SPECIAL

NOTE-BOOK

量子力學

Vol I.

1932

秀樹

會志同

是マデニ於テハ困難ハイツモ continuum ニ関スル場合ニ現ハレテヰル。即チ 系 system ヲ形作ッテヰル要素ナ fundamental state ノ数ガ ~~discrete~~ discrete set ナラ enumerable ナラズ continuum ニナル場合、或ハ system ヲ specify スル dynamical variables ノ数ガ enumerable ナラズ continuum ニナル場合デアル。

此ノ原因ハ

第一章ニ於テハ physical ナ consideration カラ出発シテ ~~[illegible]~~ 種々ナ概念ヲ導入シタガ、第二章ニ於テ数学的ニ之ヲ解ク為ニ純化ノ概念ガドンナ物理的概念ニ当ルカ 之ヲ解決シテ[illegible] 方針ヲトル方ガ間違ヒガ少イト考ヘラレル。

Introduction

量子力学ノ一般的ナ理論ガ確立セラレ、多クノ方面ニ対スル應用ガ充分ナ成功ヲ収メ得タ今日ニ於テハ、~~量~~量子力学ノ大体ヲ述ベルトイフコトハサマデ困難ナコトデハナイ。之ヲ創リ出シタ人々ノ苦心ト相比ブベカラザル程容易デアルカモシレマセンガ。~~併~~ Newton ニ就イテ Kant ガ述ベル如ク、斯学ノ天才ノ創造ノ努力ノ中ニサヘモ、我々デモガ後ニ随イテ考ヘテ理解出来ナイ様ナモノハ一ツモナイノデアル。唯我々ガ量子論ガ古典論ニ比シテ理解ノ困難ナコトヲ感ズルノハ、数学的ナ様式(scheme)ト之ニ対スル物理的ナ意味トノ間ノ関係ガ古典論ニ於ケル程自明的、直接的デナイ為デアル。コレハ吾々ノ常識トヨリ一致シテ居ル古典的ナ諸概念ヲ量子論ニ於テソノママ適用シ得ナイコトニ~~起因~~関聯シテ居ル。コノ点ニ特別ナ注意ヲ払ヒサヘスレバ、一般ノ理論ヲ理解スルニモ、又特殊ノ問題ニ対スル應用ニ当ッテモ、~~大シタ障リヲ生ズルコトハナイデアラウ。~~ 大ナル誤ヲ犯スコトハナイデアラウ。

一体理論トイフモノハ二十日鼠ノ様ナモノデ、九ツノ穴ヲ通リ抜ケテモ、十番目デヒッカカル、ト Voltaire ガイッテ居ル様ニ、古来幾多ノ理論ノ内デ十番目ノ穴ニヒッカカラナカッタモノガ一ツデモアッタラウカ、ト思ハレ~~アル~~ル。classical dynamics ヤ classical electrodynamics ガ天体ノ運行ヤ、地上ニ起ル日常的範囲ノ諸現象ニ対シテアレ程迄見事ナ説明ヲ与ヘ得タモノガ、一歩原子内ノ世界ニ足ヲ踏ミ入レルト、至ル所デ困難ニ遭遇

「理論ノ観点ヲ変ヘ~~ナケレバナラヌ~~ネバナラヌ場合ニハ理論ノ適用範囲ガ
限定~~サレルコト~~サレルト同時ニ、更ニ適用範囲ノ広イ理論ヲ
作ル事ガ出来ルカモ知レヌ。

セネバナラナカッタ。コレニトッテカハッタ現在ノ量子力学ト
イヘドモ、ドウシテ同ジ運命ヲタドッテ、十数年ノ後ニ
昔話ニナイトイヘ~~マセウカ~~ヨウカ。実際今ハ今日ノ
量子力学ノ根本ニモ相対律的ナ理論ノ構成 (relativistic
theory, formulation) ト原子核ノ問題ノ解決トイフ
相関聯シタ二ツノ難問題ノ横ハッテ居ルコトヲ認メ
サルヲ得ナイノデアル。之ガ解決ニハ量子論的ナ概念ニ更ニ
重要ナ変更ヲ加ヘネバナラヌカ、或ハ数学的ナ形式ニ根本的ナ変化ヲ
行ハネバナラヌカ、恐ラクハ其ノ両方ヲ必要トスル~~デアラウ~~カモ
知レヌガ、イヅレニシテモ量子力学ハ~~完成サレネバ~~尚完成シタモノデハナイ
~~ナラヌモノデアル~~。

従ッテ書キ誌ヘテ見レバ理論ノ難点トイフモノノ本質
ヲハッキリト認識シ得ルナラバ、ソノ難点ハ半ハ打勝
タレタモノトイッテヨイデア~~リマセ~~ラウ。
~~ルビデス~~量子論ノ如キ量子力学ノ~~難点~~問題ニツイテハ二ツノ議論ノ段階
ニ分ケテ述ベル必要ガアルト思フガ、先ヅ第一ニ量子
力学ヲ建設スベキ出発点トシテ classical ナ理論ノ
有スル難点ハ如何ナルモノデアッタカヲ~~考ヘテ見~~明瞭ニシヨ
ウト思フ。

3

Chapter I. Physical Basis of the Quantum Theory

§1. Duality of wave and particle

我々ガ物理学ニ於テ使用シテ居ル言葉、概念トイフモノハ凡テ日常ノ経験ヲ基礎トシタモノデア~~リマス~~ル。ドコロデ我々ガ個々ノ実験ノ結果ヲソノマヽ信ゼヤウトスルトイフコトニ満足セズ多少デモ理論的ナ考察ヲ加ヘヤウトスルナラバ、我々ノ使フ言葉、概念トイフモノハ、個々ノ経験ヲ基礎トハシテ居テモ、既ニ之ヲ超越シテ一般的ナ意味ヲモツタモノトナラザルヲ得ナイノデア~~リマス~~ル。実際ニ於テ如何ナル実験物理学者ト雖モ個々ノ経験ヲソノマヽ伝ヘアラハス~~コト~~丈デ満足シテハ居ナイ。必ズ~~何等カノ意味ノ~~アル程度ノ理論的ナ考察ヲ加ヘテ居ルノデアル。例ヘバ実験物理学者ハ電子トイフ粒子ノ様ナモノヲ考ヘル。ソシテ~~霧箱~~電子ノ運動トシテ観測シ得ナイ場合ニ於テモ、或ル現象ニ於テ電子ノ運動ノ結果ト考ヘル。又光ヲ一種ノ波動ト考ヘル。之ハ既ニ一ツノ理論的ナ考察デア~~リマス~~ル。

Huygens
光ノ波動性ハ理論的考察ノ結果出テ来タ概念デアル

トコロガ、之ノ理論的ナ考察ニアラハレテ来ル概念ノ一般化ハ、シバシバ、吾々ノ経験ニヨツテ許サレル範囲ヲ越エ、遂ニ経験トドウシテモ一致シナイコトガハツキリト判ルニ至ツテ、ソノ概念又ハ理論体系ガ改変サレネバナラヌコトニナル。コレガツマリ理論ノ進歩ノ一ツノ型デア~~リマス~~ルガ、ソレナラバ、初メカラ実験ニヨツテ確カメラレナイ概念ヲ使ハナケレバイイトイフカモ知レヌガ、之ハ実ニ

エーテルト絶対空間ノ Bild ガ損ナハレル。

†勿論 Michelson ノ実験ニヨツテ直接知ラレルコトハ光ノ速サガ観測者ノ運動ニ無関係ニ一定デアルコトデアル。之カラ間接的ニ光速度以上ノ速度ガ存在シ得ナイトイフコトガ結論セラレルノデアル。光速度ノ一定ナルコト~~××~~ガ classical ナ速度ノ概念ニ反スル如ク classical ナ以前的空間（絶対空間）ノ概念ニモ一致シナイコトヲ~~基礎的ナ考ヘテモヨイ~~。ガ根拠ナクナツテ相対性ガ出来ルヤウニナツタ事ガ之ト矛盾ナイ。

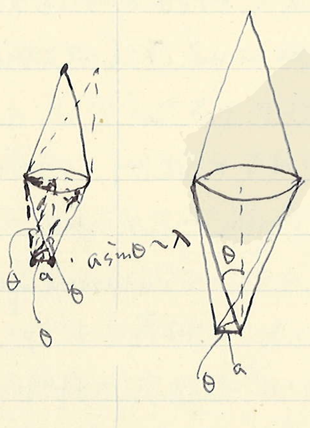
又同時ト云フ概念ノ相対性トイフコトカラ出発シテ考ヘテモヨイ。

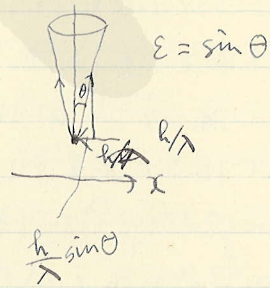
両側デアリ、一ツニツナガッテ居ナケレバ理論ヲ発展サセルコトハ到底不可能デアル。

従ッテ実際理論ヲ建設スルニアタッテハ、必ズシモ直接実験ノ検証ヲヘテヰナイ様ナ基本的概念ヲ導入シ、理論ヲ個々ノ場合ニアテハメタ結果ガ実験ト一致スルカドウカニヨッテ基本的概念ガ正当デアルカ~~ヰナイカ~~ドウカヲ決定スルヨリ他ハナイ訳デアラウ。

実験ノ検証ニヨッテ基本的概念ノ意義ヲ変更セラレル事ガアル。ソノ手近ナ例ハ~~相対律デアッテ~~、光ノ速度ノ伝播ノ速サノ場合デアッテ、classical dynamics ニ於テハ、無限大ノ速サヲモッテ伝ハル signal ノ存在ガ暗ニ仮定サレテ居る。ソレカラシテ、速度トイフ概念ノ下ニハドンナ大キナ速度デモ考ヘラレルト仮定サレテ居ッタノガ、実験的ニ光ノ速度ヨリ大ナル速サハ自然界ニ存在シナイコトガ知ラレ、概念ノ意義ノ制限ガ必要トサレ、ソノ結果、新シイ概念ノ上ニ special relativity ノ理論ガ建設セラレルノデアルトイヘルデアラウ。

更ニ進ンデ一般相対律ノ立場カラ見レバ、凡テノ観測トイフモノハ二ツノ独立ナ出来事ノ時間、空間的一致 (raum-zeitliche Koinzidenz) ニ帰スルコトガ出来、コノ一致 (Zusammenfallen) ハ異ナル観測者ノ時間空間的記述ニアラハレル相違ニヨッテ動カサレヌモノデアル。一般相対性ノ理論ハ光速度ヲ非常ニ大、重力常数ヲ非常ニ小ト見ル場合ニハ classical ナ記述ノ


θ
a
θ
θ
a sinθ ~ λ
θ
θ
a


ε = sin θ
θ
h/λ
x
h/λ sinθ

任意ト一致スル。相對性理論デハ從ッテ常識的ナ概念 例ヘバ尺度 Maßstäbe, Uhren (時計) 等ノ概念ガ批判サレナケレバナラナイガ、只世界ヲ Subjekt ト Objekt ニ分ケルニ就イテハ ~~考~~、因果律ガ正確ニアテハマラナイト (イフコトハ) 全然從來ノ概念ヲ (イフコトガ生ズル) ナイノデアル。此ノ點デハ Subjekt ト Objekt ニ分ケラルルガ、(ドウカ) 疑ハシイ。觀測 Beobachtung トイフ概念ヲ classical ナ意味ニ用ヰテヨイカドウカ。又此ノ一ツ 相當ナ關係ガ一致トイフコト コレガ Atomphysik ニ於テ問題トナル。

トイフノハ 原子的現象ノ觀測ニ於テハ 觀測サレル ~~物理的ナ量ト~~ 觀測スベキ對象ト觀測スル機械、手段トノ間ノ相互作用ノ影響ガ最早無視シ得ズ ~~又相互~~ 又制御スルコトガ不可能デアルカラデアル。(nicht kontrollierbar) ナ ツマリ 之等ノ場合ニ於テハ觀測サレル對象ト觀 ~~觀測トイフコト~~ 測ルニ用ヰル手段 ~~ニ物理的~~ トガ大體同ジ order ノモノデアルカラデアル。例ヘバ ~~電子~~ ニ光子的方法デ (電子ノ) 位置ヲ決メヨウトスル場合ニハ convergent ray ヲ使フ。~~Microscop~~ 光ノ波長ヲ λ、Microscope ノ numerical aperture ヲ ε トスル。resolving power ハ $\frac{\lambda}{2\varepsilon}$ デアル。此ノ時位置ノ測定ノ Genauigkeit uncertainty ハ

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{2\varepsilon}$$

所デ此ノ場合 ~~電子ノ運動量ヲ精ヘテ見ルニ~~ 電子ハ ~~光電子~~ ($\frac{h}{\lambda}$ ノ order ノ) ~~ニヨッテ~~ Compton-Rückstoß (recoil) ヲ受ケル。

