\cos(nt+\alpha)$$
$$y = y_0 + \frac{C}{n}\sin(nt+\alpha)$$



これは Trochoid である。

即ち 重力場内で 初速 0 で 落下する物体の
ゆく 軌道は Trochoid を描く。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第五章　渦動運動

§18. 渦動運動の特性（Characteristic Properties of Vortex Motion）

流体の速度 vector を v とした場合

$$w = \mathrm{curl}\, v$$

を渦動 vector と名付ける．これについては

$$\mathrm{div}\, w = \mathrm{div}\, \mathrm{curl}\, v = 0$$

の関係が成立する．従って渦動 vector については湧出点も流入点もなく，これはある瞬間に渦動 vector の場を与えた場合の全体に成立する関係である．一方力の Lagrange の定理によれば，速度が座標のみの函数であるような定常流体が保存力の場で運動する場合には各瞬間渦動運動をしていた流体粒子は，すべて渦動運動を継続する，という性質なる関係が成立する．

この場合に限って考えてみると，渦動運動をしている流体内に曲線を取り，その上の各点での渦動の方向と渦動 vector の方向とが一致する場合，これを渦動線（Vortex line）と名付ける．その微分方程式は保存系，dx 等の成分を dx, dy, dz とおいて

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

又は　$d\mathfrak{S} = \mathfrak{w}_0\, ds$.

但し $\mathfrak{w}_0$ は $\mathfrak{w}$ の方向の正射影とする。

同様に、流体内の一つの曲面を考えるとき、その上のすべての点において渦線が曲面となる場合、これを渦面 (vortex surface)、又一つの閉曲線の上のすべての点を通る渦線によって形成される管を渦管 (vortex tube) という。閉曲線が極めて微小な面積を囲む場合、渦糸 (vortex filament) という。

Stokes の定理が成り立つ流体内の任意閉曲線 C について、

$$\int_C \mathfrak{v}\, ds = \iint_S \mathrm{curl}\,\mathfrak{v} \cdot df$$

$$= \iint_S \mathfrak{w}\, df$$

が成立つ。但し S は C を境界とする任意の曲面である。

従って C が渦面上の曲線ならば、これについての循環は 0、即ち

$$\int_C \mathfrak{v}\, ds = 0$$

である。逆に任意の閉曲線の任意の閉曲線が0ならば、その面は渦面である。

同様にして一つの渦管内任意二つの面 S_1, S_2 上の曲線を夫々 C_1, C_2 とすると、

$$\int_{C_1} \mathfrak{v}\, ds = \int_{C_2} \mathfrak{v}\, ds$$

である。

($\because$ C_1, C_2 に挟まれた面 S' を一つの曲線が二分し、図の如く ABDCA なる閉曲線について循環を作ると、これは仮定により0である。即ち

$$\int_{C_1} \mathfrak{v}\, ds \pm \int_{C'} \mathfrak{v}\, ds - \int_{C_2} \mathfrak{v}\, ds + \int_{C'} \mathfrak{v}\, ds = 0.$$

)

従って、渦管の任意の二つの面について

$$\iint_{S_1} \mathfrak{w}\, df = \iint_{S_2} \mathfrak{w}\, df$$

である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

また渦糸からある距離にある点の速さはそれらの渦糸の強さ（strength of vortex tube）という。

今渦糸が2本、1つの場合 渦糸線を取り、これを C に沿って渦糸線に垂直な面をとり、その面の渦度 vector の大きさは W_1, W_2、面の広がりを σ_1, σ_2 とおくと

$$W_1\sigma_1 = W_2\sigma_2$$

である。即ち

$$\varkappa = W\sigma$$

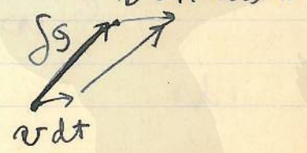
なる量は渦糸線の各点で同じ値を持っている。これを渦糸の強さ（strength of vortex filament）という。

次に渦糸線 C 上の点をとり、その点の位置ベクトルを δs、そこでの流体の速度を v とし、C に沿って流体と共に動くものとすると、

$$\frac{d}{dt}(v\,\delta s) = \frac{dv}{dt}\cdot\delta s + v\frac{d(\delta s)}{dt}$$

ここで

$$d(\delta s) = v(s+\delta s)\,dt - v(s)\,dt = \delta v\cdot dt$$



$$\frac{d(\delta s)}{dt} = \delta v.$$

但し、δv は $s+\delta s$ 点と s 点の速度の差である。

即ち

$$\frac{d}{dt}(v\,\delta s) = \frac{dv}{dt}\delta s + v\frac{d(\delta s)}{dt}.$$

しかも流体の圧力が potential をなし、且つ流体が重力のみの場合なら、Euler の運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}(\Omega+U)$$

となるから、

$$\frac{d}{dt}(v\,\delta s) = -\mathrm{grad}(\Omega+U)\,\delta s + \frac{1}{2}\delta v^2 = -\delta(\Omega+U) + \frac{1}{2}\delta v^2.$$

$$\frac{d}{dt}\int_C dv\,\delta s = \left[-\Omega - U + \frac{1}{2}v^2\right]_A^B$$

である。A から B は閉曲線 C の上を積分経路に沿って B から A に至る。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

従って C が流体と共に動く閉曲線ならば

$$\frac{d}{dt}\int_C v\,ds = 0$$

である。即ち流体と共に動く閉曲線上に沿っての循環は一定不変の値をもつ。
(この特別の場合として Lagrange の定理が直ちに導き出せる。)
従って又、ある時刻に一つの渦糸又は渦面上にあった流体分子は、絶えず時刻に於ても渦糸又は渦面上にある。
今ある時刻に渦糸を構成する渦面が他の時刻にも渦糸を形成しているとすると、この上の任意の閉曲線は元渦面上にあった点であるから

$$\int_C v\,ds = 0.$$

即ちこの渦面は渦面である。
従って一つの渦糸は二つの渦面の交線と見做し得るが、これもいつでも渦糸たる性質を失わない。これが Helmholtz の定理である。

このことを考えて、渦管内の全渦糸の強さは時間的に変化しないことが分る。
今渦糸中の非常に細い部分を取り、$t=0$ に於ての長さ ds_0、断面積を σ_0、密度 ρ_0 とし、これが t に於ての夫々 ds, σ, ρ に変化したとして

$$\rho_0 \sigma_0 ds_0 = \rho \sigma ds$$

しかも渦糸は不滅であるから

$$w_0 \sigma_0 = w \sigma$$

故に

$$\frac{\rho_0 ds_0}{w_0} = \frac{\rho ds}{w} = \text{const.}$$

特に流体が非圧縮性の場合には $\rho = \rho_0$ なるから、

$$\frac{ds_0}{w_0} = \frac{ds}{w} = \text{const.}$$

即ち、渦糸のある部分が伸びれば、その部分は細くなる。渦の強さは小さくなる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§14. 渦なのVector Potential

流体内の各点において渦度なるものがあるように、渦動 vector $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ が一義的に決まるが、逆に渦動 vector $\boldsymbol{\omega}$ の分布がわかっている場合に $\boldsymbol{v}$ を求めることが問題になる。流体が非圧縮性となれば

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -4\pi\sigma$$

の関係があるが、流体全体が静止している場合には $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\varphi$ なる velocity potential φ が存在する。

流体全体が静止しない場合でも

今 $\boldsymbol{A}$ なる未知の vector 函数を考え、

$\boldsymbol{v} - \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ が vector となると

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} - \operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}$$

$$- \operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{A}$$

即ち $\boldsymbol{A}$ が vector で

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}$$

なる条件を満たせばよい。

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{v} - \operatorname{curl} \boldsymbol{A}) = 0$$

故に

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{v} - \operatorname{curl} \boldsymbol{A} = -\operatorname{grad}\varphi$

を満たす potential φ が存在する。

故に一般に

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$$

なる形をもつ。

故に上式 $\boldsymbol{A}$ の満たすべき条件は

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}$$

となる。

即ち $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{v}$ を与える一義的な定まらぬ。

今 $\boldsymbol{A}$ の代りに $\boldsymbol{A}'$ なるものを

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\psi$$

となってもよい。ここで

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}' = \operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$$

故に $\Delta\psi = +\operatorname{div}\boldsymbol{A}$

を満たす函数 ψ を取ると $\boldsymbol{A}'$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}' = 0,$$

従って $\boldsymbol{A}'$ を $\boldsymbol{A}$ と書くと、

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$$

を満たす $\boldsymbol{A}$ が vector として存在する。これを渦なる velocity Vector Potential という。

又 $\boldsymbol{A}$ は

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\omega}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

を満足わせばならぬ．即ち次の如くて書くと，

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_x &= -w_x\\ \Delta A_y &= -w_y\\ \Delta A_z &= -w_z\end{aligned}\right\}$$

即ち vector potential の各成分は共に Poisson の方程式を満足せねばならぬ．その特別な解は

$$A_x = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w_x(r')\,dx'dy'dz'}{|r-r'|}$$

etc.

さて，これは又

$$\mathrm{div}\,A = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

の條件を満足してゐる

(∵ $\dfrac{\partial A_x}{\partial x} = \dfrac{-1}{4\pi}\iiint \dfrac{(x-x')\,w_x(r')}{|r-r'|^3}\,dx'dy'dz'$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) w_x(r')\,dv'$$

$$= +\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{|r-r'|}\,\frac{\partial w_x(r')}{\partial x'}\,dv'$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{w_x(r')}{|r-r'|}\right) dv'$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{|r-r'|}\left(\frac{\partial w_x'}{\partial x'}+\frac{\partial w_y'}{\partial y'}+\frac{\partial w_z'}{\partial z'}\right) dv'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{w_x'}{|r-r'|}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{w_y'}{|r-r'|}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{w_z'}{|r-r'|}\right)\right\} dv'$$

しかるに初めに $\mathrm{div}\,w = 0$，と記して

$$\mathrm{div}\,A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w(r')\,dv'}{|r-r'|}$$

なる溶解を得るとして之の解が都合の範囲に限られてゐるとすると，これを球面で囲む球を充分大きくとれば その上で $w=0$

$\therefore\ \mathrm{div}\,A = 0$．)

一方において．

$$v = \mathrm{curl}\,A - \mathrm{grad}\,\varphi$$

なれば φ の意味は

$$\mathrm{div}\,v = \Delta\varphi$$

外殻部分の流体については，流出量は流入量に…比例し，

$$\mathrm{div}\,v = 0.$$

∴ 従って φ は Laplace の

$$\Delta\varphi = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

を満たさねばならぬ。

渦糸が ~~0~~ 有限の0の場合には $A=0$ として取れば $v = -\mathrm{grad}\,\varphi$. 即ち

φ は ~~渦糸~~ 多価函数になる velocity potential ~~である~~、即ち scalar potential と称する。渦糸または流入口が ~~ある~~ 有限であり、$\varphi=0$ とおけば、~~渦糸~~

~~for 渦糸~~

~~何らかの場合として、渦糸にそなえを求めて見、~~
~~それぞれその線素 $d\mathbf{s}$ とおくと、微積全系~~
~~の $d\mathbf{s}$ で、これによる 純全流の~~
~~経って、~~

$$v = \mathrm{curl}\,A$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint [w'\cdot\mathrm{grad}]\frac{1}{|r-r'|}\cdot dv'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iiint (w'\cdot \mathrm{grad}')\frac{1}{|r-r'|}\cdot dv'$$

即ち、x, y, z 成分で

$$v_x = -\frac{1}{4\pi}\iiint \left(w'_y\frac{\partial}{\partial z} - w'_z\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{|r-r'|}\,dv'$$

etc.

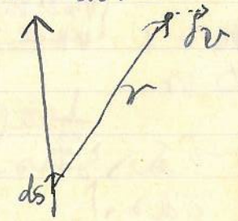
~~渦糸~~ 何らかの場合として ~~渦糸~~ 渦糸の ~~何~~ 素 $d\mathbf{s}$ を考へ、~~それぞれ~~ その ~~素~~ $d\mathbf{s}$ とおくと、~~これに~~ 即ち $d\mathbf{s}$ を除いて、

$$\delta v = \frac{-1}{4\pi}[w'\,\mathrm{grad}]\frac{1}{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{ds}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{[w'\,r]}{r^3}\cdot ds$$
$$= \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{[d\mathbf{s}\cdot r]}{r^3}$$

と書ける。これは ~~元~~ 元によって ~~定~~ 定まる渦場を表す。Biot-Savart の法則と同形であって、~~絶~~ 絶対値は

$$\delta v = \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{ds}{r^2}\,|\sin ds\hat{r}|$$

方向は 渦糸の方向 $d\mathbf{s}$ と ~~渦~~ 渦径の方向 r とを含む ~~平~~ 平面の ~~垂~~ 垂直方向。



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

下より
$$\frac{1}{4\pi}\rho\iiint\frac{\sigma(x')\,dv'}{(x-x')}$$
nとなる

次に流体の運動エネルギーは
$$T=\frac{1}{2}\rho\iiint v^2\,dv$$

ここで、$v=\operatorname{curl}A$ と書くと、
$$T=\frac{1}{2}\rho\iiint v\operatorname{curl}A\cdot$$
であるが、
$$v=-\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{curl}A$$
と書くと、
$$T=\frac{1}{2}\rho\iiint v(-\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{curl}A)\,dv$$
(ここで
$$=\frac{1}{2}\rho\iiint$$
$$-\iiint v\operatorname{grad}\varphi\,dv=\iiint\varphi\cdot\operatorname{div}v\,dv$$
$$+-\iiint\operatorname{div}(v\varphi)\,dv=\iint\varphi\cdot\sigma\,dv$$
(落ち着いて 外側の面積分の項 面)
∴surface int.
従って 外側の面積分に関する 運動量
$$\frac{1}{2}\rho\iiint\varphi\cdot\sigma\,dv$$
である。これは 電荷 σ は 導出された場合

$$\operatorname{div}[vA]=A\operatorname{curl}v-v\operatorname{curl}A$$
より
$$-\iiint v\operatorname{curl}A\cdot dv$$
$$=\iiint A\operatorname{curl}v\,dv-\iiint\operatorname{div}[vA]\,dv$$
$$=\iiint A\,w\,dv+\text{surf. int}$$
ここで 磁気量に関する 運動の場合は
$$T=\frac{1}{2}\rho\iiint A\frac{\operatorname{curl}v}{w}\cdot dv$$
(ここで
$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{w'}{(x-x')}\,dv'$$
ここで
$$T=\frac{1}{8\pi}\rho\int\cdots\int\frac{w\,w'}{(x-x')}\,dv\,dv'$$
これは 磁気の場合の計算結果が 求めていたもの
如く、
磁気の線が 閉じている場合には、その場合
次のようなると、potential の
これに 関係する。運動量の場合は 次のように
しい

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$T = \frac{1}{2} T_0 \kappa_0^2$$

係数 T_0 は渦糸の形に関する定数である。

次に線上に κ_1, κ_2 の渦糸が互に隔たりは r, 角は θ にあるとき, $\kappa_1 \kappa_2$ に比例する項との和で与えられ

$$T = \frac{1}{2}\left(T_{11}\kappa_1^2 + 2T_{12}\kappa_1\kappa_2 + T_{22}\kappa_2^2\right)$$

の形になる。

特に二つの渦糸間の距離がそれぞれの半径に比べて大きい場合には, T_{12} は

$$T_{12} = \frac{\rho}{4\pi}\iint \frac{\cos\theta\, ds_1 ds_2}{r_{12}} ds_1 ds_2$$

なる形であらわされる。~~これ~~又 T_{11}, T_{22} は κ_1, κ_2 の渦糸一つだけあったときの定数。

§15. 二次元の渦運動

(1) 直線状渦糸. ~~渦糸が一つ~~ 116

20

次元の渦運動の~~中~~で, 無限に長い直線状の渦糸が互に平行に, 無限に長い場合には, これを直線状渦糸と称する。(rectilinear vortex filament): ~~この場合~~ これを垂直なすべての平面内の運動は互に全く同じい運動が可能である。

