—NOTE BOOK—

相對律論

相対性量子力学

昭和十五年度
四月より十月

(SPARTA NOTE)

CHAPTER　CONTENTS　PAGE

CHAPTER　CONTENTS　PAGE

相對律參考書

Lorentz - Einstein - Minkowski, Das Relativitäts-prinzip (1923)

A. Einstein, Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie (1922)

M. von Laue, Das Relativitätsprinzip I, II,

H. Weyl, Raum, Zeit, Materie,

W. Pauli, Relativitätstheorie, 1921.

A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity

M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen 1920

Silberstein

A. Kopff

E. Freundlich

[illegible]一訳　相對性理論 (岩波物理学講座)

石原純　相對性原理

Eisenhart, Riemannian Geometry

第一節　特殊相對~~律~~性律

Special Relativity　Spezielle Relativitätstheorie
theory of

第一章　特殊相對律の~~基~~根本概念

§1. ~~Michelson - Morley の實驗~~

運動せる媒質の電氣力学 (Electrodynamics of Moving Medium)

Maxwell の電磁場論に於ては，物質は空間に~~連續的に分布されて居り~~隙間もなく満ち，電場 (electric field) $\mathbf{E}$，電氣變位 ~~$\mathbf{D}$，磁~~ (electric displacement) $\mathbf{D}$，磁場 ~~$\mathbf{H}$~~，(magnetic field) $\mathbf{H}$，磁氣感應 (magnetic induction) $\mathbf{B}$ 等が ~~其~~ この内に ~~連續的に媒質中に~~ 物質内部に於ける ~~それと同時に~~ 分布されて居り，~~電荷及電流は~~ それと同時に電荷や電流も又この中で連續的に分布されてゐると考へ，これ等の密度を ρ，$\mathbf{I}$ で表はすと，その間には基礎方程式 (fundamental equations)

$$
\left.
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \operatorname{curl}\mathbf{H} &= 4\pi\mathbf{I} \\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \\
\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}\mathbf{E} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1.1)
$$

が成立すると假定する.

~~而~~とこの様に考へると，物体が運動して居る場合には，これ~~等~~に固定した電場その他も一緒になつて動くことになる．この様な考への下にHertzがMaxwellの場方程式を~~運動去~~物体が運動してゐる場合に拡張した．
併しその結果は，Wilson，Eichenwald等の実験と矛盾する．~~…~~
これに対してLorentzはこれとは根本的に異なる立場から~~所謂~~出発して，所謂古典電子論(classical electron theory)を建設し，これを運動物体~~電気~~に拡張したのである．
彼の根本仮定は，物質は荷電粒子(charged particle)即ち電子~~…~~乃至核子から出来て居り，これが~~電荷及び~~電荷(charge)及び電流(electric current)~~… electric …~~の荷ひ手であり，これが源となつて，真空即ちエーテル(ether)中に電磁場を引起す，
このエーテルなるものは~~…~~空間で絶対静止して居り，電子その他から構成される物体の運動は，この静止エーテルを基準として測られると考へた．

~~而~~そして，$\mathbb{E}$，$\mathbb{B}$等はエーテルに固定したものであり，

$$\mathbb{D} = \mathbb{E} + 4\pi\mathbb{P} \quad , \quad \mathbb{B} = \mathbb{H} + 4\pi\mathbb{M}$$

で定義せられる電気偏極(electric polarisation) $\mathbb{P}$ と磁気偏極(magnetic polarisation) $\mathbb{M}$ 丈が~~物質と共に動く~~帯電粒子の電荷及び速度の分布によつて決定されることになる．
すると，媒質が一様なる速度 u にて運動してゐる場合の場方程式は

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\,\mathbb{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\rho u + \mathbb{I} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial t} + \mathrm{curl}\,[\mathbb{P}\,u]\right) \\ \mathrm{div}\,\mathbb{D} &= 4\pi\rho \\ \mathrm{curl}\,\mathbb{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbb{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1,2)$$

であらはれる．但し物体が静止してゐる場合磁気偏極 $\mathbb{M} = 0$ であつたと仮定する．
この方程式から出発すると，前に述べたWilson，Eichenwaldの実験のみならず，~~光の~~運動物体中に於ける光の伝播に関する種々の実験(例へば Fizeau)をもよく説明出来る．

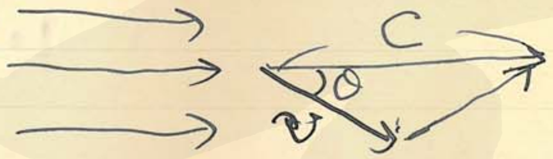
所で Lorentz に従って電磁場の主要を荷る媒体即ちエーテルは静止して居ると云へると、吾々は何等かの方法によって種々の物体の静止エーテルに対する運動を知ることが出来るであらう。~~これは~~いはゆる絶対運動 (absolute motion) ~~である~~ を知ることが出来るであらう。

例へば光は静止エーテルの中を常に c なる一定の速さで進むとすると、~~これに対~~エーテルに対して v なる速さで動いて居る人から見れば光は

$$\mathfrak{c} - \mathfrak{v}$$

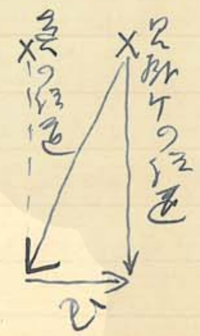
なる速度で進んで来る様に見えるであらう。

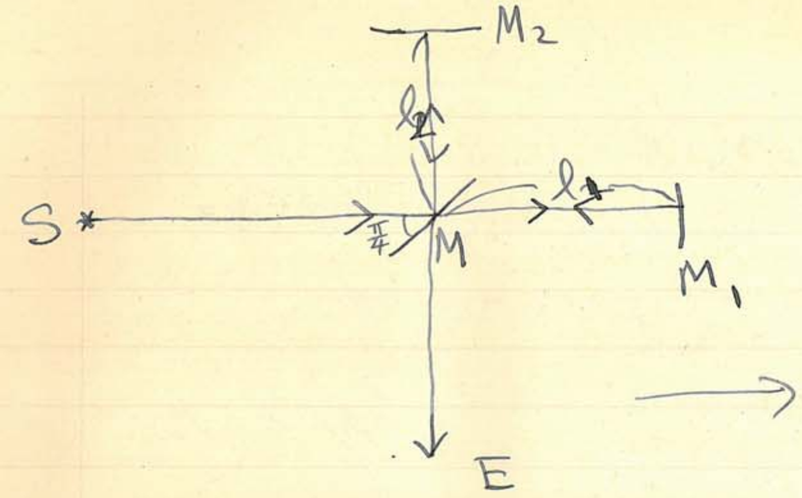
但し、$\mathfrak{c}$ は~~光の進む方向を指す~~ c なる絶対値を有し、光の進む方向に向ふ vector である。



所謂光の錯行 (aberration) の現象はこれによって説明し得る。

~~所が~~それで 1881 Michelson は地球の ether に対する絶対運動を見出す目的の下に次の如き有名な実験を行った。





S なる光源を出た光は M で一部反射されて M_2 に至り再び反射されて M を透過して E に至る。他の一部は M を透過して M_1 で反射されて又 M で反射されて E に至る。

今 $MM_1 = l_1$, $MM_2 = l_2$ とし、装置全体がエーテルに対して静止して居るとすると、両方の光の~~経路~~の差は (path difference)

$$2l_1 - 2l_2$$

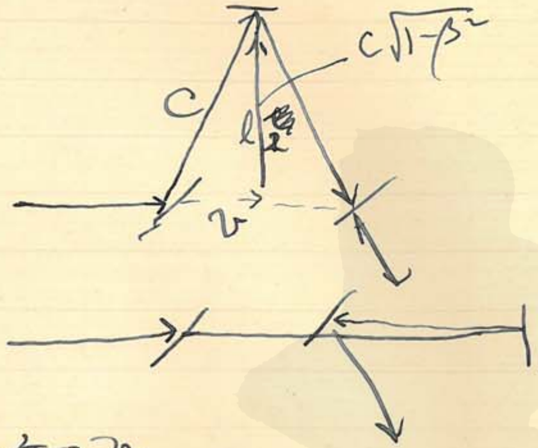
であり、従って光が E に達する時間の差は

$$t_0 = 2\frac{l_1 - l_2}{c}$$

である。

所が若しも装置全体がエーテルに対して動いて居るとし、例へば MM_1 の方向に v なる速さで動いているとすると、エーテルに対する光の絶対経路 (absolute path)

は図の如くなる。従って
M_1の方では



$$\frac{l_1}{c-v}+\frac{l_1}{c+v}$$
$$=\frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}$$

なる時間を要し、M_2の方では

$$\frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

但し $\beta=\frac{v}{c}$,

なる時間を要するなる。その差は

$$t_1=\frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}-\frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

となる

そこで装置全体を直角丈廻転すると、
l_1とl_2が互に入れ替り、

$$t_2=\frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{2l_2}{c(1-\beta^2)}$$

となる。
従って

$$\Delta t=t_1-t_2=\frac{2(l_1+l_2)}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right\}$$

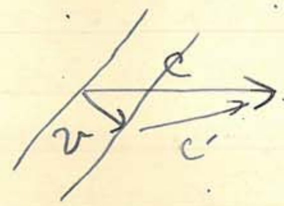
となる。$v \ll c$ならば近似的に $\Delta t \sim \frac{\cancel{2}Lv^2}{c}$, $L=l_1+l_2$

そこで両方の光線の合質によって生じる干渉の縞を見て居ると、~~直角丈~~ vが0であれば直角丈廻転した際、干渉縞は変化しない筈であるがvがcに比して小さくても$L=l_1+l_2$が充分大きければ、変化は観測し得る。
所が Michelson はこの様な原理で実験を行って予期せる変化を認めなかった。
1887年 Michelson と Morley とは更に精細な実験を行い、地球のエーテルに対する運動の速さは地球の軌道運動の速さ(25 km/sec)の$\frac{1}{4}$ (7.5 km/sec)以下なることを知った。
~~(其)~~ その後の~~実験結果~~色々な実験の結果も大体同様である。
但し、Miller は この種の実験から所謂 ether
Morleyの実験結果 drift の存在を証明しようとして居るが、これには種々の~~精細な~~実験誤差を考慮せねばならず、要するに第一の近似としては地球の~~軌道速度~~絶対速度は軌道速度に比して小さいと見なしてよい
(Miller, Ether-Drift Experiment and

The Determination of the Absolute Motion of the Earth (Rev. Mod. Phys. 5 (1933), 203) 参照)

この様な予期しなかった実験結果を説明するために種々の仮説が提出された。例へば、
1) 地球の様な大きな物体が動く時には エーテルも一緒に動く、~~従って 絶対運動~~ と考へてゐる。これは既に絶対静止エーテルの考へを捨ててしまったものであって、結局エーテル自身が空間でどんな運動をするかが問題になる。~~然~~ この様な方向に進めば、我々は迷路に入って行くようである。
これに対して
2) Fitz Gerald 並びに Lorentz は
物体は凡て運動の方向に
vなる速さで動いてる $\sqrt{1-\beta^2}$
なる割合で長さが縮まって居る。
という仮説を提出した。
かく考へれば 上記の l_1 の代りに
$l_1\sqrt{1-\beta^2}$
が入って来るから
$\Delta t = 0$

となる。 短縮
この様な所謂 Fitz Gerald-Lorentz Contraction が起って居るか否かを験すために、
Rayleigh (1902) や Brace (1904) は
動いてゐる物体を
斜めに光が通る時
には 複屈折が起り
$\left(\frac{v}{c}\right)^2$ ~~の程~~ に比例する
光行差がある筈
と考へて、実験して見たが、結果は理論値の
1/100 以下であった。



~~更に~~ この他にも種々の実験が行はれたがいづれも単に Lorentz 短縮を考へるだけでは説明出来ない。

この様にして、エーテルを静止してゐると仮定し、これに対する物体の絶対運動を求める実験は凡て失敗に終った。~~であるから~~ これ等の実験の結果を静止エーテルの仮説に立って説明しようとすると、色々な[illegible]仮説が必要になって来るがいづれも満足なものではない。

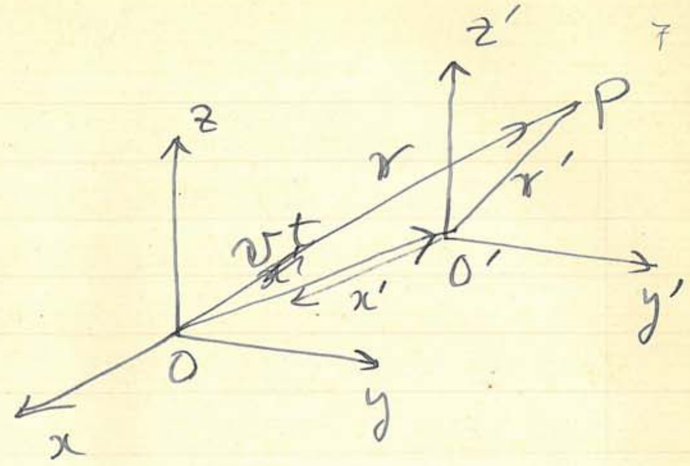
Fundamental Postulates of Special Theory of Relativity

§2. 特殊相対性の根本仮定.