従ッテ x-方向ノ運動量ノ Uncertainty ハ

$$\Delta p_x \sim 2\frac{h}{\lambda}\varepsilon$$

トナル。

故ニ　$\Delta x \, \Delta p_x \sim h$　(a)

トナル。~~電子ノ場合ニ於テハ mass ガ非常ニ小サイカラ~~ヲ之ハ 電子ノ位置ト運動量ヲ同時ニ精確ニ測リ得ナイコトガ不可能デアルコトヲ示シテヰル。之ハ観測ノ手段デアル光ノ電子ニ対スル作用ガ neg ヲ許シ得ズ又之ヲ除去シ得ルコトガ出来ナイトコロカラ来テヰル。

~~カヽル関係ハ~~ コレト同様ナ考察ヲ種々ノ実験ニツイテ行ッテ見レバ イツモ (a) ノ関係ガ成立シテヰルコトガ確カメ出来ル。~~ソコデ~~ 此ノ関係ヲ出スノニ 我々ハ 光ノ二重性、波動ト粒子ノ二重性ヲ使ッテヰルノデアル。

即チ resolving power ハ ~~wave~~ 光ヲ波ト考ヘテ出シ、Compton recoil ニハ 光量子ノ考ヘヲ使ッテ ~~来タノ~~ ヰルノデアル。

~~然ルニ~~ 光ノミナラズ 電子、Proton 等ノ material particle ニ於テモ 粒子ト波動ノ二重性ノ存在シテヰルコトガ実験的ニ確カメラレテヰル。即チ例ヘバ Wilson chamber ニオケル α-particle, β-particle ノ track ハ particle ノ ~~image~~ 運動トシテ説明サレルガ、之ニ反シテ Electron cathode ray, canal ray (proton) ノ crystal デ scatter サレテ生ズル X-ray ノ場合ト類似ノ fringe ハ、wave ノ interference

I. Introduction (9頁)

II. 量子論ニオケル基礎概念ノ構造ト其ノ數學的形式化.

§ 1. State, Principle of superposition (5頁半)

§ 2. The Polarization of photon (Illustration) (4頁)

§ 3. Observation. Compatibility of Observation (2頁半)

§ 4. Algebra of States (7頁半)

§ 5. Algebra of Observables (6頁 1/4)

§ 6.1. Eigenwertproblem Definitions (2頁 2/3)

§ 6.2 Expansion Theorem (3頁 1/2)

§ 6.3 Case in which the ~~state~~ set of eigenvalues forms the continuous set. Dirac's δ-function. (3頁)

§ 6.4. Function of Observables (5頁 1/3)

§ 6.5 Simultaneous eigenstates (4頁半)

Ergänzung (3頁半)

1. Any real observable, whose eigenvalues form the enumerable set, can be uniquely expressed in the form $\alpha = \sum a_i E_i$

where a_i are different eigenvalues of α and the system of E_i satisfies the following condition

$$E_i E_k = \delta_{ik} E_i \qquad 1 = \sum_i E_i$$

2. If α and β are commutable, the the suitably chosen (if there exists an "Entartung", then the simultaneous eigenstates are not uniquely determined)

(63)

set of the simultaneous eigenstates of α and β forms the set of all eigenstates of α and also the set of all eigenstates of β in the same time.

3, $\alpha\beta = \beta\alpha$ トシ

$\alpha = \sum a_i E_i$; $\beta = \sum b_i F_i$ ニ展開スレバ

some $E_i = F_k + F_l + \cdots$

some $F_i = E_p + E_q + \cdots$

トナル。

§6. Physical Interpretation (7½枚)

III, Representation of states and observables, The transformation theory

§1, Definition (2½ ⅔)

§2, Orthogonal Repres. (2½枚)

§3, Repres. referred to the system of eigenstates as fundamental φs. (3½枚)

§4, Transf. theory, canonical Transf. (6½枚)

IV, Dynamics. (nonrelativistic)

§1, Introductory Remark (1½ ⅔)

§2, Poisson Brackets. (P.B.) (2½)

§3, Eq. of motion and quantum condition (2½)

§ 4. Several Rep. and their Transf. Functions. (7頁)
§ 5. Schrödinger ~~wave~~ eq. (2頁 1/3)
§ 6. Heisenberg's Matrices (3頁 1/4)
§ 7. Spin Variables (~~5~~2頁 3/4)

V. Examples, Application and Perturbation Theory
§ 1. Free motion (4頁)
§ 2. Wave Packet, Heisenbergsche Unbestimmtheits-rel. (5頁)
§ 3. Method of Variation of Constant in the Perturb. Theory. (5頁 1/3)

VI. Diracs Theory of Radiation
§ 1. Hohlraumstrahlung in die klassische Theorie (3頁)
§ 2. 'Quantelung' of the el. mg. field (1頁半)
§ 3. Interaction of Matter and Radiation (1頁 1/3)
§ 4. Absorption and Emission (4頁)

I. (9頁)
II. (56頁)
III. (15頁)
IV (24頁)
V. (14頁半)
VI (10頁)

128頁

6 — 7.頁

Chapter 1. General Considerations on the Nature of Observation

Process of Construction of theory

我々ガ microscopic phenomena ヲ ~~完全ニ説明~~ ニ適合スル理論ノ体系ヲ構成シヨウトスル場合ニ、我々ノ知ッテヰル実験的知識ハ凡テ理論ニ対シテ ~~構築~~ 構成ノ手懸リヲ与ヘルト同時ニ之ニ対シテ或ル制限ヲ課シテ居ル。然シナガラ実際ニ之ヲ構成スルニ当ッテハ ~~ナルベク~~ 之等ヲ整理シテ出来ル限リ単純ナル前提ヲ仮定シ、ソレニ適合スル様ニ理論ヲ作リ上ゲ、ソレガアラユル実験的知識ニ凡テアテハマルカドウカヲ験スヨリ他ハナイノデアル。

我々ノ実験的知識、即チ種々ナル観測ノ結果ハ究極ニ於テモ或ル数値デアラハサレル。従ッテ理論ニ ~~取扱~~ 於テモ常ニ数学的ナ ~~数量~~ 性質ヲモツ量或ハ、何等カノ意味ニ於テ数値ト関係アル symbol ガ取扱ハレネバナラヌ。而シテ symbol ニ物理的ナ概念ヲ対応セシメルコトニヨリ、実験ニヨッテ知ラレル物理的概念ノ間ノ種々ナル関係ハ symbol ノ間ノ関係トシテアラハサレル。我等ハソノ基本的ナル或ルモノヲ axiom トシテ ~~ソレカラ~~ ~~物理~~ symbolical algebra or symbolical analysis ニヨッテ ~~或ル~~ ~~他~~ 関係式ヲ導ク。之等ノアルモノハ物理的概念トノ対応ニヨリ、物理的事実ト対応 ~~シテ居ルコト~~ モ知ラレテヰル。実験ハコノ対応ガ常ニ可能ナラ行ハレルコトヲ期待シ、之ガ ~~行ハ~~ 完全ニ行ハレテヰル限リニ於テ我々ノ理論ハ正シイモノトナサレル。

ソレ ~~理論ニヨッテ得ラレナイ~~、~~此等~~ 物理的事実トノ対応関係

ニ帰結ガ確証サレテヰルナラバ、ソノ理論ハアヤマッテヰルガ、
アヤマリノ原因ガドコカラクルカヲ知ッテ ~~基本仮定、数学的~~
解釈ノ仕方ニアヤマリガアルカモ知レヌ。ソレ等ガ 又ハ基本仮定、数学的方法ヲ
スル関係オコッテヰル。故ニ甚ダシイトキハ基本的仮定ト
symbolical calculus ニ於ケル axiom トノ対応関係ガ
アヤマッテヰルカモ知レヌ。又 calculus (process ノ中ニ) 物理的概念トノ
関係ガ明カデナク、十分意味ノ解スベカラザルモノガ
含マレテヰルカモ知レヌ。
~~殊ニ最モ重要ナノハ~~ 基本的ナ実験的事実 (ソレハモノヲ) ヲ説明スル方法ハ
取扱イ方ヲ検討スルコトデアッテ、今日ノ物理学ニ於ケル
量子力学ニヨッテモ完全ニ説明ニ成功シタトハ言ヘナイノ
~~根本ノ axiom ニヨッテ又ハ~~ symbolical ナ ~~axiom ヲ以テ~~
ソレ等ノ事実ノ根本的ナ特徴ヲ捉ヘテヰル
アラハスコトガ不可能ナノデアル。又、

物理的ナ理論
積ミ上ゲル所ノ ~~量子力学~~ ヲ構成スル上ニ根本ノ方針ガ
分カッテヰルワケデアル。ソレデ量子力学ノ場合ニ於テハドウデアルカ
トイフト、既ニ古典力学ガ確立シテ居テ、ソノ適用範囲モ
ホボワカッテヰルノデアルカラ、吾々ハ古典力学ノ適用範囲
外ニアル現象ヲ考ヘテ来テ之ヲ symbolical ニ
アラハス工夫サヘスレバヨイ。之ガ古典力学ノ適用範囲内ニ
アルトキ一致シ、而モソレヨリ適用範囲ノ広イモノデナケレバ
ナラヌ。

21:言葉ニオイテ
~~カクシテ~~ 量子論ニ於テハ classical ナ wave ノ概念及ビ particle ノ概念ガイヅレモ完全ニアテハマラヌ又持ツ
根本ヲ~~考ヘテ~~取扱ハレル。

此ノ~~計算~~構成方法ニ於テハ symbol ニ課セラレル restriction
ニ無用ナモノガ存在シナイタメニ 実際ニ於テ適当ナ用範囲ヲモツ
ナラシテモ良イカモシレヌ。又或ハ物理的考察ノ要求スル
restriction ヲ充分満足シテヰナイ。又ハ restriction ガアリスギルタメ
ニ物理的ニ存在シ得ル結果ヲモ除外シテヰルカモ
シレヌ。~~或ハ又~~ symbolical ナ計算ニ~~必要ナ~~ process ヲ 不必要ナ
~~不必要ナモノ~~ 含マセテ取入レテヰルカモ知レヌ 又
或ハ又 symbolical ナ計算ニ必要ナ process ガ除外サレテ
ヰナイトモ限ラナイカモシレヌ。

理論トイフモノガ、カクノ如キニカクノ如キ結果ガ生ズルトイフ
コトヲ示ス数学的形式ヲ與ヘルトイフダケニ止マル
ベキカ、或ハ経験ニ超越シタ實在ヲ作リ出スベキニ至ル
ヲ求ムベキカハ其ノ人ノ趣味デアルガ、然シ
理論ガ深ク内部ニ立入ルニ従ッテ實在ヲ作リ出スコト
ハ困難トナリ、従ッテ高級ナ満足ヲ得ルコトハ出来ナ
キニ至ルノデアル。

数学的形式ヲ完全ニ知ラントスレバ、従ッテ困難トナル
カラ、数学的形式ガ常ニ物理的意味ヲ以テ把握サレ、構成
サレ~~ル~~、両者ガイツモ平行~~シ~~(併進シテ行ク)シテユクコトトナル。

以上述ベタ所ニヨリ、量子論ノ立場カラ見レバ(classicalナ)古典的理論ニ於ケル諸概念ガ如何ニ変形サレ、又制限サレネバナラヌカガワカッタコトヽ思フガ、然ラバ実際 microscopic ナ現象ニ適合スル理論ヲ~~建設~~ formulate スルニハドウスレバヨイカトイフコトガ次ノ問題デアル。

ソレニハ先ヅ ~~ナマデ~~ 吾々ハ物理的ナ qualitive ナ考察ニヨッテ大体ノ方針ヲ決メルコトヽナル。

~~実際~~ 歴史的ニ見レバ次ノ三ツノ ~~建設的~~ formulation ガ試ミラレタ。

第一ハ Heisenberg (Born Jordan) ニヨッテ企テラレタ Matrix Mechanics デアッテ、ソノ出発点ハ

独創的な考へは独創的な頭から出るが 之を理解することは
[illegible]個人にとつても決して困難なことではない。
Kant が Newton に就て言つた。
Hier gilt, was Kant in bezug auf Newton gesagt hat, daß auch in den höchsten Erzeugnissen des wissenschaftlichen Geistes nichts ist, was nicht ein jeder nachdenken und begreifen könnte

注リノオワリニ

我々ノ使ッテヰル言葉ガ日常ノ経験カラ生ズルモノニ限ラレテヰルカラデハナク、むしろ我々ガ常ニ~~[illegible]~~僅ニ一ツノ[illegible]性質ヲ意識スル外ナイ Bild トシテモッテヰル。凡テノ現象ヲソレニ結ビツケ~~[illegible]~~~~カラネバナラヌ~~。アルモノハ粒子的ト考ヘ、アルモノハ波ト Hilfsgriffe ソノ結ビツキカラ[illegible]