それは

$$w = w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$w_x = w_y = 0$$

であるからである。

流れの函数を ψ とおくと,

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = w$$

これは二次元の Poisson の式である。

~~この~~ 渦糸が場所を変えると, 各点での平面内の渦度が変化する。流れの速度の場を速度ポテンシャル φ であらわすと, これは

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今 $\varphi+i\psi$ が $z=x+iy$ の解析函数として

$$\varphi+i\psi=\frac{\kappa}{2\pi i}\log z$$

$$=-\frac{\kappa}{2\pi i}(\log r+i\theta),$$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

そこで、

$$\psi=+\frac{\kappa}{2\pi}\log r$$
$$\varphi=-\frac{\kappa}{2\pi}\theta$$

これが原点 κ の強さの湧出点が
ある場合の求め方そのものである。
(ただし、$\varphi\nabla\psi-\psi\nabla$ に対する Green の定理

$$\iint_S(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)df=\int_C(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\,\mathrm{grad}\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n})ds$$

において、

$\varphi=\log r$

とおき、原点を含む

ような小さな円形 r_0 の円周を境界から除くと、

$$\iint_S\log r\cdot\Delta\psi\,df=-\int\log r\frac{\partial\psi}{\partial r}r\,d\theta+\int\log\frac{\psi}{r}dr\,d\theta+2\pi\psi(0)$$

C の円は R ゆえ $r=0$

＊これが上述の操作を満たすことは容易にわかる。

117

$$+\int\log R\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R}R\,d\theta$$

$$-\int\log\psi\frac{1}{R}R\,d\theta$$

ゆえに ψ, R をとると

$\psi\neq O(\frac{1}{R})$, $\frac{\partial\psi}{\partial r}=O(\frac{1}{R^2})$

右辺の第1項は0に近くなり、

また、

$$\Delta\psi=w$$

を満たす函数として与えて、

$$\psi(0)=\frac{1}{2\pi}\iint\log r\cdot w\,df\ *$$

なる原点 r の強さに対する湧出点
があり場合の任意点 (r,θ) に対し

$$\psi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\log r\cdot\iint w\,df$$

$$=\frac{\kappa}{2\pi}\log r.$$

が得られる。)

従って速度は

$$v_r=0\qquad v_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\kappa}{2\pi r}$$

となる。すなわち、流線は原点を中心とした
同心円

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(x>0)

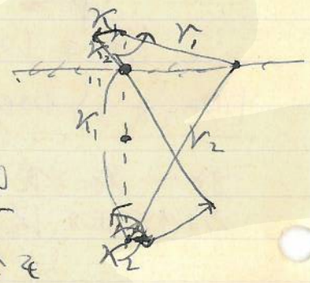
周囲に沿って左まわし、その大きさは距離に比例して減る。

ii) 点渦が2個の場合。

a) 点 x_1, x_2 にある強さの渦糸が各々の距離を保って存在する場合には、これの運動は

$$\Psi = \frac{\kappa_1}{2\pi}\log x_1 + \frac{\kappa_2}{2\pi}\log x_2$$

であらわされる。



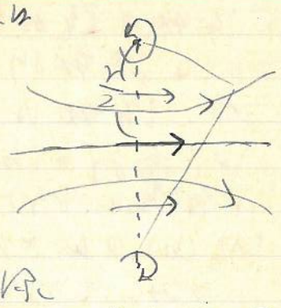
すなわち、第一の渦糸は第二の渦糸を中心として $\frac{\kappa_2}{2\pi r}$ の速さで周回し、第二のすは $\frac{\kappa_1}{2\pi r}$ の速さで周回する。なお $\kappa_2 : \kappa_1$ で二つの渦糸を結ぶ線分をよけた点が常に不動である。

そして、この点からは0を中心として $\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2\pi r}$ の速さで回転する。

なお $\kappa_1 = \kappa_2$ なら0は中点。

b) $\kappa_1 = -\kappa_2 (= \kappa)$ ならば 第一の0は無限遠にゆく。二つの渦糸はそれを結ぶ線に垂直に $\frac{\kappa}{2\pi r}$ の速さで進む。これを渦対(vortex pair)と呼ぶ。この場合の流れの函数は

$$\Psi = \frac{\kappa}{2\pi}\log\frac{r_1}{r_2}$$



通って流線は

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const.}$$

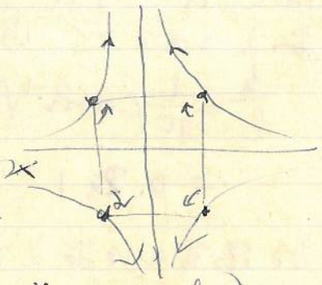
いわゆるアポロニウスの円である。

この場合 $r_1 = r_2$ となる点は~~円を~~流線であるから、これを壁で置きかえてよい。鏡像をつくる。

c) 四つの渦糸が同じ大きさで正方形の頂点にあり、二つは κ, 二つは $-\kappa$ の強さであるとき、これは

$$r \sin 2\theta = \text{const}$$

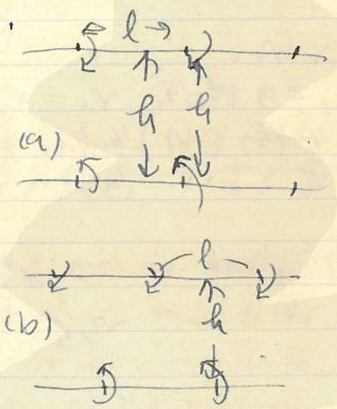
即ち Cotes の螺線 (Cotes spiral) 上を動く。



d) 静止している渦糸の中に同符号の渦糸を置くと相対的な位置関係は変らないから全体が回転する。(この場合は流線は流れと)その場合には

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

n 渦糸の対が並ぶことが知られている.
これを渦列 (vortex street) という.
今, 渦糸は二つ平行に並び等間隔 h 列
び, 各列の渦糸は等間隔 l, 他の列との
の位置にあるものとする.



(a), (b) のふさつの場合
のみ, それぞれ平行な
渦列が動く.
従し, (a) のほうがつねに
よさそうだが, (b) のほう

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi}\cosh^{-1}\sqrt{2}$$

$$= 0.281$$

なる場合にはよさそうだ.
これは Kármán の渦列とよび, これは
実際に観察されやすい渦列である

(前) 円柱状渦糸
半径 a の円柱状渦糸 (cylindrical vortex) の中軸方向の単位長さ当たりの渦糸の
大きさが一定であるとする.
この場合の流れの速度 ψ は円柱内で

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 2w$$

円柱外で

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

を満たさねばならぬ.
極座標 (r, θ) を用いると,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

ψ は θ を用いないと考えられる.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2w \quad \text{for } r \le a$$

$$= 0 \quad \text{for } r > a$$

これから, まず $r \le a$ については,

$$\psi = \frac{1}{4}wr^2 + C\log r + D$$

$r > a$ については

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\psi = A\log r + B$$

所で $r=0$ で ψ が無限小ならば

$C=0$.

又固体表面で流体の速度が連続であるためには. $r=a$ で各々が内外同一.

即ち

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=a} = \frac{1}{2}wa = \frac{A}{a}$$

それから ψ 自身も連続とすると

$$\psi_a = D + \frac{1}{4}wa^2 = A\log a + B = 0$$

従って

$$A = \frac{1}{2}wa^2, \quad B = -\frac{1}{2}wa^2\log a$$

$$D = -\frac{1}{4}wa^2.$$

よって

$$\psi = \frac{1}{2}wa^2\log\frac{r}{a} \qquad r \geq a$$

$$\psi = \frac{1}{4}w(r^2 - a^2) \qquad r \leq a$$

回転運動のみからは循環量しか定まらないが potential が分れば ~~全体~~ 流れが定まる. 今

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{2}wa^2 i\log\frac{x+iy}{a}$$

$$= \frac{1}{2}wa^2\left(i\log\frac{r}{a} - \theta\right)$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}wa^2\theta$$

$$\psi = \frac{1}{2}wa^2\log\frac{r}{a}.$$

回転運動の強さを $\varkappa$ とおく

$$\varkappa = 2\pi a^2 w$$

であるから.

$r \geq a$ ならば

$$\varphi = -\frac{\varkappa}{2\pi}\theta$$

$$\psi = \frac{\varkappa}{2\pi}\log r$$

$v = \frac{\varkappa}{2\pi r}$ で

$\varkappa$ が渦糸の場合と同じである.

圧力の大きさは

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2 + F(t)$$

$$= \frac{p_0}{\rho} - \frac{\varkappa^2}{8\pi^2 r^2}$$

従って p は $r=\infty$ の点では圧力を与える.

$r \leq a$ では

$$v = \frac{1}{2}wr$$

$$v_x = -\frac{1}{2}wx$$

$$v_y = -\frac{1}{2}wy$$

の Euler の運動方程式は

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

nonviscous

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{4}w^2x \quad ,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{4}w^2y$$

すなわち $\quad \frac{dp}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)$

$$=\frac{1}{4}w^2r\,dr$$

従って $\quad \frac{p}{\rho}=\frac{1}{8}w^2r^2+\frac{p_0}{\rho}=\frac{\varkappa^2}{8\pi^2a^4}r^2+\frac{p_0}{\rho}$

但し p_0 は $r=0$ における圧力，
$r=a$ で圧力が連続であるためには

$$p_0=p-\frac{\rho\varkappa^2}{8\pi^2a^2}$$

すなわち

$$r\le a: \quad \frac{p}{\rho}=\frac{P}{\rho}-\frac{\varkappa^2}{4\pi^2a^2}+\frac{\varkappa^2r^2}{8\pi^2a^4},$$

もし $P<\frac{\varkappa^2\rho}{4\pi^2a^2}$ ならば
r が或る値より小さくなると p が負になる．
流体にかかっている負の圧力は存在しないから，

かかる領域には流体は入ることができない．
空洞ができる．

(d) Rankine の結合渦 (Combined Vortex)

上と同じ円柱状容器に流体を入れて軸の方向を与える．流体の軸を垂直方向にとり，z 軸をとると

$$\frac{p}{\rho}=\text{const.}+\frac{\varkappa^2r^2}{8\pi^2a^4}-gz \qquad r\le a$$

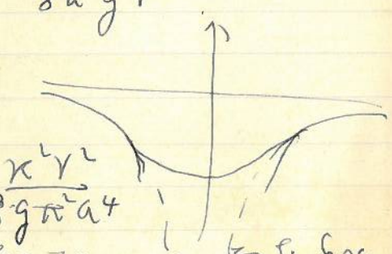
$$=\text{const}-\frac{\varkappa^2}{8\pi^2r^2}-gz \qquad r\ge a,$$

渦糸のある所を除いて流体が一様に分布しているから $\quad r\ge a$ において

$$z=\frac{\text{const.}}{g}-\frac{\varkappa^2}{8\pi^2gr^2}$$

これは双曲線である．
$r<a$ においては

$$z=\text{const.}+\frac{\varkappa^2r^2}{8g\pi^2a^4}$$



$r=a$ で連続であることを考慮すると，
よって，$r=0$ で $z=0$ とおくと，

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$z = -\frac{\kappa^2}{8\pi r^2 r^2} \qquad r \geq a$$

$$= \frac{\kappa^2}{8\pi a^2 a^4}(r^2 - 2a^2) \qquad r \leq a$$

この力は物体を2つに分ける力となり Rankine の統合理論という。水面に生ずる波が2つのように見えるのはこの理由による。

21 波と波 波動

波は、~~音波と電波~~ 正弦波 (Sinusoidal Wave) 一般に空間の場における物理量の波動的の状態をいう。これは波源の振動状態が媒質を伝わるとか、媒質のおのおの点が振動することによって生じる。従って波動現象を記述するには、各点の時間変化を記述すればよい。

従って各点 potential φ の状態を、今後の考えていく方向を x 軸、~~垂直上方~~ y 軸にとり、重力が z 軸に平行な方向をもつとし、各点が xy 平面に関して対称とすると、φ は次の方程式で

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

を満足せねばならぬ。

境界の条件では、固体の表面では、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

又自由表面では圧力は一定と考えねばならぬから

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

そこで φ は

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

2次波面のうねりを引き起こす原因が p にあり

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy - \frac{1}{2}v^2 + F(t)$$

であらわされ，

今後の議論は極めて小さいとし，v^2 以上の高次の項を無視するとすると，

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy$$

となり，但し，$F(t)$ は速度ポテンシャル φ の中に含めて考える．

よって波面の式を求めると

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\right) = 0$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

波面の式を求めが手続きが終わった後に座標軸を η とると

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\right)_{y=\eta}$$

$$\simeq \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\right)_{y=0}$$

静水面から波面までの大きさを η とすると，

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=0}.$$

波面の自由表面の位置は，常に重力の方向と垂直方向にとって考えるものとすると，波面波形の法線方向の成分が，自由表面自身の法線方向の速度に等しいと考えられるから

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0}$$

を

今回も同様な場合として x 方向に進んで行く波形を考へ，速度 potential を

$$\varphi(x, y) = f(y)\cos(mx - nt)$$

の形とする．すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - m^2 f = 0$$

$$f(y) = Ae^{my} + Be^{-my}.$$

従って $\varphi = (Ae^{my} + Be^{-my})\cos(mx - nt)$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

x, t のみ含まれる。

底面で $y=-h$ となって、そこでは $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$

これをみたすためには

$$Ae^{-mh}=Be^{mh}=\frac{1}{2}C$$

$$\varphi=\frac{1}{2}C\left\{e^{m(y+h)}+e^{-m(y+h)}\right\}\cos(mx-nt)$$

$$=C\cosh m(y+h)\cos(mx-nt)$$

自由表面 $y=0$ では次の関係式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

へ代入すると

$$n^2=gm\tanh(mh)$$

波の速さは

$$V=\frac{n}{m}$$

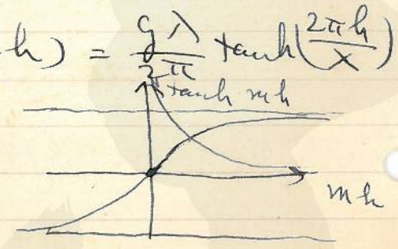
波長は

$$\lambda=\frac{2\pi}{m}$$

であるから

$$V^2=\frac{g}{m}\tanh(mh)=\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

V^2 と m の関係を表現すると、m が0に近いとき、$\tanh mh$ が1に近くなり、m が減少すれば、速さ V が減少することがわかる。



自由表面では

$$\eta=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0}=\frac{n}{g}C\sinh(mh)\times\sin(mx-nt)$$

ここで $C=\frac{an}{m\sinh(mh)}$ と自由表面の形は

$$\eta=a\sin(mx-nt)$$

とおく。

$$a=\frac{nC}{g}\cosh(mh)$$

$$\left(=\frac{C}{gn}\cdot gm\sinh mh\cosh mh\right)$$

よって $C=\frac{ga}{n}\frac{1}{\cosh(mh)}$

$$\therefore\ \varphi=\frac{ga}{n}\frac{\cosh m(y+h)}{\cosh(mh)}\cos(mx-nt)$$

流れの (x,y) における状態 流体粒子の等しい (ξ,η) とすると

$$\xi=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=na\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\times\sin(mx-nt)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\zeta = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -na\frac{\sinh m(y+h)}{\sinh(mh)}\cos(mx-nt)$$

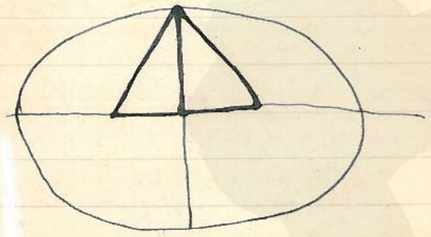
ゆえ

$$\xi = a\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\cos(mx-nt)$$

$$\eta = a\frac{\sinh m(y+h)}{\sinh mh}\sin(mx-nt)$$

$$\therefore \frac{\xi^2}{\cosh^2 m(y+h)} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 m(y+h)} = \frac{a^2}{\sinh^2 mh}$$

これは (x,y) における粒子の描く曲線の方程式である．これは長径，短径それぞれ $a\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}$，$a\frac{\sinh m(y+h)}{\sinh mh}$ の楕円 $2a\operatorname{csech} mh$ で除された関係である．



水位，波形は深さとともに減少し，底面 $y=-h$ では粒子は0である．

125

波長の深さ h が $\frac{2\pi}{m}$ に比べて極めて大なる場合は

$\tanh mh \simeq 1$ etc.