1から話がかへて
「静止エーテルの仮定を捨て，絶対運動なるものは本来観測し得ないものである」といふ仮定から出発したならばどうであるか.
即ち二つの~~物~~体系があつて，それ等が互に或速さで動いてゐる場合，そのいづれが静止し，いづれが動いて居るかは，原理的に決定不可能である という立場から出発する.
古典力学ではこのことは，次の様な意味に於て正しかつたのである.
一つの~~体系~~座標系に関する，多くの質点の t なる時刻に於ける位~~置~~座標を夫々 $r_1, r_2, \cdots$ とし，これに対して一様な速さ (uniform velocity) v で動いてゐる他の~~体系~~座標系から見た同時刻に於ける位置を夫々 $r_1', r_2', \cdots$ とする.
$t=0$ に於て両座標系の原点が一致して居たとすると，

$$r_i' = r_i - vt$$

なる関係がある.
従て Newton の運動方程式は第一の座標系に関しては，



Fundamental Ideas of General Relativity

† Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (Ann. d. Phys. 49 (1916), S. 769)

第一章　重力場の理論

第二章　相対性力学

第三章　相対性的宇宙論

相等原理
Principle of Equivalence

第二節　一般相対性

General Theory of Relativity

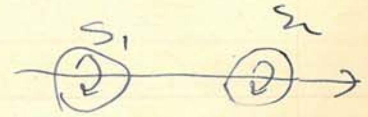
Allgemeine Relativitätstheorie

第一章 ~~重力場の理論~~ 一般相対性の基礎概念 Theory of Gravitation

§1. 一般相対性原理 Principle of General Relativity (Fundamental Ideas)

特殊相対性理論に於ては、互に一様な速度で動いている座標系に対して物理法則は同じ形式で表はされるといふ postulate の上に築かれてゐる。所謂 inertia system 慣性系、は互に同等である。但しそれよりもっと一般的な運動座標系をとっても同じことが出来る。そして何故慣性系に限らるべきかについては特殊相対性は何も教へない。
Einstein はこの状態に不満足を感じ 1916年に一般相対性理論の基礎を築いた†

今流体が他から何等の作用を受けず、絶対自身の空間に働く力の下に動くものとする。二つの流体 S_1, S_2 が遠く離れて、~~…~~ し、夫れ等の中心点を結ぶ線のまはりに一定の角速度で回転してゐるとする。（一方から見て他方 S_1　S_2）



この場合 S_1, S_2 の表面の形を一方に静止した観測者を標準として測って見たら S_1 は球面で、S_2 は回転楕円体、

であつたとしよう。

そこで吾々は如何なる根拠によつてS_1, S_2が異なるかを問題にする。若しもその原因が観測し得る経験的事実（beobachtbare Erfahrungstatsache）であれば、始めて因果律が経験世界の法則として意味をもつ。

しかるにNewton力学はこの問題に次のごとく答える。力学の法則はR_1なる空間—それに対してS_1は静止している—に対しては成立するが、R_2なる空間—それに対してS_2は静止している—に対しては成立しない。しかし、R_1なるGalilei系、或は慣性系、は単なる仮想の原因（fingierte Ursache）であつて観測し得る事物ではない。

上の問に対する満足な答は次の如くであろう。S_1及びS_2よりなる系はそれだけとしては何等の考へられる原因をもたないから、両者の差異を帰すべき原因は系の外にある。即ちS_1及びS_2の運動は遠方にある諸物体に依存している。これがR_1空間というような仮想のものの代りに真の原因となると考へられる。

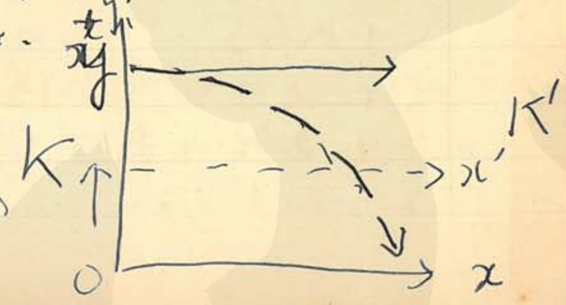
かくして互いに任意の運動をするR_1, R_2なる空間のいづれを特に優先させる理由もない。
は除外して

物理学の法則は任意の運動座標系に対して成立すべきものでなければならぬ。これ即ち一般相対性の原理である。

もつと簡単な例を上げると、KをGalilei慣性系とする。いいかへれば他と充分離れた質点はこの系に関して直線等速運動をする。そこでK'を第二の座標系とし、それがKに対して一様に加速された運動をしているとし、K'に関しては他と離れた物体は加速度運動をするが、その加速度の大いさ及び方向は物体の成分とか物理的状態には無関係である。

しからば、K'に対して静止している観測者は自分が実際加速された座標系にいると結論するであろうか？ 否、寧ろK'は加速されていないで、重力場がそこにあると考へるであろう。この考へが許されるのは実際地上の重力場では凡ての物体が同一の加速度をもつて動くという経験的事実によつてである。*

かくして吾々は K も K' も同一の権利で静止してゐると主張し得る。唯後の場合には ~~この場合に重力とか、遠心力~~ 重力の場が存在してゐると考へねばならぬ。
（又前の議論の回転の問題に対しても、S も S' も同一の権利をもって静止してゐると主張し得る。唯 S' に於いては遠心力が働いてゐると考へねばならぬ。~~K と K' は~~ S と S' はこの意味に於て相等である）
一様ならざる運動と重力とが同等なること ~~この事実に対して~~ ~~これを~~ Einstein は相等原理 (Äquivalenzprinzip, Principle of Equivalence) と名づけた！
この様にして重力場は ~~一般の~~ 座標変換によって幾らでも創り出されたものであって ~~それと同時に~~ は、遠心力と同様である。
又 特殊相対性理論に於ける根本の要請であった「真空中に於ける光速度の一定なること」も一般の座標変換を考慮すれば変更せねばならぬ。即ち K 座標系で光線が直進するならば、K' 座標系では曲った路を進むことになる†。



†この事は既に Einstein が 1911 (Ann. d. Phys. 35, 898) に於て発表してゐる。

~~§2、一般相対性原理~~ （

この principle of equivalence は一般相対性理論を建設して行く上に重要な役割を演じて来たのであるが、既に理論体系が完成して了っては、その重要性は非常に減少して来た。そして後に述べる重力場の理論によれば、
一様の重力場に於かれた系 K' に相等で、しかも力の働かない系 K は存在すると限らない、斯様な所謂 irreducible field があるといふことは後に述べる時空が彎曲してゐるといふことと同等である。

---

* これは所謂慣性抵抗の原因である慣性質量 (inertial mass) と重力質量 (gravitational mass) träge Masse schwere Masse とが常に比例することを意味する。この事は Newton 力学に於っては偶然であった

†† 重力場内で物体を動かせば、その位置勢力が増す。これを周囲勢力 mc^2 の変化となって現はれると考へられる。所で質量 m が重力場に関はらないとすれば、光速度 c が変らねばならぬ。従って一般の重力場では光の進路の屈曲が予想される。これは Einstein が 1911年既に予言した所である。

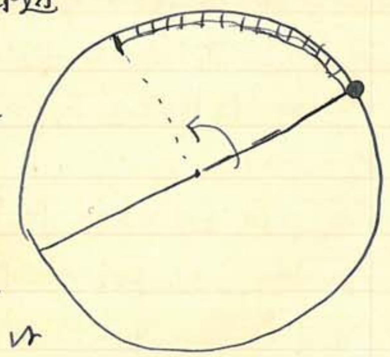
§2. 一般相対性原理 (~~General~~ Principle of General Relativity)

古典力学乃至特殊相対性理論に於ては空間及び時間の坐標は直接の物理的意味を持って居た、一つの點事象 (Punktereignis) が x-坐標の値 x を有するとは、Euclid 幾何学の法則に従って剛体の物指によって測った ~~點事象の x 軸への投射影を測る~~ ~~單位~~ 單位の物指 (Einheitsmaßstab, unit scale) を坐標の原點から x の正軸に沿って x 回移すと、點事象の x 軸上への投射影が得られることを意味する。

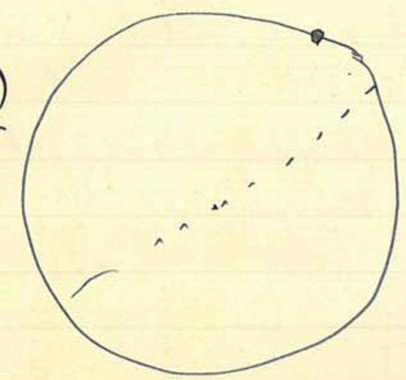
又點が t-坐標の値 t を有するとは、結ばれて居る坐標系に對して靜止して居り、點事象と空間的に (大体) 一致する單位時計 (Einheitsuhr, unit clock?) が之等が起る迄に t 回の週期を経過したことを意味する。

併しこの様な考へ方は一般には成立しない。
何故かといふと、例へば K(x, y, z, t) なる慣性系と、これに對して一様な速さで回転して居る坐標系 K'(x' y' z' t') があったとする。但し両系の原點と z 軸とは常に重なって居るとする。

そこで xy-平面上に坐標原點を中心とする圓を描いたとすると、對稱から考へてこれは x'y'平面上の圓でもあるであらう。今 K ~~系~~ に對して靜止 ~~そこで~~ して居る物指で ~~直徑と~~ 圓の周囲と直徑とを測ったとすると、その比は勿論 π である。所が K' と共に動く物指で測るとこの比は π より大きくなるであらう。
何故かといへばこの測定過程を K に固定された觀測者から見ると、周囲の方向に置かれた物指は Lorentz 收縮をするのに對して直徑の方向に置かれた物指は收縮しない。



~~即ち~~ かくして K' 系に於ては最早 Euclid 幾何は成立しなくなっている。
(但し、圓周自身は K に對して靜止して居ると考へる。)
實際は Lorentz 收縮以外に週期に原因する半徑方向の收縮もある。



次にK'系と共に動く時計によっては時刻を場所に無関係に決定することは出来ない。
何故かといへば ~~K'系の~~ 円の中心と円周上とに同じ様に働く時計を置き K'系と一緒に動かしたとする。これをK系から見ると、特殊相対性理論によって円周上の時計は遅く動く。
この様にして、~~座標の意味を物指~~, 時間座標の意味を標準の時計(Normaluhr)で測ることは出来なくなったから、(運動座標系で~~も~~ Euclid幾何が成立し、時計は場所に無関係に同じ速さで動くと仮定すれば ~~これは~~ 矛盾を惹起する)、時間空間の連続体(zeiträumliches Kontinuum)の中に決った仕方で座標を置くことは出来なくなった。
そこで吾々は寧ろ、凡ての座標系は同等の権利を有し、(勿論一意性と連続性の制限内において)「一般の自然法則は凡ての座標系に対して成立する様な方程式として表はされる。換言すれば任意の変換に対して共変的(covariant, kovariant)である」ことを要求する。
これが所謂一般相対性の要請(Postulate

of general relativity, allgemeines Relativitätspostulat)である
四次元的な凡ての変換といふ中には、勿論三次元座標系の任意の相対運動に対応する様な変換も含まれている。~~座標によって~~ 所で方程式が変換に対して共変的で ~~自然法則を表はす~~ あることは、~~時間空間~~ 絶対時間、絶対空間といふ様な~~概念~~を無意味なものにする、いひかへれば時間及び空間の対象性(Gegenständlichkeit)を残りなく ~~消去って~~ 抹殺して了ったことを意味する。これは誠に当然のことである。何故かといへば吾々の時間及び空間に関する確認(Konstatierung)は、常に時間空間的一致(zeiträumliche Koinzidenz)に帰着せしめることが出来る。何となれば、総ての出来事が質点の運動より成るとすれば、結局これ等二つ又はそれ以上の質点の遭遇(Begegnung)以外の何物をも観測することは出来ないであらう。吾々の測定の結果も「物指を構成する一質点と他の質点との遭遇」乃至は「時計の針、文字盤と同時に同所に起った質点の一致」の確認

以外の何物でもない。
従って座標系の導入はこれ等の一致の全体のより完全な記述を得ること以外の何物をも意味しない。
是れは世界（Welt, world）に四つの独立変数 (x_1, x_2, x_3, x_4) を次の如く対応せしめる。各世界点には数の一組 (x_1, x_2, x_3, x_4) が対応する。二つの一致する世界点は数 (x_1, x_2, x_3, x_4) の同じ組の一組に対応する。即ち一致は座標の一致（Übereinstimmung）によって特徴づけられる。
変数 $x_1, \ldots x_4$ の代りに、それ等の任意の函数 $x_1' x_2' x_3' x_4'$ を新しい座標系として導入し、両方の組の値が一対一に対応して居れば、座標の一致は新しい座標系においても、同様に二つの事象の一致を示す。しかるにかかる一致以外に物理的経験（physikalische Erfahrung）はないのであるから、一つの座標を他から選び出す根拠はない訳で、従って之れは一般共変（allgemeine Kovarianz）の要求を当然なものと考へてよいのである。

し又光速度も一定とは限らないことを指示して居る

従って、是れは重力の働いて居る場合には一般に Euclid 幾何が成立しないと考へねばならぬ。若し重力が働かないならば特殊相対性原理を使って四次元世界に座標軸を (x, y, z) 及び虚な時間座標を取ることによって、空間二点 (x_1, y_1, z_1, t_1) 及び (x_2, y_2, z_2, t_2) の距離 S を

$$S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

で定義することが出来た。そして座標軸の向き（orientation）を代へても、いひかへれば座標系の Lorentz 変換を施しても S^2 は不変であった。
併し、一般相対性理論においてはこれは一般に有限の領域には成立しない。唯充分小の領域を取った場合に (x, y, z, t) と $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ の間の不変な距離、所謂四次元の線素 ds に対し

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

が成立する様に座標軸を選び得ると考へる。
これに対して有限の領域の点を (x_1, x_2, x_3, x_4) なる数の組によって定義し

そこまで近似された　局所座標 (local coordinate system, lokales System)

をとると、(x, y, z, t) ~~は各々~~ (x_1, x_2, x_3, x_4) と
~~の或る函数になって居る筈であるから~~

$$dx = \sum a_{1\nu} dx_\nu$$
$$dy = \sum a_{2\nu} dx_\nu$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$

(dx, dx_2, dx_3, dx_4) の間には

の間に或る関係があり 従って 線素は

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

なる形で表はされる。この場合

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

即ち $g_{\mu\nu}$ が対称であるやうに撰んで置くことが出来るが、それ等は一般に (x_1, x_2, x_3, x_4) の函数である。

特殊相対律の成立する場合は即ち、前段の範囲に ~~$x_1=x$~~ 於て

$x_1 = x$, $x_2 = y$, ~~$z=x_3$~~ $x_3 = z$
$x_4 = ct$

と取り得る場合であって、従って $g_{\mu\nu}$ は

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

と取り得る場合に当って居る。

この場合には物体は投げれば直線運動をし、そこには重力場はない。そこで (x, y, z, t) の代りに他の一般の座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) を選ぶると、最早 $g_{\mu\nu}$ は $(\dagger)$ の如き形ではなく、~~函数~~ 場所及び時間の函数になる。そして物体の運動は新しい座標軸に関しては屈曲し、一様でないことになる。これは重力場の結果と解せられる。即ち $g_{\mu\nu}$ なる函数は重力場を表はすものと解釈される。従って $(\dagger)$ の成立しない場合にも $g_{\mu\nu}$ は重力場と関係せしめることが出来る。

かくして一般相対律では重力は他の力と違って特殊の地位を占めることになり、四次元空間の計量 (metric, Metrik) 的性質 (metric properties, metrische Eigenschaften) ~~が~~ 決定する~~もの~~ことになる。

距離, 即ち

第二章 テンソル算法
Chapter II Tensor Calculus

§3. ~~スカラー (scalar~~ 四次元テンソル (four dimensional tensor, vierdimensionaler Tensor) の定義

物理的法則を表はす方程式は四次元坐標 $(x_1 \cdots x_4)$ の任意の変換に対して共変的であること及び四次元的な距離が不変であるといふ二つの根本要求を満すためには、物理的諸量は (x_1, x_2, x_3, x_4) のある函数の一組、所謂四次元のテンソルとして表はされるべきであることが要求される。テンソルの成分は ~~テンソルの最も簡単な~~ 一般の坐標変換によつて一次変換を受ける。

その中で一番簡単なのは勿論スカラー (scalar, Skalar) 即ち不変量 (Invariant) であつて、これは坐標変換によつて全然変化を受けない。

次に四次元空間の線要素 (line element, das Linienelement) は四つの成分 dx_ν で定義され、x_ν から x'_ν への坐標変換に対しては

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

一次　dx_νと同

なる変換を受ける。~~其の~~形に変換される四成分を有する量を ~~con~~ 反変ベクトル (contravariant Vector, Kontravarianten Vektor) と云へば A^νを反変ベクトルとすると

$$A^{\sigma\prime} = \cancel{\sum}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu$$