ト考ヘ、[illegible]実際的現象ヲ観測スル事ナシニハ外界ノ一ツノ面トシテ考ヘテ行ケル[illegible]。

結局 phenomena ~~Observation~~ ガ一ツノ Weltbeziehung ノ種々ノ Darstellung デアリ得ル。而シテソノ Weltbeziehung ソノモノガ如何ナルモノデアルカヲ考ヘルコトハ物理学ノ範囲~~外デアル~~。従ッテ理論ナルモノハカカリテル Weltbeziehung ヲ（ソレガ[illegible]ノ意識ニ入ッテ来ル[illegible]）

仮定セズシテハ出来ナイ。我々ハ[illegible] Eigenschaft ヲモッタ Raum-Zeit ヲ zugrund liegen スルモノト考ヘル。

物理ノ理論ヲ[illegible]。

ソシテ二ツノ Darstellung ガ同一ノ Weltbeziehung ニ関シテヰルナラバ ~~[illegible]~~ 両者ノ間ニハ一定ノ関係ガナケレバナラナイ[illegible]関係ガ[illegible]。（wave ト particle ノ gleichberechtigkeit）

General Plan

1. Physical Basis of the Quantum Theory 4.
2. ~~Transformation Theory~~ Algebra of . .
3. Representation of . .
4. Formulation of Nonrelativistic Quantum mechanics
4. Equation of motion and Quantum Conditions
6. General Theory of the Electron
5. Perturbation Theory
7. Theory of Radiation
8. ~~Theory~~ of Quantum Statistics
9. Theory of atoms with many Electrons
10. Relativistic ~~Theory~~ Quantum Theory and the Theory of Atomic Nucleus

~~1.~~
~~§1.~~

① §2. General Considerations on the Nature of Observation

§1. Uncertainty Principle

§2. Principle of Superposition

② Symbolic Algebra of States and Observables

第一章ハ physical ナ立場カラ state 及ビ observable ニ就イテ色々ナ要求ヲ述ベテヰル。第二章ニ於テ之等ノ要求ヲ満ス様ナ symbolical ノ system ヲ考ヘル。コノ場合 physical ナ要求ノ最小限ノ ~~math~~ necessary ナモノカラ他ノ要求ガ必然的ニ出テクル如キモノデアルコトガ望マシイ。

Introduction

理論トイフモノハ二十日鼠ノ様ナモノデ、九ツノ穴ヲ通リ抜ケテモ、十番目デヒッカヽル ト Voltaire ガイッタサウデアリマスガ、昔カラ幾多ノ理論ノ内大部分ガ穴ニヒッカヽッテ、~~他ノ理論ニヨッテ~~トッテカハラレネバナラ~~ナカッタノデアルデセウカ~~。ヌケタモノガアリマセウカ。classical dynamics ト classical electrodynamics ガ天体ノ運動ヤ地上ニ起ル種々雑多ノ物理現象ニ対シテアレ程見事ナ説明ヲ与ヘルコトガ出来タモノガ、一方原子ノ世界ニ入ルト、至ル所デ困難ニ遭遇セネバナラナカッタ。コレニトッテカハッタ~~量子~~今日ノ量子力学トイヘドモ、ドウシテ此ノ運命ヲタドッテ、十番目ノ穴ニ遭遇シナイトイヘマセウカ。実際我々ハ今日ノ量子力学ノ前途ニモ大キナ障害ノ横ハッテヰルノヲ認メネバナラヌノデアリマス。

併シナガラ、理論ノ難点ノイツモ所在ハハッキリト意識サレテ居ルナラバ、ソノ難点ハ半分解決サレタモノト云ッテヨイデアリマセウ。

今日量子力学ノ新シイ難点ガ~~何デアル~~ドレナモノデアルカハ之ノ講義ノ最後ニ於テ述ベルコトトシ、先ヅ之ニ量子力学ヲ建設スベキ出発点トシテ classical ナ理論ノ有スル難点ハ如何ナルモノデアッタカヲ考ヘテ見ヨウト思フ。

量子力学ノ一般的ナ理論ガ確立セラレ、多クノ方面ニ於ケル応用ガ充分ナ成功ヲ収メ得ル今日ニ於テハ、量子力学ノ大体ヲ~~木流~~述ヘルトイフコトハサマデ困難ナコトデ~~アリマ~~モナイ。試ニ Newton ニ於テ Kant ガ述ベル如ク、科学ノ天才ノ創意ノ所産ノ中ニ~~於テ其~~サヘモ、誰デモガ後ヲ追ッテ随行シテ理解出来ナイ様ナモノハ一ツモナイノデアル。

唯我々ガ量子論ニ~~於テ~~ガ、古典論ニ比シテ理解ノ困難ヲ感ズルノハ数学的ナ形式 scheme ト之ニ対スル物理的ナ意味トノ間ノ関係ガ古典論ニ於ケル程自明的、直接的デナイ点ニアル。~~此ノ点ニ於ケル注~~意シナケレバ其レノ常識ト一致シテ居ル古典的ナ~~概念~~論ヲ量子論ニ於テソノママ~~無制限ニ~~適用スルコトガ不可能ナコトニ関係シテ居ル。　此ノ点ニ於ケル注意ヲ払ヒサヘスレバ、一般ノ理論ノ理解ニモ、特殊ノ問題ニ対スル応用ニ当ッテモ大キナ誤リヲ生ズルコトハナイデアラウ。

§ 2. Statistical Property of Observation

Chapter I. Physical Basis of the Quantum Theory

§1. Duality of wave and particle

我々ガ物理学ニ於テ使用シテ居ル言葉、概念ト云フモノハ、
凡テ日常ノ経験ヲ基礎トシタモノデアリマス。トコロデ我々ガ~~経~~個々ノ
実験ノ結果ヲソノママ、~~記~~ 化アラムストイフコトニ満足セズ、
多少デモ理論的ナ考察ヲ加ヘヨウトスルナラバ、我々ノ使フ
言葉、概念ト云フモノハ ~~経験~~ 個々ノ経験ヲ基礎トハシテヰテ
モ、ソレヲ超越シテ一般的ナ意味ヲモッタモノトナラザルヲ得ナイ
ノデアリマス。実際ハ如何ナル実験的理論ト雖モ ~~個々ノ経験ヲソノママ、化アラムストイフ、羅~~
羅列スルダケデハ満足出来ズ、何ガシカノ抽象的理論的考察ヲ
加ヘテ居ルノデアリマス。
トコロガ、コノ理論的考察ニアラハレテ来ル概念ノ一般~~的~~性ハ、
シラズ~~識~~シラズノ内ニ経験ニヨッテ許サレル
範囲ヲ越エ、~~全ク~~ 遂ニ経験トドウシテモ一致シナイ
コトガ起リ得ルノデアッテ、コノ理論ハ捨テ、アラタニ改造サレ
ネバナラヌ訳デアル。コレガツマリ理論ノ進歩ト云フデアリ
~~マシテ~~マスガ、ソレナラバ初メカラ実験ニヨッテ確カメラレル
概念ダケヲ使ヘバヨイトイヘルカモシレマセンガ、ソレハ実ニ困難
ナコトデアリマシテ、~~理論~~一々ソレニヨッテ来タナラバ理論
ヲ発展サセルコトハ到底不可能デアリマス。
ソレデ実際理論ヲ建設スル上ニアタッテハ、必ズシモ実験ノ
検証ヲヘテヰナイ様ナ多クノ概念ヲ導入シ、理論ヲ個々
ノ場合ニアテハメタ結果ガ基本的 ~~基本ノ~~ 経験ト一致スルカ否カ
ニヨッテ基本的概念ガ正シイカドウカヲ決定スル他

ハナイデアリマセウ。

2ノ最モ手近ナ例ハ相対律ノ場合ヲ考ヘテ見マスト、classical dynamics ニ於テハ無限大ノ速度ヲ以テ傳ハル signal ノ存在ヲ暗ニ假定シテ居~~タノデアリマシテ~~リ。併シ乍ラ、速度トイフ概念ノ中ニハドンナ大キナ速度デモ考ヘラレルト假定シテ居ルワケデスガ、實驗的ニ光ノ速度ヨリ大キナ速度ハ現象ニ存在シテ居ナイコトニ氣ヅイタノデ概念ノ變更、制限ガ必要トサレソノ結果新シイ概念ノ上ニ special relativity ノ理論ガ建設サレタノデアリマス。 general relativity ノ理論デハ更ニ進ンデ、時間空間ノ coincidence ナガ"

是レガ色々ナ観測、実験ノ結果ニ何等カノ意味ヲ与ヘヨウトスル
ニハ、是レハ多クノ場合デハ Bild (Image) ヲツクリマス。
例ヘバ Wilson ノ chamber ニ於テ Radioactive substance カラ出ル ray ヲ照射スレバ ~~condensed~~ Vapour ガ straight
~~α-ray 又ハ β-ray ガ~~
line ニ沿ツテ condense スル場合、之レ particle ガ chamber 内
ヲ、ノ straight line ニ沿ツテ走ツタト考ヘル。~~粒~~運動スル
α-ray, β-ray ニ対シテ
particle トイフ image ヲ作ルノデアリマス。
又 Materie strahlen ヲ Raumgitter ニ当テタ時
~~X~~-ray ノ場合ト同ジ様ナ Interference phenomena ヲ現ハスヲ得タ
様ナ時、是レハ Materie strahlen ニ対シ ~~wave~~ 空間的ニ
拡ガツタ之レ wave ノ image ト云フ作ルノデアリマス。
コノ場合 particle トイツテモ wave トイツテモ共ニ
classical ナ Bild、classical ナ概念ヲ以テイツテモ
出来ルモノデアリマスガ、classical ~~ニ~~ ニハ此ノ二ツノ概
念ハ非常ニカケハナレタモノデアツテ Materie ガ wave デ
アルト同時ニ particle デアルトイフコトハ classical ナ考ヘ方
カラハ到底理解出来ナイ事。
ソレデ我々ハ此ドチラノ概念モ或制限ニ使用シテハナラ
ヌ。或ル範囲内ニ於テハ ~~Wellen~~bild デモ差支ナイガ、
他ノ範囲内デハ Partikelbild デモサシツカヘナイトイフ
両概念ノ制限サレタ領域ヲモツテ居ルノデアラウト考ヘネ
バナラヌコトニナル。
モトヨリコノ両方ノ概念ヲツカツテ Bild ヲ新作リアゲルコトハ
不可能デハナイデアリマセウ。~~加之~~ 而シテ実際ニ於テハ

かゝるものにより実験はものを言ふと考へられるかもしれぬ。併し
理論物理学はいつまで進み得るか。

Problemstellung; 若シ我々ガ Compton Effectノ實驗ヲトリ、ソノ結果ヲ正確ニ~~觀測~~知ラレタ様ニ記述スルナラバ、一ツノ實驗ニヨツテアル electron ト アル photon ニツイテ アル~~瞬間~~ニオケル位置、及 Energy 運動量ヲ知リ得ルトイヘル。之ハ Unbestimmtheit relation ニ矛盾シハセヌカ？

之ハ誤解デアル

若シモ之アル~~瞬~~時 我々ハ electron ニツイテ アル瞬間ニオケル 位置及運動量ヲ同時ニ知ルコトガ可能ナリトシテモ、~~[illegible]~~ ソノ electron トイフコトモナシニ、又何時トモキメズ任意ニ位置及運動量ガ知ラレルコトハ可能デアル。

ト云ヘテヨイデアラウカ？

Heisenberg S.19 参照

~~[illegible]~~

1. アル量ノ「いわゆる固有値 (Eigenvalue Problem) ~~測定ヲ行フ時、如何ナル~~
wert problem

1. アル state ニ於テ アル量ヲ測定シタ時 実験ヲ行フタ結果ハ
ドウ分カレルカ、(Expansion Theorem)

1. アル state ト他ノ state トノ間ノ関係 (superposition principle) (representation)

1. 其ノ関係、相互ノ間ノ関係、representation 相互ノ関係 (transformation theory)

何ト何トニツイテ述ベレバヨイカヲ考ヘテオカウ.

$$\begin{cases} \phi'\psi\ ,\ \phi'\alpha\psi, \\ \phi\psi = \sum c_\nu \psi_\nu \qquad (c_\nu) \end{cases}$$

ARTIFICIAL D

D Artificial Disintegration

D Radioactivity

Scattering, Absorption .. of α

β

γ

Energy Level ~~of~~ α, … in ~~the~~ Proton nucleus

Auffassen

Bibliography of Quantum Mechanics

General Theory
Nonrelativistic Quantum Mechanics
Relativistic Quantum Mechanics

Nonrelativistic
General Theory.
Perturbation Theory.
~~Collision~~ Transformation Group.
Collision Problem
Quantum Statistics.

Theory of Electrons ~~Theory~~
Theory of Radiation
§ ~~Photo effect~~ general Theory, Emission, absorption, Dispersion
Hohlraum Strahlung,

Photoeffect, Auger effect, Raman effect
Compton Effect,
Assembly of Electrons. (Electrongas)
Atom
Stationary State, Energy Level, selection Rule,
Intensity Rule, Zeeman effect, Stark effect.
Resonance phenomena, Approximate Solution
Interaction between Atoms

Molecule

Stationary State, Energy Level, etc.