であるから

$$V^2 \simeq \frac{g}{m} = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

$$\varphi = \frac{ga}{n}e^{my}\cos(mx-nt)$$

$$\left.\begin{aligned}\xi &= ae^{my}\cos(mx-nt)\\ \eta &= ae^{my}\sin(mx-nt)\end{aligned}\right\}$$

$$\xi^2+\eta^2 = a^2e^{2my}$$

これは，波長に比して極めて深い水面を伝わる波形を表わす式で，波長が深さの程度に比して極めて小さい，すなわち表面波（surface wave）という．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

§22. 波の速さ. 波の速さの異なる2波が
~~2つの波が~~ 同じ~~ような~~ 方向に進んでいる場合に, 合成された
波の形がどうなるかを考えてみる.

1) 定常波 (stationary wave)

振幅が等しく振動数が同じで, 逆向きに進む波の位相
だけが異なる場合には, 重ね合わせの原理による
位置 x の点の変位は

$$\eta_1 = \frac{1}{2} a \sin(mx - nt)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} a \sin(mx + nt)$$

とおくと, 合成変位は

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a \sin mx \cos nt.$$

これは, 各点が
即ち一定の振幅で単振動をしている波の形を考え
ると正弦形であり, 又任意点での変位の時間
による変化は $a\cos nt$ の形. 即ち $\frac{n}{2\pi}$ は振動数
(即ち $\frac{2\pi}{n}$ は周期) で振動する.
これを定常波である. なお

$$mx = k\pi \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

の点は振動の節 (node) である,

~~波の速さ~~ 波長に比して水深が極めて
大きい場合は

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \tanh\frac{2\pi h}{\lambda}$$

ここで $\tanh\frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}$

$\simeq \frac{2\pi h}{\lambda}$

$$V^2 \simeq gh \qquad V = \sqrt{gh}$$

即ち, 波の伝播速さは波長に全く関係なく
水深の平方根に比例する.
~~従って~~, 海の浅い所に近づくにつれて
速力速さが小さくなるのはこのことから
説明される. 又波の形が前後の
不同になるのも, 即ち波の山~~の~~
前面の傾斜が後面より急になるのも
このおかげで説明 (long wave) される.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$mx = (n+\frac{1}{2})\pi$

の場合は 波動の腹 (loop) は山, これを定め
山 (crest) と谷 (trough) とが交互にあらわれる.
この場合の速度 potential は

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{a_n}{2m}\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\cos(mx - nt)$$

$$\varphi_2 = -\frac{a_n}{2m}\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\cos(mx + nt)$$

よって $\varphi = \underbrace{\frac{a_n}{m}}_{\frac{ga}{n}}\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh(mh)}\sin mx \sin nt$

これより $\xi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\eta = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

それぞれ, 積分して

$$\xi = a\frac{\sinh m(y+h)}{\sinh mh}\sin mx \cos nt$$

$$\eta = a\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\cos mx \cos nt$$

$$\frac{\eta}{\xi} = \tanh m(y+h)\tan mx$$

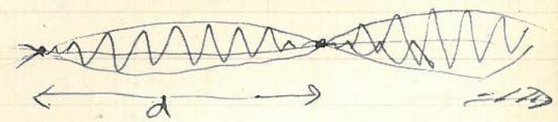
この式は波形の平行線を意味する.

従ってことを示す, 谷では速度の水平成分は零である.

ii) 群速度 (Group velocity)
次に周波数の振幅が同じで位相の少しく異る二つの波が重ね合わせた場合には如何なる結果を得るか,

$$\eta = a\sin(mx - nt) + a\sin(m'x - n't)$$
$$= 2a\cos\left\{\frac{1}{2}(m-m')x - \frac{1}{2}(n-n')t\right\}$$
$$\times \sin\left\{\frac{1}{2}(m+m')x - \frac{1}{2}(n+n')t\right\}$$

これを変形すると.
これは $m \neq m'$, $n \neq n'$ とは相異なる波長とすると,
$\lambda = \frac{4\pi}{m+m'}$ なる波長の正弦的な振動が



$d = \frac{2\pi}{m-m'}$
なる距離の間で
0 から 2a まで
強弱的に変化する.
従って $m-m'$ が相当小さい場合には
d は非常に大きくなり, 図のごとき波の群
(groups of waves) の連続を表すことになる.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

一つの波が
この距離 d を進む間に多くの波は $\frac{2\pi}{n-n'}$
であるから、波の進む速さは

$$U = \frac{n-n'}{m-m'}$$

で与えられる。$m \to m'$ 及び $n \to n'$
の極限における波の伝播速さを、この様な
一つの群の伝播の群速さ (group velocity) と称する。即ち

$$U = \frac{dn}{dm}$$

n は m 及び λ の関数であるから、$V = \frac{n}{m}$ であるから、

$$U = \frac{d}{dm}(mV) = V + m\frac{dV}{dm}$$

$m = \frac{2\pi}{\lambda}$ であるから

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{\lambda}{m}\frac{dV}{d\lambda}$$

$$U = V - \lambda\frac{dV}{d\lambda}.$$

もし一般に波の伝播速さが波長によって異なる場合、その波体が ごく小さな範囲 (dispersive) であるならば、各個々の波と群速さとは異なる。
もしその場合には $\frac{dV}{d\lambda} > 0$ であるから、群速さの方が小さい。

iii) 表面張力の場合
波高さ h の波形を初め

$$\eta = a\sin(kx - nt)$$

なる形をなす場合、dx の幅、単位巾に於ける波形の x 方向に於ける位置の勢力は

$$dV = \rho g\int_0^\eta y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\rho g\eta^2 dx$$

で与えられる。従って x 方向の一波長間にある波形の位置勢力は

$$V = \frac{1}{2}\rho g\int_0^\lambda \eta^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\rho g a^2\lambda.$$

一方、この波形の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\int_{-h}^{0}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

しかも $\iint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma + \iint\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)d\sigma$

$$= \oint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

で $\Delta\varphi = 0$ であるから

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy=\oint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

より

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}dx$$

$$\varphi=\frac{an}{m}\frac{\cosh m(y+h)}{\sinh mh}\times\cos(mx-nt)$$

を代入すれば

$$\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=ga^2\cdot\cos^2(mx-nt)$$

$$T=\frac{1}{2}\rho ga^2\int_0^\lambda\cos^2(mx-nt)dx$$

$$=\frac{1}{4}\rho ga^2\lambda,$$

pps 波形の1波長の一端を中心として左右に等しい勢力と逆向き勢力とが同じであって、結局はもとのままにとどまる。

全体の場合は

$$V=\frac{1}{4}\rho ga^2\lambda\cos^2nt$$

$$T=\frac{1}{4}\rho ga^2\lambda\sin^2nt,$$

とおいて、結って

$$V+T=\frac{1}{4}\rho ga^2\lambda=\text{const.}$$

勢力が次にはなつて ~~は~~ 知れなつて勢力が逆はれる方向を与えてくる。それは一つの垂直面を通じて壁力のする仕事をおもう事ができる。

浮んだ波形の自由表面は

$$\eta=a\sin(mx-nt)$$

であれば表面波が進む際、任意の点における potential は

$$\varphi=\frac{ga}{n}\frac{\cosh m(y+h)}{\cosh mh}\cos(mx-nt)$$

であった。

又波形内の任意点における圧は

$$p=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$=\rho ga\frac{\cosh m(y+h)}{\cosh mh}\sin(mx-nt)$$

任意の垂直面の下部を底の幅の1/2を通じて次の進行方向へ、下部内側を出される勢力は、この面を通じて壁力が下部内側にした仕事の量に等しい。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ある一つの波の場合は

$$W = -\int_{-h}^{0} p \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

$$= \frac{ga}{n} \rho g$$

$$= \rho \frac{g^2 a^2 m}{2n} \frac{\sin^2(mx - nt)}{\cosh^2(mh)} \left(h + \frac{\sinh 2mh}{2m}\right)$$

ここで

$$n^2 = gm \tanh(mh)$$

を用いると、

$$W = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{n}{m} (1 + 2mh \operatorname{cosech} 2mh) \times \sin^2(mx - nt)$$

波形はの周期をもとに、Wの一周期についての平均値をとると

$$\overline{W} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} W dt$$

$$= \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{n}{m} (1 + 2mh \operatorname{cosech} 2mh)$$

となる。

波の速さの波長の関数で表した形

つまり

$$V^2 = \frac{g}{m} \tanh mh$$

より

$$\frac{2}{V} \frac{dV}{dm} = -\frac{1}{m} + 2h \operatorname{cosech}(2mh)$$

従って、$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2mh \operatorname{cosech} 2mh)$$

より

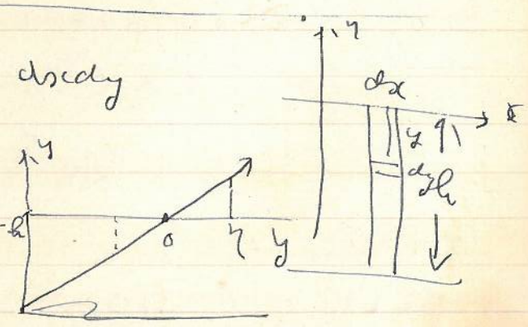
$$\overline{W} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \cdot U$$

これは波の[illegible]（Uは波長の関数）

である。従って波の場合も群速度はUで与えられていることになる。

$$+ \int_{-h}^{\eta} \rho g y \, dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2)$$



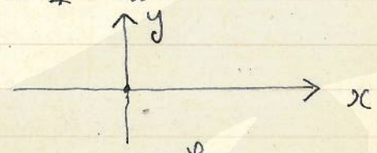
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

トロコイドは

§ はじめに Trochidal wave について

従来 ~~これ~~ 主として ~~その~~ 振幅が極めて小さい場合、いわゆる波が成長する場合に限られてゐたのであるが、振幅が有限な場合には一般には形が伝播の進行で変化してゐて、急峻な波形になる。

所が Gerstner は 1802年、(Rankine もこれと独立に 1863年) 運動方程式の厳密な解を求めた所が trochidal wave を得た。但しこの場合の運動は ~~非~~ 渦なしでないので、完全流体の場合には無視されてゐるが、振幅が有限なる時の性質を知る上に興味がある。



y を垂直上方にとり、静止状態の水平面を $y=0$ の面にとれば、運動 ~~は~~ 全く各質点に独立に Lagrange の方法は

$$x = a + k e^{\frac{b}{k}} \sin\frac{ct-a}{k}$$
$$y = b + k e^{\frac{b}{k}} \cos\frac{ct-a}{k}$$

なる運動をなしてゐる。

但し (a,b) は静止状態における流体の位置 ($b \le 0$)

~~この~~ 式で、(x,y) はその時々の ~~その~~ 流体質点を表はす。

~~この式は c と b とが 任意の値を表はせる式で、~~
~~よいあらゆる場合を表はす。~~

この解が Lagrange の運動方程式および連続方程式の両者を満足することを証明せよ。

~~この~~ 流体が Lagrange の運動方程式と連続方程式の両者を満足するためには

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} = \begin{vmatrix} -e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k} & e^{\frac{b}{k}}\sin\frac{ct-a}{k} \\ e^{\frac{b}{k}}\sin\frac{ct-a}{k} & 1+e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k} \end{vmatrix}$$

$$= 1 - e^{\frac{2b}{k}} = \text{const.}$$

となって満足される！

次に Lagrange の運動方程式は

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}$$
$$\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}$$

~~流体の~~ † ~~(a,b) 点にある~~ 流体質点 (x_0, y_0) とすると、連続方程式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_0,y_0)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \Big/ \frac{\partial(x_0,y_0)}{\partial(a,b)} = 1$$

が満たされる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~この式を変形して~~

で表わされる。従って、$\Omega = gy$ であるから、Gerstnerの解を代入すれば、

~~$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} + g\frac{\partial y}{\partial a} =$~~

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right) = \frac{c^2}{k}e^{\frac{b}{k}}\sin\frac{ct-a}{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right) = \frac{c^2}{k}e^{\frac{2b}{k}} + \frac{c^2}{k}e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k}$$

これから

$$d\left(\frac{p}{\rho}+gy\right) = \frac{c^2}{k}e^{\frac{b}{k}}\sin\frac{ct-a}{k}\,da + \left(\frac{c^2}{k}e^{\frac{2b}{k}} + \frac{c^2}{k}e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k}\right)db$$

$$= d\left(c^2e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k} + \frac{1}{2}c^2e^{\frac{2b}{k}}\right)$$

これを積分すると

$$\frac{p}{\rho} + gy = C + \frac{1}{2}c^2e^{\frac{2b}{k}} + c^2e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k}$$

従って液体の中の

$$\frac{p}{\rho} = C - gb + \frac{1}{2}c^2e^{\frac{2b}{k}} + (c^2-gk)e^{\frac{b}{k}}\cos\frac{ct-a}{k}$$

で表わされる ~~a と b は~~ 点の (x, y) と共に、

Lagrangeの運動方程式に代入すれば、これが満足される。

$b=0$ で表わされるが

従って自由表面を振動して伝わると、そこでは p は一定であるから

$$c^2 = gk$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

で表わされる。従し

$$k = \frac{\lambda}{2\pi}$$

すると、$b = \text{const.}$ ということは自由表面の形は

$$\frac{p}{\rho} = C - gb + \frac{1}{2}c^2e^{\frac{2b}{k}}$$

であるから、

特に、$b=0$ とすれば

~~$x = k\theta - k\sin\theta$~~

$$x = a + k\sin\frac{ct-a}{k}$$

$$y = k\cos\frac{ct-a}{k}$$

~~a の~~ 自由表面 ~~$b=0$~~ では y は $x-ct$ のみの関数である。即ち波形は ~~$x-ct$~~ で進む。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

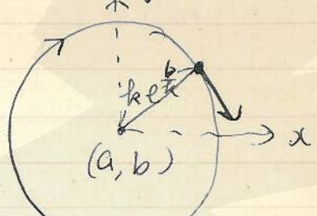
~~一般的に~~、波形の形の式 (x, y) の下での動き方は、

$$v_x = ce^{\frac{b}{k}} \cos\frac{ct-a}{k}$$
$$v_y = -ce^{\frac{b}{k}} \sin\frac{ct-a}{k} \quad *$$

† ~~これから~~ Gerstnerの式から

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2 e^{\frac{2b}{k}}$$

が波形の高さが $ke^{\frac{b}{k}}$ の円を描く。*



* より

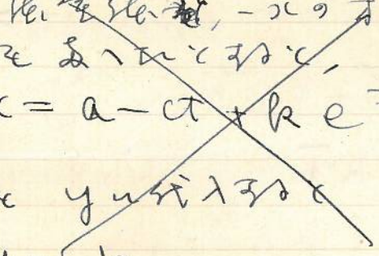
$$w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial v_y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}$$
$$= \frac{\frac{\partial v_y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) - \cdots}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}}$$
$$= \left(\frac{\partial(v_y, y)}{\partial(a,b)} - \frac{\partial(x, v_x)}{\partial(a,b)}\right) \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}$$
$$= \frac{2c}{k} e^{\frac{2b}{k}} \Big/ 1 - e^{\frac{2b}{k}}$$