次に φを不変量とした場合 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$ なる四つの成分を有する量は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}$$

なる変換を受ける。これと同形に一般に

$$B'_\sigma = B_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}$$

なる変換を受ける B_νを共変ベクトル (covariant vector, kovarianten Vektor) といふ。反変ベクトルの添字は右肩、共変ベクトルは右下に書く。すると

$$A^{\sigma\prime}B'_\sigma = A^\nu B_\nu$$

なる関係が常に成立する。これは不変量であるから $A^\nu B_\nu$をA^νとB_νのScalar積といふ。

($\because$; $A^{\sigma\prime}B'_\sigma = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^\nu \cdot B_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}$
$= A^\nu B_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu}$)

次に二つの ~~共~~ 反変ベクトル A^μ, B^ν の ~~各~~ 成分の積から作つた16成分を有する

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

なる量は坐標変換に際して

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu}$$

なる変換をする。この種の量を ~~これを~~ 二階の反変テンソル (contravariant tensor of second rank, kontravarianten Tensor zweiten Ranges)

又 二階の共変テンソル (covariant tensor of second rank) は

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

の如く、~~変換されるものであって~~

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}$$

なる法則に従つて変換される量である。

更に

$$A_\mu{}^\nu = A_\mu B^\nu$$

は

$$A_\sigma{}^{\tau\prime} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_{\cancel{\mu}\nu}}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}A_\mu{}^\nu$$

なる変換をする。この種の量を混合テンソル (mixed tensor, gemischten Tensor) といふ。

同様にして一般の高階級(higher rank)のテンソルを定義し得る。

二階のテンソルの中で

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$$

或は $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$

の條件を満足するものを対称テンソル (symmetric tensor, symmetrischer Tensor) といふ。この條件は勿論坐標系に無関係である。

$$\because \quad A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma\prime}$$

又 $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$

或は $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$

なる條件を満足するものを反対称テンソル (antisymmetric tensor, antisymmetrischer Tensor) といふ†。この場合には6個の成分が独立に変化し得るから六元ベクトル (six vector, Sechservektor) といふ。

第三階の反対称テンソル $A^{\mu\nu\sigma}$ に於いては、例へば ~~A~~ $A^{123}, A^{\cancel{234}\,124}, A^{134}, A^{234}$ の四つ丈が独立に変り得る。†

† この條件も坐標系に無関係である。

($A_1^* = A^{234}$, $A_2^* = A^{134}$, $A_3^* = A^{124}$, $A_4^* = A^{123}$ とおくと、

$$A_\delta^{*\prime} = A^{\alpha\beta\gamma\prime} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\mu}A^{\kappa\lambda\mu}$$

$$\cancel{A' = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\nu}A^{\kappa\lambda\mu}B^\nu}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} \quad (\cancel{A^{123}}B^4 + \cdots$$

$$A^{\alpha\beta\gamma\prime} = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\nu}} A^{\kappa\lambda\mu}$$

$$A_\delta^{*\prime} = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\nu}} A_\nu$$

$$A'_\delta B^{\delta\prime} = \frac{\partial D}{\partial \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\nu}} A_\nu \cdot \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\mu} B^\mu = D A_\nu B^\nu$$

$x_1 x_2 x_3$ ($= A_4$), $x_1 x_2 x_4$ ($= A_3$), $x_1 x_3 x_4$ ($= A_2$), $x_2 x_3 x_4$ ($= A_1$)

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta\prime} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\nu}A^{\kappa\lambda\mu\nu}$$

$$A' = A^{1234\prime} = DA^{1234} = D \cdot A$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

A : ~~psedo~~ pseudo ~~vector~~ scalar (Pseudovektor skalar)

$A_\kappa = A^{\lambda\mu\nu}$ $(\kappa \neq \lambda, \mu, \nu)$: pseudo-vector (Pseudovektor)

$\frac{W}{c} + \gamma\, \alpha \mathfrak{p} + \beta mc$

covariant $\beta\frac{W}{c} + \beta\alpha\mathfrak{p} + mc$

four vector
$$\begin{cases} \gamma_1 = \beta\alpha_1 = \rho_3\rho_1\sigma_1 = i\rho_2\sigma_1 \\ \gamma_2 = \beta\alpha_2 = i\rho_2\sigma_2 \\ \gamma_3 = \beta\alpha_3 = i\rho_2\sigma_3 \\ \gamma_4 = \beta = \rho_3 \end{cases}$$

(−) $\psi^\dagger\gamma_1\psi = \tilde{\psi}\alpha_1\psi$ (−)

(+) $\psi^\dagger \gamma_4 \psi = \tilde{\psi}\psi$ (+)

six vector
$$\begin{cases} i\gamma_2\gamma_3 = -i\sigma_1 & +i(\tilde{\psi}\rho_3\sigma_1\psi) \\ i\gamma_3\gamma_1 = -i\sigma_2 & +i(\tilde{\psi}\rho_3\sigma_2\psi) \\ i\gamma_1\gamma_2 = -i\sigma_3 & +i(\tilde{\psi}\rho_3\sigma_3\psi) \\ i\gamma_1\gamma_4 = -i\rho_1\sigma_1 & +i(\tilde{\psi}\rho_2\sigma_1\psi) \\ i\gamma_2\gamma_4 = -i\rho_1\sigma_2 & +i(\tilde{\psi}\rho_2\sigma_2\psi) \\ i\gamma_3\gamma_4 = -i\rho_1\sigma_3 & +i(\tilde{\psi}\rho_2\sigma_3\psi) \end{cases}$$

(+)

(−)

pseudo-vector
$$\begin{cases} i\gamma_2\gamma_3\cdot\gamma_4 = \cancel{i}\rho_3\sigma_1 \\ i\gamma_3\gamma_1\gamma_4 = + \cancel{i\rho_1\sigma_3 \cdot i\rho_2\sigma_1} = \rho_3\sigma_2 \\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_4 = \rho_1\sigma_1 \cdot i\rho_2\sigma_2 = \rho_3\sigma_3 \end{cases}$$ (+)

$i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i\sigma_3 \cdot i\rho_2\sigma_3 = i\rho_2$ (−)

$+i(\tilde{\psi}\sigma_1\psi)$
$+(\tilde{\psi}\sigma_2\psi)$
$+(\tilde{\psi}\sigma_3\psi)$
$+(\tilde{\psi}\rho_1\psi)$

pseudo-scalar $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \rho_2\rho_3 = i\rho_1$

$\underset{\sim}{=}\ \tilde{\psi}\rho_2\psi$ (−)

~~§4. テンソルの積と縮合~~

m-階の反変テンソル $A^{\alpha\beta\cdots}$ と n-階の反変テンソル
$B^{\kappa\lambda\cdots}$ から直積(direct product)

$$C^{\alpha\beta\cdots\kappa\lambda\cdots} = A^{\alpha\beta\cdots}B^{\kappa\lambda\cdots}$$

を作れば これは m+n 階の反変テンソルである。共変テンソルについても同様である。
~~混合~~ ~~混合テンソル~~ 反変 共変テンソルの積を作れば混合テンソルが得られる。
混合テンソルに対して次の如き縮合(contraction, Verjüngung)なる操作を施して階級の低いテンソルにすることが出来る。
例えば $A^{\nu}_{\kappa\lambda\mu}$ なる混合テンソルを縮合すると

$$B_{\kappa\lambda} = A^{\mu}_{\cancel{\mu}\kappa\lambda\mu}$$

なる二階の共変テンソルが得られる。

∵ ~~$A'^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \partial x$~~

$$A'^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\nu}A^{\nu}_{\kappa\lambda\mu}$$

$$= \frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\beta}\delta_{\mu\nu}A^{\nu}_{\kappa\lambda\mu}$$

故に $A_\mu{}^\mu$ は不変量である。
又二つのテンソル、例へば $A_\varkappa{}^\lambda$, $B_{\mu\nu}$ の積を縮合することによつて二階のテンソル

$$C_{\varkappa\nu} = A_\varkappa{}^\lambda B_{\lambda\nu}$$

が得られる。

逆に例へば $A_\mu B^\mu$ が B^μ (反変ベクトル) の如何に拘はらず不変量であれば、A_μ が共変ベクトルになる。又例へば

$$A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

が $B^{\mu\nu}$ なる反変テンソルの撰び方に拘はらず不変ならば $A_{\mu\nu}$ が共変テンソルになる。

∵ $$A_\mu B^\mu = A'_\nu B'^\nu = A'_\nu \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} B^\mu$$

$$\left(A_\mu - A'_\nu \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\right)B^\mu = 0$$

∴ $$A_\mu = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} A'_\nu \quad : \quad A'_\nu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A_\mu$$

§4. 基本テンソル (fundamental tensor, Fundamentaltensor)

~~我々の考へて居る~~ 現実の世界を表はすと考へられる四次元空間の非常に接近した二點 x_μ と $x_\mu+dx_\mu$ の間に座標の取り方に関係しない距離 ds なるものが存在し、それは dx_μ の二次形式 (quadratic form) ~~によつて~~ $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

で与へられるものと考へる。この様な場合に（不変な距離が定義されてる）空間は計量的 (metric) である ~~空間~~ と云ふ。今の場合には計量は Riemann 計量 (Riemannian metric) と称せられる。この計量を基礎とする幾何を Riemann 幾何といふ。一般相対性理論は ~~時空に生ずる~~ 物理的諸現象 ~~の場合に於ける時空~~ は四次元の Riemann ~~空間~~ 幾何学によつて記述されると考へる。

ds^2 が不変であるためには $g_{\mu\nu}$ は二階の共変テンソルでなければならぬ。$g_{\mu\nu}$ 対称

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

なる対称テンソルに限つても別に一般性は制限しはならぬ。~~それから~~ これを基本テンソル

と縮約する．但し，$g_{\mu\nu}$から作った行列式

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots \\ g_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = |g_{\mu\nu}|$$

は0でないものとする．

そこで

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (= g^{\nu\mu})$$

を作ると，これが共変な反変テンソルである事は容易に判る

(~~何となれば~~ ∵ $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda}g^{\nu\lambda} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\nu\lambda}}g_{\mu\lambda} = \delta_\mu^\nu$

従って

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\lambda}\delta_\nu^\lambda dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}g^{\lambda\kappa}dx_\mu dx_\nu$$

そこで $d\xi_\lambda = g_{\mu\lambda}dx_\mu$ なる共変ベクトルを作って

$$ds^2 = g^{\lambda\kappa}d\xi_\lambda d\xi_\kappa$$

なる式になる．

所で $d\xi_\lambda$ は任意に撰ぶことが出来るから，($g \neq 0$ だから) $g^{\lambda\kappa}$ は反変テンソルでないといけない．

従って又 δ_μ^ν は混合テンソルになる．

次に

$$|g^{\mu\nu}| = \frac{1}{g}$$

(∵ $|g_{\mu\lambda}g^{\nu\lambda}| = |g_{\mu\lambda}||g^{\nu\lambda}| = |\delta_\mu^\nu| = 1$)

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\nu}g_{\kappa\lambda}\right| = \left|\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\right|\left|g_{\kappa\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\nu}\right| = \left|\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\right|^2\cdot g$$

従って

$$\sqrt{-g'} = \pm\left|\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\right|\sqrt{-g} \quad (+)$$

となる．

但し，一般に $g<0$ で~~ある~~から $\sqrt{-g}, \sqrt{-g'}$ をとってある．(g'も負で) 但し $\left|\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\mu}\right|$ は一般に正でも負でもあり得るから，(+)の式~~…~~の±は $|\;\;|$ が正になる様に定める．

今 x_ν なる点の~~…~~ 近傍の $\delta x_\nu^{(1)}, \delta x_\nu^{(2)}, \delta x_\nu^{(3)}, \delta x_\nu^{(4)}$ なる四つの異なる微小変位によって形成される平行六面体 (parallelopiped)

と書けば、Euclid 空間では

$$\delta V = \pm \begin{vmatrix} \delta x_1^{(1)} & \delta x_1^{(2)} & \delta x_1^{(3)} & \delta x_1^{(4)} \\ \delta x_2^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

が其の体積に比例する. 座標変換をすると,

$$\delta V' = \pm \begin{vmatrix} \delta x_1'^{(1)} & \delta x_1'^{(2)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad \delta x_1'^{(1)} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_\mu}\delta x_\mu^{(1)}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta x_1^{(1)} & \delta x_1^{(2)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left| \quad \right| \delta V$$

となる. 但し ± の符号は $\pm\left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\right|$ が正になる様に取る.
すると

$$\sqrt{g}\,\delta V = \sqrt{g'}\,\delta V'$$

となる. これを四次元の微小平行六面体の不変体積 (invariant volume) と云ふ.

次に基本テンソルによつて反変テンソルを共変テンソルに変へ、又はその逆の操作を行ひ得る. 例へば

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$$
$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$
$$A = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}$$

となる.

$g_{\mu\nu}$ は一般に座標 x_ν の函数であるが, これから

$$[\mu\nu,\lambda] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$\{\mu\nu,\lambda\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}\right)$$
$$= g^{\lambda\kappa}[\mu\nu,\kappa]$$

所謂 Christoffel の

を作つて見る.
然し乍ら

$$[\mu\nu,\lambda] = g_{\lambda\kappa}\{\mu\nu,\kappa\}$$

が成立する.† ~~…~~

これ等を又

$$\Gamma_{\mu\nu,\lambda} = [\mu\nu,\lambda] \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \{\mu\nu,\lambda\}$$

$[\mu\nu,\lambda]$ $\{\mu\nu,\lambda\}$ はいづれも μ, ν に関して対称であるから, 夫々 $10 \times 4 = 40$ 個の要素を有する三指標記號 (three index symbol, Dreiindizessymbol) が存在する. 後述の如く $g_{\mu\nu}$ が重力の potential, $\Gamma_{\mu\nu,\lambda}$, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が普通の ~~…~~ 重力に當る.

従て Riemann 空間に於て, 與へられた二點を結ぶ最短の曲線, 即ち測地線 (geodesic curve, geodätische Linie) の方程式を求めて見る.
それは変分法により

$$\delta \int ds = 0 \qquad (\dagger)$$

といふ條件から導き出さねばならぬ.

† 又 $[\mu\nu,\lambda] + [\lambda\nu,\mu] = \dfrac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}}$ が成立する.