Assembly of Atoms.

~~Interaction Between Atoms~~

General Theory

~~Gas~~ Liquid

Crystal.

Electric and Magnetic Phenomena

Crystal: ~~Electron~~ Diffraction of Radiation and Matter by crystal, ~~Metallic Conduction.~~

~~Ferromag~~

Conduction, Dia, Para, Ferromagnetism

Optical Phenomena

Particles with large velocity

~~Theory of~~ Radioactive Disintegration

Nuclear Structure

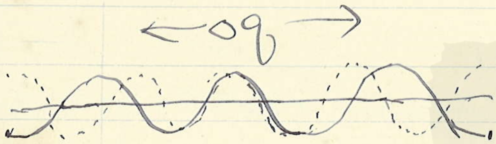
トシテ説明サレル。

「classical ナ particle ノ概念ト wave ノ概念トヲ統合シテ一ツノ概念一ツノ Bild ノ下ニ統一スルコトハ必ズシモ不可能デハナイデアラウ。併シナガラ~~概念~~ハ classical ナ諸概念ヲ離レルコトト思フ。[illegible]ノ結果ニ従ヘバ然シテヰル。而シテ我々ハ一見シテ anschaulich ナ Bild ハ忘レテシマッテ、経験的事実ヲ説明ニ出来ル抽象的数式ヲ構成スルコトニ~~論~~努力スル方ガ賢明デアラウ。」

カクノ如ク classical ニ見テ非常ニ異ナッタ二ツノ Bild wave ト particle ノ二ツノ Bild ヲ同一ノ対象ニ対シテ与ヘラレナケレバナラヌ理由イヅレノ Bild モ Elementarer ~~particle~~ Teilchen ノ Beschreibung ニ不完全デアル。ソレ故ニイヅレノ Bild モ Atomare Phenomene ニ対シテ[illegible]ニ適用スルコトヲ許サレル。Wellenbild ハ Partikelbild ニヨッテ、~~制限~~ P.B. ハ W.B. ニヨッテ相互ニ制限サレ合ッテヰルト考ヘネバナラヌ。

例 ~~Wellenbild ニ於テ~~ 自由電子ノ位置 Δq トイフ genauigkeit デ知ラレテヰル~~場~~トイフコトヲ Wellenbild デイヘバ、其ノ Wellenfunktion ガ Δq ノ order ノ範囲外デハ急激ニ小サクナッテヰルトイフコトデアル。其ノ Wellenfunktion ヲ $\lambda = \lambda_0$ ニ近イ波長ノ Wellen ノ Zusammensetzung ニヨッテ作ッタト見レバ（之ヲ Wellenpaket ト作ッタトスレバ）

$\frac{\Delta q}{\lambda_0} = n$ ナル時、Wellenlänge ノ Bereich $\Delta\lambda$ ハ



十年前ニハ吾々人間ノ知識ノ不完全、アラユル物理的ナ
測定ニ伴フ誤差ノ存在ヲ超越シテ居タ。即チ、誤差ハ
何等デモ減少サセ得ルモノト考ヘテ居タ。理想的ナ測定ガ
存在シ得ルコトハ疑ツテ居ナカツタ。然ルニHeisenbergニヨツテ
ノ見出シタUnbest. Rel.ハ吾々ニ対シテa prioriノlower
limitノ存在ヲ証明スルモノデアル。之ハ丁度Einstein
ニヨル速度ノupper limitノ存在ノ発見ニ比スベキモノデアル。

$$\frac{\Delta q}{\lambda_0 - \Delta\lambda} \gtrsim n+1$$

ヲ満足セネバナラヌ。

従ッテ
$$\frac{\Delta q \, \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \gtrsim 1$$

所ガ de Broglie ガ初メテ理論的ニ出シ、実験ニヨッテ確メラレタ様ニ 運動量 p ナル Electron ニcorrespondスル wave ノ波長ハ 光量子ノ場合ト同様ニ

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ヲ満足シテ居ル。従ッテ λ₀ノ附近デハ

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

$$\therefore \Delta p \, \Delta q \gtrsim h. \qquad (b)$$

カクシテ 電子ニ於ケル wave ト particle ノ二重性カラシテ 必然的ニ Ortmessung ト Impulsmessung ノ Unverträglichkeit ガ出テ来ル。

此ノ (b) (両者共(a)ト同一) ヲ Heisenberg ノ Unbestimmtheit-relation ト云フ。之ヲ更ニ一般ナ general schema
Wellenbild, ~~Parti~~ ノ両方カラ
カラ deduce スルコトハ後ニ示ス。

以上述ベタ如ク Atomare Phenomene ノ Beobachtung ニ際シテハ Beobachtungsmittel ノ Beobachtungsobjekt ニ対スル Rückwirkung ヲ無視スルコトガ出来ヌ。従ッテ ~~Beoba~~ Messungニ於ケル Ungenauigkeit ヲ無クスルコトガ出来ナイ。之ヲ elementares

Teilchen ~~ノ場合~~ ノ如キ Wellen-Partikel ノ二重性ト云フ立場ヨリ見レバ、~~二ノ ungenauigkeit ノ一般性ト併立性トガ明ナリトス~~。分ガ一般ニ ~~任意ノ dyn~~ Ortmessung ト ~~例ヘバ更ニ一般的ナ立場カラ見レバ~~ Impulsmessung ノ Genauigkeit ガ互ニ反比例シテ居ル事ガ明トナル。

之ニ由ッテ classical ナ Wellenbild モ Partikelbild モ共ニ microscopic, atomic phenomena ニ ~~適用スル際ニハ~~ ハ或ル限界(範囲)ヲモツテ居ル事ヲ意味スル。例ヘバ (a), (b) ノ Unbestimmtheit Relation ハ Partikeltheorie ノ諸々ノ概念ノ(適用)限界ヲ示スモノデアル。即チ (a), (b) ノ式ノ指定スル範囲ヲ越エテ精密ナ意味デ Ort, Geschwindigkeit 等ノ言葉ヲ使フ事ハ無意味デアル。コレハ意味ノ定マラヌ言葉ヲ使フノト同様デアル。

~~従来~~ 勿論 classical ナ particle ノ概念(Bild) ト wave ノ概念(Bild) トヲ統合シテ一ツノ概念一ツノ Bild ノ下ニ統一スル事ハ必ズシモ不可能デハナイデアラウ。シカシ此ノ概念ハ classical ナ諸概念ヲ離レル事遠ク、其ノ用ナル(言葉)ハ既ニ説明ニ窮スルデアラウ。ソコデ我々ハ一旦斯ル anschaulich ナ Bild ヲ捨テテ経験的事実ヲ説明スルニ必要ナ数学的形式ヲ構成スル事ニ努力スル方ガ賢明デアラウ。

§ 2. Statistical Property of Observation ~~Measurement of Microscopic phenomena~~

前節ニ於テ microscopic phenomena ニ於ケル観測ハ ~~...~~ uncertainty ヲ伴フコトヲ述ベタガ、ソノ uncertainty ノ性質ヲモット ~~厳密ニモット~~ 立入ツテ考察シテ見ヨウ。一般ニ観測ノ結果トシテハアル数値ガ与ヘラレルノデアルカラ、一ツノ dynamical system ニ於テアル dynamical variable ノアル瞬間ニ於ケル値ヲ測定スルナラバ(例ヘバ x-方向ノ momentum)ソレハ一ツノ数値デアタヘラレル。併シ其直後ニ於テ更ニ他ノ dynamical variable 例ヘバ x-方向ノ momentum ノ canonical conjugate デアル位置ノ x-component ヲ測定スルナラバソレハヤハリ一ツノ数値デアタヘラレルデアラウ。然ルニ前節ニ述ベタ uncertainty ~~Principle~~ relation ニヨルト二ツノ測定ノ間ノ時間ガ非常ニ短カクナルナラバ後ノ測定ヲ行フ直前ノ瞬間ニ於ケル momentum ノ値ハ殆ンド確カニ測定サレタ値ニアルコトガ判ル。從テ位置ノ x-component ノ測定値ノ ~~確定~~ 不確実性ハ非常ニ大デナケレバナラヌ。即チ第二ノ測定ノ結果ハ何回モクリカヘセバ非常ニ違ツタ色々ナ値ヲ与ヘルデアラウ。~~ソシテ殊ニ~~ 二ツノ測定ノ間ノ時間ガ大ナルナラバ、~~結果ハ…~~ 後ノ測定ノ不確実性モ増大シ、多数回測定ヲ行ヘバ、ドンナ値ヲモ一様ニトリウルトイヘルデアラウ。(コノコトハ両者ノ関係カラハハッキリトイヘヌ ~~全ニ関~~ コノコトカラ一般ニ microscopic

机

phenomena ニ於ケル測定トイフモノハ一種ノ統計的ナ性格ヲモツタモノデ、一回一回ノ測定トイフモノハ一般ニハ豫言シ得ナイガ、多数回ノ測定ニ於ケル結果ニ於ケル統計的ナ傾向ハ与ヘル可能性ガアル。ソコデ我々ハ古典理論ニ於ケル因果的、時間空間的ナ記述 ~~ナカナカミル~~ ヲ断念シテカヽル統計的ナ傾向ヲ一般的ニ決定スル法則ヲ発見スルコトヲモツテ満足セネバナラヌデアラウ。シカシサレバトイツテ時間空間的記述ガ全ク不可能デアルトイフノデハナイ。又因果律ガ全ク否定サレタトイフノデモナイ。古典理論ノ特徴デアツタ ~~因果的~~ 時間空間的ナ因果律ガ成立シ得ナイノデアル。コレニツイテハ量子力学ノ一般的ナ scheme ヲ構成シタ後ニ詳シク述ベルコトニスル。

然ラバカヽル統計的ナ傾向ノ一般的ナ性格ハ如何ナルモノデアルカ。先ヅ例ヲ ~~トツテ見ル~~ ナシテ、~~ヲ見ル~~ 光量子 light quanta or photon ノ polarization ヲ例トツテ考ヘテ見ル。light quanta ヲ 同時ニ photo-electron ヲ emit サセル場合、~~ソノ光ノ polarization ノ方向ニ従ツテ、emit サレル electron ノ~~ ドノ方向ニ多ク electron ガ emit サレルカ 統計的 方向ノ分布ガカハツテ ~~emit サレル electron ノ方向ハ~~ polarization ノ方向ニヨツテ変ツテクル。従ツテ光ノ polarization ノ性格ハ光ノ粒子ノ性格ト密接ニ関係スルモノデアツテ、~~個々~~ ノ photon ニ polarization ノ性格ヲ賦与セネバナラヌ。個々ノ

~~elect~~ photon ガ或ル polarization ノ状態ニアル時ト考ヘタ時. 之ヲ polarized component ニ resolve シ、又之ヲ recompose スルトイフ事柄ハドウ解釈スレバ、コノ考ヘト一致セシメラレルデアラウカ。

今 plane-polarized light ノ beam ガ polariscope ヲ通過シテ incident beam ト夫々 α 及ビ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ナル角ヲナス plane-polarized light ニ decompose サレル ~~ト考ヘ~~ 二ツノ場合ヲ考ヘテ見ル。classical ニ考ヘレバ二ツノ component ノ intensity (incident beam ノ intensity ヲ1トスレバ) ハ夫々 $\cos^2\alpha$ 及 $\sin^2\alpha$ ノ値ヲトル。之ノ beam ノ photon ヲ 0 ナル polarization ノ状態ニアリ、二ツノ component ノ photon ヲ夫々 α 及ビ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ナル polarization ノ状態ニアルト見ナシタナラバ 0 ノ状態ノ photon ガ ~~ドウシテ~~ 如何ニシテ α 及ビ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ノ状態ノ photon ニカハルノデアラウカトイフコトガ問題トナル。classical ナ概念ヲ以テコノ問題ニ直接答ヘルコトハ不可能デアル。ソレデ吾々ハ photon ガ polariscope ヲ通過スル時ニドウイフ変化ヲ受ケルカトイフコトヲ考ヘルノヲヤメテ、個々ノ photon ガ polariscope ヲ通過スル時、何ガ起ルカヲ決定スルコトハ出来ナイ。併シ実験ノ結果ハドウデアルカヲ調ベテ見ル。最モ直接ナノハ、唯一ツノ photon カラナル incident beam ヲ使ツテ two components ノ各々ノ energy ヲ測ルコトデアル。實驗ヲ繰返シテ得ラレル結果ハ、或ル時ニハ energy ノ全体ガ一方ノ component ニ於テ見出サレ、或ル時ニハ

energy ノ全部ガ他ノ component ニ於テ見出サレル事ト
言ハバ ~~一部分~~ energy ノ一部分ガ一方ノ component ニ、他ノ部分ガ他ノ
component ニ見出サレルトイフ事ハ決シテ
起ラナイデアラウ。（実験的ニ photon ノ fraction トイフ
モノハ決シテ見出サレタ事ガナイカラ、此ノ事モ亦当然
ナリト考ヘテヨイデアラウ。） 斯クシテ実験ノ示ス関係
ヲ満スナラバ 偏光面ノ $\cos^2\alpha$ 倍丈ハ光線ノ energy ガ
α component ノ中ニアリ、$\sin^2\alpha$ 倍丈ハ 〃 〃
$\alpha+\frac{\pi}{2}$ 〃 中ニアルデアラウ。故ニ一ツノ photon ガ
α-component 中ニアラハレル probability ハ $\cos^2\alpha$ デアリ、
$\alpha+\frac{\pi}{2}$ 〃 〃 〃 $\sin^2\alpha$ デアル
ト考ヘラルヽデアラウ。コノ probability ニ於ケル値ハ
正ニ incident beam 中ノ photon ノ数ガ大デアレバ
二ツノ component 間ノ energy ノ distribution ニ
於ケル classical ナ値ト一致スルデアラウ。 個性
斯ノ如ク アラユル場合ニ於テ photon ノ individuality
ハ ~~reserv~~ 保存セラレ、ソノ代リニ determinacy ガ（不確定性ノ伴フノヲ甘ンジナケレバナラヌ結果）
犠牲ニ供セラレナケレバナラナイ。実験ノ結果ヲ、実験者
ノ統制シ得ル條件ニヨツテ、決定スルコトハ不可能デアル。
予知シ得ル ~~最大限~~ ノハ高々可能ナル結果ノ各々ノ起ル
probability ニスギナイ。