すなわち これは 0 であるから、水面は運動していない。
$b < 0$ であるから $w_z > 0$ である。

次に波形を表す一つの曲線 C である一粒子の運動をみてみよう。

$$x = a - ct + ke^{\frac{b}{k}} \sin\frac{ct-a}{k}$$

これを $y = b$ に代入すると



* $b = \text{const}$ ごとにこれは trochoid である。すなわち ~~$ke^{\frac{b}{k}}$ の半径の円の中心~~ (a, b) ~~が a と x 軸に沿って~~ ∴ x の方向に C である一粒子の運動をみていると、

$$x' = x - ct \qquad a' = a - ct = k\theta$$

とおくと、(x', y) が変換後の座標であるから

$$x' = k\theta + ke^{\frac{b}{k}} \sin\theta$$
$$y = b + ke^{\frac{b}{k}} \cos\theta$$

~~が~~ この場合の流体中の質点の運動を表す。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

それにはまず一方で外力が時間的に変化しない $b=$ const の場合を考えます。即ち t を固定して、a を書いて行けば

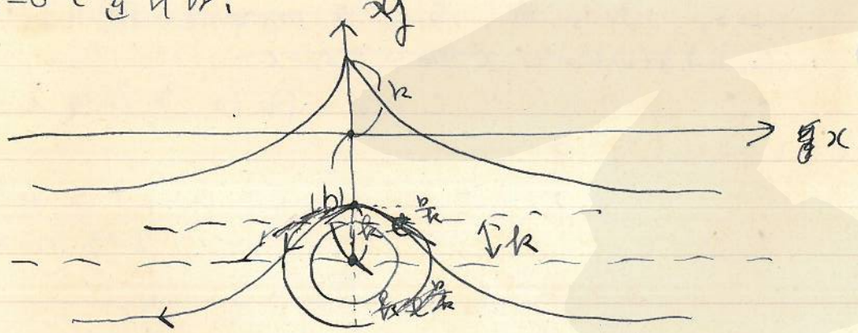
~~$x=a+ke^{\frac{y}{k}}\sin\frac{a-ct_0}{k}$~~

~~$x=ct_0+a_0+ke^{\frac{y}{k}}\sin\frac{a_0}{k}$~~

$$\left.\begin{aligned} x &= ct_0+\theta k-ke^{\frac{y}{k}}\sin\theta \\ y &= b+ke^{\frac{y}{k}}\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

かいて θ を変えて行くのと同じになる。

これは trochoid の式となる。即ち初めに $t_0=0$ と置けば、



これは $y=b+k$ の直線上を半径 k の円が転がる場合、円の中心から $ke^{\frac{y}{k}}$

この形の波が描く曲線は他にもある。

$a=b=0$ の場合には cycloid となる。

以上述べた外力の作用によって生ずる波の外に、この他に表面張力が原因となる所謂 capillary wave がある。

又池とか湖とかの水深に対して波長が非常に小さい場合を shallow water wave と言う。例えば canal でそうだ。又海洋に押し寄せる tidal wave も我々の問題である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第七章　完全流体の力学　135

§24. 二次元物体運動の一般理論

i) Blasius の定理

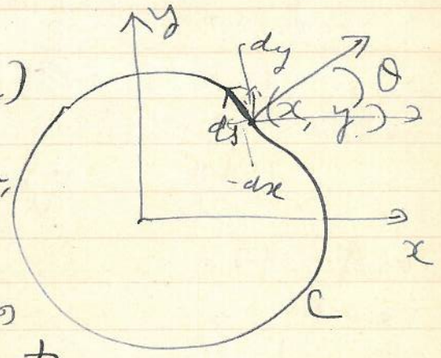
完全流体が二次元の物体運動をする場合に於て、その中に置かれた任意の形の cylinder 柱状体に働く力及び力の作用点に関して次の如き一般的関係が成立する。

即ち

$$w = f(z)$$

$$\phi + i\psi = f(x+iy)$$

とする。但し、ϕ, ψ は共に連続ポテンシャル及び流れの函数を意味する。



この時は柱状体の単位長さに働く力 ~~未知~~ P の x, y 成分は夫れ

$$R_x = -\int_C p\cos\theta\, ds$$

$$R_y = -\int_C p\sin\theta\, ds$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$ds\cdot\sin\theta = -dx$　　$ds\cdot\cos\theta = dy$

所が定常流れでは成り立つ

$$p = A - \frac{1}{2}\rho(v_x^2+v_y^2)$$

であるから、従って

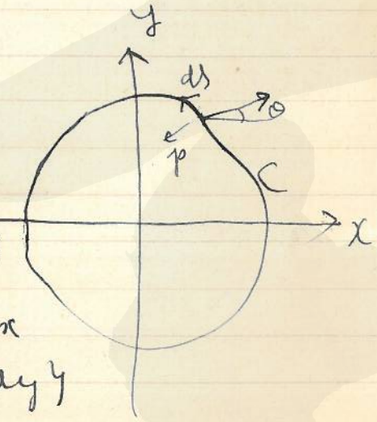
$$R_x = +\frac{1}{2}\rho\int_C (v_x^2+v_y^2)\,dy$$

$$R_y = -\frac{1}{2}\rho\int_C (v_x^2+v_y^2)\,dx$$

所が柱状体の端部Cは一つの流線であるから、これに沿って

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

が成立する。



従って

$$R_x = \frac{1}{2}\rho\int\{2v_xv_y\,dx - (v_x^2-v_y^2)dy\}$$

$$R_y = -\frac{1}{2}\rho\int\{(v_x^2-v_y^2)dx + 2v_xv_y\,dy\}$$

$$R_x - iR_y = \frac{1}{2}i\rho\int_C (v_x^2-v_y^2-2iv_xv_y)\times(dx+i\,dy)$$

$$R_x - iR_y = \frac{1}{2}i\rho\int_C (v_x-iv_y)^2\,dz$$

$z = x+iy$.

しかし $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -v_x + iv_y$

であるから

$$\boxed{R_x - iR_y = \frac{1}{2}i\rho\int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz}$$

が得られる。所でこの右辺は勿論この流線Cを囲む任意の閉曲線C'をとっても，CとC'に囲まれた部分では $\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2$ は特異点を持たないとすると，必ずしもCでなくC'についての積分に等しくなるから，C'についての積分が左辺と等しくなるから

$$\boxed{R_x - iR_y = \frac{1}{2}i\rho\int_{C'} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz}$$

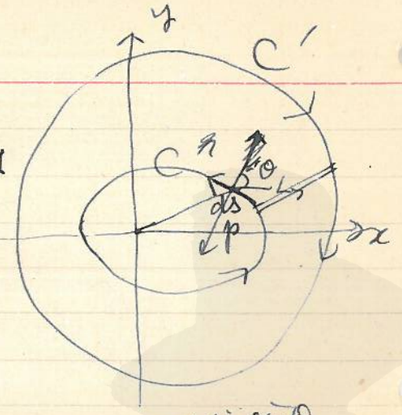
が得られる。

一方 $\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2$ が特異点があってもそれらが極(pole)で場合(residue)の和が0になる場合が多い。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

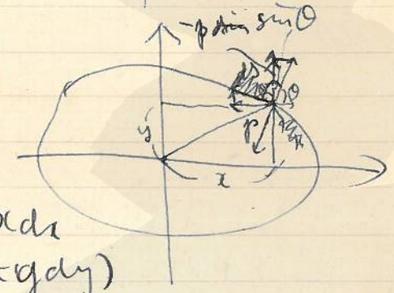
次に 円柱に作用する流力
の総和を求めよう。

$$N = \int_C (y\cos\theta - x\sin\theta) \times p\,ds$$



であるから

$$N = \int_C p(x\,dx + y\,dy)$$



$$= -\frac{1}{2}\rho \int_C (v_x^2 + v_y^2)(x\,dx + y\,dy)$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_C [\{(v_x^2 - v_y^2)y - 2v_x v_y x\}dy - \{(v_x^2 - v_y^2)x + 2v_x v_y y\}dx]$$

これは

$$\frac{1}{2}\rho \int_C (v_x - iv_y)^2 (x+iy)(dx + i\,dy)$$

の実部をとったもの。すなわち

$$N = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\rho \int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right\}$$

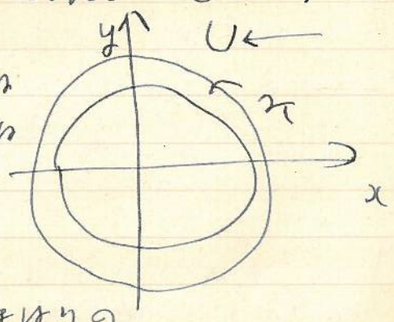
ゆえに同じく $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z$ が分析的な
ものになる C のかわりにそれを囲む
任意の閉曲線 C' に対して

$$\boxed{N = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\rho \int_{C'} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right\}}$$

が成立する。
これを Blasius の定理という。
(1910)

ii) Kutta-Joukowski の定理。
今、翼型物体から遠く
離れた所では流体は
$-x$ 方向に U なる一様な
速さで動いているとする
と、すなわち

$$w = Uz$$



これを(1)の式のまわりの

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

循環があるとし，循環量を κ とおくと

$$w = Uz + \frac{i\kappa}{2\pi}\log z$$

$$w = \phi + i\psi, \qquad z = x + iy$$

が基本で与える．
此で複素速度が存在するため流れは定常
無化なれば，その近傍は

$$w = \text{const.} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \cdots$$

なる形で与えられる．†
これを用いて

$$w = Uz + \frac{i\kappa}{2\pi}\log z + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

の形を得られる．
従って Blasius の定理により（C' は C を含むように）

$$R_x - iR_y = \frac{1}{2}i\rho\int_{C'}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\int_{C'}\left(U + \frac{i\kappa}{2\pi z} - \frac{A}{z^2} + \cdots\right)^2 dz$$

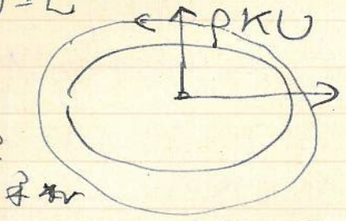
$$\simeq \frac{1}{2}i\rho\int_{C'}\left(U^2 + \frac{i\kappa U}{\pi z} + \cdots\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\,\frac{i\kappa U}{\pi}(2\pi i) = -i\rho\kappa U$$

従って

$$R_x = 0, \quad R_y = \rho\kappa U$$

即ち流れがなくて，翼型物体の存在のみによって物体が x 方向に U なる
いてあるとなると，その方向には力が働かず，
それに直角に $\rho\kappa U = L$
なる方向揚力（lift）が働く．
この事実は円柱の場合に与えられて居るが
同一組の複素速度に対しても全く同
適用出来ることになる．これを Kutta (1910)，Joukowski (1906) の定理という．

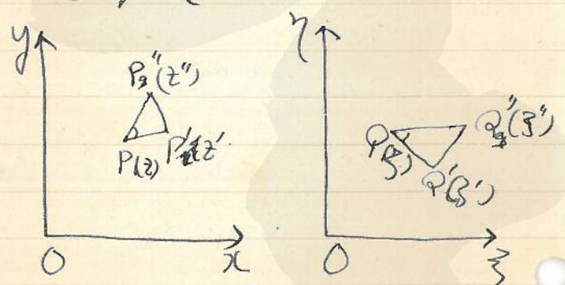


† ; $z \to \infty$ において w の級数が小さくなる為で従って $|z| = \infty$ で w の特異点でない，
ある円が大きな所で $w(z)$ の展開を与えれば
その外側の except は無い為．

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

囲まれて相似性に働くカの級手を保
してゐて、それは相似性の形に関係
する。
Kutta-Joukowski の主定理を相似的な
場合に拡張したものであって、翼型が
あれば相似性の上方では速度は
は、x/a より大きく
下方では減ずることになるね、下から
風が当れば、揚力を生ずる。

§25. 等角写像の応用.
i) 等角写像 (conformal representation)
$\zeta = x+iy$ の一つの関数、函数を
$\zeta = \xi+i\eta$ とおいて
$\frac{d\zeta}{dz}$ は dz と平面上いずれの dz の方向をも同じ
に、従って z 平面上の
P, P', P'' に対応
する z 平面上の点それぞれに $Q''Q'Q''$ とし、



$\zeta' - \zeta = r_1 e^{i\theta_1}\zeta$
$\zeta'' - \zeta = r_2 e^{i\theta_2}\zeta$
$\zeta'' - \zeta' = \rho_1 e^{i\chi_1}$
$\zeta'' - \zeta = \rho_2 e^{i\chi_2}$

と置くと、P', P'' を P に限りなく近づけた極限において

$$\lim_{z'\to z} \frac{\zeta'-\zeta}{z'-z} = \lim_{z''\to z} \frac{\zeta''-\zeta}{z''-z}$$

が成立する。即ち

$$\lim_{r_1\to 0} \frac{\rho_1 e^{i\chi_1}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \lim_{r_2\to 0} \frac{\rho_2 e^{i\chi_2}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

即ち r_1, r_2 を小さくした極限において、

$$\lim \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

で従つ

$$e^{i(\theta_2-\theta_1)} = e^{i(\chi_2-\chi_1)}$$

即ち $\theta_2-\theta_1 = \chi_2-\chi_1$,

即ち、即ち小さい線分は z 面も ζ 面も
$\triangle PP'P''$ と $\triangle QQ'Q''$ は相似形

©2022 YITP, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

いなって ある.
この意味において, $\zeta = \zeta(z)$ は関係なって z 平面上の点を ζ 平面上の点へ等角写像 (conformal representation) されているのである.
但し, 等角な写像されるのは有限な部分であって, 有限な領域を有限な領域へ移すとは限らない. $\frac{d\zeta}{dz}$ が 0 および ∞ の点 — 特異点 — をもつ場合には, 一般に等角な写像ではない.

ζ 平面の

ここで z 平面の ~~一つの~~ 点が考えられている. ~~これに対応する~~ ζ 平面の点は ~~一つ~~ 無数にある.