所が $\quad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu$
から

$$2\,ds\,\delta(ds) = dx_\mu dx_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\,\delta x_\lambda + g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, d(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\, dx_\nu\, d(\delta x_\mu)$$

故に (†) の條件は

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\mu)\right\}ds = 0,$$

又は

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + \left(g_{\mu\lambda}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\lambda\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right) \times \frac{d}{ds}(\delta x_\lambda)\right\}ds = 0$$

部分積分を行ふと

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\lambda\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right)\right\}\delta x_\lambda\, ds = 0$$

これが測地線上の各點に於て, 任意の変分 δx_λ に対して成立すべきためには,

を作つて見る。
而して之に

$$[\mu\nu,\lambda] = g_{\lambda\kappa}\{\mu\nu,\kappa\}$$

が成立する†。
これ等を又

$$\Gamma_{\mu\nu,\lambda} = [\mu\nu,\lambda] \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \{\mu\nu,\lambda\}$$

$[\mu\nu,\lambda]$ $\{\mu\nu,\lambda\}$ はいづれも μ,ν に関して対称であるから、夫々 $10\times 4 = 40$ 個の要素 所謂 Christoffel の 三指標記号 (three index symbol, Dreiindizessymbol) が存在する。前述の如く $g_{\mu\nu}$ が重力の potential, $\Gamma_{\mu\nu,\lambda}$, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が [illegible]の ~~[illegible]~~ 重力に当る。

扨て Riemann 空間に於て、与へられた二点を結ぶ最短の曲線、即ち測地線 (geodesic curve, geodätische Linie) の方程式を求めて見る。
それは定義により

$$\delta\int ds = 0 \qquad (\dagger)$$

という条件から導き出さねばならぬ。

† 又 $[\mu\nu,\lambda] + [\lambda\nu,\mu] = \dfrac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}$ が成立する。

所が $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu dx_\nu$
から

$$2ds\,\delta(ds) = dx_\mu dx_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} dx_\lambda + g_{\mu\nu} dx_\mu\, d(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu} dx_\nu\, d(\delta x_\mu)$$

故に (†) の条件は

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\mu)\right\} ds = 0,$$

又は

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + \left(g_{\mu\lambda}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\lambda\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right) \times \frac{d}{ds}(\delta x_\lambda)\right\} ds = 0$$

部分積分を行ふと

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\lambda\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right)\right\}\delta x_\lambda\, ds = 0$$

これが測地線上の各点に於て、任意の変分 δx_λ に対して成立すべきものならば、

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\frac{1}{2}\frac{dg_{\mu\lambda}}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dg_{\lambda\nu}}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}-\frac{1}{2}g_{\lambda\nu}\frac{d^2x_\nu}{ds^2}=0$$

しかるに $\frac{dg_{\mu\lambda}}{ds}=\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds}$ 故であるから

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}\right)$$

$$-g_{\lambda\mu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}=0$$

$$\frac{d^2x_\lambda}{ds^2}+\{\mu\nu,\lambda\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0.$$

$$\lambda=1,2,3,4$$

これが測地線の満足すべき微分方程式である。

逆に $\int\left\{\frac{d^2x_\lambda}{ds^2}+\{\mu\nu,\lambda\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right\}\delta x_\lambda\cdot ds$ が δx_λ の如何に拘らず不変な量であるから

$$\frac{d^2x_\lambda}{ds^2}+\{\mu\nu,\lambda\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

は共変ベクトルである。

§5. テンソルの共変微分.

φ をスカラー函数とすれば、φ の gradient ~~…~~

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

は共変四元ベクトルである。

所が $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

は最早テンソルではない。

$$\left(\because\quad \frac{\partial A'_\kappa}{\partial x'_\lambda}=\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}A_\nu\right)\right.$$

$$\left.=\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\left\{\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\cdot\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\right)A_\nu\right\}\right)$$

但し

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$$

は二階の反対称テンソルである。

$$\left(\because\quad \frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\kappa}-\frac{\partial A'_\kappa}{\partial x'_\lambda}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\left\{\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\right)A_\mu\right\}-\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\left\{\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\right)A_\nu\right\}$$

$$=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\kappa}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)$$

$$\left.+\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial x'_\kappa\partial x'_\lambda}A_\mu-\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_\lambda\partial x'_\kappa}A_\nu\right)$$

~~A~~ これは所謂四次元の廻転~~である~~ (four dimensional rotation) であって

$$F_{\mu\nu} = \mathrm{Rot}\, A_\nu$$

と書く。

~~又~~ $\cancel{F = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}}$

~~はスカラーである~~

$\cancel{(\because \frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda} A_\mu\right)}$

$\cancel{= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial A_\mu}{\partial x'_\lambda \partial}}$

同様に $\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$

もテンソルでない

$$(\because \frac{\partial A^{\lambda'}}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\left(\frac{\partial x'_\kappa}{\partial x_\mu} A^\mu\right)$$

$$= \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\left(\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu}\right) A^\mu)$$

しかして $F = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu}$

も~~スカラーである~~にはならぬ.

$$(\because \frac{\partial A'^{\lambda}}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\left(\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu}\right) A^\mu$$

$$= \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial^2 x'_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot A^\mu)$$

$$\cancel{= \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda} \cdot \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu}\right) A^\mu}$$

$$\cancel{- \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda}\right) \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu} A^\mu}$$

そこで ds は不変な線要素を取り ~~x_μ は点に於て或る曲線に沿ふて~~ $A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}$

は不変量を作り, ~~ds~~ この曲線の方向に沿ふての

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}\right)$$

が又不変であるから

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} + A_\mu \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \qquad (*)$$

が不変である。

所で x_μ 点を通り, この曲線と切線の方向即ち $\frac{dx'_\mu}{ds}$ が一致する所謂測地線を取ると, これに対しては

$$A_\mu \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = - A_\mu \{\kappa\lambda, \mu\} \frac{dx_\kappa}{ds} \frac{dx_\lambda}{ds}$$

であるから,

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \cancel{A_\lambda} \{\mu\nu, \lambda\} A_\lambda\right] \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = (\dagger)$$

所で $\frac{dx_\mu}{ds}, \frac{dx_\nu}{ds}$ は任意に取り得るとする。~~従って~~故に

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\lambda\}A_\lambda$$

が二階の共変テンソルにならねばならぬ。
(実際 $A_{\mu\nu}$ がテンソルになることを直接証明し得る †)
これを A_μ の共変微係数 (covariant derivative)
すると $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$
と書ける。

次に任意の反変テンソル A^ν に対して、

$$A_\mu = g_{\mu\lambda}A^\lambda$$

なる関係で与へられる共変テンソルを考へ、

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(g_{\mu\lambda}A^\lambda) - \{\mu\nu,\lambda\}(g_{\lambda\kappa}A^\kappa)$$

を作ると

$$= g_{\mu\lambda}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\nu} + A^\lambda\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} - [\mu\nu,\lambda]A^\lambda$$

---

† $A_\mu\left\{\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \{\kappa\lambda,\mu\}\frac{dx_\kappa}{ds}\frac{dx_\lambda}{ds}\right\}$
は不変量であるから (*) から これを引けば (†) が不変量として得られる。

しかるに

~~$A_{\mu\nu}$~~

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} - [\mu\nu,\lambda] = \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}\right\}$$

$$= [\nu\lambda,\mu]$$

故に $A_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\nu} + [\nu\lambda,\mu]A^\lambda$

$g^{\kappa\mu}$ を掛けると、

$$g^{\kappa\mu}A_{\mu\nu} = \frac{\partial A^\kappa}{\partial x_\nu} + \{\nu\lambda,\kappa\}A^\lambda$$

これが混合テンソルになる。そこで上式の左辺を

$$A^\kappa{}_\nu = \frac{\partial A^\kappa}{\partial x_\nu} + \{\nu\lambda,\kappa\}A^\lambda$$

で以て反変ベクトル A^κ の共変微係数を定義することが出来る。
すると

$$A^\kappa{}_\nu = g^{\kappa\mu}A_{\mu\nu}$$

が成立する。†

~~同様にして~~，一般のテンソルの共変微分はヴェクトルの積の形になってゐれば特別の場合をしらべることによって~~容易に形を~~得られる．例へば

$$
\begin{cases}
A^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = \dfrac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \{\varkappa\lambda,\mu\}A^{\varkappa\nu} + \{\varkappa\lambda,\nu\}A^{\mu\varkappa} \\[2ex]
A_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\lambda} = \dfrac{\partial A_\mu^\nu}{\partial x_\lambda} - \{\mu\lambda,\varkappa\}A^\nu_\varkappa + \{\varkappa\lambda,\nu\}A^\varkappa_\mu \\[2ex]
A_{\mu\nu,\lambda} = \dfrac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \{\mu\lambda,\varkappa\}A_{\varkappa\nu} - \{\nu\lambda,\varkappa\}A_{\mu\varkappa} \quad {**}
\end{cases}
$$

†これからして

$$
\begin{aligned}
A^\mu{}_{,\mu} &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + \{\mu\lambda,\mu\}A^\lambda \\
&= \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + A^\lambda \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\lambda} \quad * \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,A^\mu\right)
\end{aligned}
$$

がスカラーになる．故に、これを反変ヴェクトル A^μ から作った四次元的 divergence (Divergenz) と考へることが出来る．

27

$$
g^{\varkappa\mu}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x_\varkappa} - g^{\mu\varkappa}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\varkappa} = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
(* \quad \because \{\mu\lambda,\mu\} &= \frac{1}{2}g^{\mu\varkappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\varkappa}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\varkappa}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\varkappa}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\varkappa}\frac{\partial g_{\mu\varkappa}}{\partial x_\lambda} \quad \left(= \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\varkappa}}\frac{\partial g_{\mu\varkappa}}{\partial x_\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\lambda} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\log\sqrt{-g} \quad)
\end{aligned}
$$

$**$ $A_{\mu\nu,\lambda} = \dfrac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \{\mu\lambda,\varkappa\}A_{\varkappa\nu} - \{\nu\lambda,\varkappa\}A_{\mu\varkappa}$

から，$A_{\mu\nu}$ が交代ヴェクトルであると

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu\lambda} &= A_{\mu\nu,\lambda} + A_{\nu\lambda,\mu} + A_{\lambda\mu,\nu} \\
&= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}
\end{aligned}
$$

が反対称な三階の共変ヴェクトルになる．

$$
\begin{aligned}
(\because \ &\{\mu\lambda,\varkappa\}A_{\varkappa\nu} - \{\nu\lambda,\varkappa\}A_{\mu\varkappa} \\
&+ \{\nu\mu,\varkappa\}A_{\varkappa\lambda} - \{\lambda\mu,\varkappa\}A_{\nu\varkappa} \\
&+ \{\lambda\nu,\varkappa\}A_{\varkappa\mu} - \{\mu\nu,\varkappa\}A_{\lambda\varkappa} = 0)
\end{aligned}
$$

$A^{\mu\nu}$ を反対称テンソルとすると その Divergenz は

$$(A^{\mu\nu})_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} + \{\lambda\nu,\nu\}A^{\mu\lambda} + \{\lambda\nu,\mu\}A^{\lambda\nu}$$

然し $A^{\mu\nu}$ が反対称なら これらの最後の項は消え

$$(A^{\mu\nu})_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^{\mu\nu}\sqrt{-g})$$

又 混合テンソル $A_\mu^{\ \nu}$ の Divergenz は

$$(A_\mu^{\ \nu})_\nu = \frac{\partial A_\mu^{\ \nu}}{\partial x_\nu} + \{\lambda\nu,\nu\}A_\mu^{\ \lambda} - \{\mu\nu,\lambda\}A_\lambda^{\ \nu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A_\mu^{\ \nu}) - \{\mu\nu,\lambda\}A_\lambda^{\ \nu}$$

で与へられる。
右辺の最後の項は

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right)A^{\lambda\nu}$$

となる。$A^{\lambda\nu}$ が対称テンソルなら ~~第三項~~ 第一と第三の二項は相殺し、

$$(A_\mu^{\ \nu})_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A_\mu^{\ \nu}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x_\mu}A^{\lambda\kappa}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A_\mu^{\ \nu}) + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x_\mu}A_{\lambda\kappa}$$

$$(\because \quad g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^{\ \lambda}$$

$$g^{\mu\lambda}dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}dg^{\mu\lambda} = 0$$

$$g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}g^{\nu\kappa}dg^{\mu\lambda}$$

$$= -\delta_\mu^{\ \kappa}dg^{\mu\lambda} = -dg^{\kappa\lambda}.$$

$$dg_{\lambda\kappa} = -g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}dg^{\mu\nu}$$

$$A^{\lambda\kappa}dg_{\lambda\kappa} = -(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}A^{\lambda\kappa})dg^{\mu\nu}$$

$$= -A_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}\ )$$

§6. Riemann-Christoffel のテンソル

A_μ の第二階の微係数を作ってみると

$$A_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\kappa\}A_\kappa\right)$$

$$-\{\mu\lambda,\kappa\}\left(\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\nu} - \{\kappa\nu,\sigma\}A_\sigma\right)$$

$$-\{\nu\lambda,\kappa\}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\kappa} - \{\mu\kappa,\sigma\}A_\sigma\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} - \left[\{\mu\nu,\kappa\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\lambda} + \{\mu\lambda,\kappa\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\nu}\right] - \cancel{\{\kappa\nu,\sigma\}A_\sigma}\ \{\nu\lambda,\kappa\}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\kappa}$$

$$+\{\mu\lambda,\kappa\}\{\kappa\nu,\sigma\}A_\sigma$$

$$+\{\nu\lambda,\kappa\}\{\mu\kappa,\sigma\}A_\sigma$$

$$-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\nu,\kappa\}$$

そこで 微分の順序を換へて $A_{\mu\lambda\nu}$ を作ると、上式と異なるのは、最後の二項だけで~~あるから~~あって

$$A_{\mu\nu\lambda} = \cdots\cdots$$

$$+\{\mu\nu,\kappa\}\{\kappa\nu,\sigma\}A_\sigma$$

$$-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\lambda,\kappa\}$$

となる。従って

$$A_{\mu\nu\lambda} - A_{\mu\lambda\nu} = A_\sigma\Big\{\{\mu\lambda,\kappa\}\{\kappa\nu,\sigma\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\nu,\sigma\} - \{\mu\nu,\kappa\}\{\kappa\nu,\sigma\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\lambda,\sigma\}\Big\}$$

が三階の共変テンソルになる。(νλに関して反対称) これが最初に与へた A_μ の如何に拘はらず成立する為めには

$$B^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} = \{\mu\lambda,\kappa\}\{\kappa\nu,\sigma\} - \{\mu\nu,\kappa\}\{\kappa\lambda,\sigma\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\lambda,\sigma\} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\nu,\sigma\}$$

が四階の混合テンソルでなければならぬ[1]。これを Riemann-Christoffel のテンソルといふ。これを使へば

$$A_{\mu\nu\lambda} - A_{\mu\lambda\nu} = A_\sigma B^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}$$

$B^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}$ の凡ての成分が0になる場合にのみ一般の共変ベクトルの共変微分の順序を逆に為し得る。

これから

$$B_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\rho\sigma} B^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}$$

$$= \{\mu\lambda,\kappa\}[\kappa\nu,\rho] - \{\mu\nu,\kappa\}[\kappa\lambda,\rho] + \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\mu\lambda,\rho] - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}[\mu\nu,\rho] - \{\mu\lambda,\kappa\}\frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x_\nu} + \{\mu\nu,\kappa\}\frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x_\sigma}$$

[1] ν,λ に関して反対称である。

$$= \{\mu\lambda,\kappa\}[\rho\nu,\kappa] + \{\mu\nu,\kappa\}[\rho\lambda,\kappa] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\lambda}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x_\rho \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)$$

即ち $B_{\mu\nu\lambda\rho}$ は ν,λ に関して反対称であると共に、μ と ρ に関しても反対称である。~~從って~~又 μ と ν、λ と ρ の二組の交換に対して対称である。又に

$$B_{\mu\nu\lambda\rho} + B_{\mu\lambda\rho\nu} + B_{\mu\rho\nu\lambda} = 0$$

なる性質をもってゐる。

扨て4階のテンソルは $4^4 = 256$ 個の成分をもってゐるが、νとλ、μとρ に関して反対称なために独立な成分は 6×6 に減る。$\binom{\nu\neq\lambda}{\mu\neq\rho}$ その中で、μ=ν、λ=ρ なる條件を満足する成分が 6個ある。残りの30個の成分は μとν、λとρ を入れ換へることによって他の15個に帰着される。独立な要素の数は 6+15=21 に減る。

即ち ~~1122 1212~~

1122	1133	1144
2233	2244	3344

及び　1132　1143　$\underline{1234}$　2243
1142　1233　1244　2342
1232　$\underline{1243}$　1344
1242　1343　　2344
$\underline{1342}$
この間には　2

$$B_{1234}+B_{1342}-B_{1243}=0$$

なる唯一つの関係がある，従って Riemann-Christoffel のテンソルは　20 個の独立な成分を有することになる。†

R.C.T. は $g_{\mu\nu}$ の或る第一階，第二階の微係数のみから成る四階のテンソルであるが，$g_{\mu\nu}$ から直接第三階のテンソルを作ることは出来ない。何故かといへば　微分によつて

$$g_{\mu\nu\lambda}=0$$

であるからである。

$$\left(\because\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\{\mu\lambda,\kappa\}g_{\kappa\nu}-\{\nu\lambda,\kappa\}g_{\mu\kappa}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-[\mu\lambda,\nu]-[\nu\lambda,\mu]=0\right)$$

---

† 上の21個の成分中 4なる添字を含まぬ物は 6個 即ち三次元空間の R.C. テンソルは 6個の成分を有し，又二次元空間では唯一個の成分 R_{1212} に帰着する

~~第三章　重力場の理論~~
~~Theory of the Gravitation~~　30

~~[illegible]~~.