一ツノ dynamical system ノ
斯ル observation ノ結果ノ indeterminacy ハ state 定ノ

† 例ヘバ photon ガ 0 ナル ~~state~~ 状態ニアルコトハ、一部分 α ナル状態ニアリ一部分 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ナル状態ニアルコトト全ク同等デアル。何故トイヘバ両者ニ対シテ行ッタ凡テノ実験ハ常ニ同ジ結果ヲ与ヘルカラデアル。

---

†† 以上述ベタ様ナ superposition ノ考ヘ、一般ニ photon ノミナラズ、電子、原子等 ~~一般的ニ考ヘ得ルモノ~~ 一般ニ 任意ノ system ニアテハメルニヨリ、state 状態トイフ言葉ヲ拡張シテモヨイデアラウ。
ソレデ photon ガ ~~polariscope ヲ通過シタ時~~ 適当ナ polarizing apparatus ヲ通過シタ時或ル一定ノ polarization ノ状態ニアルトイフコトヲ拡張シテ、任意ノ system ガ或ル一定ノ方法デ 仕方 用意セラレタ時或ル一定ノ状態ニアルトイフコトニスル。コノ或ル一定ノ仕方トイフノハ必要ニ応ジテ何様デモ解サレ得ル性ノモノデアル。

~~二種類~~故ニclassicalナ~~super~~~~意味~~理論ニハ全ク
対応シナカッタ一種ノ論理ヲ~~対応~~導入シナケレバナラヌ
~~理論~~ ~~上ノ例ニ於テハ~~ 0ノstateハアル観測ニ於テ
アル場合ニハ αノstateト同ジ結果ヲ与ヘ、他ノ場合ニハ α+½πノstate
ト同ジ結果ヲ与ヘルカラ、0ナルstateハ他ノ二ツノstate
~~ナラ~~ニ対シテアル中間的ナ状態デアルト考ヘラレ、又
他ノ二ツノ状態ノ両方ヲツツンデ居ルトモイヘルデアラウ。
~~此ノ事ヲ~~理論ハ 0ノstateハアル意味ニ於テ αナルstate
ト α+½πナルstateノsuperpose~~tion~~シタモノデアル
トイヒ得ルデアラウ。勿論classicalナ理論ニ於テモ
一ツノpolarizationノstateヲ他ノpolarizationノ
stateノsuperposeシタモノト考ヘテ居ルノ
デアル。然シ此ノ場合ニ於ケルsuperpositionハ今ノ
場合トハ根本的ナ相違ヲモッテ居ル。
ナゼナラバ上ノ例ニ於テpolarizationノstateハ一ツ
ノphotonニツイテ考ヘラレタモノデアル。従ッテ一ツノ
photonニツイテノ種々ノpolarizationノstateガ
superposeサレル~~事~~ ~~ナニ於テ、故classicalナ superposition~~ ~~第二~~ニ於テ一ツノobservation
ニヨッテphotonガαナルstateニアルコトガワカッタトスレバ
最早 α+π/2ノstateガ~~最早~~superpositionニヨッテ
interfereスル余地ガナクナル。
然ルニ今ノ場合ノsuperpositionニ於テモclassical

classical
+ wave concept カラ来ル superposition トイフ概念ナドハ classical + corpuscular concept カラ ~~来ル sup~~ 考ヘラレル superposition トモ根本的ニ違ッテキル。然シ classical + light quantum ノ考ヘ方デスラ 多数ノ light quanta ~~粒子~~ ノ superp ノ rel. weight ヲ比例スル程大キイ ~~ナル~~ ノ state ニ反シテ居ルト考ヘラレル ~~ナル~~ 、然シ、今ノ場合ニ於テハ
一ツノ photon ガ ~~二ツノ存在スル~~ 分レテ存在スルト モイヘナイ。

ソレラノ state ノ
interference phase difference ガアッテ、intensity

ソレデ之ヲ一般ニ
~~以上ノ考察ヨリ~~ 或ル状態 A ニアル体系ニ就テ行ッタ所ノ実験結果ガ他ノ二ツノ状態 ~~A~~ B 並ビニ ~~B~~ C ニアルモノニ就テ、各別ニ同ジ実験ヲ行ッタ場合ノ結果ノ二ツヲ含ム時ハ、A ハ B ト C トヲ superpose シテ他ノ新シイ状態 A ヲ得ルト云フ。
A トイフ状態ハ B ト C ノ superpose デアル ト定義スル。
スルト任意ノ二ツノ state B ト C トハ之ノ定義ニ従ッテ A トイフ状態ヲ作ルコトガ出来ル。コレモ逆ニ云ヘバ状態 A ガ B ト C トノ ~~重ナル~~ superposition ノ結果トシテ得ラレル。
コレヲ Dirac ハ superposition ノ principle ト名ヅケ 之ヲ Q.M ノ基礎トシタ。

ナル場合ト同様ニ ~~super~~ relative weight ト phase difference ニヨッテ supperposition ノ結果ガ相違スルト考ヘテヨイ。次ニ ~~各場合ニ~~ 各ノ場合ノ supperposition ノ ~~結果 weight ノ係数ノ~~ 確率的性質カラ考ヘルト classical ナ supperposition ニ於テハ ~~abso~~ amplitude ノ absolute value ニ対応スルモノハ 確率ノ場合ニ於テハ 何等ノ物理的ナ意味ヲモタヌ。例ヘバ同一ノ state ニ其自身ヲ superpose シテモ得ラレル ~~ナ新~~ state ハ元トカハラヌコトニ対シ、classical ニハ 斯ノ如キ vibration ノ amplitude ガ二倍ナルト云フ様ナ著シキ差違ガアル。

Dirac ハ以上ノ如キ考察ヲ基ニ出シテ ~~Principle of~~ state ノ superposition ~~ナル原理ヲ導入シ~~ ノ exact definition ヲ考ヘ、之レニヨッテ Principle of Superposition ~~ヲ確立シ~~ ナル原理ヲ確立シ、之ヲ基礎トシテ Quantum Mechanics ノ General Scheme ヲ構成スルコトニ成功シタノデアル。

前節ニノベタ Heisenberg ノ Uncertainty Relation モ Dirac ノ Principle of Superposition モ共ニ wave, ~~part~~ particle corpuscle ノ duality ノ考ヘヲ根拠トシテ ~~出テ来タ~~ 出テ来タモノデアルガ、前者ガ特殊ナ dynamical ナ relation デアルニ対シ、後者ハ ~~全ク一般的ナ~~ state ノ間 (variables ノ間ノ)、一般的ナ関係ヲ述ベテヰルガ故ニ 理論一般ノ基礎トシテ誠ニ適当ナモノデアル。

Wigner: Gruppentheorie und ..

van der Waerden: Die gruppentheoretische Methode in der Q.M. 1932

16

次ノ章ニ於テ之ノ superp., state, 原ノ principle / superp. ノ正確ナ ~~表現~~ expression ヲ求メ 以下同様ニ ソレニ基イテ mathematical ナ formulation ヲ行ハウト思フ。

参考書.

P.A.M. Dirac : The Principles of Quantum Mechanics (1930)
W. Heisenberg : Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie (1930)
N. Bohr : Atomtheorie und Naturbeschreibung (1931)
H. Weyl : Gruppentheorie und Quantenmechanik (II. Aufl. 1931)
Born-Jordan : Elementare Quantenmechanik (1930)
L. de Broglie ; Méchanique Ondulatoire (1930) Introduction à l'étude de la
(坂井卓三 : 量子論 岩波講座
杉浦義勝 : 量子力学, 岩波)
: Électrons et Photons (1928)
(Rapports et Discussions du Conseil de Physique tenu à Bruxelles, Institut International de Physique Solvay)

M. Born : Probleme der Atomdynamik 1926
Pauli : Quantentheorie (Handbuch der Physik) Bd 23. 1926.
M. Born : Vorlesungen über Atommechanik
Reiche : Die Quantentheorie
Sommerfeld

分陽~~量子力学ノ発達ノ順序カラ云ヘバ~~. Heisenbergノ
Uncertainty Relationト Diracノ Superpositionノ
Principleヲ理論ガ出来上ッタ後ニ考ヘ出サレタモノデ
アリ、量子力学ノ発達ノ順序カラ云ヘバ. 1924年 de Broglie
ガ ~~Bohrノ理論ヲ~~ 波動ヲ粒子ニ伴フ波動ト考ヘルコトニヨッテ
~~説明シテ居タ~~ Bohrノ理論ヲ解釈シヨウトシ、Schrödingerガ
1926ニ wave mechanicsノ名ノ下ニ之ヲ発展シタ
~~アル~~ 一方、1925年ニ Heisenbergガ classical ナ力学ノ
方法ヲ批判シテ此ノ中ニ要ラヌモノヲ~~明カニシテ~~研究シ、古典
~~力学ニ於テハ~~ dynamical variablesハ ~~ordinary~~
ニ用ヰラレタ量ヲ
~~numberデアル~~ 通常ノ量デナク、noncommutative
即チ掛算ノ順序ニヨッテ値ノカハル様ナ量デナケ
レバナラヌコト、而シテソノ計算ノ規則ガ丁度 matrix
ノ計算ノ規則ト一致スルコトヲ明カニシ、Born-Jordan
ト共ニ Matrix mechanicsヲ ~~発展シ~~ 創案シ、一方 Diracハ又
Heisenbergノ考ヲ発展シテ q-numberノ理論ヲ発展
シタノデアルガ、後ニ至リ wave mechanics, matrix
mechanics, q-numberノ理論ハ数学的ニ全ク
同等デアルコトガ明カトナリ、1927 Heisenbergノ Unbestimmt-
heit relationノ発見、Bohrノ Complementarityノ考ヘト
相待ッテ Dirac, Jordanニヨッテ Transformation Theoryガ
完成セラレ、数学的形式 解釈 物理的意味ヅケガ明
ガ統一セラレ
カトナッタノデアル。

18

~~これ等ノ人々ノ一般論ハ所謂ソノ Transformation Theory~~
~~ヲ作ッテ Dirac ノ書物ノ初メノ方ニ書カレテ居ル~~
~~ノハ簡略ニシタモノデアル。~~

数学的方法トシテ見ル時
wave mechanics ト matrix mechanics ソシテ q-number ノ理論
トノ違ヒハ ~~state~~ dynamical system ノトル state ト
dynamical variables トノ イフコトノ抽象的全体ナルヤウニカヘ
アル。ソノ内 q-number ノ理論ガ最モ abstract デアルガ symbolical デアル
最モ適用範囲ガ広イ。
又 state ト dynamical variables ノ両方ヲ記述 所謂 Transformation Theory デアル。
side by side ニ取扱フガ、~~ソレモ~~ ~~従ッテ最モ適用範囲~~
~~ノ広イ symbolical ナ方法デアルト考ヘラレル~~
~~思フ。所謂 Transformation Theory~~
ソレラヲツナグモノデアル。所謂 Transformation Theory ヲ
最モ適用範囲ノ広イ symbolical ナ方法デ ~~述~~
書キアラハストイフコトガ色々ナ点カラ見テ最モ望マシイ。
幸ヒ Dirac ノ書物ノ前半ハ、ソノ意味デ一般論ガ書カ
レテ居ルカラ大体ソノ方針ニ従ッテ行クコトニスル。

コノ事ヲ如何ニ表ハスカ [illegible] コノ事ノ[illegible]ニ従ッテ中性ノ
意味ヲ有スル maximum observable ニ關シテ論ズルコトヲ避ケテ
オクコトニスル。