次に $h^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$

とおくと, h は点 z から ζ への変換の拡大率を表わし, そして

$$h = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

そして $w(z) = \phi + i\psi$

とおくと, 流線の ~~一つ~~ z 平面上で $w(z)$ は流線函数

そうすると, その速さは

$$v_x + i v_y$$

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

であるから

$$v^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2$$

~~したがって~~ ~~したがって~~ 次式

$$v = \left|\frac{dw}{dz}\right|$$

一方,

$$w(z) = \bar{w}(\zeta)$$

であると, ζ 平面上における流線函数

$$\bar{v} = \left|\frac{d\bar{w}}{d\zeta}\right|$$

で与えられる.
従って

~~$v = \bar{v} \cdot h$~~

$$v = \left|\frac{d\bar{w}}{d\zeta}\right| \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \bar{v} \cdot h$$

一方において, z 平面上の面積要素 $dxdy$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これは ζ-平面上の面積要素 $d\xi d\eta$ の
関係は

$$d\xi d\eta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) dx dy$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy$$

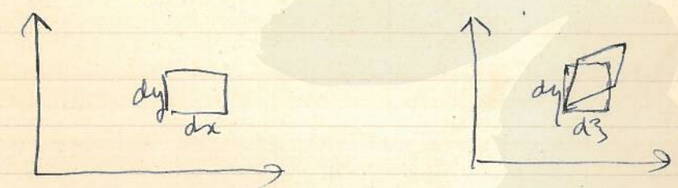
即ち

$$d\xi d\eta = h^2 dx dy$$

が成立つわけである。そうしてそのような点々
での運動勢力は

$$\frac{1}{2}\rho \bar{v}^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2}\rho v^2 dx dy$$

となり、元の形のままで、ただ速度の
かわって新しくなっている。



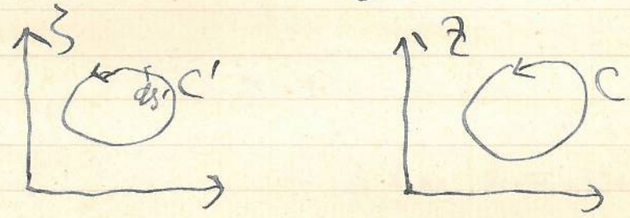
† $\begin{vmatrix} d\xi_1 & d\eta_1 \\ d\xi_2 & d\eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy_1 & \frac{\partial \eta}{\partial x}dx_1 + \cdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial x}dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy_2 & \cdots \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ dx_2 & dy_2 \end{vmatrix}$$

又循環積も等角写像に対して不変である。

∵ ζ平面で C に対応する曲線 C' に沿っての循環

$$\Gamma = -\oint_C \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = -\oint_C d\Phi$$



ζ平面で C に対応する曲線を C' とすると

$$-\oint_C d\Phi = \oint_{C'} d\Phi = \oint_{C'} \frac{\partial \Phi}{\partial s'} ds'$$

これは ζ平面において C' に沿っての循環 Γ' に他ならぬ。即ち

$$\Gamma = \Gamma'.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

aerofoil
~~aerofoil~~

;;) Joukowski の変換 ~~とは~~
z 平面上の原点を通る単位 arc を
円をえへ、一次分数一般分数変換がある
とおると、

$$w(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\varkappa i}{2\pi} \log z$$

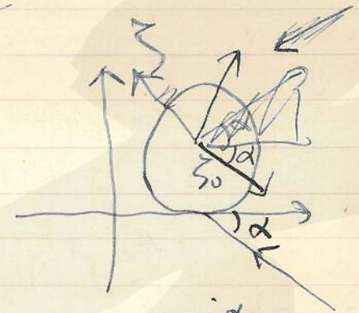
し、且つ x の係数が 0 である
そこで

$$\zeta = \zeta_0 + z e^{-i\alpha}$$

の変換を行うと、
$|z| = a$ の円が

$|\zeta - \zeta_0| = a$

即ち、ζ_0 を中心とし
半径 a の円に変換
される。



そして

$$w = U\left\{(\zeta - \zeta_0)e^{+i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta - \zeta_0}\right\} + \frac{\varkappa i}{2\pi}\log(\zeta - \zeta_0)$$

となる。これは円 K が一次変換と
α の角を持つ様な一般の流れの中心を
れ、且つ x の係数が 0 でない 場合
に当る。
そこで今私はこの ζ-平面上の運動から出
発して、他の新しい z-平面へ移る。
その場合、K-円周上の一点 ζ_1 の近傍で

$$z = f(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)^n F(\zeta) + f(\zeta_1)$$

$n > 1$ 整数

$F(\zeta_1) = C e^{i\alpha} \neq 0$ と仮定する。

すると

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta_1} = f'(\zeta_1)$$

$$= (\zeta - \zeta_1)^n F'(\zeta) + n(\zeta - \zeta_1)^{n-1} F(\zeta)$$

よって $\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta_1} = f'(\zeta_1) = 0$

即ち ζ_1 点が変換の特異点である。
そこで $f(\zeta_1) = z_1$

$z - z_1 = r e^{i\theta}$　　$\zeta - \zeta_1 = \rho e^{i\chi}$

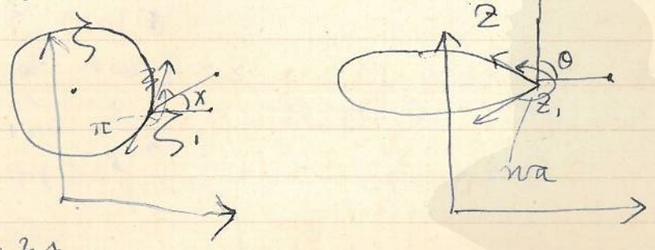
と置けば ζ_1 の近傍で

即ち $r e^{i\theta} = C \rho^n e^{i n\chi + i\alpha}$

即ち $r = C\rho^n$,　$\theta = n\chi + \alpha$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

が正なら、ζ_1 から z_1 辺りを切れば
辺が ζ_1 辺で角が π 小さくなる。



ζ_1 辺をとる
なら円の外角 π は、z_1 辺では $n\pi$、
従って内角は $(2-n)\pi$ となり、円の
内側を向いた図形が得られる。
即ち後縁 z_1 において $\pi\alpha$ の角をなす翼型が
得られ $\zeta=\zeta_1$ において

$$z = f(\zeta) = (\zeta-\zeta_1)^{2-\frac{\pi}{\pi\alpha}} F(\zeta) + f(\zeta_1)$$
$$F(\zeta_1) \neq 0$$

なっている角は
この変換そうでない。
この場合 $f'(\zeta_1)=0$ であるから

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \Big/ \frac{dz}{d\zeta}$$

は $\zeta=\zeta_1$ で発散しないから、即ち $z=z_1$ 点
で流速は発散しない。
あるw-あん

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1} = 0$$ である時は

この関係がみたされる。これを Joukowski の
仮定と称する。さて翼がきまるためには

$$\frac{dw}{d\zeta} = U\left\{e^{+i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right\} + \frac{i\kappa}{2\pi}\frac{1}{\zeta-\zeta_0}$$

$\zeta_1 = \zeta_0 + a e^{+i\beta}$ とすれば

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1} = U\left\{e^{+i\alpha} - e^{-i(\alpha+2\beta)}\right\} + \frac{i\kappa}{2\pi}\frac{e^{i\beta}}{a}$$
$$= 0$$

従って

$$\kappa = -4\pi U a \sin(\alpha+\beta)$$

で

$$w = U e^{-i\alpha}(\zeta-\zeta_0) + \frac{U a^2 e^{i\alpha}}{\zeta-\zeta_0}$$
$$- i\,2U a i \sin(\alpha+\beta)\log(\zeta-\zeta_0)$$

この場合流れは z_1 から後方へ落ちかれ
ることがわかる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

而して Kutta-Joukowski の定理により揚力は

$$L = 4\pi\rho U^2 a \sin(\alpha+\beta)$$

となる。

今翼形の型を与えるには、函数が

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \qquad b>0$$

なる変換を行う。これを Joukowski の変換という。

すると $\dfrac{dz}{d\zeta} = 1 - \dfrac{b^2}{\zeta^2}$

であるから $\zeta = \pm b$ が分岐点

となる。

a) そこで $\zeta = \rho e^{i\theta}$ と置けば

$$z = x+iy = \left(\rho + \frac{b^2}{\rho}\right)\cos\theta + i\left(\rho - \frac{b^2}{\rho}\right)\sin\theta$$

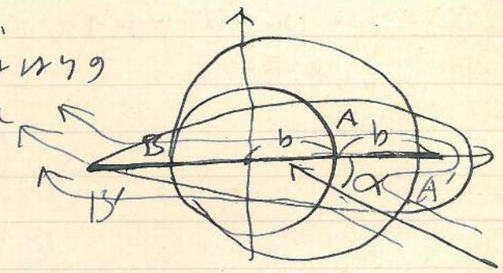
であるから、$\rho = b$ とおけば

$$x = 2b\cos\theta \qquad y = 0$$

従ってこ平面上の原点を中心とする半径 b の円は z 平面上の $4b$ の長さの線分

が分岐点となることから、

かくして円柱のまわりの流れから、直ちに平面翼のまわりの平板 plate 流れが分かる。



この流れが平板と α なる角をなしてあるとする。この α は所謂迎角 (angle of attack) と称せられる。

$\beta = -\pi$ であるから Joukowski の場合は

分岐点は β であるから $\kappa = 4\pi \cup b \sin\alpha$

となる。平板の受ける揚力は

$$L = \rho\kappa\cup = 4\pi\rho U^2 b\sin\alpha$$

となる。

同様にして揚力の循環 N も計算出来る。

この場合は B を通り A より外に向いている円柱

を平面上に A を原点とする x 軸に関して

対称な図形、所謂対称翼型 (symmetrical aerofoil) ができる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

b) これも Joukowskiの変換から
~~上の例にならって~~から

$$z \pm 2b = \zeta \pm 2b + \frac{b^2}{\zeta}$$
$$= \frac{1}{\zeta}(\zeta^2 \pm b)^2$$

が得られるから

$$\frac{z-2b}{z+2b} = \left(\frac{\zeta - b}{\zeta + b}\right)^2$$

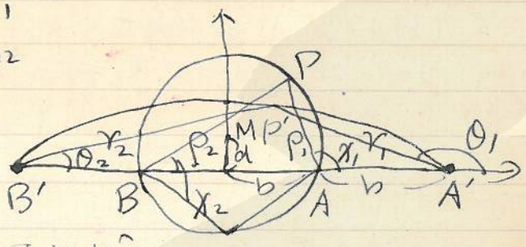
となる、

$$\begin{cases} z-2b = r_1 e^{i\theta_1} \\ z+2b = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta - b = \rho_1 e^{i\chi_1} \\ \zeta + b = \rho_2 e^{i\chi_2} \end{cases}$$

と書けばいて代入すれば

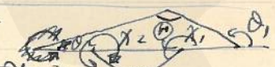
$$\theta_1 - \theta_2 = 2(\chi_1 - \chi_2)$$



となり、AB を通る円は A'B' を通る円弧に変換される。† 特に $\angle APB = \chi_0$ ならば $\angle A'P'B' = 2\chi_0$ となる。

この円は ~~ゆがんだ~~ 翼型の上面になっている

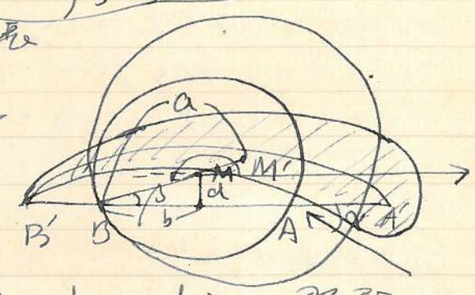
† A, B の下側にある点に対しては



$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi - 2(\chi_1 - \chi_2) = 2\chi_0 - 2\pi$

一般的にまとめると、これらをもとにして一つの円弧翼が与えられることになる。この場合

そこで更に BM の延長上の一点 M' をとると B を通る円を通り B' を通る上向きに曲がった翼型が得られる。これを Joukowski の翼型と称する。



すると各点は

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{b}{a} e^{i(\pi+\beta)}$$

で与えられるから、

$$\chi = 4\pi \cup a \sin(\alpha+\beta)$$

となり、揚力は

$$L = 4\pi\rho V^2 a \sin(\alpha+\beta)$$

で与えられることになる。
同様にして力のモーメント N も求められる。

この様な方法によって揚力を計算したものは、実験と大体一致するのであるから、抗力(計算しない)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(drag)

のオリ生じて来ない。これは流体を空気流体と
抗力の同じ流体の粘性を考慮しなければ空気
も解くことは出来ない。しかし Helmholtz は果
流体のみを動く物体の後ろに静止水
(dead water) 領域が生ずると考えることに
つて抵抗を流体の粘性の範囲内で抵抗を
おめることが試みられている！ しかし
その結果によると，α の迎角で流れの向き
l の幅の平板には

$$P = \frac{\pi \sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}\rho U^2 l$$

なる抗力が働くことになる。
実際の場合には抗力はこれより大きい，

抗力については
Kármán の仕事に関連して
考える点から改めて述べる

この場合には静止と運動との不連続 (discontinuous motion) を考えなければならない。

$$\mathrm{div}\, v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$(\mathrm{curl}, (v\cdot\mathrm{grad})v)_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$- \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$+ v_x\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y} + v_y\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + v_z\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}$$

$$- v_x\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z} - v_y\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} - v_z\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\equiv \{(v\,\mathrm{grad})w\}_x - \{(w\,\mathrm{grad})v\}_x$$

$$= v_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial w_x}{\partial z}$$

$$- w_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - w_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - w_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$= v_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}\right) + v_y\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+ v_z\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}\right) +$$

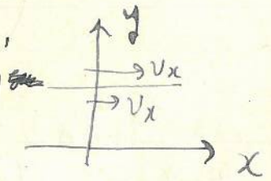
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

26 Dynamics of a Viscous Fluid

§18. 粘性流体における運動方程式 (Equations of Motion) 等

完全流体においては、法線方向のみが存在すると仮定したが、実際の分子間に働く流体内の運動状態は、運動状態に応じて接線方向にも力が働く、これが流体の粘性(Viscosity)と呼ばれ、流体の各部分の運動が異なる場合、それぞれの間で運動量のやりとりがあるためと考えられる。

流体が x 方向に運動し、速さが v_x が y 方向に変化しているとき、



y 軸に垂直な面に沿って
単位面積から x 方向の接線力 P_{yx} に対する運動量の流れは

$$P_{yx} = +\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

となる。この μ が粘性率 (coefficient of viscosity) である

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これをもつと一般の場合に拡張すれば

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

それらを並べて

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

なる対称テンソルを考える。これを変形(strain-velocity)と称する。そこで応力もこれと六つの量の函数とし、

$$P_{xx} = P_{xx}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}) \quad (\alpha, \beta, \gamma, f, g, h)$$

Maclaurinの定理etc.を用いて

$$P_{xx} = P_{xx}(0) + \frac{\partial P_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}} \varepsilon_{xx} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}} \varepsilon_{yy} + \cdots \text{etc.}$$

と書くと、$P_{xx}(0)$ etc. は流体を静止の一般的な場合の多かであるから、それの特殊として静止している場合、すなわち静圧力 p よりほかならない。すなわち

$$P_{xx}(0) = -p \qquad P_{yz}(0) = 0$$
$$P_{yy}(0) = -p \qquad P_{zx}(0) = 0$$
$$P_{zz}(0) = -p \qquad P_{xy}(0) = 0$$

変形が小さい範囲にあっては、ε_{xx}^2 etc. などの項を省略し得る。

$$P_{xx} = -p + \frac{\partial P_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}} \varepsilon_{xx} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}} \varepsilon_{yy} + \cdots \text{etc.}$$

なる一般の線形関係を考えるのが多くの物理学の問題である。かかる線形関係を述べたが、これはまた同じ方向の場合にも成立し、

$$\begin{cases} P_{xx} = -p + \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} & P_{yz} = \mu\varepsilon_{yz} \\ P_{yy} = -p + \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy} & P_{zx} = \mu\varepsilon_{zx} \\ P_{zz} = -p + \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} & P_{xy} = \mu\varepsilon_{xy} \end{cases}$$

と書ける。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

(p は流体の各点 n 個分布することを表わすので、この suffix は下 この式は同じである)

すると

$$\begin{cases} P_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\alpha & P_{yz} = \mu f \\ P_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\beta & P_{zx} = \mu g \\ P_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu\gamma & P_{xy} = \mu h \end{cases}$$

これを運動方程式

$$\rho\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \rho\boldsymbol{K} + \boldsymbol{P}^*$$

中の $\boldsymbol{P}^* = i\,\mathrm{div}\,\mathbb{P}_x + j\,\mathrm{div}\,\mathbb{P}_y + k\,\mathrm{div}\,\mathbb{P}_z$

に入れると

$$\boldsymbol{P}^* = -\mathrm{grad}\,p - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\theta + i\left(2\mu\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha+\beta+\gamma)}{\partial x}\right) + j\left(\frac{\partial(\alpha+\beta+\gamma)}{\partial y}\right) + k\left(\frac{\partial(\alpha+\beta+\gamma)}{\partial z}\right)$$

$$+\mu i\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$+\mu j\left(\frac{\partial h}{\partial x} + 2\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$+\mu k\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + 2\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

ここで、

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

は密度の変化を表わす。(連続の式参照)

(∵ 連続の式により

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

密度の変化がなければ $\rho = \mathrm{const.}$ $\therefore \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)

従って非圧縮性の流体については

$$P_{xx} = -p + 2\mu\alpha \qquad P_{yz} = \mu f \text{ etc.}$$

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = 0 - 3p.$$

一般の流体の場合は

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = -3p + (3\lambda + 2\mu)\theta$$