R.C.T. は時空の彎曲の問題と密接な関係を持って居る。時空のある領域に亙って

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$$
$$=\sum dx_i^2\quad (x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=ict)$$

と書き得る (x,y,z,t) なる座標系を撰び得る場合には　時空のその領域を平坦 (flat, homaloidal) であるといふ。(勿論 ~~平坦といふ中には~~ ds^2 の右辺の四つの係数が ±1 のいろいろな組合せによって異なる ~~いろいろ~~ 平坦な世界が考へ得る)

所で $g_{\mu\nu}$ が x_μ に関係ない常数であれば，

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$
$$=dy_\mu dy_\mu$$

と書き得る

$$y_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu$$

を撰ぶことが出来る。

(∵ 係数 $a_{\mu\nu}$ ~~は16個~~ 16個の が 10個の式を満足すればよいのであるから，これは[illegible]によって可能である。)

$g_{\mu\nu}$が一定なら三指標記號は全部0になり、
R.-C.T.も0になる。
即ち ~~R.C.T.が~~ 平坦な世界では $g_{\mu\nu}$が一定になる様な座標系があり、これに對して R.-C.T.が0となる。しかるにR.-C.T.はテンソルであるから此の関係は総ての座標系に對して成立する。換言すれば
Riemann-Christoffel テンソルが消失することが 世界が平坦であるための必要條件である。
又これは充分な條件でもある。

証明. $\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_\mu} = -\{\lambda\mu,\nu\}A^\lambda$

~~を満足する~~ なる式は

$$B^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} = 0$$

が成立する場合には、積分可能 (integrable) である。

(∵ $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\{\lambda\mu,\nu\}A^\lambda\right] = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\{\lambda\nu,\mu\}A^\lambda\right]$

即ち $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\}\cdot A^\lambda + \{\lambda\mu,\nu\}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\nu}$

$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\mu\}\cdot A^\lambda + \{\lambda\nu,\mu\}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\}A^\lambda - \{\lambda\mu,\nu\}\{\kappa\nu,\lambda\}A^\kappa$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\mu\}A^\lambda - \{\lambda\nu,\mu\}\{\kappa\mu,\lambda\}A^\kappa$$

$$A^\kappa\Big[\{\kappa\mu,\underline{\lambda}\}\{\underline{\lambda}\nu,\mu\} - \{\kappa\nu,\underline{\lambda}\}\{\underline{\lambda}\mu,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\kappa\mu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\kappa\nu,\mu\}\Big]$$

$$= B^{\mu}_{\kappa\nu\mu}A^\kappa$$

$\{\kappa\mu,\lambda\}\{\lambda\nu,$

証明 $B^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} = 0$

が成立する場合には

~~$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \{\mu\nu,\kappa\}A_\kappa$~~

~~は積分可能である。~~

$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = -\{\lambda\mu,\nu\}A^\lambda \qquad (\mathrm{I})$$

は積分可能である。

(∵ $\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\kappa}\right)$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\{\lambda\mu,\nu\}\cdot A^\lambda - \{\lambda\mu,\nu\}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\kappa,\nu\}A^\lambda + \{\lambda\kappa,\nu\}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\{\lambda\mu,\nu\}A^\lambda + \{\lambda\mu,\nu\}\{\rho\kappa,\lambda\}A^\rho + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\kappa,\nu\}A^\lambda - \{\lambda\kappa,\nu\}\{\rho\mu,\lambda\}A^\rho$$

$$= A^\rho\Big[-\{\rho\mu,\lambda\}\{\lambda\kappa,\nu\} + \{\rho\kappa,\lambda\}\{\lambda\mu,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\rho\kappa,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\{\rho\mu,\nu\}\Big]$$

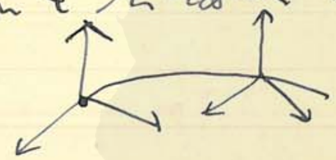
$$= A^\rho B^\nu_{\rho\mu\kappa} = 0$$

従って ~~dA~~ 一點 $x_\mu^{(0)}$ に於ける $A^\nu(x_\mu^{(0)})$ を与へると上式の積分によって 各點の $A^\nu(x_\mu)$ が定まる。†
そこで新しい座標系 x'_μ を次の如く取る。
即ち一點に於て四つの異なる方向の（$x_\mu = x_\mu^{(0)}$ の）ヴェクトル

$A^\nu_{(1)}$, $A^\nu_{(2)}$, $A^\nu_{(3)}$, $A^\nu_{(4)}$

をとり、~~これが~~ この點から出発して、(†)の積分によって得られる

$A^\nu_{(1)}(x_\mu)$, $A^\nu_{(2)}(x_\mu)$, $A^\nu_{(3)}(x_\mu)$, $A^\nu_{(4)}(x_\mu)$

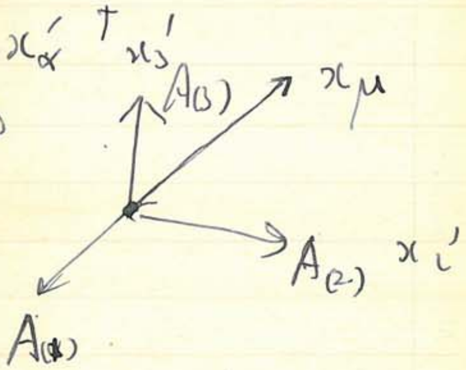


† $\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} = A^\mu_{(\alpha)}$ $\frac{\partial A^\mu_{(\alpha)}}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial A^\mu_{(\beta)}}{\partial x'_\alpha}$

四組の ~~vec~~ ヴェクトル場 (vector-field) を導入する。x_μ 點に於ける これらのヴェクトルの方向に 新しい x'_μ 軸をとることにする。
すると、

$$dx_\mu = A^\mu_{(\alpha)}\, dx'_\alpha \quad †$$

（x'_μ の方向の長さの単位を適当にとれば）なる関係を満足せしめ得る。



これからして

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)}\, dx'_\alpha dx'_\beta$$

従って

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)}$$

が得られる。
然るに

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} \frac{\partial A^\nu_{(\beta)}}{\partial x_\sigma} + g_{\mu\nu} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial A^\mu_{(\alpha)}}{\partial x_\sigma} + A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

$$= -g_{\mu\nu} A^\mu_\alpha A^\rho_\beta \{\rho\sigma,\nu\} - g_{\mu\nu} A^\nu_{(\beta)} A^\rho_\alpha \{\rho\sigma,\mu\} + A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

†これを屢 A^ν なる vector の parallel displacement 平行移動といふ。

又は $\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \left[-g_{\mu\rho}\{\nu\sigma,\rho\} - g_{\rho\nu}\{\mu\sigma,\rho\} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right]$

$= A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \left[-[\nu\sigma,\mu] - [\mu\sigma,\nu] + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right]$

$= 0$

即ち $g'_{\alpha\beta}$ は到る所一定値を取る。

$A^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$ と置くて、~~$B^\kappa_{\mu\nu\lambda} = 0$ ならば~~

(†) から $\frac{d^2x^\nu}{ds^2} = -\{\lambda\mu,\nu\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}$ が成立する。これは測地線の方程式である。

この場合 $\frac{dx_\mu}{ds}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right) = -\frac{dx^\mu}{ds}\{\lambda\mu,\nu\}\frac{dx^\lambda}{ds}$

は全微分である。即ち一点 $x^{(0)}_\mu$ に於ける

$B^\kappa_{\mu\nu\lambda} = 0$ ならば $\frac{dx^\mu}{ds}$ を与へると、任意点の $\frac{dx^\mu}{ds}$（その方向の測地線に沿ふて積分して始めて）を求め得る

~~積分によつて求め得る~~。今 $x^{(0)}_\mu$ に於て

$\frac{dx_\mu}{ds} = A^\mu_{(i)}$ と取つた時の解を $\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)_i$ と

$(i=1,2,3,4)$ とすると、

$dx^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)_i dx'_i$ $\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)_i$ の場を作る。$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_i}$

$\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{(0)}_i$ $(i=1,2,3,4)$ に取る。四つの

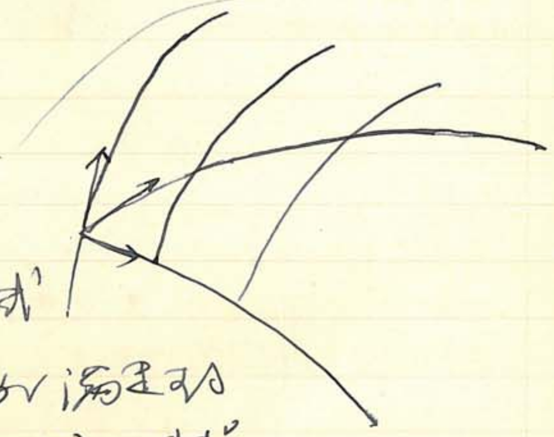
点 $x^{(0)}_\mu$ から四つの異なる方向の測地線に沿ふて $(x'_1\ x'_2\ x'_3\ x'_4)$ なる新しい座標軸を取ると、

$$dx_\nu = \left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)_i dx'_i$$

となる。この $\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)_i$ に対しては

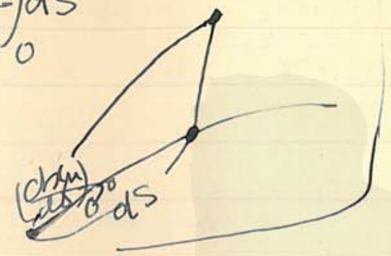
$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{dx^\nu}{ds}\right)_i = \{\lambda\mu,\nu\}\left(\frac{dx_\lambda}{ds}\right)_i$$

$\frac{dx^\nu}{ds}$ の積分。



測地線に沿ふては
前の A^λ に対する式
と同じ式を $\frac{dx^\nu}{ds}$ が満足する
従つて一点で $A^\lambda = \frac{dx^\nu}{ds}$
ならば（その方向に取る）測地線上到る所で両者相等しい。
即ち A^λ に沿ふて動けば測地線が得られる。
換言すれば新しい座標 $(x'_1\ x'_2\ x'_3\ x'_4)$ の四つの座標軸は測地線と一致する。故にこれを測地線座標 (geodesic coordinates) といふ;

$$dx'_\mu = \left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)_0 ds$$



次に四次元空間の[illegible]では、場合によっては一点の極附近までは近似的 Galilean であるような座標を取り得る。換言すれば、$g_{\mu\nu}$ がその近傍において

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=0$$

となる、即ち、$g_{\mu\nu}$ が停留的 (stationary) であるようにし得る。

更に $g_{\mu\nu}$ の2次の微係数に関し この種の座標の中で

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\{\lambda\mu,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\kappa,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\kappa\lambda,\nu\} = 0$$

80個の ~~20×4~~ $4\times(4+3\times4+4)=80$

の条件を満足するものを取ると、換言すれば $\{\lambda\mu,\nu\}$ は20個となり、

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\{\lambda\mu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\kappa,\nu\} = B^{\nu}_{\mu\kappa\lambda}$$

によって、すべての $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}$ (10×10 即ち100個)

は $B^{\nu}_{\mu\kappa\lambda}$ の一次結合として表はし得る。これからして、$g_{\mu\nu}$ の二次微係数までしかふくまぬテンソルは $g_{\mu\nu}$ 及び $B^{\nu}_{\mu\kappa\lambda}$ の函数に限ってしまはれる。

第三章　重力の理論
Theory ~~Law~~ of Gravitation

§7. Einsteinの重力の法則.