Conjugate imaginary トハ
物理的ニハ numerical value ガ常ニ
conjugate complex ニナッテ居ル如キモノ
ト考ヘレバヨイ。

前章ニ述ベタ state ノ superposition ノ idea ヲ基礎トシテ
一般的ナ理論ヲ構成スルニ必要ナ事ハ先ヅ state 及ビ
system ノ dynamical ~~system~~ variables ヲアラハス symbol ヲ導入シ、コレラノ
計算ノ axiom ヲ假定シ、コレ等ノ symbol ト ~~間~~ (ナラブ) equation ト物理的
ナ條件トノ間ノ關係ヲ定メルコトデアル ~~ガ~~。symbol
ノ ~~exact ナ性質ヲ specify スル~~ 事 從ッテ symbol ハ
abstract ナ(性質) ~~方法デ~~ 方法デ取扱ハレルベキデアッテ、ソノ性質ヲ
specify スル必要ハナイ。

ソコデ先ヅ dynamical system ノ各 state ヲ ψ ナル symbol
デアラハシ、異ナル state ハ suffix デ區別シテ ψ_1, ψ_2, ψ_r
ノ如ク書クコトトスル。從ッテ以上 二ツノ state (ψ_1, ψ_2) ノ superposition
ニヨリ ψ_0 ナル state ガ得ラレタ場合ヲ

$$\psi_0 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \qquad (1)$$

ナル式デアラハス。但シ c_1, c_2 ハ complex number トス
ル。理由 ψ-symbol ニ對シテハ純粋ノ ~~number~~ 代數ニ從ッテ
加ヘ合ハスコトガ可能デアリ、ソノ結果ハ常ニ
又一ツノ ψ-symbol デアル ~~ソレ故ニ二ツノ ψ-symbol ノアラハス~~
~~state ノ super~~ ト假定スル。

五月二日。

Chapter II. Algebra of States and Observables

§ ~~Superposition~~ Algebra of States

~~前章ニ述ベタ state ノ superposition ノ idea~~

前章ニ述ベタ state ノ superposition ノ idea ヲ基礎トシテ一般的ナ理論ヲ構成スルニハ ~~先ヅ最モ大小ノ axiom 的ヲ仮定シ、ソレカラ他ノ凡テノ結果ヲ deduce スルコトガ論理的ニ最モ満足ナコトデアルガ中々ナコトデハナイ。~~ 先ヅ system ノ state 及ビ dynamical variables ヲ表ハス所ノ symbol ヲ導入シ、ソレラノ ~~計算~~ symbol ニ対スル計算ノ axiom ヲ定メ、次ニ経験ノ物理的ナ条件ヲ symbol ノ間ノ equation ニヨッテ表ハシ ~~法則ヲ定メ~~ 逆ニ symbol ノ間ノ equation カラシテ物理的ニ解釈可能ナ結果ガ導カレル ~~e.g.~~ 法則 ~~ガ得ラレル~~ 導カレルコトニナル。

ソコデ先ヅ dynamical system ノ或ル state ヲ ψ ナル symbol デ表ハス ~~コトニスル~~ コトニスル。異ナル state ハ suffix ヲ異ニシテ ψ_1, ψ_2, ψ_r ノ如ク表ハスコトニスル。次ニ二ツノ state ノ superposition ヲ ~~表ハスニ~~ addition デ表ハス ~~...~~ コトニスル。即チ ψ_1, ψ_2 ナル二ツノ state ノ superposition ニヨッテ ψ_0 ナル state ガ得ラレタトスレバ

$$\psi_0 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \qquad (1)$$

ナル式デ表ハス ~~コトニスル~~。ナシル。但シ c_1, c_2 ハ complex number

此ノadditionニ對シテハ commutative ~~axiom~~ law 及ビ
associative law ガ成立スルモノト假定スル。

即チ $$c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = c_2\psi_2 + c_1\psi_1$$

$$(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) + c_3\psi_3 = c_1\psi_1 + (c_2\psi_2 + c_3\psi_3)$$

此ノ内commutative lawハ ~~二ツノstate~~ ノsuperposition
ハsymmetricalニ二ツノstateニ關シテsymmetrical
デアルコトヲ云ハシテヰル。~~之ハ前章ノsuperposition~~
~~ノdefinitionカラ明カニワカル。~~ associative lawハ
三ツ以上ノstateノsuccessiveナsuperpositionニ際シテ順序ハ違ッテモ結果ハ同ジデ
アルコトヲ云ハシテヰル。

(1)ノ式ニ於テ例ヘバ $c_1 \neq 0$ ナラバ ψ_1 ガ又 ψ_0 ト ψ_2 ノ
superpositionデアルトイハレル。superpositionノ條件(1)
ハ ψ_0, ψ_1, ψ_2 ニ關シテsymmetricalデアル。之ハ前章ノ
superpositionノdefinitionカラハ出テコナイ假定。斯様ニ
三ツノstateガsymmetricallyニ關係シテ居ル時ニハ此等ヲ
dependentト云フノデアル。一般ニ任意個ノstate $\psi_1 \cdots$
ψ_n ニ對シテノ間ニ

$$c_1\psi_1 + \cdots + c_n\psi_n = 0 \qquad (2)$$

ナル關係アル時dependent然ラザル時independent
トイフ。

前ニ一ツノstateヲソレ自身ニsuperposeシテモ元ト同ジ ~~結果ハ元ト~~
~~元~~ stateガ得ラレ又 トイフコトヲ ~~トイフコトガ~~，即チ $c_2\psi_1$ ハ ψ_1 ト
同ジstateデアルトシタ。之ヲ更ニextendスレバ一般ニ任意ノ

数 c ニ対シテ ($c \neq 0$) $c\psi_1$ ハ ψ_1 ト同ジ state ヲ表ハスト約束シテ置クコトニスル。

次ニ我々ハ state ヲ表ハス今一組ノ symbol トシテ φ-symbol ヲ introduce スル。但シ同ジ state ニ対シテハ ψ symbol ト同ジ suffix ヲツケテ書ク。而シテ φ-symbol ノ間ニハ(1)ナル関係ノ代リニ次ノ三ツノ state ニ対スル φ-symbol ニテ

$$\phi_0 = \bar{c}_1\phi_1 + \bar{c}_2\phi_2 \qquad (3)$$

ナル関係ヲ満足スルモノト約束スル。但シ $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ ハ夫々 c_1, c_2 ノ conjugate complex トシテ書ク。以上ノ外ニ総ベテ commutative law, associative law 及ビ dependency ノ definition ハ $c\phi_1$ ガ ϕ_1 ト同ジ state ヲ表ハスコトヲ含メテ φ-symbol ニ対シテモ当テハマルト約束シテ置ク。

斯ル φ-symbol ヲ introduce スル(ト)ハ (1) ノ如キ superposition ハ c_1, c_2 ニヨツテ specify サレル ハ又 $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ ニヨツテモ specify サレル。従ツテ (3) ナル関係ヲ満足スル如キ symbol ガ ψ ナル symbol ト相並ンデ存在シテ居ルコトガ分カツテアル。

ψ, φ-symbol ニ於テ、数ヲ乗ジテモ同ジ state ヲ表ハシテ居ルカラ
所デ任意ノ数 a's 及ビ b's ニ対シテ ヲ用ヒテ

$$\psi_r = a_r\psi_r^*, \quad \phi_s = b_s\phi_s^* \qquad (4)$$

ナル transformation ヲ行ツテ、ψ_r^* or ϕ_s^* ニヨツテ states ヲ表ハシテモヨイ。ψ_r or ϕ_s ノ代リニ 之ヲ ψ_r^*, ϕ_s^* ニ対シテモ (1) ト (3) ト同様ノ関係ガ成立スルトスルト

$$\psi_0^* = c_1 a_1/a_0\, \psi_1^* + c_2 a_2/a_0\, \psi_2^*$$

[illegible]

†conjugate imaginary quantity トハ(互ニ)相對スル數値ガ常ニ conjugate complex number デアルト考ヘレバヨイ。

$$\varphi_0^* = \bar c_1\, b_1/b_0\, \varphi_1^* + \bar c_2\, b_2/b_0 \cdot \varphi_2^*$$

ノ兩邊ノcoefficientガ互ニconjugate complexデナケレバナラヌ故ニ $b_1/b_0 = \bar a_1/\bar a_0$ 　 $b_2/b_0 = \bar a_2/\bar a_0$

從ツテa's, ~~從ツテ~~b'sハ $b_r = f\bar a_r$ 　(注)

fハ關係ヲ論ズルモノデナイカラ此ニfハrニindependent.

コレ等ノコトカラ φ_r ~~ト ψ_r トハ互ニcor~~ ハψ_rノconjugate imaginaryト考ヘテモ差支ナイ ~~考~~ヘルコトガ出來ル not

然シテ φ-symbol ト ψ-symbol トノ數ヲ一ツニシナケレバナラヌ.

中等式 real part, imaginary part ヲ別々ニ考ヘルコトガ出來ルガ、~~此ノ場合~~ カヽル數ヲ考ヘルコトハ意味ガナイ、理論上ニテハ不都合デアラウカラ。此ノ場合 φ, ψ ヲ real part, imaginary part ニ分ケルコトハ不可能デアル。ソレデ普通ノ數ノvector等ノ如ク real part, imaginary part ニ分ケラレルモノニ對シテハ conjugate complex ナル言葉ヲ用ヰ、今ノ場合ハ conjugate imaginary ナル言葉ヲ用ヰテ區別スルコトニスル。

2

次ニ state ノ multiplication ヲ定義スル。理由ハ後述。~~state~~ ψ 及ビ φ ニ對シ product トシテ一ツノ member (一般ニ complex) ヲ考ヘル、之ヲ φψ ト記スコトニスル。而シテ其ノ他ノ形ノ積 ψφ, ψ₁ψ₂, φ₁φ₂ ノ如キモノハ意義ヲ持タシテ對象ニアラハシテコナイ。

此ノ product ニ對シテハ multiplication ノ distributive law

$$(\phi_1+\phi_2)\psi = \phi_1\psi + \phi_2\psi \qquad (5)$$
$$\phi(\psi_1+\psi_2) = \phi\psi_1 + \phi\psi_2 \qquad (6)$$

及ビ
$$\phi(c\psi) = (c\phi)\psi = c(\phi\psi) \qquad c: \text{any number} \qquad (7)$$

ガ成立スルト假定スル。之ハ vector ノ場合ノ scalar product ニ相當スルモノデアル。

次ニ ψ ト對立スル φ ガ conjugate imaginary デアル ~~ニ對シテ~~ ~~場合~~ ~~ト考ヘラレルカラ~~ product ニ對シテ

$$\phi_r \psi_s = \overline{\phi_s \psi_r} \qquad (8)$$

從ツテ $\phi_r\psi_r$ ハ real ナラネバナラヌ 對應ニ

$$\phi_r \psi_r > 0 \qquad (9)$$

ト假定スル。

之ニ對シテ (4), (5) ノ形ノ transformation ヲ行ツテ (8)(9) ハ

$$f \bar a_r a_s \phi_r^* \psi_s^* = \overline{f \bar a_r a_r \phi_s^* \psi_s^*}$$

及ビ
$$f \bar a_r a_r \phi_r^* \psi_r^* > 0$$

トナル。從ツテ f ガ real positive ナラバ ~~(8)~~ ヲ ϕ_r^*, ψ_r^* ニ對シテモ $\phi_r^* \psi_s^* = \overline{\phi_r^* \psi_r^*}$ 　$\phi_r^* \psi_r^* > 0$

ノ關係ガ成立スル。

何故 ψ ト φ ハ ~~互ニ~~ conjugate imaginary デアル

デアルト假定スル。カク制限シテモ物理的ナ結果ニハ何等ノ影響モナイ。從ツテ (4) ノ transf ニ於テモ (5) ニ加ヘテ f = 1 ナル場合ヲ考ヘルベキ。(∵ 相對的ニハ 又 conjugate complex ノ意)

カク制限サレタ transf ニ對シテハ (1) ト (3) トノ關係モ (8), (9) ノ關係モ共ニ invariant デアル。

次ニ ~~(9)カラ出テ~~ 凡テノ ~~$\phi_r\psi$~~ ψ ニ對シテ

$$\phi_r\psi = 0 \quad \Big\} \quad (9) \quad (\cancel{10})$$

ガ成立スルナラバ　$\phi_r = 0$

∵ (9)カラ出テ若シ ϕ_r ガ 0 デナイナラバ conj. imag. ψ_r ニ對シテハ $\phi_r\psi = 0$ ナル假定ハ滿足サレヌ筈.