そこで改めてこの式を運動方程式に入れて

$$-p = \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3}$$

とおくと、この場合は λ, μ の条件は

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

となる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\cdot q - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= -\operatorname{grad} p - \frac{2}{3}\mu + i\mu\left(2\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial \beta}{\partial y x} - \frac{2}{3}\frac{\partial \gamma}{\partial z x}\right) + j\mu(\quad)$$

$$+ k\mu(\quad)$$

$$= \Big(2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y}$$

$$- \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial z} \Big)$$

$$= \frac{\partial^2 v_x}{\partial} \Delta v_x + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\Big) + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}.$$

従って

$$p^* = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad}\theta + \mu \Delta v.$$

という運動方程式は

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho K - \operatorname{grad} p + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad}\theta + \mu \Delta v.$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v$$

$$\operatorname{grad} \quad (v \operatorname{grad}) \operatorname{curl} v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) v = \frac{1}{3}\nu \operatorname{grad}\theta$$

$$- \nu \Delta v = K - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

これが粘性流体における運動方程式で
通常 Navier-Stokes の方程式と称
する。但し

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

で運動学的粘性率（kinematic coefficient of viscosity）運動学的
粘性（kinematic viscosity）
という。

（なお粘性流体で、渦なしが仮定して
ある場合には渦度 vector
$w = \operatorname{curl} v$ について

$$\frac{dw}{dt} \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w = (w \operatorname{grad}) v$$

$\therefore \operatorname{curl}(v \operatorname{grad}) v$ が成立する。† 参考照

$$\therefore \{\operatorname{curl}_x (v \operatorname{grad}) v\}_x = \frac{\partial}{\partial y}\Big(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big)$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}\Big(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) = v_x \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} + v_y \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{\partial v_y}{\partial y} \operatorname{curl} w_x + \frac{\partial v_z}{\partial z} w_x + v_y \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + v_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z}$$

$$- v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} - v_z \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

表面のある流体の運動を決めている運動の勢力は内部摩擦のために順次勢力を変化する。勢力は順次減衰する傾向にあり、今閉ざされた曲面から流体が流れ出る流れがあるとすると dt 時間に dA は

$$\frac{dA}{dt} = \iint_S (v\mathbb{P}_n)\, df$$

である。但し、$\mathbb{P}_n$ は S の外方に向かう方向の成分で、この方向の単位ベクトルを n_0 とおく

$$\mathbb{P}_n = (i n_0)\mathbb{P}_x + (j n_0)\mathbb{P}_y + (k n_0)\mathbb{P}_z$$

従って

$$(v\mathbb{P}_n) = i(\mathbb{P}_x v) + j(v\mathbb{P}_y) + k(v\mathbb{P}_z)$$
$$\times n_0 = \mathbb{P}' n_0$$

よって $\dfrac{dA}{dt} = \iint_S \mathbb{P}' n_0\, df$

$$= \iint_S \mathbb{P}' df$$

Gauss の定理より

$$\frac{dA}{dt} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbb{P}' \cdot dv$$

V 内の流体の持つ運動勢力は

$$T = \frac{1}{2}\iiint_V \rho v^2\, dv$$

よって

$$\frac{dT}{dt} = \iiint \rho v \frac{dv}{dt}\, dv$$
$$= \iiint v\,\mathbb{P}^*\, dv$$
$$= \iiint \operatorname{div}\mathbb{P}' \cdot dv - \iiint F\, dv$$

粘性体の場合 ↓ 流体の場合は

$$F = \mu\{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + f^2+g^2+h^2\}\rho_0$$

(∵ $v\mathbb{P}^* = v_x\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}\right)$
$+ v_y\left(\frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}\right) + v_z\left(\frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right)$
$= \frac{\partial}{\partial x}(v_x P_{xx} + v_y P_{yx} + v_z P_{zx})$
$+ \frac{\partial}{\partial y}(v_x P_{xy} + v_y P_{yy} + v_z P_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z}(v_x P_{xz} + v_y P_{yz} + v_z P_{zz})$
$- P_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} - P_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} - P_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}$
$- P_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) - P_{zx}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$
$- P_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$= \mathrm{div}\,\mathfrak{P}' - (P_{xx}\alpha + P_{yy}\beta + P_{zz}\gamma + P_{yz}f + P_{zx}g + P_{xy}h)$

~~$\alpha+\beta+\gamma=0$ であるから~~

$(\quad) = -p(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{2}{3}\mu(\alpha+\beta+\gamma)^2 + 2\mu(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \mu(f^2+g^2+h^2)$

非圧縮性流体の場合には $\alpha+\beta+\gamma=0$.

)

従って $\frac{dA}{dt} = \frac{dT}{dt} + \iiint_V F\,dv$

これは、外力からこの流体塊になした仕事がこの流体の運動勢力を増加せしめる他に、その流体の抵抗のために全く熱に変化されてしまうかである。これが次の第二次である。この F は (rate of dissipation of energy) 勢力の消失率を

~~$\alpha+\beta+\gamma=0$~~

次に、一般の弾性振動は周辺の表面に垂直な振動をおこしていることが証明されている。これらには周辺との境界面では両方の相対速度は~~0~~0であると仮定する。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

§ 14. 粘性流体の定常な流れ.

1) 平行板間の流れ.

平行して立つ二つの平面板の間に粘性流体が流れている場合として、流れは壁力をのみ仮定してもし、且つ定常状態にあるとする.

両板の中央に原点をとり、平面板に平行に xy 座標面をとると、各点は $v_z=0$ で v_x, v_y はその面内にあるから、運動方程式は両式

$$\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial x} \qquad 0=\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial y}$$

ゆえに p が x, y の函数で、従って

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial z}&=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z+C_x\\ \frac{\partial v_y}{\partial z}&=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z+C_y\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z^2+C_xz+D_x\\ v_y&=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z^2+C_yz+D_y\end{aligned}\right\}$$

固体面を $z=\pm h$ とすると、そこでは $v_x=v_y=0$ であるから、

$$\left.\begin{aligned}C_x&=C_y=0\\ D_x&=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2\\ D_y&=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}h^2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{1}{2\mu}(z^2-h^2)\frac{\partial p}{\partial x}\\ v_y&=\frac{1}{2\mu}(z^2-h^2)\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

$$v=\frac{1}{2\mu}(z^2-h^2)\,\mathrm{grad}\,p.$$

この流体の流れは壁力 ~~$\frac{\partial p}{\partial z}=0$~~ 勾配の最もよき方向に向い、大いさも之れに比例し、両板の中央で最大で、上下に両方に経つて抛物線的に減少する.

この流れについての平均速度を $\bar{v}$ とすると

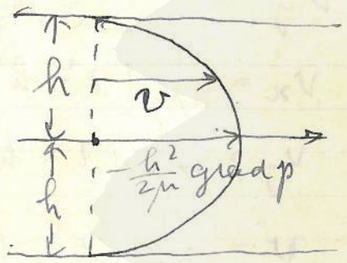
$$\bar{v}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}v\,dz=-\frac{h^2}{3\mu}\,\mathrm{grad}\,p.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

この平均速度は

$$\varphi = \frac{h^2}{3\mu} p$$

なる速度 potential をもつ流れと速度場は同じである。



—おなじ—の垂直な

ii) 円管内の流れ。

次に円管内を粘性流体が流れる場合を考える。円管の軸を z 方向にとると、

$$v_x = v_y = 0.$$

であるから、流れが非圧縮性の場合には

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

なり $v_z = w$ とおくと、これは x, y のみの函数である。

この流れは重力が作用せず

$$K_x = K_y = 0 \qquad K_z = g.$$

で、運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

~~この式から初めの二式から~~ p は z のみの函数で、第二式から

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

なり

$$\frac{\partial p}{\partial z} = a \qquad p = az + b.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} + \frac{a}{\rho\nu} = A \ (\text{const.})$$

直角座標のかわりに 極座標 (r, θ) をとると ~~$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$~~ w は r のみの函数と考えられるから

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = A$$

$$w = \frac{1}{4}Ar^2 + B\log r + C.$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$r=0$ で v の初期条件のために $\beta=0$.
管の半径を R とおくと,

$$v(R)=\frac{1}{4}AR^2+C=0$$

より

$$v=\frac{1}{4}A(r^2-R_0^2)$$

管を流れる単位時間あたりの流体の量は

$$Q=2\pi\int_0^{R_0} v\,r\,dr$$

$$=\frac{1}{2}A\pi\int_0^{R_0} r(r^2-R_0^2)\,dr$$

$$=-\frac{1}{8}\pi A R_0^4$$

$A\gtrless 0$ に従って 流れは上又は下向き

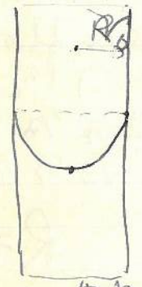
管の長さを l とし, その両端における圧力を考え p_1, p_2 とおくと

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{p_1-p_2}{l}=-A\rho$$

$$A=\frac{p_2-p_1}{\mu l}-\frac{\rho}{\nu}$$

従って

$$Q=\frac{\pi R_0^4}{8\mu}\left(\frac{p_1-p_2}{l}+\rho g\right)$$



$\frac{p_1-p_2}{l}$ が小さく, ρg を無視し得る場合には

$$Q=\frac{\pi R_0^4}{8\mu}\frac{p_1-p_2}{l}$$

である. この流量は管の両端の圧力差 p_1-p_2 および管半径の4乗に比例し, 又粘性係数に反比例する.
これを Poiseuille の法則 (又は Hagen-Poiseuille の法則) と称し, この式を基として 粘性係数を測定し得る.
この場合 流れは管に平行しており, 各点の速度は管軸を軸とする回転対称である. このような流れを層流 (laminar flow) といい, 又層をなして運動 (laminar motion) という.
この式は流れの速度が一定の大きさ, 臨界速度 (critical velocity) 以下のとき

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

なをしなくては. これによっては 定常状態 は存在しなくなり, 始めて不規則な 乱れ (turbulent motion flow) 乱れ状態 (turbulent motion) という 流れ が現われる。
流れの状態を決める 管の半径 R, 粘性流体の密度 ρ 粘性 ν に関係する。

$$R = \frac{\rho R v}{\nu}$$

なる次元のない数を考えると, これが ~~ある値~~ 乱れ流か層流かを決定する 限界 になり, これを Reynolds 数 (Reynolds number) という。
これを管の 臨界値 より ~~小さく~~ 大きくなると 乱れ流を生ずる. これを臨界 Reynolds 数 (critical Reynolds number) R_c という。
Reynolds 数は R_c の値として

$$R_c \simeq 1000$$

を与えるが, これは 管の入口 が完全な層流であるか 否かに関係する。
普通 乱れ流の現象は 多くの人に 関心 をもたれているが, いつまでも 研究 を始めて完

成されないのである。又実際 粘性流体 の流れの現象への 近似 は 次の 式 を用いてみよう。

定常方程式の

§28. 近似的解法.

~~一般の場合には~~ 完全な 流体 の運動を、定常方程式を満たす解として求めることは困難である。しかし次の様な場合には完全な定常方程式を解くことは可能である。
流速の小さい 粘性 の場合である。
そこで粘性の 極限 の場合に 定常 を考えることによって, ~~一般の~~ 流体の運動の ~~大体の~~ 様子 の大体を推察することが試みられてある。
第一に 定常 が極めて 徐々 で, 従って 速さ が小さく, 定常方程式 における 慣性 の項 $\rho(v \cdot \mathrm{grad})v$ を 粘性 の項 $\mu \Delta v$ に比して 充分小さいとする。所謂 緩慢運動 (slow motion) ~~である~~、それをなすことである。
この場合 定常方程式 は、次の形の 粘性流体 の

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = K - \frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, p$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今後慣性系の保存をもう少し詳しく扱いて
おいて、ある流体の中を U なる速さで
ある物体が通る場合、その長さを l と
すると、慣性の項は $\frac{\rho U^2}{l^3}$ の程度の
大きさであり、粘性の項は $\frac{\mu U}{l^2}$
の程度であるから、その比は

$$R = \frac{\rho U^2}{l} \Big/ \frac{\mu U}{l^2} = \frac{lU}{\nu}$$

となる。これがこの場合の Reynolds 数に他ならぬ。
なお Reynolds 数 R が小さいときは
粘性慣性の保存が効くわけである。
今一例として半径 a なる球が一定の速さ U で
粘性流体中を一定の速さで球が走って
居る場合を考える。球の半径が非常に小
さい為、或は速さが極めて小なる為に
慣性項を省略して粘性項のみ一定の速さで
流れて来る場合を考えても同じであるから
その方法を次に取り、五方向の速さを
U とする。
分かりやすくするため、重力項は無いから
後述、以後

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta v.$$

また $\operatorname{div} v = 0$.　$\operatorname{rot} v = 0$

であるから

$$\Delta p = 0, \quad \Delta v = 0$$

境界条件は球面から充分離れた点では速度 (r, θ, ϕ) を用いて

$r = \infty$; $v_x = v_y = 0$　$v_z = U$

$r = r_0$; $v_x = v_y = v_z = 0$.

これらの条件を満たす速度分布を求めると、

$$v_x = -\frac{3}{4}\frac{U r_0}{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)xz$$

$$v_y = -\frac{3}{4}\frac{U r_0}{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)yz$$

$$v_z = -\frac{3}{4}\frac{U r_0}{r}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)z^2$$

$$+ U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_0}{r} - \frac{1}{4}\frac{r_0^3}{r^3}\right)$$

$p = -\mu \Delta \varphi$

$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \text{const.}$

$$\varphi = -Uz - \frac{1}{4} U r_0^3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{3}{4} U r_0 \frac{\partial r}{\partial z}.$$

$$w = -\frac{3 U r_0}{2 r} \text{ const.}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

今度 r_0 が移動しない場合
$P_r = x P_{xx} + y P_{xy} + z P_{xz} + (i r_0) P_x + (j r_0) P_y$
$\quad + (k r_0) P_z$
$= i(r_0 P_x) + j(r_0 P_y) + k(r_0 P_z)$

但し、r_0 と r の動径の方向の単位
vector.
$r_0 P_x = x P_{xx} + y P_{xy} + z P_{xz}$
$= -px + \mu\{x\frac{\partial v_x}{\partial x} + y\frac{\partial v_x}{\partial y} + z\frac{\partial v_x}{\partial z}\}$
$-\mu v_x + \mu\frac{\partial}{\partial x}(xv_x + yv_y + zv_z)$
$= -px + \mu(r\frac{\partial}{\partial r} - 1)v_x$
$+ \mu\frac{\partial}{\partial x}(xv_x + yv_y + zv_z)$

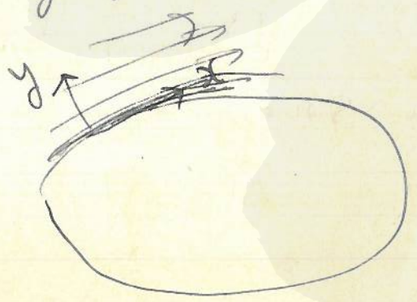
これより
$P_r = -pr + \mu(r\frac{\partial}{\partial r} - 1)v$
$+ \mu\,\mathrm{grad}(rv)$
これを計算すると、$r = r_0$ 球面上では
$P_{rx} = P_{ry} = 0 \qquad P_{rz} = \frac{3}{2}\frac{\mu U}{r_0}$

抵抗が粘性係数だけで表わされるためには
W急 $= \frac{\text{無}}{\text{次}} v_0^2 \cdot \frac{3}{2}\frac{\mu U}{r_0} = 6\pi\mu U r_0$
なる大きさを持つ。
従って抵抗係数を $6\pi r_0$ なる形で
しかも慣性力を考える場合には、これと同等の
方向に W なる大きさの抵抗を与えることになる。この結果は Reynolds 数が極めて小さい時に実験と非常によく合う。