前章で述べた様に空間が平坦な場合には

$$B^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} = 0$$

となる. しかるに重力場が存在する様な場所では一般に空間は歪曲してゐる. ~~かゝる Einstein~~ はかゝる一般の場合には Riemann-Christoffel のテンソルを縮めた

$$G_{\mu\nu} = B^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

を作ると

$$G_{\mu\nu} = \{\mu\lambda,\kappa\}\{\kappa\nu,\lambda\} - \{\mu\nu,\kappa\}\{\kappa\lambda,\lambda\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\lambda,\lambda\} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\nu,\lambda\}$$

しかるに $\{\mu\lambda,\lambda\} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\log\sqrt{-g}$

であるから

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\mu\nu,\lambda\} + \{\mu\lambda,\kappa\}\{\kappa\nu,\lambda\} \cancel{-\{\mu\nu,\kappa\}} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\log\sqrt{-g} - \{\mu\nu,\kappa\}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\log\sqrt{-g}.$$

そこで Einstein は

$$G_{\mu\nu}=0 \quad (1)$$

を以て重力場 $g_{\mu\nu}$ の満たすべき場方程式として選んだのである。
$G_{\mu\nu}$ は $\mu\nu$ に関して対称なテンソルであるから、これは $g_{\mu\nu}$ に対する10個の偏微分方程式を表はす。所で任意の $G_{\mu\nu}$ に対して四個の恒等式が成立するから、独立な方程式の数は6個に減る。
$g_{\mu\nu}$ 及びその第二階の微係数までを含んだテンソルとしては $R_{\mu\nu\lambda}$ 以外に簡単なものは $G_{\mu\nu}$ であるから、これを0と置くのは極めて自然である。しかし例へば

$$G_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu}$$

の如きものも重力の法則として採っても悪くはない。実際、宇宙論には入を含む所謂宇宙常数 (cosmological constant) を含んだ式が都合がよい。しかし入は極めて小さく、通常の範囲の空間に対しては無視して差支ない。
この様にして重力場の存在する時空間は Riemann 空間となってであるが、しかし (1) によって制限された或る種類の空間に限られる。

一般相対性原理からいへば、重力の法則の如き物理法則が座標の或特殊な選択には無関係な或関係、即ち或形式として意味づけられるのである。

扨て $G_{\mu\nu}=0$ なる場方程式の解が実際の重力場を表はすかどうかを調べるために、静止せる質点の作る場に相当する解を求めて見る。
今質点を表はすのに質点を原点とせる球座標を用ゐると、質点の質量0なる極限に於ける平坦な空間に於ける距離は

$$(r,\theta,\phi)\quad -ds^2 = dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\phi^2-c^2dt^2$$

となる。
そこで質量が0でない場合にも距離は空間の各方向に対して対称であり、且つ時間に関しても過去と未来に対して対称的であると推定されるから、最も一般的な形として

$$-ds^2 = U(r)\,dr^2+V(r)(r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\phi^2) - W(r)\,c^2dt^2$$

が得られる。但し、U, V, W は r の任意函数である。

ここで　$r_1^2 = r^2 V(r)$
と置いて、
$$-ds^2 = U_1(r_1)dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 - W_1(r_1)c^2dt^2$$
となり、U_1, W_1 が r_1 の任意函数となる。
所で r と r_1 のいづれが元の Euclid 空間に於ける r に対応すべきかを判定する~~根拠~~明瞭がない。
故に我々は r_1 が元の r に対応するものとして議論を進めて行く。そして r_1 を r と書いて
$$-ds^2 = e^{\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 - e^{\nu}c^2dt^2$$
で、λ,ν が r 丈の函数となる†
更に r が大きくなると元の重力場は減少するから、λ,μ は $r\to\infty$ で $\lambda,\nu\to 0$ となる様な條件を満足せねばならぬ。
従って、~~重力場の方程式は~~
$$x_1 = r,\quad x_2 = \theta,\quad x_3 = \phi,\quad x_4 = ct$$
と置けば、
$$-g_{11} = e^{\lambda} \quad -g_{22} = r^2 \quad -g_{33} = r^2\sin^2\theta$$
$$-g_{44} = -e^{\nu} \qquad -g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{if } \mu\neq\nu$$

† U_1, W_1 は正の値しかとらぬと考へる。

$$-g = e^{\lambda+\nu}r^4\sin^2\theta$$
$$\left.\begin{aligned} -g^{11} &= \frac{g_{22}g_{33}g_{44}}{g} = \frac{1}{-g_{11}} = e^{-\lambda} \\ -g^{22} &= \frac{1}{r^2} \qquad -g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{aligned}\right\}$$
$$-g^{44} = -e^{-\nu} \qquad -g^{\mu\nu} = 0 \quad \mu\neq\nu$$
従って
$$\{\mu\nu,\lambda\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}\right)$$
~~の和をとれて、κ は $\kappa\neq\lambda$ ならば~~
~~の中 $\kappa\neq\lambda$~~ の和をとれば残るのは $\kappa=\lambda$ の項丈であるから
$$\{\mu\nu,\lambda\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right)$$
となる。但し、λ についての総和は行はない。
従って　$\mu=\nu=\lambda$ ならば
$$\{\mu\mu,\mu\} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\log g_{\mu\mu})$$
又 $\mu=\nu$ ならば
$$\{\mu\mu,\lambda\} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda}$$
又　$\nu=\lambda$ ならば
$$\{\mu\nu,\nu\} = \frac{1}{2}g^{\nu\nu}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\log g_{\nu\nu})$$
μ,ν,λ が皆異る場合には
$$\{\mu\nu,\lambda\} = 0.$$

従って40個の三指標記号中0でないのは $4+12+12=28$ 個ある。但しその中には更に
又~~互~~に0になるものがある。
~~即ち~~ 即ち

① $\{11,1\} = \frac{1}{2}\lambda'$ $\quad \{22,2\}=\{33,3\}=\{44,4\}=0$

$\{11,2\}=\{11,3\}=\{11,4\}=0$

② $\{22,1\} = -re^{-\lambda}$ $\quad \cancel{\{22,2\}}=\{22,3\}=\{22,4\}=0$

③ $\{33,1\} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}$ $\quad \cancel{\{33,3\}}=\{33,4\}=0$

④ $\{33,2\} = -\sin\theta\cos\theta$

⑤ $\{44,1\} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'$ $\quad \{44,2\}=\{44,3\}=0$

⑥ $\{12,2\} = \frac{1}{r}$ $\quad \{21,1\}=\{24,4\}$

⑦ $\{13,3\} = \frac{1}{r}$ $\quad =\{31,1\}=\{32,2\}$

⑧ $\{14,4\} = \frac{1}{2}\nu'$ $\quad =\{34,4\}=\{41,1\}$

⑨ $\{23,3\} = \cot\theta$ $\quad =\{42,2\}=\{43,3\}$

$=0$

で9個丈が0にならぬ。
従って

$$G_{11} = -\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{11,\lambda\} + \{1\lambda,\varkappa\}\{\varkappa 1,\lambda\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\sqrt{-g} - \{11,\varkappa\}\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\log\sqrt{-g}.$$

は $=0$

$$G_{11} = -\frac{1}{2}\lambda'' + \left(\frac{1}{2}\lambda'\right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda'' + \frac{1}{2}\nu'' - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\lambda'\cdot\frac{1}{2}\lambda'$$
$$-\frac{1}{2}\lambda'\frac{1}{2}\nu' - \frac{1}{2}\lambda'\frac{2}{r}$$
$$= \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0$$

となる。
同様にして、

$$G_{22} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right) - 1 = 0$$
$$G_{33} = \sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right) - \sin^2\theta = 0$$
$$G_{44} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) = 0$$

~~$G_{12}=0$~~

(その他の $G_{12}=G_{13}=G_{14}=G_{23}=G_{24}=G_{34}=0$ は凡て恒等式になる。)
然して上記4式の中 $G_{33}=0$ は $G_{22}=0$ と同じである。$G_{11}=0$, $G_{44}=0$ から
$\lambda'=-\nu'$ となる。しかるに λ,ν は共に $r=\infty$ で0にならねばならぬから

$$\lambda = -\nu.$$

従って $G_{22}=0$ は

$$e^\nu(1+r\nu') = 1.$$

従って $e^{\nu}=\gamma$ と置けば

$$\gamma + r\gamma' = 1$$

$$\gamma = 1-\frac{2m}{r}$$

となる。2m は積分常数。

この γ を使へば $e^{\lambda}=\frac{1}{\gamma}$, $e^{\nu}=\gamma$ で凡ての式が満足される。

$$\Big(\because \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{\nu'}{r}$$

$$= \frac{1}{2}(\log\gamma)'' + \frac{1}{2}(\log\gamma)'^2 + \frac{(\log\gamma)'}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\gamma'^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma'}{r\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\gamma''}{\gamma} + \frac{\gamma'}{r\gamma}$$

$$= \frac{\gamma'' + \frac{2\gamma'}{r}}{2\gamma} = \frac{-\frac{4m}{r^3}+\frac{4m}{r^3}}{2\gamma} = 0 \Big)$$

従って求める線素の表式が

$$-ds^2 = \gamma^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 - \gamma c^2 dt^2$$

$$= \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2$$

Einstein の重力場方程式の1つの解となる。この解を Schwarzschild の解といふ†

§8. 重力場に於ける質点の運動.

Motion of a Particle in Gravitational Field

重力場の存在しない場合には、自由な粒子は直線に沿ふて進む。即ち任意二点間の最短距離を通る。これから推定すれば重力が存在し、空間が彎曲して居る場合に於ても二点の間の最短距離即ち測地線が 特定の 粒子の四次元的な軌道を表はすと考へられる。即ち粒子の運動を微分式で表はす座標 x_λ に就いては

$$\frac{d^2x_\lambda}{ds^2} + \{\mu\nu,\lambda\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

$$\lambda = 1,2,3,4$$

なる4個の方程式が成立する。

Galilei 世界では、座標系を適当にとれば $g_{\mu\nu}$ を一定にし得る。この座標系では

$$\{\mu\nu,\lambda\} = 0$$

---

† Schwarzschild, Berl. Ber. (1916), 189.
Droste, Amst. Versl. 25 (1916), 163.

従って $$\frac{d^2x_\lambda}{ds^2}=0 \qquad (\dagger)$$

$$x_\lambda = a_\lambda s + b_\lambda \qquad (*)$$

今 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ct$ と取った場合に

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$$

と書けたとすると (†)(*) の関係は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \text{etc.}$$

$$x=at+b \quad \text{etc}$$

等と書ける。即ち 自由粒子は直線等速運動をする。

c=1と置けば

次に 静止せる質点によって生じた重力場で粒子が運動する場合には次の如くの式は $\lambda=1$ と取れば

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\{11,1\}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\{22,1\}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\{33,1\}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 +\{44,1\}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-r\sin^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 +\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$$

$\lambda=2$:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0$$

$\lambda=3$:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\phi}{ds}\right)=0$$

$\lambda=4$:

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\nu'\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)=0$$

ϕに関する式は直ちに積分出来

$$\boxed{r^2\frac{d\phi}{ds}=h}$$

tに関する式も同様に積分出来

$$\boxed{\frac{dt}{ds}=Ce^{-\nu}=\frac{C}{\gamma}}$$

となる。

~~次に θに関する式は、~~

極座標の取り方を適当に選べば 最初 (即ち $s=0$ に於て) 粒子は $\theta=\frac{\pi}{2}$ なる平面内で動いて居るものとすると、 ~~$\cos\theta=$~~

$$\frac{d\theta}{ds}=0, \quad \cos\theta=0$$

であるから $\frac{d^2\theta}{ds^2}=0$, $\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}=\cdots=0\right)$ 即ち粒子はいつまでも $\theta=\frac{\pi}{2}$ なる平面内で動くことになり、従って

又 r に対する式も

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$$

一回積分する代りに
これを ~~時間的に積分~~ ds の式 から得られる

$$r^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2-\gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1$$

に □ □ を代入 ~~すれば~~, ds を dt で ~~置換えれば~~ 消去すると

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{c^2}{\gamma}=-1.$$

即ち

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}=c^2-1+\frac{2m}{r}+\frac{2m\,h^2}{r^3}$$

$\frac{1}{r}=u$;

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2=\frac{c^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u+2mu^3.$$

これを ϕ について微分すれば $\frac{du}{d\phi}$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2 \quad (*)$$

$$r^2\frac{d\phi}{ds}=h$$

太陽の質量を m とし、これが惑星の質量に比して非常に大きいとした場合に対して

これを Newton の運動方程式から出て来る惑星の軌道の式

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{m}{h^2}$$

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=h$$

と比較すると、第一に dt と ds と異なって居るが、ds は惑星に附随する固有時間 (proper time) で、惑星の速さは光速度に比して極めて小さいから ~~dt=ds~~ dt と実際的には変わりはない。

次に (*) 式の右辺の $\overbrace{3mu^2}^{\text{第2項}}$ が Newton 力学にない項であるが、第一項との比は

$$\frac{3u^2h^2}{\cancel{h^2}}=3\left(r\frac{d\phi}{ds}\right)^2$$

これは惑星の transverse velocity 横速度を光速度を単位として測ったものの二乗の三倍で、地球の場合には 3×10^{-8} 程度になる。

この様にして静止せる質点による重力場で動く質点の運動は Newton 力学に於ける ~~単に~~ 万有引力の作用の下に動く運動

† 地球の速さは、~~$3\times10^{-8}c$~~ 程度である。
3×10^{6} cm/sec で、光速度の 10^{-4}

回転し始める経過で
と実際的には同様である。
故に、Schwarzschildの解に出て来る m は常数で、不動の物体の質量、動的質量 (Gravitational mass) と考えることが出来る。
但し、この場合、質量は長さの次元を持っている。 即ち重力常数と光速度を1 とおった場合にある。
軌道が円であれば†

$$m = \omega^2 r^3 = v^2 r$$

地球の場合、

$$v = 10^{-4} \qquad r = 1.5\times10^{8}\,\mathrm{km}$$

~~太陽~~ $m = 1.5\,\mathrm{km}$
が太陽の質量である。

---

† $\frac{\gamma m}{r^2} = \omega^2 r \qquad \gamma = 1.$

最初の附録「光行差」参照

§9. 一般相対性の実験的根拠.
(Experimental Verification of General Relativity)

i) 水星近日点の前進 (Advance of ~~Mercury~~ Perihelion of Mercury)

一般相対性による惑星の軌道は Newton の場合と~~殆んど~~相違がない~~が、少しの相違がある~~。
軌道の式の右辺の第二項丈異なるが、第一近似として、~~$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=$~~ Newton の場合の式

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

から得られる

$$u = \frac{m}{h^2}\left(1 + e\cos(\phi - \varpi)\right)$$

を取る。 e, ϖ は積分常数で、軌道の離心率 (eccentricity) 及び近日点の位置を意味する。
この近似解を右辺の第二項に入れると、

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3\frac{m^3}{h^4} + 6\frac{m^3}{h^4}e\cos(\phi-\varpi) + \frac{3}{2}\frac{m^3}{h^4}e^2\left(1+\cos 2(\phi-\varpi)\right)$$

ふくまれた項の中, ~~最後~~ 最後の項は小さく, 第二項は軌道の大いさが

$$\frac{h^2}{m} \rightarrow \frac{h^2}{m}\frac{1}{1+\frac{3m}{h^2}}$$

に減少することを意味するに過ぎぬが, 第三項は遊星の公転と同じ週期をもつ力の共鳴によつて大きな効果を輸し得る.

即ち,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=A\cos\phi$$

の特殊解は

$$u=\frac{1}{2}A\phi\sin\phi$$

であるから†

$$u=\frac{m}{h^2}\left(1+e\cos(\phi-\varpi)+\frac{3m^2}{h^2}e\phi\times\sin(\phi-\varpi)\right)$$

$$=\frac{m}{h^2}\left(1+e\cos(\phi-\varpi-\delta\varpi)\right)$$

$$\delta\varpi=3\frac{m^2}{h^2}\phi$$

丈の近日点の前進があることになる. a を長半径として,

$$h^2=ma(1-e^2)$$

† $\frac{du}{d\phi}=\frac{1}{2}A(\phi\cos\phi+\sin\phi)$ $\frac{d^2u}{d\phi^2}=\frac{1}{2}(\cos\phi-\phi\sin\phi+\cos\phi)$

なる関係を使って

$$\frac{\delta\varpi}{\phi}=\frac{3m}{a(1-e^2)}$$

Keplerの法則

$$m=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2a^3$$

を使へば

$$\frac{\delta\varpi}{\phi}=\frac{12\pi^2a^2}{c^2T^2(1-e^2)}$$

この結果を四つの内遊星に適用すると100年間に就いて

	$\delta\varpi$	$\Delta\varpi$ (一公転毎の前進)
Mercury	42".9	0".1031
Venus	8.62	0.0529
Earth	3.82	0.0382
Mars	1.35	0.0258

となり, 丈の近日点の前進があることになる.