又 ϕ ト ψ ヲ interchange シタ theorem モ當然成立スル。

ψ_r ト ソノ conj. imag. ϕ_r ニ對シテ

$$\phi_r\psi_r = 1$$

ト假定スルコトガ出来ル。コノ時 1 ニ normalize シタ、又ハ單ニ normalize シタト云フデアラウ。(9)カラ出テ ~~ϕ~~ ϕ ニ對シテ要求サレテ居タ事ニ normalize シ得ルコトガ分カル。コノ場合カクシテ其ノ modulus ハ定マルガ、argument ハ任意デアル。

次ニ ϕ_r, ϕ_s ガ normalize サレテ居ル時ニハ

$$(\phi_r\psi_s) \leq 1 \quad (10)$$

デアル。

∵ a ヲ real number トスレバ 相對應スル state $\psi_r - e^{ia}\psi_s$ 及ビ $\phi_r - e^{-ia}\phi_s$ ニ對シテ (9) ヨリ

$$(\phi_r - e^{-ia}\phi_s)(\psi_r - e^{ia}\psi_s) > 0$$

$$\text{or} \quad e^{ia}\phi_r\psi_s + e^{-ia}\phi_s\psi_r < 2,$$

今 $\phi_r\psi_s$ ノ argument ヲ α トシ $a = -\alpha$ ニトレバ

$$|\phi_r\psi_s| < 1.$$

然ルニ a ヲ適當ニ撰ンデ

$\phi_r - e^{ia}\phi_s = 0$ ナル時 ϕ_r ト ϕ_s ガ same state ヲアラハス場合ニハ (11) ノ等號ガ成リ立ツ。

何ニテモ一ツノ state ニアル system ニ就テ、我々ハ一ツノ ~~着ル~~ 互ニ独立ナ一組ノ observation ヲ行フコトガ同時ニ

~~行~~ 行ッタモノトスル。ソノ結果ハ一般ニ一組ノ数値デアラハサレル。~~ソレ等ノ結果ハ~~ 何回行ッテモ一組ノ observation ヲ行ヘバ ~~ソノ結果ハ~~ 一般ニ違ッタ結果ヲ得ルデアラウガ、各々ノ結果ノ起ル probability ハ定マッタモノ ~~ト考ヘ~~ 理論的ニ決定サレル ~~モノ~~ ト考ヘル。何故ナラ一組ノ observation ~~ヲ~~ 一組ニ行フソノ順序ヲ変ヘテモ ~~結果~~ 各々ノ結果ノ起ル probability ニ変化ガナイ(ドンナ)。ソシテカカル条件ヲ満足スル observation ノ数ハ ~~ソレ~~ 以上増スコトガ出来ナイ時、コノ一組ノ observation ヲ maximum observation ト名ヅケルコトニスル。

~~任意ノ state ニ就テ~~ system ニ就キ maximum observation ヲ行ヘバ、~~ソノ結果~~ ソレカラ後ノ system ノ state ハ完全ニ define サレ、又任意ノ state ニ就テモ maximum observation ノ結果ヲ指定スルコトガ出来ルト仮定スル。

カヽル二ツノ state ノ product トシテ ~~[illegible]~~ 一ツノ数ヲ得ルガ、
コレニ対シテ物理的ナ意味ヲ考ヘテ見ヨウ。

今アル state ニアル system ニ対シテ一ツノ observation
ヲ行フ ~~スル時~~ ~~ソノ結果~~ トシテ一ツノ結果ガ得ラレタトスル。
~~ソノ直後ニ今一ツノ observation ヲ実際行ッテ見ナイデ結果ヲ知ル。第二ノ~~
~~observation ヲ~~ ~~アル state ニアル system ニ~~
一般ニ ~~一ツノ observation ヲ行ヘバ~~ system ノ state ハ或ル
異変 ~~ヲ受ケテシマウ~~ アラウ。

カヽル observation ハ一ツノ state ニ対シテ或ツモ行ヘ
ナイ。~~[illegible]~~ ソレ等ノ observation ハ出来ル丈多数ヲ
(同時ニ確定サレルモノ)
~~残リ、イヅレモ~~ 同ジ目的ニ行ッタモノト考ヘル。今ソノ
ソノ state ニアル system ニ対シテ
順序ヲドンナ風ニ変ヘテモ ~~イヅレヲ先ニ行ッテモ~~ 此等ノ observation ノ結果ハ変ラ
ヌ。従ッテ各 observation ノ結果ハ常ニ同ジ数値デ与ヘ
ラレル。カヽル一組ノ observations ヲ maximum
observation ト名ヅケル事トスル。

~~今一ツノ maximum observation ヲ任意ノ state ニ~~
対シテカヽル maximum observation ヲ考ヘル。従ッテ
任意ノ state ニ対シテ maximum observation ノ結果トシテ
一組ノ数値ヲ対応サセル事ガ出来ル。ソコデ逆ニ
任意ノ state ハ maximum observation ノ結果ニヨッテ
完全ニ define サレルモノト仮定シヨウ。

今或ル state ニアル system ニ対シテ一ツノ maximum observation
ヲ行ヘバ、確カニ一ツノ定マッタ結果ガ得ラレルト考ヘラレル。

~~如~~次ニ maximum observation ヲ ψ_s ナル state ニアル
system ニ行ッタ時、ϕ_r ト ニ対スル 同ジ結果ノ得ラレル probability
ヲ ψ_s ノ ϕ_r ニ対スル probability of agreement ト
名ヅケルコトニスル。コレハ ψ_s, ϕ_r ノ二ツノ state ノミニ
depend スル数デ、ψ_s ト ϕ_r ガ同ジ state ナラバ 1 トナル
ベキ事ハ明デアル。~~従ッテ $|\psi_s\phi_r|^2$ ヲ以テ与ヘルコトハ ψ_s ノ ϕ_r ニ対スル~~
~~ψ_s, ϕ_r ガ normalize サレテ居ル時~~
~~probability of agreement ニ與ヘルモノト仮定スル。~~
~~ソレト (1.1)~~ ノ式カラ明デ $|\phi_r\phi_s|^2$ ナル数値ヲ カラ仮定スレバ
與ヘラレル。ψ_s, ϕ_r ガ normalize サレテ居ル時ニハ (11)
ニヨッテ T係 カヽル関係ヲ満足シテ居リ、ソモ normalization
ヲ変ヘナイ様ナ ~~係~~ (4) ノ type ノ transformation 即チ
modulus ~~unite~~ 1 ナル数ニヨル multiplication ニ対シテ
$|\psi_s\phi_r|^2$ ノ値ハ変ハラナイ~~為~~。ソレデ コノ $|\psi_s\phi_r|^2$ ニ矣、
ψ_s ノ ϕ_r ニ対スル probability of agreement トイフ
物理的ナ意味ヲ與ヘルコトガ出来ル。
ソレト (11) 式カラ ψ_s ノ ϕ_r ニ対スル P. of A. ハ
ϕ_r ノ ϕ_s ニ対スル P. of A ト等シイコトガワカル。
又 ~~(6) 及ビ (7) カラ又~~ superposition process ニ出テクル
coefficient 例ヘバ (1) ニ於ケル c_1, c_2 ニ物理的意味ヲ
與ヘルコトガ出来ル。
今 ψ_1 或 ψ_2 丈ノ二ツノ state ニ対シテ アル observation
ヲ行ッタ時 確カ夫々ナル結果ヲ得ラレルトスル。此ノ時ハ

probability of agreement ハ 0 ノ筈.

即チ　$\varphi_1\psi_2 = 0$　　$\varphi_2\psi_1 = 0$

カカル場合ニ二ツノ state ハ orthogonal デアルト云フコトニスル

又更ニ ソレト $|c_1|^2/(|c_1|^2+|c_2|^2)$ ハ $c_1\psi_1+c_2\psi_2$ ノ φ_1 ニ対スル P.A.

デアリ $|c_2|^2/(|c_1|^2+|c_2|^2)$ ハ 同様 φ_2 ニ対スル P.A. デアリ. ソノ他ハ

superposition ノ definition カラ当然要求サレル事デ

アル　$c_1\psi_1+c_2\psi_2$ ナル superposition ハ 之等 $|c_1|^2/(|c_1|^2+|c_2|^2)$, $|c_2|^2/(|c_1|^2+|c_2|^2)$

ナル weight ノ外ニ尚ツ一ツ含マレル relative phase

c_1/c_2 ヲ含ンデヰルガ 果シテヰルガ, 之ハ weight ト独立ナ

physical meaning ヲ有スル.

§ Algebra of Observables

次ニ吾々ハ dynamical variable ノ algebra ~~考~~ 性質ヲ考ヘ始メル。Classical dynamics デハ dynamical variables ハ常ニ time ノ function トシテ考ヘラレル。然ルニ quantum theory ニ於テハ dynamical variables ハ time ノ ordinary 函数デナイ。サテ或ル時刻ニ於ケル dynamical variable ノ値ハ quantum theory ニ於テモ observe スルコトガ出来ルカラ、或ル時刻ニ於ケル dynamical variable ヲアラハスモノヲ考ヘ、之ヲ observable ト名ヅケルコトニスル。

ソコデ observable ヲアラハス symbol α ハ state ヲアラハス symbol ψ ニ乗ジテ αψ ナル product ヲ作ルコトガ出来、其ノ product ハ ψ ト同性質ノモノデ一ツノ state ヲ denote シ、ψ's ト加ヘ合ハスコトモ出来ルト仮定スル。

次ニ掛算ノ distributive law

$$\alpha(\psi_1+\psi_2)=\alpha\psi_1+\alpha\psi_2 \qquad (11)$$

及ビ

$$\alpha(c\psi)=c(\alpha\psi) \qquad c: \text{any number} \qquad (12)$$

ヲ仮定スル。

第二ニ一ツノ量ヲ掛ケル operation モ又之等ノ條件ヲ満スナラ、ソレヲ一ツノ observable ト見ルコトガ出来ル。

モシ凡テノ ψ ニ対シ αψ=0 ナル場合ハ α=0 デアルト仮定スル。此ノ時ハ一ツノ observables ~~ノ総和~~ ノ総和ノ

+ [illegible] $(\alpha_1 + \alpha_2)\psi = \alpha_1\psi + \alpha_2\psi = \alpha_2\psi + \alpha_1\psi$

$= (\alpha_2 + \alpha_1)\psi.$ for all ψ

$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$

ヲ要シナイ。完全ニ決定サレルコトニセヨ。
各ψニ對スル値ガ~~等シイ時ハ二ツノ observable~~
皆(但シ二ツノ observable ノ差ノψニ對スル値ガ
等シイ時ハ差ハ0トナル)

然ルニ α_1 ト α_2 ノ和 $\alpha_1+\alpha_2$ ハ凡テノψニ對シテ

$$(\alpha_1+\alpha_2)\psi = \alpha_1\psi + \alpha_2\psi \tag{13}$$

ヲ要スル事ニヨツテ define サレル。

observables ノ addition ノ commutative, associative law ハ ψ-symbols ノ ~~commutative~~, assoc 等ニ對スル law カラ直チニ出テクル。†

次ニ product $\alpha_1\alpha_2$ ハ凡テノψニ對シテ

$$(\alpha_1\alpha_2)\psi = \alpha_1(\alpha_2\psi) \tag{14}$$

ヲ要スル事ニヨツテ define サレル。multiplication ノ associative, distributive law ハ此ノ def カラ直グ出テクル。例ヘバ ass. law ハ

$$[(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3]\psi = (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3\psi = \alpha_1[\alpha_2(\alpha_3\psi)]$$
$$= \alpha_1[(\alpha_2\alpha_3)\psi] = [\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)]\psi$$

之ガ凡テノψニ對シ成立スル故

$$(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$$

然シ multiplication ノ commutative law ハ一般ニ成立シナイ。若シ $\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1$ ノ時 α_1 ト α_2 ハ commute スルトイフ。多数ノ observables ニ對シテモ各々ノ observable ガ他ノ凡テト commute スル時 場合 commute スルトイフ。

† if $\phi\alpha = 0$ then
$(\phi\alpha)\psi = 0$ for all ϕ and ψ or $\phi(\alpha\psi) = 0$ for all ϕ and ψ
or $\alpha\psi = 0$ for all ψ by (10) $\therefore \alpha = 0$

現論は ψ と φ に関して symmetrical でない点で甚だ少からず

任意の observable α を φ に作用させ φ-symbol として作らしめる product φα (α は ψ の代りとなる新しき量と見做されるものとする) は φ と同性質で一つの state を denote し 此の φ's は add しうる。α (11)(12) と略して

$$(\phi_1+\phi_2)\alpha = \phi_1\alpha + \phi_2\alpha$$

$$(c\phi)\alpha = c(\phi\alpha)$$

更に我々は multiplication の associative law

$$(\phi\alpha)\psi = \phi(\alpha\psi)$$

を假定し、之を略して $\phi\alpha\psi$ と書くことにする。

この両者の axiom が (13) 及 (14) 二つで定まれる sum 及 product の規則を φ's で用ひて定めることをはじめねばならぬ。

即ち ~~然れば~~

$$\left.\begin{aligned}\phi(\alpha_1+\alpha_2) &= \phi\alpha_1+\phi\alpha_2\\ \phi(\alpha_1\alpha_2) &= (\phi\alpha_1)\alpha_2\end{aligned}\right\}\ \text{for all } \phi \qquad (15)$$

然れば (14) から

$$\phi(\alpha_1+\alpha_2)\psi = \phi\alpha_1\psi + \phi\alpha_2\psi$$

$$\text{or } [\phi(\alpha_1+\alpha_2) - \phi\alpha_1 - \phi\alpha_2]\psi = 0 \quad \text{for all } \phi \text{ and } \psi$$

$$\therefore\ \phi(\alpha_1+\alpha_2) - \phi\alpha_1 - \phi\alpha_2 = 0 \quad \text{for all } \phi$$

又 ~~同様に~~ $\alpha\psi = 0$ for all ψ ならば $\alpha = 0$ であることがわかる

$\phi\alpha = 0$ for all φ ならば $\alpha = 0$ なることは associative law から出てくる!