今、流体 ρ の中を密度 ρ' の球が落下する場合には、器械重力 W は
$6\pi\mu U r_0 = \frac{4\pi}{3}(\rho' - \rho)\frac{g}{g} r_0^3$
即ち $U = \frac{2}{9}\frac{\rho' - \rho}{\mu} g r_0^2$
で与えられる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ii) 上のように Reynolds 数が極めて大きい場合には、二次元物体の境界層の問題として考えられる。流体の運動は、主に流体の場合と大差ない。物体（固体壁）表面の近くでは速度勾配が極めて大きくなるため粘性の影響が現われて来る。粘性が小さく、Reynolds 数が充分大きい場合特に問題になるのは、固体表面の極めて薄い層の内部においてのみ粘性の影響を考へ、それ以外では完全流体と同じ運動をするとして、流れの下に問題の近似解を求めようとするのが所謂 Prandtl の境界層 (boundary layer) の理論、である。



159

これを境界層方程式という。

そのために二次元の流れを考へる。物体表面に沿って x 軸、法線方向に y 軸をとると、境界層内の流れは

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$\frac{dp}{dx}$

p は境界層の各点の圧力であるが、層が薄いため y 方向の変化は考へず、層の外側の流の圧力と等しいと考へる。すると p は x のみへらみ函数である。

層外の流れを非回転とし、速さを V とすると、

$$\frac{dp}{dx}=-\rho V\frac{dV}{dx}$$

(∵ Bernoulli の定理より $p+\frac{1}{2}\rho V^2=\text{const.}$)

境界条件として、

$y=0$: $v_x=v_y=0$

y : 大 : $v_x=V$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

ある一様な流れの中に置かれた平板を過ぎる流れの境界層を考えている。
境界の流れ V は
一定であるから

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ より流れの
函数 ψ を導入する。
次の様な変換を施すと

$$\eta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\nu x}}\,y \qquad \psi=\sqrt{\nu V x}\,f(\eta)$$

と仮定すると、

$$v_x=\frac{1}{2}Vf',\quad v_y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V\nu}{x}}(\eta f'-f)$$

となり、
運動方程式は次の

$$f''+ff'=0 \qquad (*)$$

境界條件は

$$\eta=0;\quad f=0\quad f'=0$$
$$\eta=\infty;\quad f'=2$$

これ等の條件の下で (*) を級数の形で解くと

$$f=\frac{\alpha\eta^2}{2!}\left(-\frac{\alpha^2\eta^5}{5!}+\frac{11\alpha^3\eta^8}{8!}-\cdots\right)$$

従って $\alpha=1.32824$

$$P_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\mu V}{4}\sqrt{\frac{V}{\nu x}}f''(0)=\frac{1}{4}\alpha\rho V^2\sqrt{\frac{\nu}{xV}}$$

幅を b, 長さ l なる平板に働く抵抗力、(即ち一つの境界層に
基づく摩擦抵抗 (frictional drag)) は (両面で)

$$D=2b\int_0^l P_{yx}\,dx=2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{Vl}}\frac{1}{2}\rho V^2\cdot bl$$

$$D=C_D\frac{1}{2}\rho V^2\cdot S$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

但し、~~S=~~ $S = 2bl$ は平板の表面積、

$$C_D = \alpha \sqrt{\frac{\nu}{lV}}$$

drag,

をよばれる数 (coefficient) という。

この式を Blasius の式と称す。

これから先と境界層内の速さ v_x の間には

$$v_x = \frac{1}{2} V f'\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\nu x}}\, y\right)$$

η

なる式であるから、x の (ここから先は原文ママ) 都合のよい値を示すことになり、これから その式の値を用いてある) 従って境界の厚さを $\delta(x)$ とすると これは

$$\delta(x) \propto \sqrt{x}$$

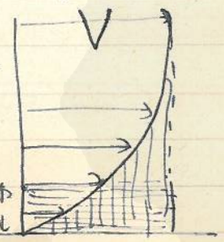
となる。(通常

$$V\delta = \int_0^\infty (V - v_x)\, dy$$

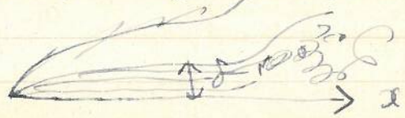
で δ を定義する事

$$V\delta = \int_0^\infty V\left(1 - \frac{1}{2} f'(\eta)\right) \frac{2\sqrt{\frac{\nu x}{V}}}{d\eta}$$

$$\delta = 2\sqrt{\frac{\nu x}{V}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{2} f'\right) d\eta$$



併し、流体の場合はいつこの通りにはならない、何故かというと、x が大きくなると共に δ が大きくなるが、ある所から先は境界層 ~~なく~~ なくなって、乱流への遷移 (transition) がおこる。すると境界層のなかは先の層の それと共に運動量損失による抗力も大きくなる。これは乱流の方が小さな渦のまじわりをし、これにエネルギーを与えるために抗力が増す。



平板の場合以外では、常に $\frac{dp}{dx}$ 圧力勾配 がある為し境界層内外で ~~が~~ 等しくなる。

~~今~~ 流れの方向に圧力が増加する場合には 終段きえを減し、ある ~~場合~~ 逆流さえもする。

すると境界層は 底から 剥れ、所謂 剥離 (separation) をおこす (~~境界~~ 粘力のために) 剥離した後の 層は ~~不~~ 安定で 渦を作り易い。

~~実~~ 航空機で ~~は~~ 主翼 ~~の~~ 胴体 の 抵抗 の 殆どは

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

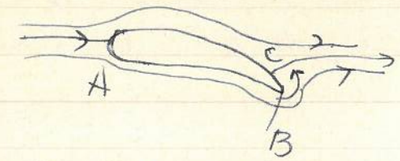
剥離を起し易く、そのために形状抗力（抵抗参照）を生ずる。生まれた剥離が少ない流線形の物体を流線形と称する。

§29. 流体中に置かれた物体に働く力

流体中に置かれた物体に働く力が作用する現象をおいて、それは循環なるものであった。しかし完全流体でも循環の値は一定で無くてある流体と共に動く閉曲線に沿うての（Helmholtzの定理）

従って流体が静止している循環が零ければ、動き出しても0の云てある。

なる循環の存在の生ずるのは粘性があるためである。これをもう少しくわしく云うと、完全流体に循環がそれば、流れは翼のまわりの図のごとく、翼縁で空気の分子が集まる。

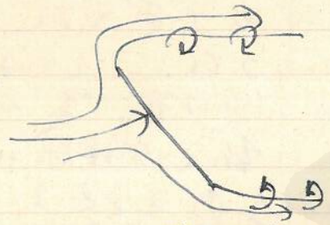


そこの所で淀みを生ずる。しかし流体を仮定しては、（よこの循環を除けば）完全流体と云わねばならぬ。循環の定義は変化がない点で、従って翼のまわりに逆向きの循環を生じる。これが揚力の原因である。

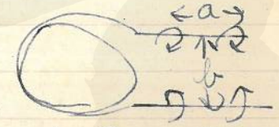
©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

抵抗

完全に流れの沿うて流れの分離が出来易い。
図のごとき平板に斜に水の当る場合を考へてみると、分離



所謂死水 (dead water) 領域が出来る。
すると外の流れとの境目に渦が出来る。
それは上下両側に並んで出来、渦列 (vortex street) を形成することになる。
これが Kármán の渦列の場合である。(物体が相当小さい時には)
分離して渦が出来ると抵抗が生ずる。
この計算は Blasius の考へた後へ運ばれて行く。



抵抗 D
$$D = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 d$$
と書ける。但し、d は板状体の最大の巾。計算の結果、抵抗係数 C_D
$$C_D = \frac{2a}{d}\left\{0.7930\frac{V}{U} - 0.3141\left(\frac{V}{U}\right)^2\right\}$$
となる。但し
$$V = \frac{\kappa}{2a}\tanh\frac{\pi b}{a} \quad (<U)$$
は渦動線が全体として主流に対して動く速さ。κ は渦動線の強さ。

斯様な渦を伴ふ抵抗を形状抵抗 (form drag) resistance と称する。
円柱の場合には実験と非常によく合ふ。
即ち、1.5 cm 径の場合、
$a = 6.4$ cm, $b = 1.8$ cm
$\therefore \frac{b}{a} = 0.282$. (理論値 $= 0.2806$)
$\frac{V}{U} = 0.14$　　$\frac{a}{dk} = 4.3$
これから
$$C_D = 0.91.$$
実験は　$C_D = 0.90$

D は圧力抵抗 (Druckwiderstand) Formwiderstand

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

第九章　音波
Sound Wave

§29. 波動方程式

今迄は大抵の場合において、流体は非圧縮性と仮定してきました。従って流体は剛体的な流体、すなわち容器は壁力を通じてその形を変化する。そして形の変化が起れば、それは流体の内部の中を伝って行く。音波が微小な形の変化のはこばれることによく知られている通りである。

今平衡状態における流体の密度をρ_0とし、これが極く少しだけ変化し、

$$\rho = \rho_0(1+s)$$

に変化されたとする。sは凝縮率（condensation）と称する。此の時の単位体積の壁力をp_0とすると、壁力変化は

$$\delta p = p - p_0 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0(\rho-\rho_0) + \cdots$$
$$\cong \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_0 s \qquad \text{for } s \ll 1.$$

で与えられる。

此で Euler 方程式による流体の各部分の単位体積の運動の運動方程式として、その

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

絶対値は小さいとすると、Eulerの運動方程式は $(v\cdot\mathrm{grad})v$ などの項を省略して

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

連続方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$\rho = \rho_0(1+s)$ を代入すると、初めの式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -c^2\,\mathrm{grad}\,s \qquad 1)$$

と書ける。但し、$s \ll 1$ とすれば

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}$$

所で圧縮率 (compressibility) 或は

その逆数 $\kappa = \dfrac{\delta v}{v\,\delta p}$ 即ち体積弾性率

(volume elasticity) は

$$k = -\frac{v\,\delta p}{\delta v}$$

で与えられる。

$v = \dfrac{\mathrm{const}}{\rho}$ $\qquad \delta v = -\dfrac{\delta}{\rho^2}$

$\rho v = \mathrm{const.}$ $\qquad \dfrac{\delta \rho}{\rho} = -\dfrac{\delta v}{v}$

$\therefore\ k = \rho\dfrac{\delta p}{\delta \rho} \simeq \rho_0\left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)_0$

従って

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}}$$

同様にして、他の式は第一近似として

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \qquad 2)$$

1) 2) から

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) \qquad 3)$$

これが音波の伝わる波動方程式である、従って c が音波の伝播速度を意味する。

所で完全気体の場合には、音波による気体の変化が等温的 (isothermal) になるとすると

$$pv = \mathrm{const.}$$

であるから

$$p\frac{\delta v}{v} + \frac{\delta p}{p} = 0.$$

$$k = p_0 \;;\quad c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これらなして 断熱的 (adiabatic) なる
ことと、

$$pv^{\gamma} = \text{const.}$$
$$\gamma = C_p/C_v$$

よって $\gamma \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta p}{p_0} = 0,$

$$k = \gamma p_0$$
$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

となる。 Newton は 一の場合を 出そう
したが、 Laplace は
分の 出した。 空気の場合は
$\gamma = 1$
これでは 0°C, 760mm Hg の空気の場合
$$c = 280 \text{ m/sec},$$
となり、実際より 少しく小さい、これに対して
Laplace は $\gamma = 1.41$ であるから
$$c = 333 \text{ m/sec}$$

となり、実際とよく一致する。 水は
水、水のような液体の場合には Newton の
出したもの、 0°C で $\rho_0 = 1$.
$$c = \sqrt{k} = 1424 \text{ m/sec}$$
$$\left(k = \frac{10^6}{50.2} \text{ atm.}\right)$$
であるが 他 1435 m/sec とよく一致
する。

§22. 平衡論
上の結果は 一般の弾性体、ないしは
流体について 第二章で述べたことは
不圧縮の特別の場合である。
すなわち 流体においては 二つの弾性率、即ち
剛性率 (rigidity) は 0 であるから、
他の弾性率は
$$k = \frac{p}{\delta} = \lambda$$
となり、従って 運動方程式 は
$$\rho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \text{div}\, \mathfrak{k} = \Delta$$
は
$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \lambda \nabla^2 \Delta$$
となる。 これは 3) と同形である。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

~~体積~~ これはなして $\mu=0$ であるから、dv の体積の
すべての 体積変化は 0. これから 体積は分化しない
音波の場は、これら 体積
変化の場は 縦波である、即ち音は
縦波、所謂粗密波である。このことはよく知
られてゐる通りである。

詳しくいへば

$$\rho = \rho_0(1+s)$$
$$\rho v = \text{const.}$$
$$\rho_0(1+s)\,v_0(1+\Delta) = \rho_0 v_0$$
$$s = -\Delta. = \operatorname{div} \mathfrak{s},$$

又 x 方向の速度 v 成分をもつと
$\mathfrak{s}(x,t)$: $\operatorname{curl}\mathfrak{s}=0$.
$s = -\Delta = f(x-ct) + g(x+ct)$,
$\frac{\partial s_y}{\partial x} = \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0$: → $s_y(t)$, $s_z(t)$,
$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$
$s = -\Delta = \frac{\partial s_x}{\partial x}$: $\frac{\partial s_x}{\partial t} = \pm c \frac{\partial s_x}{\partial x} = +cs$,

§22, (1) 音波の勢力及び強さ
音波が与えられた空気が動かされ、その為め
空気中に運動勢力が蓄はへられる、音の
波が x 方向に進む平面波であるとして
$$\frac{1}{2}\rho_0 \iiint_V \left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 dv$$
なる運動勢力が V なる体積中に蓄はへられ
てゐる、但し、ρ_0 は V の中で動く所、全一
の値を持つてゐるものとする。
一方に於て、空気の各部分が圧力の作用の
下に体積を変化すれば、圧力が空気に仕事を
し、従つて空気中に位置勢力が蓄はへられる
譯である。
今 dv なる体積が p なる圧力によつて
$\delta(dv)$ と変化したとすると
$$-p\,\delta(dv) = (p_0 + \delta p)\,\delta(dv)$$
$$\delta p = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_0 s. \qquad dv = \frac{dv_0}{1+s}$$
$$-\delta(dv) = \frac{dv_0}{(1+s)^2}\delta s.$$
$$\therefore\ -p\,\delta(dv) = \frac{p_0 dv_0}{(1+s)^2}\delta s + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_0 dv \frac{s\,\delta s}{(1+s)^2}$$
又の形の式をえる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

condensation δs が 0 から s まで行くと、

$$p_0 dv_0 \int_0^s \frac{\delta s}{(1+s)^2} + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_0 dv_0 \int_0^s \frac{s\,ds}{(1+s)^2}$$

$$\fallingdotseq p_0 \delta v_0 \left(\frac{1}{(1+s)} - 1\right) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_0 dv_0 \left(\frac{s^2}{2} + \cdots\right)$$

$$= -p_0 dv_0 s + \rho_0 c^2 dv_0 \cdot \frac{s^2}{2} + \cdots$$

このやで 第一項は はの一般に 0 になって 第二項が 0 にならない ことになると、

$$\rho_0 c^2 dv_0 \frac{s^2}{2}$$

で表はされる 空間の $\rho_0 dv_0$ の微小体積の 持つ これが 位置エネルギーである。
故って V なる体積中の 位置勢力は

$$\frac{1}{2} \rho_0 c^2 \iiint s^2 dv_0$$

で 与えられる。
いま 1 次の場合 s が $s_x(x-ct)$ であるから

$$\frac{\partial s_t}{\partial t} = -c \frac{\partial s_x}{\partial x} = c s$$

であるから、平衡の位置勢力と運動勢力とは 等しいことになる。その和が 平衡の位置勢力である。

次に 音波の場合は、それが 進んで行く 方向の 各位面積を 通って 各位時間に 入り込む 勢力として 与えられる。
今 ρ は 場所によって dt 時間に 変わるので 各位時間に x 方向に ds_x だけ 膨張したとすると、 単位時間に 単位面積を 各位面積を 通って dt その間に 通って 時間に 入り込む 勢力 dW は

$$\frac{dW}{dt} = p \frac{ds_x}{dt} = p \frac{\partial s_x}{\partial t}.$$

$$= (p_0 + \delta p) \frac{\partial s_x}{\partial t}.$$

なお 前項は 省略する 位置エネルギーの 和とすると、

$$s_x = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct).$$

故に $\delta p = \rho_0 c^2 s = -\rho_0 c^2 \frac{\partial s_x}{\partial x}$.