しかるに結果 ~~Newton力学~~ では古くから水星の近日点移動は知られて居たが, Newton力学では説明が出来なかつた.

Newcombはこれを43".37と推定して居た. これは相対性理論の結果と非常によく一致する. 他の三つの遊星についてはNewcombの値は16".98, 10".45, 5".55で理論より大きい.

摂動論に於て, 100年間に530".5丈前進する答. 実際は572".7, その差は42".2である.

~~光の径路は~~
測地線 ~~無重力~~ で
で且つ ds=0 を満足する

ii) ~~引力場に於ける~~ 光の進路の屈曲.
(Deflection of light)　曲った空間に於ける
光の進路は ~~重力~~ 場のない場合に於て

$$ds = 0$$ ~~直線~~

で与へられる. 従って重力の作用ある場合にも矢張り同じ式で表されると考へる.
~~そこでは ds に対し Schwarzschild の表式を取ると,~~
矢張り, 光の経路は測地線で且つ, ds=0 を満足する様なものであると考へる. ds に対し Schwarzschild の表式から出発すると,

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = h \to \infty$$

となり, 従って軌道の式は

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2$$

そこで第一近似として右辺を0と置くと,

$$u_0 = \frac{\cos\phi}{R} \quad \text{or} \quad r\cos\phi = \mathrm{const.}$$

これは直線の式である. これを右辺に代入すると,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3m}{R^2}\cos^2\phi$$

この式の特殊解は

$$u_1 = \frac{m}{R^2}(\cos^2\phi + 2\sin^2\phi)$$

であるから, 第二近似は

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\cos\phi}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\phi + 2\sin^2\phi).$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}\right\}$$ で与へられる直角坐標を導入すると

$$x = R - \frac{m}{R}\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

今光が y 軸に並んで平行に入射したとすると, 初めは, 即ち $y \to -\infty$ に於ては近似的に

$$x = R - \frac{2m}{R}y$$

が漸近線になり, ~~重力場の~~ 経路の他端に近くては

$$x = R + \frac{2m}{R}y$$

が漸近線になる. 従って $\frac{2m}{R} \ll 1$ とすれば光の進路は $\frac{4m}{R}$ だけ角度屈曲する譯である.

太陽の表面をすれすれに通る光は

$$\frac{4m}{R} = \frac{4\times 1.47\ \mathrm{km}}{697{,}000\ \mathrm{km}} = 1''.75$$

だけ曲げられる筈である.
1919年英国の観測隊がブラジルの Sobral ~~島~~ などで ~~ギネヤ~~ オーストラリヤの Principe 島で日食を観測した結果によると夫々

$$1''.98 \pm 0''.12\ ,\quad 1''.61 \pm 0''.30$$

で理論と非常によく一致する†
一般相対性理論が世間の注意を引き出したのは実にこの日食観測の結果が発表されてからである. 末端(附録 Einstein 紹介参照)
Newton の力学からも軌道方程式は質量に光関係にあてはめる場合, 同じく光の屈曲が期待されるが, その値大いさは相対論の半分になる.

iii) ~~[illegible]~~ Fraunhofer線の赤方偏移
(Red shift of Fraunhofer lines)
~~原子~~の同種の原子を異なる場所に置けば, その内部の電子の運動状態が変化し, 従ってそれから出て来るスペクトル

†1922年に行われたオーストラリヤの日食観測の結果は $1''.87 \pm 0''.11$ である.

線の振動数にも変化が期待される.
~~この場合~~, 原子が Schwarzschild の解で与へられる重力場に ~~置かれてあるとする~~ 静止してゐるとすると,

$$dr = d\theta = d\phi = 0$$

で

$$d\tau^2 = ds^2 = \gamma\, dt^2 \qquad d\tau = \gamma^{\frac{1}{2}} dt$$

となる. 所で ~~ds は~~ 原子が同種である限り, ds は場所によって変らない. 即ち固有時間は場所に無関係であると考へられる. 換言すれば原子は時を計る時計と考へれば, それを何處に置いても1振動がその固有の同じ時間の長さになる.
これに反して ~~dt 座標~~ t の方は単に補助的な量で特別な意味を持たない. 固有時間の $d\tau$ なる間隔は t なる時間座標の

$$dt = \gamma^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}$$

なる変化に相当する.
そこで $t=t_1$ なる時刻に ~~太陽の表面上の~~ 一原

$r=r_1$ を出た光が $t=t_1$ に地上の一点 $r=r_2$ に到達したとすると、$t=t_1+\Delta t$ に出発した光は $t=t_1+\Delta t$ に地上に到達する
(∵ $$\frac{dr}{1-\frac{2m}{r}} = dt \quad (\text{但し}\ d\theta = d\varphi = 0)$$
$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1-\frac{2m}{r}}$$
これは r_1, r_2 のみで定まり、t に無関係である。)

今太陽面上 $r=R$ にある原子が1振動したとすると、$\Delta\tau = 1$ で時間の方は
$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}}$$
丈経過する。従って地上の観測者から見て振動の間に
$$\Delta t (= \Delta\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}}$$
丈の時間が経過することになる。即ち Fraunhofer 線はそれ丈赤方に移ることになる。

波長 λ の変化を $\delta\lambda$ とすると
$$\frac{\lambda+\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m}{R}}} \cong 1 + \frac{m}{R}.$$
$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \cong \frac{m}{R} = 2.12\times10^{-6}$$
となる。$\lambda = 4000\,\text{Å}$ とすると、$\delta\lambda = 0.0082\,\text{Å}$ であるから実測は非常に困難である。(St. John の ~~所が~~ 観測がある。)

所が Sirius の伴星 (Companion) の質量は太陽の 0.96 倍であるから
$$m = 1.41\ \text{km}$$
であるが、半径は太陽の 1/[illegible] であるから
$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \cong \frac{m}{R} = 0.69\times10^{-4}$$
といふ大きな値になる。Wilson 天文台の Adams は之れを観測し理論と一致する結果を得た。それと同時に伴星の密度は水の 50000 倍といふ結果も確められた。

略解

§10. 連続体内の重力場
Gravitational Field in Continuous Medium

§8で述べた Schwarzschild の解は、直角坐標に直せば近似的に（$m \ll r$ なる所で）

$$ds^2 \cong -\left(1+\frac{2m}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) + \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2$$

と書ける。r は ~~質点~~ 重力の源からの距離である。従って2個以上の質点がある場合には第一近似として線素は

$$ds^2 = -(1+2\Omega)(dx^2+dy^2+dz^2) + (1-2\Omega)dt^2$$

と書けるであろう。

$$\Omega = \sum \frac{m_i}{r_i}$$

但し、m_i は之等の質点の質量（重力）、r_i はそれから求める点 (x, y, z) までの距離。

∵ ~~此の場合 $g_{\mu\nu}$ 殆ど~~

$$\cancel{(\delta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}}$$

∵ この場合 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}$ も ~~その値は~~ 小さく、従って $G_{\mu\nu}$ の中で $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}$ 等の積の如き項は全て省略し得るとすれば

$$G_{\mu\nu} \cong \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x_\kappa \partial x_\mu}\right)$$

となる。

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

と置き $h_{\mu\nu}$ は小さいとすると、~~更に第一近似~~ 今第一近似として

$$\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}\right) = \frac{1}{2}\Box g_{\mu\nu} \cong \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$$

と書ける。† 但し

$$\Box = g^{\lambda\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2} \cong -\Delta + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

上の場合には $h_{11} = h_{22} = h_{33} = 2\sum \frac{m_i}{r_i} = h_{44}$（になれば0）で $r_i = 0$ なる點を除き至る所に

$$\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Delta h_{\mu\nu} = 0$$

---

† $G_{\mu\nu}$ の残りの項からは　$h = h_\lambda^\lambda$

$$g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x_\kappa \partial x_\mu}\right) = 0$$

は $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(h_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\mu^\lambda h\right) = 0$ とおけば満たされる。

を満足する。

そこで物質が連続的に分布してゐる場合には第一近似として

$$\cancel{\Box g_{\mu\mu}}\quad \Box h_{\mu\mu} = -4\pi\rho \qquad \mu=1,2,3,4$$

と選ばるであらう。

即ち~~これから~~

$$G_{\mu\mu} = -4\pi\rho$$

これからして

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -G_{11}-G_{22}-G_{33}+G_{44} = 8\pi\rho.$$

そこで

$$\boxed{G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -8\pi T_{\mu\nu}} \quad (+)$$

なるテンソル式が連続物質の内部で成立すると考へる。但し、$T_{\mu\nu}$は物質の密度に関係したテンソルで その反変テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

で与へられる。$\frac{dx_\mu}{ds}$はその点に於ける物質の速度で、ρ_0はその固有密度即ち不変量である。若し物質が~~静止してゐる所~~ ならば と一緒に動く坐標系に関しては

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}$$

なる形になる。*

これは特殊相対律に於いて Energy-Momentum Tensor として導入したものに他ならぬ。

(+) 式が物質の存在する場合の重力場に対する基礎方程式である。

この左辺を特に $G_{\mu\nu}-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}G$ なる形に選んだのは

$$\boxed{\mathrm{Div}\left(G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G\right)=0} \quad (*)$$

なる関係が成立つからである。

証明.

$$\mathrm{Div}\left(G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(G_\mu^\nu\sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2} G_{\kappa\lambda}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} g_\mu^\nu \frac{\partial G}{\partial x_\nu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(G_\mu^\nu\sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2} G_{\kappa\lambda}\frac{\partial g^{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\frac{\partial G_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} G_{\kappa\lambda}\frac{\partial g^{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(G_\mu^\nu\sqrt{-g}\right) - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\frac{\partial G_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu}$$

所で坐標系を適当に取れば 定った一点に於ける $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = 0$

$$\frac{\partial B_{\mu\rho\sigma\tau}}{\partial x_\nu}$$

としておけばよい†

$$\cancel{x_\mu = g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(G_\mu^\nu\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\nu\rho}g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,B_{\mu\rho\sigma\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}g^{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\rho} + \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right)$$

(ρ,σ) (ν,τ)

$$= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}g^{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}\frac{\partial G_{\kappa\lambda}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(g^{\rho\sigma}B_{\kappa\lambda\rho\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{4}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\frac{\partial B_{\kappa\lambda\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$$

$$= \frac{1}{4}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\rho}}{\partial x_\lambda \partial x_\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\sigma}}{\partial x_\lambda \partial x_\rho}\right)$$

(λ,ρ) (κ,σ)

$$= \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma}\right)$$

† ∵ $x_\mu = \delta_\mu^\lambda x'_\lambda - \frac{1}{2}\{\kappa\lambda,\mu\}\,\delta^\rho_\kappa\,\delta^\sigma_\lambda$
$x\ x'_\rho\ x'_\sigma$

とおけば

$$\{\mu\nu,\lambda\}'\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu}\{\rho\sigma,\kappa\} = 0$$

しかるにこの座標系では

$$\mathrm{div}\left(G_\mu^\nu - \frac{1}{2}g_\mu^\nu G\right) = 0$$

となる。これはテンソル式であるから任意の座標系に対して成立する。

そこで(†)の両辺に $g^{\nu\lambda}$ を掛けて ~~λについ~~ について和をとり、λ を ν と書くと、

$$\boxed{G_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = -8\pi T_\mu^\nu} \quad *$$

となる。
そして(*)から

$$(T_\mu^\nu)_\nu = 0$$

が得られる。
~~これから~~ 又

$$G = 8\pi T.$$

であるから * の代りに

$$\boxed{G_\mu^\nu = -8\pi\left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T\right)}$$

と書いてもよい。

$$\therefore = -\{\rho\sigma,\kappa\}\,\delta^\mu_\rho\,\delta^\nu_\sigma + \delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma\{\mu\nu,\kappa\} = 0$$

即ち $\{\mu\nu,\kappa\}' = 0 \quad \therefore \frac{\partial' g_{\mu\nu}}{\partial x'_\kappa} = 0.$

物の無い空中では $T_\mu^\nu=0$ で $G_\mu^\nu=0$

~~…~~ に帰着する

$$(T_\mu^\nu)_\nu=0 \quad (**)$$

特別な Galilean 系では

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu}=0$$

に帰着する。これは運動量及び勢力の保存則を表はす。†

*直線座標~~の中で~~として物の流体を考へると、一定点で、流体と一緒に動く坐標系をとり、重力場の他に流体静圧 p が働くとすると

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho\end{pmatrix}=$$

$$T=\rho-3p.$$

一般の坐標系では

$$T^{\mu\nu}=\rho_0\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}-g^{\mu\nu}p$$

$$\rho_0=\rho+p$$

† (**) に相当する式は

$$(T^{\mu\nu})_\nu=0$$

即ち

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,\rho_0\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right)=-\{\lambda\nu,\mu\}\underbrace{\cancel{T^{\lambda\nu}}}_{\rho_0\frac{dx_\lambda}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}}\sqrt{-g} \quad (A)$$

これからして

$$\rho_0\sqrt{-g}\cdot dV=dm\cdot ds$$

と置き、m は質点系の一つの粒子が占有している場合を取ると即ち

$$\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)=-m\{\lambda\nu,\mu\}\frac{dx_\lambda}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

とは m が一定なら、測地線の式である。即ち孤立した粒子は測地線に沿って動く。更に $\frac{d(m^2)}{ds}=0$ も得られる。即ち孤立した粒子の固有質量は変化しないことがいはれる。

このようにして (*) 中には T_μ^ν の中に粒子の質量が入って来るが、これは「同時に運動量と慣性質量の両方の意味をもって居る。

故に

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)$$

$$+m\frac{dx_\mu}{ds}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{dx_\nu}{ds}\right) = -\{\lambda\nu,\mu\}\, m\frac{dx_\lambda}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

しかるに ~~(**) の両辺に~~ ~~$\frac{dx_\mu}{ds}$ をかけると~~

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(m\frac{dx_\nu}{ds}\right)=0$$

となる。即ち運動方程式が成立することがいはれる

第四章 相対論的宇宙論

Relativistic Cosmology

§11. 静的宇宙 Static Universe

以上述べて来た所によれば、一般相対性論においては時空の幾何学的構造は g_{ik} で決まるが、それは物質の分布と密接な関係をもつ。

そこで我々の住む宇宙を全体として見ると、大きく見れば、物質の分布が一様で且つその性質は各方向同じであると考へられる。~~実に 実の~~

所が Newton の力学では物質の密度 ρ が遠方で充分小さくならなければ Poisson の式

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

の解として得られる重力の potential は有限にならぬ。この意味に於て ~~Newton の力学~~ 空間そのものは無限に拡がって居るにも拘らず、物質世界は有限であるといへる。

但し、~~[illegible]~~ この中にある物質の一つの星に運動勢力が集中すれば無限の遠方に飛去ってしまひ得るし、又これ等の物質から放出される輻射の勢力も空間の彼方へ失はれてしまふであらう。

この場合は回転を除くれば Poisson の式を、

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi\rho$$

なる常数 λ を含む式に置換へると、ρ が一定なら

$$\varphi = +\frac{4\pi}{\lambda}\rho$$

なる一定の potential 分布が可能になる。
Einstein はこの様な考へ方を一般相対論にも適用し、宇宙論を建設しようとした。+)
即ち、重力場の方程式 ~~にλなる常数を~~ を

$$\cancel{G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T}$$

$$\boxed{G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} + \lambda_0 g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}} \quad \dagger$$

なる形に変へて見る

$$\kappa = 8\pi$$

もしも相当系の単位を普通に選ぶならば

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4} = 2.07\times 10^{-48}\,\mathrm{cm^{-1}\,g^{-1}\,sec^{2}}$$

そこでこの式の解として、球対称性をもつものを考へ[illegible]

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

+) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie (Berl. Ber. (1917), 142)

$$+e^{\nu}c^2dt^2$$

なる形であると仮定する。但し、ν, λ は共に r だけの函数である。
これから $G_{\mu\nu}$ を計算して † の左辺を作って見ると、$\mu\neq\nu$ の所は凡て 0 になる。

$$G_{11} - \frac{1}{2} G g_{11} + \lambda_0 g_{11}$$

$$= \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$-\frac{1}{r^2} - \frac{e^{+\lambda}}{r^2} + \lambda_0 e^{\lambda}$$

$$= -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2} - \lambda_0 e^{\lambda}$$

$$G_{22} - \frac{1}{2} G g_{22} + \lambda_0 g_{22}$$

$$\cancel{= -e^{-\lambda}(r^2\lambda'' + r\lambda' -}$$

$$= -e^{-\lambda}\left(\frac{r^2\nu'' + r\nu' - r\lambda'}{2} + \frac{r^2\nu'^2 - r^2\nu'\lambda'}{4}\right) - \lambda_0 r^2$$

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$$

$$= -2e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2\right)$$

$$-2e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r}\right) - \frac{2}{r^2}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$G_{33}-\frac{1}{2}Gg_{33}-\lambda_0 g_{33}=\cdots$$

$$G_{44}-\frac{1}{2}Gg_{44}+\lambda_0 g_{44}$$

$$=-e^{\nu}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda'}{r}+\frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\right)+e^{\nu}\lambda_0.$$

そこで

$$T^{\mu\nu}=\rho_0\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}-g^{\mu\nu}p$$

と置き、物体が静止してゐるとすると

$$\frac{dx_1}{ds}=\frac{dx_2}{ds}=\frac{dx_3}{ds}=0$$

$$\frac{dx_4}{ds}=c\frac{dt}{ds}=e^{-\frac{\nu}{2}}$$

$$T_{11}=-g_{11}p=pe^{\lambda}$$

$$T_{22}=pr^2$$

$$T_{33}=\text{〃}$$

$$T_{44}=(\rho_0+p)e^{\nu}-pe^{\nu}$$

$$=\rho e^{\nu}.$$

これからして重力的場の方程式は

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}+\lambda_0=\varkappa p$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{2r}+\frac{\nu'^2-\nu'\lambda'}{4}\right)+\lambda_0=\varkappa p$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}-\lambda_0=\varkappa\rho$$

最初の二式を互に相減ずると

$$\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2-\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'+\lambda'}{2r}-\frac{1}{r^2}+\frac{e^{\lambda}}{r^2}=0$$

いづれにしても三式の中には λ, ν, p, ρ の四つの未知数を含んでゐる。
そこでこれ等の間に何か一つの関係を与へなければ解は得られぬ。従って、その与へ方によって色々な形の解が得られる。

i) $e^{\nu}=1$ と置くと、$(\nu=0)$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\lambda}=1-\dfrac{r^2}{R^2}, \quad \varkappa p=\lambda_0-\dfrac{1}{R^2} \\ \varkappa\rho=\dfrac{3}{R^2}-\lambda_0 \end{array}\right\}$$

となる。

従って

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\varphi^2) + c^2dt^2$$

この時では $g_{\mu\nu}$ 値の大きさ ρ ならば 尤も ρ が到る所一定になって居り，且つ空間的には歪んでゐるが，時間的には歪みはない，

これを Einstein の圓柱状宇宙 (Einstein's cylindrical world) という。

$r \to R$ になれば dr^2 の係数が ∞ になる。従って $0 \le r \le R$ の範囲に制限される，そこで

$$r = R\sin\chi \qquad 0 \le \chi \le \pi$$

と置けば

$$ds^2 = -R^2\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\} + c^2dt^2$$

となり，三次元空間の全体積は†

$$V = \iiint \sqrt{-g}\, d\chi\, d\theta\, d\varphi$$

$$= R^3 \iiint \sin^2\chi \sin\theta\, d\chi\, d\theta\, d\varphi$$

---

† $\sqrt{-g} = \sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}}$

$$= R^3 \int_0^{\pi} \sin^2\chi \cdot d\chi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= R^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi^2 R^3$$

これは以下の如くにも見られる
即ち空間的には三次元の半径 R の球になる．

$$\left(\because\ \begin{aligned} x &= R\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\sin\chi\cos\theta \\ u &= R\cos\chi \end{aligned} \quad \middle| \quad \begin{aligned} &0 \le \chi \le \pi \\ &0 \le \theta \le \pi \\ &0 \le \varphi < 2\pi \end{aligned}\right.$$

と置くと，

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$$

即ち四次元空間内の三次元の球になる．

そして $dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$

$$\left. = R^2\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}\right)$$

宇宙を満たしている物質の圧力が無視し得る場合には

$$p=0 \qquad \lambda_0 = \frac{1}{R^2} = \frac{\kappa\rho}{2}$$

となり、宇宙にある物質の全質量は

$$M = \rho V = 2\pi^2 R^3 \cdot \frac{2}{\kappa R^2} = \frac{4\pi^2}{\kappa} R$$

ii) ~~$\lambda = -\nu$~~ と置くと　$e^{\lambda} = e^{-\nu}$

$$\cancel{\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\nu}}{r^2} = 0.}$$

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \mp \frac{r^2}{R^2}$$

$$\kappa p = \lambda_0 - \frac{3}{R^2} \qquad \kappa\rho = \frac{3}{R^2} - \lambda_0$$

なる二つの関係が得られる.

~~特に特殊の場合~~として　$\lambda_0 = \frac{1}{R^2} = 0$ と置くと、Schwarzschild の解が得られるが、$m = 0$ と置くと.

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2$$

$$\kappa p = \lambda_0 - \frac{3}{R^2} \qquad \kappa\rho = \frac{3}{R^2} - \lambda_0$$

となる. これを de Sitter の宇宙といふ; そこで密度も圧力も負にならぬためには

$$p = \rho = 0.$$

従って　$\lambda_0 = \frac{3}{R^2}$　でなければならぬ.

即ち de Sitter の宇宙は物質を除去しないが
それにも拘はらず Euclid 的ではなくなつて
居る．

$r = R\sin\chi$ と置くと

$$ds^2 = -R^2\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\} + \cos^2\chi\, c^2 dt^2$$

となり，更に

$$\begin{aligned} x &= R\sin\chi \sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\chi \sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\sin\chi \cos\theta \\ u &= R\cos\chi \cosh\left(\frac{ct}{R}\right) \\ v &= R\cos\chi \sinh\left(\frac{ct}{R}\right) \end{aligned}$$

と置くと．x, y, z, u, v の間には

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2 = R^2$$

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2 + dv^2$$

となる．

これは ~~五~~ de Sitter の宇宙は五次元の
Euclid 空間中の半径 R の四次元の球面
(hypersphere) と見做し得る．
但し、~~時間の軸~~ v^2 の項は他と符號を異

にして現はれるから、真の Euclid 空間ではない．(むしろ
五次元の Minkowski 空間といふべきである)
この~~意~~意味で 球状空間 Spherical World
といふ． 時間の方も空間と同じくなつて居る．
そして空間までも限つて R と閉ぢてはゐない
のである．

§12. 膨脹宇宙 Expanding Universe

以前は線要素

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + e^{\nu}c^2dt^2$$

に出て来る λ, ν が時間に無関係であると考へた。

所が近年 Wilson山の100吋反射望遠鏡による観測の結果、遠方の星雲の ~~距離が~~ ~~見出されたが~~。(約1億光年程度の) の模様までわかる様になつたが。Hubble はそれ等の遠方の星から出て来るスペクトル線が赤方にずれて居ること、そして ~~波長の~~ 其の差 Δλ は

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

は星雲の距離に比例して居る。

これを Doppler 効果と解釈すれば、星雲は凡て地球から遠ざかり、その速さは距離に比例することになる。これを Hubble の法則という。

所が de Sitter 宇宙では云はゞ斯様な赤方変移が予想されるのであるが、その代り物質密度が0になる欠点がある。これに反

して Einstein 宇宙では物質は存在するが赤方変移はない筈である。

そこでもつと一般な非静的宇宙 (non-static Universe) を考へることが出来ればよい。(Friedmann, Lemaître 等)

そこで宇宙が空間的に一様、等方的で、~~時間を定めても線要素が~~ 其の速さはどの track に沿ふても、等方(向きには)的に一様だとすると、

線要素は

$$ds^2 = -R^2(t)\{d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta\, d\varphi^2\} + F^2(\chi,t)dt^2$$

なる形に書ける

但し、χ は $r = R\sin\chi$ に相当する座標である

これから~~して~~、之を重力場方程式に入れると、

静的宇宙としては上記 Einstein 及び de Sitter の宇宙丈が出て来る。

非静的宇宙としては色んなものが考へられるが、~~例へば Einstein の~~ 常に $F(\chi,t)$ は一定の場合である

R(t) が時間と共に増す場合である

そして 特に $p=0$ ~~とした~~ の場合には、
Einsteinの宇宙から出発して 漸次膨脹して de Sitter に到るが如き解が得られる（$t=\infty$にて）。これを Lemaître の膨脹宇宙という。これによって Hubbleの法則は説明出来る。

しかし 理論の方からは他に色々な解が可能であり、一般相対律以外の方面からも Hubbleの法則を説明することは不可能ではない。宇宙論の問題は未だ将来に多くを残している。

そして 当初の Einstein宇宙の半径を R_e とすると、

$$R_e \sim 10^{27}\,\mathrm{cm}$$

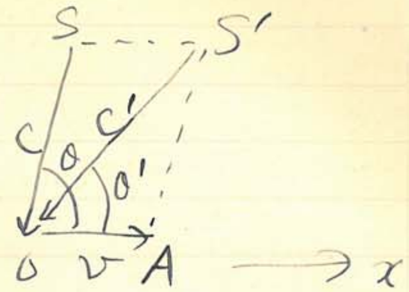
で 現在の宇宙の半径は

$$R \sim 10^{28}\,\mathrm{cm}$$

即ち約10倍位膨脹している。

附録

§ 光行差



観測者が v なる速度を持って動いて居れば、Sなる方向から来る光はS'の方向に見える。

$$\Delta\theta = \theta - \theta'$$

を光行差の角 或は単に光行差という。
図から考えれば

$$c'\cos\theta' = c\cos\theta + v$$

$$c'\sin\theta' = c\sin\theta$$

$$\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + k} \qquad k = \frac{v}{c}.$$

$$\theta - \theta' = k\sin\theta - \frac{1}{2}k^2\sin 2\theta + \cdots$$

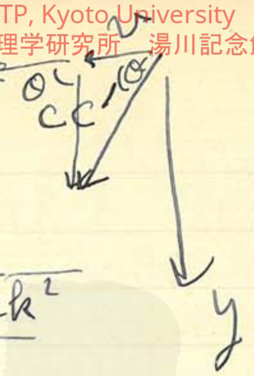
相対論によれば、

$$c_x = \frac{c'_x + v}{1 + \frac{c'_x v}{c^2}}$$

$$c_y = \frac{c'_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{c'_x v}{c^2}}$$

$$\left(c_z = \frac{c'_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{c'_x v}{c^2}}\right)$$

$$\tan\theta = \cancel{\frac{c'_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c'_x + v}} =$$



$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$c\cos\theta = \frac{c'\cos\theta' \mp v}{1 \mp \frac{c'v}{c^2}\cos\theta'}$$

$$c\sin\theta = \frac{c'\sin\theta'\sqrt{1-k^2}}{1 \pm \frac{c'v}{c^2}\cos\theta'}$$

$$\cancel{c'\left(\frac{v}{c}\cos\theta'\cos\theta - 1\right)}$$

$$c'\cos\theta'\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right) = c\cos\theta + v.$$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta'\,\frac{\cos\theta+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}}{1 - \frac{v}{c}\,\frac{\cos\theta+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}}\sqrt{1-k^2}$$

$$= \frac{\tan\theta'(\cos\theta+k)}{1+k\cos\theta - k\cos\theta - k^2}\sqrt{1-k^2}$$

$$= \frac{\tan\theta'(\cos\theta+k)}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos\theta = \cancel{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}\ \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x'}{1-x'^2}\,\frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}+k\right)}{\sqrt{1-k^2}}$$

59

$$\cancel{2x=}$$

$$(1-x'^2)x = \frac{x'(1-x^2+k+kx^2)}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$xx'^2 + \frac{(1+k)-(1-k)x^2}{\sqrt{1-k^2}}x' - x = 0$$

$$\cancel{x' = \frac{\sqrt{1-k^2}}{2\{(1-k)-(1+k)x^2\}}}$$

$$x' = \frac{1}{2x}\left(-\frac{(1+k)-(1-k)x^2}{\sqrt{1-k^2}} \pm \sqrt{\frac{\{(1+k)-(1-k)x^2\}^2}{1-k^2}+4x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2x}\left(- \cdots \pm \sqrt{\frac{(1+k)^2+2(1-k^2)x^2+(1-k)^2x^4}{(1-k^2)}}\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\pm\{(1+k)+(1-k)x^2\}}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}x}\left(\cancel{\frac{-(1+k)}{\sqrt{1-k^2}}},\ \frac{(1-k)x^2}{\sqrt{1-k^2}}\right)$$

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\tan\frac{\theta}{2}$$

従って $\theta - \theta' = k\sin\theta - \underline{\frac{1}{4}k^2\sin 2\theta} + \cdots$

即ち古典論と相対論の差は $\frac{1}{4}k^2\sin 2\theta$ である。
太陽のまわりを地球が公転するために恒星の位置は一年を周期として変化する。その場合、$k = 20''.47$.
$k^2 = 0''.0020$ となり、天文学の今日の精度では判定が困難である。

§ Einstein効果.
理論値 $E = 1''.745$

			E(実験値)
英	1919	ソブラル	1".98
	1919	プリンシーペ	1.61
米	1922	コルジロ ダウンス	1.77
	1922	ワラール	1.77
	1922	〃	2.2
	1922	〃	1.82
		同上直し.	2.1
独	1929	タケンゴン	2.24
日	1936	北海道(小清水)	2.13 1.28

相対性量子力学

昭和十六年一月 — 三月

I. Spinor ~~解~~計算法 ~~(One b~~ (単体問題)

1. Dirac, Maxwell
2. Spinor
3. Mesotron
4. Generalized Wave Equations

II. 場の量子化 (多体問題)

5. Heisenberg-Pauli
6. General Theory
   (Spin-Statistics)