$$\frac{dW}{dt} = \left\{ p_0 + \rho_0 c^2 A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right\}$$
$$\times A \frac{2\pi c}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$$
$$+\sin\alpha(\sin\beta$$

$$=A\rho_0\frac{2\pi c}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)$$

$$+\frac{1}{2}\rho_0 c^3A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2-\frac{1}{2}\rho_0 c^3A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cos\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)$$

従って周期的な変化の項を除けば，

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2}\rho_0 c^3A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad \text{+}\cdots$$

となる．従って周期に亡して最初の向いて積分すると，

$$\frac{W}{t}=\frac{1}{2}\rho_0 c^3A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\rho_0 A^2c\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

が音波の平均的強さになる．
音圧の Condensation を s_1 とすると
$$s_1=-\frac{\partial s_x}{\partial x}\Big|_{max}=\frac{2\pi A}{\lambda}$$

$$\therefore\ \frac{W}{t}=\frac{1}{2}\rho_0 s_1^2 c^3$$

§2.2. 弦の定常の振動

a) 平面波が進んで行く場合，その垂直な一つの固定平面が置かれてあるとすると，波はそこで反射される．今 x-方向に進む波と -x-方向に進む波とを考えると，音圧は一般に

$$s_x=f(ct-x)+g(ct+x)$$

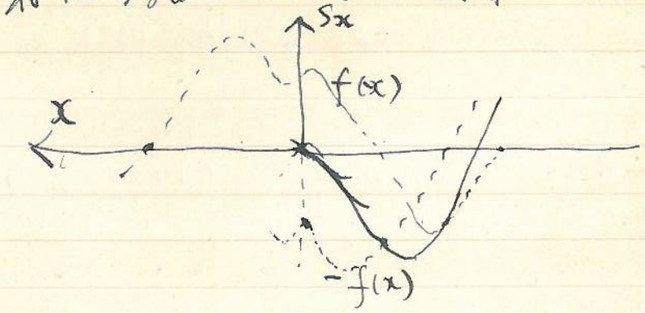
の形の表わせる．
$x=0$ を固定平面とすると，そこでは音圧は0の点であるから，もの如何に拘らず

$$f(ct)+g(ct)=0$$

が成立する筈．従って，

$$s_x=f(ct-x)-f(ct+x)$$

となる．
即ち反射波の波形は入射波と同一である．



©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

b)これらをして、弦の進む方向に垂直な一つの平面で力が一定であるとすると、そこでは、

$$\delta p = c^2 \rho_0 S = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = 0$$

の式である。これを $x=0$ の平面のまわりで

$$-f'(ct) + g'(ct) = 0$$

すなわち f のある変数と g のある変数の差は一定値をとり得ぬ。この式は、原点のまわりでは常に $f=g$ を意味し、弦の振動のかたちから

$$S_x = f(ct-x) + f(ct+x)$$

と書いてよい。

この場合にも右向きの波と左向きの波とが入射するとし、

a)前の場合には、右向きの波が入射すると逆方向であって、位相等が反転されてつながっていたが、b)の場合には、両方向で、位相等の条件、反転なしでつながっている。

(closed end)

今弦の両端を完全に固定した場合、一端が固定されているとすると、そこでは a) の境界条件が満足されている。又端が開いて(open end)いる場合、弦の端子が自由に振動できるから、b)の境界条件が満足される。即ちそこでは張力が0という条件が満足されるような振動をする。

境界条件は

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} = c \frac{\partial S_x}{\partial x}$$

となる。今その境界条件を満たすための弦の変位 S_x が下記の関数で表されるとし、$\zeta(x)$ の $(\omega t+\varepsilon)$ 倍に比例しているとすると、

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2} = -n^2 S_x \qquad n = \frac{2\pi}{T}$$

であるから、

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{n^2}{c^2}\zeta = 0$$

よって $\zeta(x) = A\cos(nx/c) + B\sin(nx/c)$

これは $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$ なる波長の定常波 (stationary wave) を表わす。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

A, B は始め一般で 各の両端の形状で境界条件 (boundary condition) によって決まる.

i) x=0 の点を l とし, 両端の平衡の x=0 および x=l となる. 両端が固定されている場合には $\xi(0)=\xi(l)=0$ であるから

$$A=0, \qquad \sin\frac{nl}{c}=0$$

よって $\frac{nl}{c}=m\pi$ $\quad m=1,2,\cdots$

一般の S_x の一般の形は

$$S_x=\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)$$

となる. 即ち可能な振動数は

$$\frac{c}{2l}, \frac{2}{2l}$$

即ち基音が

の整数倍になっている. 弦楽器では

$$\lambda=2l$$

になっている. 両端が節 (node) で中央が腹 (loop) になる.

二倍音以上の倍音は

節 (node) を持っている.

ii) 両端共開いている場合には x=0, x=l で

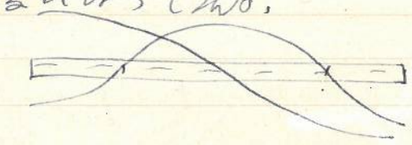
$$\frac{\partial S_x}{\partial x}=0.$$

即ち $B=0$, $\sin\frac{nl}{c}=0$

であるから, 基音の一般の形は

$$S_x=\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\left(\frac{m\pi ct}{l}+\varepsilon_m\right)$$

この場合には基音の波長は $\lambda=2l$ であるが, 両端が腹になっている.



iii) x=0 の端が閉じ, x=l の端が開いている とすると, $\xi(0)=0$, $\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_l=0$ であるから

$$A=0, \qquad \cos\frac{nl}{c}=0$$

$$\frac{nl}{c}=(2p+1)\frac{\pi}{2} \quad p\pi+\frac{\pi}{2}$$

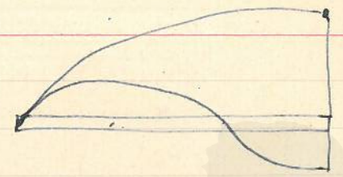
$$p=0,1,2,\cdots$$

$$S_x=\sum_{p=0}^{\infty} B_p \sin\frac{(2p+1)\pi x}{2l}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi ct}{2l}+\varepsilon_{2p+1}\right)$$

基音の振動数は $\frac{c}{4l}$ で, 波長は $4l$ である

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

これを閉管 (stopped tube) という。
これに対して (ii) の場合を開管 (open end tube) といい、(ii) の場合の方が (i) より低い。



1 octave

球面波 (spherical wave)

$$\frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} = c^2 \Delta s_r$$

という一般の波動方程式の解として、原点のまわりの球面波を考える。原点からの距離を r とする。

$$\frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 s_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial s_r}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 (r s_r)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r s_r)}{\partial r^2}$$

この式の一般解は

$$s_r = \frac{f(ct-r)+g(ct+r)}{r}$$

となる。この中、

$$\frac{f(ct-r)}{r}$$

の形は、原点から c の速さで広がっていく球面波を表す。同様に

$$\frac{g(ct+r)}{r}$$

の方は原点へ四方から集って来る球面波を表す。

角振動数 ω が $T = \frac{2\pi}{n}$ なる周期性で振動する音源があるとすると、

$$s_r \propto e^{int}$$

なる形の解が生ずるであろう。従って波動方程式は

$$\frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2} + \frac{n^2}{c^2}(rs) = 0$$

$$s_r = \frac{A e^{in(t-\frac{r}{c})} + B e^{in(t+\frac{r}{c})}}{r}$$

初めの波源が振動方向を定めるようなものとすると

$$s_r = \frac{A}{r}\cos n\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

r なる半径の球面を考えて dW は 面に垂直な外向きとする。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$\frac{\partial \xi_r}{\partial r}$　　$s = -\frac{\partial \xi_r}{\partial r}$

$\frac{dW}{dt} = 4\pi r^2 \rho_0 \frac{d\phi}{dt}\left(-\frac{\partial \xi_r}{\partial r}\right)\left(-\frac{\partial \xi_r}{\partial t}\right)$

~~r が大きければ~~ より

$$\frac{dW}{dt} = 4\pi(p_0 + \rho_0 c^2 s)\left(-\frac{\partial \xi_r}{\partial r}\right)\left(-\frac{\partial \xi_r}{\partial t}\right)$$

r が大きければ（これに比して）

$$\frac{dW}{dt} = 4\pi\rho_0 (n^2 c) A^2 \sin^2 n\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

一周期について平均すると，球全体について

平均で透過する勢力は

$$\overline{W} = 2\pi\rho_0 n^2 c^3 A^2$$

である。

$$n\xi = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$= 2\pi\rho_0 A^2 c \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

§32. 流体運動における粘性の影響.

上述のごとく流体の粘性の影響によって新たなかそく、これが C.G.S. 系で測って小さい場合 流体の各々の平均分子自由行程は小さいと考へた.

一般の粘性の各々の運動の場合には Euler の運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \mathrm{grad})v = K - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p$$

から出発しなければならぬ、仮し粘性は考慮する。

そこで圧力と流体との関係式として、断熱変化が成立するものとして.

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

を採用する. (但し、空気 $\gamma = 1.405$ for air)

$K = 0$ とし、非圧縮流体運動とすると、Bernoulli の定理

$$\frac{1}{2}v^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

が成立する.

(なぜなら $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho_0}$)

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

一方 連続の式は2方向に垂直な平面内では
ρは $\frac{\partial}{\partial x}$ に次元を持つから

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0$$

速度 potential を ϕ とすると、この式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0$$

or $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$ †

一方
Bernoulli の式の両辺を微分すると

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}$$

それで $a^2=\frac{dp}{d\rho}\left(=\gamma\frac{p}{\rho}\right)$

と置くと、これは その場所の密度、圧力
ゆかりの 気体の速さ、すなわち局所音速
(local velocity of sound)

おと † 式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

となる。しかるに

$$v^2=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2$$

であるから

$$\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v_y^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-2\frac{v_xv_y}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=0.$$

~~無限~~ 無限遠方での流れの一様で、速さ v_0、音速 a_0 とおくと Bernoulli の式より（ρ_0 の定義より $\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{p}{\rho}$ に注意）

$$v^2-V^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p}{\rho}\right)$$
$$=\frac{2}{\gamma-1}(a_0^2-a^2)$$
$$a^2=a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}(v^2-V^2)$$

故に流れの到る所で流速 v が a に比して小さく、$v^2/a^2 \ll 1$ ならば、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

となり、非圧縮性流体の場合に帰着する。従って音速に比して遅い流れに対して気体の圧縮性を考慮することによって生ずる補正は v^2/a^2 の程度である。

$$M = \frac{v}{a}$$

を Mach 数 (Mach number) と称する。特に

$$M_0 = \frac{U}{a_0}$$

を全体の流れに対する Mach 数に用いる。

今ある物体、例えば翼のまわりに空気の流れがあるとすると、流れを速くして M_0 を大きくして行くと、翼の表面のどこかで $M=1$ となる所が現われる。更に速くすると $M>1$、即ち超音速の流れが部分的に実現されることになる。

斯様な所では音速以下の場合と運動の様相が全然異なり、所謂衝撃波 (shock wave) を生ずることになる。

さて、速さが場所により余り変らないとし、$v \cong U > a_0$ とすると、近似的には

$$n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

(全然一般ではない)

となる。但し $n^2 = \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 - 1$.

この式は

$$\Phi(x, y) = f(x - ny) + g(x + ny)$$

なる解を持つ。これは流れの方向に

$\alpha = \mathrm{arccot}\, n$ の

角をなす定常波の存在を意味する。

これをもっと別の言葉でいうと次の如くなる。

$$\cot^2 \alpha = n^2 = \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 - 1.$$

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) - 1$$

$$\sin \alpha = \frac{a_0}{U}$$

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

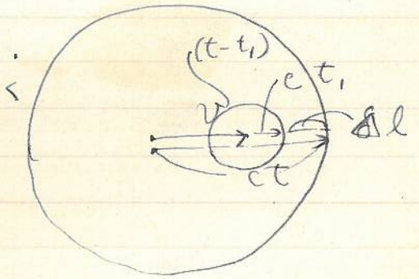
通るかたまくらいに絞って流管(tube of flow)の切れが小さくなるが、有限の v>c のばあいは通るなと云う切れの面積が有限となっている。物体の速さが音速より大きいか小さいかに絞って速さの様子が大きく異なる。

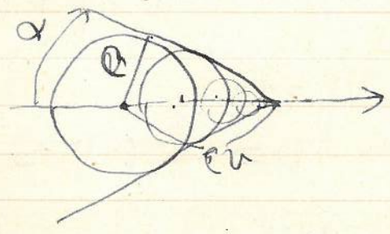
v<c のばあい。流体中を物体が動く場合、その速さが音速より小さい限り、物体から出る音波は物体より前へも広がって行く。従って流れ様子も変わって行く様である。

有限 v>c の場合には、物体より出た音波が前方に行かず、その様なるべし、その envelope が 2α を頂角とする円錐となる。

α は $\sin\alpha = \frac{c}{v}$.

α を Mach の角という。





©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

厳密性まで考慮すると、流体の密度や粘性を
除くことのできる変数しかない。かかる場合に
次元解析の方法が有効である
即ち物体の抵抗Dは流体その他及び
流体の密度 ρ、物体断面積 S、音
速 c その函数と考えられる、よって一般に
$$D = \frac{k}{2}\rho^p S^q v^r c^s$$
と置いて次元でいえば
$$D = \frac{ML}{T^2} \qquad \rho = \frac{M}{L^3} \qquad S = L^2$$
$$v = \frac{L}{T} \qquad c = \frac{L}{T}$$
であるから、両辺の次元を等しいと置くと
$$1 = p$$
$$1 = -3p + 2q + r + s$$
$$-2 = -r - s \qquad r = 2 - s$$
$$\therefore q = 1.$$
$$D = \frac{k}{2}\rho v^2 S \cdot \left(\frac{c}{v}\right)^s$$
ゆえに
$$D = \frac{1}{2}\rho v^2 S f\left(\frac{M}{M}\right)$$
なる形になる。
$f\left(\frac{M}{M}\right)$ なる函数は、物体の形状に関して、ある
ある程度まで決まるが物体の形状によって異なる。

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

＊なお一般に、多粒子系の場合には各粒子と場とが全く独立し、各粒子の方が違く待つて行く、これ等は他粒子の Pauli の Symmetrie 即ち Statistik の Postulat である。」 178

力学的場　三次元　一粒子　運動一回

1) 質点の力学的運動　四月
2) 剛体の　力学　五月　2a) Potential 論
3) 質点系の力学　六月
4) 剛体の力学　九月，十月前半
5) 解析的の力学.
5) ~~流体の~~運動　十月以下　十一月初
6) 弾性体の静的および動的問題　十一月.
7) 完全流体の力学　十二月
8) 粘性流体の力学　一月，二月.

8) 完全流体の力学

力学的場 ＜又は 一時間　一年間
　　二時間　半年間
~~1) 粘性流体の力学~~　2a) Potential 論)
3a) 解析的等
(3a) 粘性流体の力学
8a) 音響学　弾性振動
(8b) 準弾性的)
V_n) 粘弾性的半角筒形振動

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

力学 第二

第一部　弾性体の運動力学
　第一章　普通体の力学的取扱一般について
　第二章　弾性体の一般的性質
　第三章　弾性体の重心
第二部　理想流体の力学
　第四章　弾性波
　第五章　流体静力学
　第六章　流体力学の基礎方程式
　第七章　非圧縮流体運動
　第八章　渦運動
　第九章　流体力学の近似
　　弾性　流体の力学

力学特論
○ 第三部
　第十章
　第九章
八等角写像論

第四部　音響学
○ 第十二章　弾性波動
○ 第十三章　音波の伝播

INDEX

PAGE		PAGE	