5月2日

5月9日

以上ノ如クシテ我々ハ observable ノ sum, product 及ビソレカラ作ラレル observables ノ中ノ或ルモノハ唯一ツノ observation ニヨッテ ~~決~~ 直接測リ得ル量デハナイカモ一般ニシレナイガ observable ノ意味ヲ拡張シテソレ等ヲモ含ムモノト見做ス。

更ニ一般的ニハ前ノ axiom ニ従ッテ ψ's 及ビ φ's ニ對シテ定メラレタ任意ノ operator ~~ヲ~~ ヲ A号 observable ノ中ニ入レルコトニスル。即チ一ツノ observable α ハ A号ノ ψ ニ對スル αψ ノ ~~値~~ ヲ specify スルコトニヨッテ define サレル。

但シコノ場合 (12) ノ関係ヲ満足シテ居ラネバナラヌ。今 ~~任意ノ ψ ガ~~ 一組ノ independent ナ ψ's ヲトリ、ソレ等ニヨッテ任意ノ ψ ガソレ等ニヨッテ linearly ニ表ハサレル時 ~~ニ~~ ハ一組ノ ψ's ヲ complete set ト名付ケルコトニスル。

コノ complete set ノ中ノ ψ_r ニ對スル $\alpha\psi_r$ ノ値ハ任意ニトルコトガ出来、ソノ他ノ ψ ニ對スル αψ ノ値ハ (12) ヨリ決定サレ、従ッテ α ハ完全ニ決定サレル。

~~更ニ complete set ノ ψ ニ對スル αψ ヲ~~ 更ニ $\alpha\psi_r$ ヲ specify スルカハリニ φ's ヲ complete set ニトレバ $\phi_s\alpha\psi_r$ ナル number ノ set ヲ與ヘルコトニヨッテ α ハ unique ニ define サレル。

∵ $\phi_s\alpha\psi_r = \phi_s\alpha'\psi_r$ トスレバ

$$\phi_s(\alpha\psi_r - \alpha'\psi_r) = 0 \quad \text{for any } \phi_s, \psi_r$$

従ッテ $\phi(\alpha\psi_r - \alpha'\psi_r) = 0$ for any ϕ, ψ_r

∴ $\alpha\psi_r - \alpha'\psi_r = 0$ for any ψ_r

∴ $\alpha\psi - \alpha'\psi = 0$ for any ψ. ∴ $\alpha - \alpha' = 0$.

(17)が $r=1$ and 2 に対して成立すれば

† ∴ $\overline{\Phi_s \alpha (c_1\psi_1 + c_2\psi_2)} = \bar{c}_1 \overline{\Phi_s \alpha \psi_1} + \bar{c}_2 \overline{\Phi_s \alpha \psi_2}$

$= \bar{c}_1 \, \phi_1 \bar{\alpha} \psi_s + \bar{c}_2 \phi_2 \bar{\alpha} \psi_s$

$= (\bar{c}_1 \phi_1 + \bar{c}_2 \phi_2) \bar{\alpha} \psi_s$

故に $\Psi_r = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ にも成立す。

次ニ α ニ対シテ conjugate complex observable $\bar{\alpha}$ ヲ (任意ノ二ツノ observable ノ 和ガ conj. complex ノ和ナル事ヲ示セ)

$$\overline{\phi_s \alpha \psi_r} = \phi_r \bar{\alpha} \psi_s \qquad (16)$$

ニヨッテ定義スル。従ッテ ϕ_r, ψ_s ハ complete set ト仮定ス。コレハ ~~之ハ~~ 任意ノ二ツノ state ψ_1, ψ_2 ニ対シテ

$$\overline{\phi_2 \alpha \psi_1} = \phi_1 \bar{\alpha} \psi_2 \qquad (17)$$

成立スルコト

α ガ real デアル condition ハ

$$\overline{\phi_s \alpha \psi_r} = \phi_r \alpha \psi_s \qquad (18)$$

従ッテ $\frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$ ハ real デアル。従ッテ之ヲ α ノ real part
$\frac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha})$ ヲ imaginary part ト呼ブ事ニスル。
又 α ガ number ノ時ニハ (18) ニヨッテ α ト $\bar{\alpha}$ トハ complex conjugate number トナル。

次ニ ψ_1 ト ϕ_1 トガ conj. imag. symbol ナラバ $\alpha\psi_1$ ト $\phi_1\bar{\alpha}$ モ亦 conj. imag. トナル。 ~~$\alpha\psi_1 = \phi_1\bar{\alpha}$ (18)~~

∵ definition ~~$\phi\psi_s = \phi_s\alpha\psi_1$~~ ニヨッテ

$$\overline{\phi_s \alpha \psi_1} = \phi_1 \bar{\alpha} \psi_s \qquad \text{for any } \psi_s$$

(8) ニヨレバ ~~$\overline{\phi_s\alpha\psi_1} =$~~ $\phi_1\bar{\alpha}$ ノ conj. imag. ϕ ニ対シテハ

$$\overline{\phi_s \alpha \psi_1} = \phi \psi_s$$

$$\therefore \ \phi \psi_s = \phi_1 \bar{\alpha} \psi_s \qquad \text{for any } \psi_s$$

$$\therefore \ \phi = \phi_1 \bar{\alpha}.$$

次ニ $\alpha_1\alpha_2$ ノ conjugate complex $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ ハ

$$\phi_p \overline{\alpha_1 \alpha_2} \psi_q = \overline{\phi_q \alpha_1 \alpha_2 \psi_p} \qquad \text{for arb. } \psi_p, \phi_q$$

ニヨッテ与ヘラレル。

f!

†

ト observable トニ関係シテ

† 之ハ pair of state ψ_r, ψ_s ~~ニ関係シテ~~ observable ノトル値デアルガ，然ニ ψ_r ト ψ_s トガ同一ノ state デアラウ場合 即チ $\psi_r \equiv \psi_r$ ナル ~~数値~~ ハ 一ツノ state ~~ニ関シテ~~ ト一ツノ observable トニ関係シテ 数値デ ノ normalization ヲ加ヘナイ限リ (4) ノ type (f=1) ノ transformation ニ対シテ invariant デアル。一ツノ observable ト一ツノ state ニ対シテ definite ナ値ヲモツモノデアル トスルノデ.

~~之ヲ(?)ノ定理ニヨリ~~ (8) ニ於テ $\phi_s = \phi_q \alpha_1$, $\psi_r = \alpha_2 \psi_p$

トトレバ (15)ノ定理ニヨリ

$$\psi_s = \bar{\alpha}_1 \psi_q \qquad \phi_r = \phi_p \bar{\alpha}_2$$

故ニ

$$\phi_p \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \psi_q = \overline{\phi_q \alpha_1 \alpha_2 \psi_p}$$

∴ $$\phi_p \overline{\alpha_1 \alpha_2} \psi_q = \phi_p \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \psi_q \quad \text{for arbitrary } \phi_p, \psi_q$$

∴ $$\overline{\alpha_1 \alpha_2} = \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \qquad (19)$$

之ヨリ $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1$ ハ real, $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1$ ハ pure imag. α_1, α_2 ガ real ナル時 α_1, α_2 ガ commute スレバ 積ハ real.

~~即チ 積ノ conj. comp ハ factor ノ 一般ニ~~

三ツノ積ニ於テハ

$$\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \bar{\alpha}_3 \overline{\alpha_1 \alpha_2} = \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1$$

一般ニ 積ノ conj. comp ハ factor ノ conj. comp ヲ トリ 積ノ 順序ヲ逆ニシタモノニ等シイ。

~~之ニヨリ 上ノ~~ (17)式及ビ ~~$\phi\alpha$~~ $\alpha\psi$ ト $\phi\bar{\alpha}$ トガ ~~conj. imag ナルコトヲ示シタ~~ ~~コトヲ示シタ~~ 一般ニ product ~~ノ~~ ノ conj. comp. or conj imag (8), (17), (19), (20) ヲ総合スレバ 一般ニ product ノ conj comp or conj imag ハ 各 factor ノ conj. comp. or conj imag ヲ ~~積~~ トリ 積ノ順序ヲ逆ニシタモノニ等シイ。

量子論ニ於テハ observable ニ関シテ $\phi_r \alpha \psi_s$ ナル形デアラハサレル 数値ヲ得タ。コノ物理的意味ヲ考ヘテ見ル~~コト~~ニ。

classical mechanics ニ於テハ ~~[illegible]~~ observable ガ一ツノ state ニ ~~於テ~~ 対シテ 一ツノ numerical value ヲ持ッテ居ッタ。然ルニ quantum theory ニ於テハ アル observable ガ 与ヘラレタ state ニ ~~於テ~~ 対シテ 一定ノ numerical value ヲ持ッ

之ハ一般ニ云ヘヌ事デアル。或ル一般ノ ψ_r state ニ於テ何回モソノ observable ノ値ヲ測ツタ時、夫々ノ probability ヲ以テ色々ナ数値ガ得ラレル。従ツテ $\phi_r\alpha\psi_r$ ハ一般ニハ observable α ガ ψ_r ナル state ニ於テトル値デアルトハ云ヘナイ。

~~併シ~~ 併シ乍ラ同ジ ψ_r ナル state ニ於ケル α_1, α_2 ナル二ツノ observable ~~値~~ ニ対スル

$$a_1 = \phi_r\alpha_1\psi_r \qquad a_2 = \phi_r\alpha_2\psi_r$$

ソノ和ヲ作レバ

$$a_1 + a_2 = \phi_r\cancel{(\alpha_1+\alpha_2)}\alpha_1\psi_r + \phi_r\alpha_2\psi_r$$
$$= \phi_r(\alpha_1+\alpha_2)\psi_r$$

トナル。然シ積ニ於テハ

$$a_1 a_2 = \phi_r\alpha_1\alpha_2\psi_r$$

トイフ関係ハ一般ニ成立シナイ。

コノコトカラシテ $\phi_r\alpha\psi_r$ ヲ以テ ψ_r ナル state ニ対スル observable α ノ平均値 average value デアルト 解釈シテモ矛盾ヲ生ジナイ様デアル ~~仮定シテヨイデアラウ~~。何故ナラバ平均値ノ和ハ和ノ平均値デアルガ、一般ニ平均値ノ積ハ必ズシモ積ノ平均値ト一致シナイカラデアル。

コノ仮定ハ symbolic algebra ト physical quantity トヲ結ビツケル最モ重要ナ link デアッテ 其ノ probability of agreement ($|\phi_r\psi_s|^2$ ニ対スル) トイフ意味ヅケモ之カラ deduce 出来ルノデアル。(後ニノベル如ク)

之ニ反シ $\phi_r\alpha\psi_s$ ハカカル直接ナ physical meaning ヲモッテ居ナイ。然シ ~~然シ~~
~~然シ~~ phase ヲ除イテ述ベル如ク特別ノ場合ニ $|\phi_r\alpha\psi_s|^2$ ハ physical meaning ヲモッテ居ル。

* 即チ ψ state ニ於テ ~~obser~~ system ニ於ケル observable α ノ
値ヲ測定シタル時 常ニ a ナル一定値ヲ得タル場合 ——

† (20) 及ビ (21) ノ如キ式ノ様ナ物理的意味ヲ與ヘルコトハ之等ノ
平均値ノ定義ニ基イテ居ル。

∵ ψ ガ normalize サレテ居レバ (20) 及ビ (21) カラ

$$\phi \alpha \psi = \phi a \psi = a \phi \psi = a$$

即チ此ノ場合 普通ノ意味ニ於ケル a ナル値ハ ψ-state ニ於ケル
α ノ平均値ト一致スル。

逆ニ此ノ関係カラ逆ニ (20) or (21) ヲ出スコトハ不可能デアル。

~~逆ニ~~ 併シ確率ニ関スル 此ノ場合ノ平均値ノ定義カラ ~~a ガ ψ-state~~ α ψ-state ニ
於テ α ノ値ヲ observe スレバ確実ニ a ナル場合 (20) or (21)
ガ成立スルコトヲ deduce スルコトガ出来ル。*

§ Eigenvalues and Eigenstates

~~今迄ニ observable α ガ一ツノ state ψ ニ於テ一ツノ値~~(数) a ~~ヲトル場合ニハ~~、之ヲ symbolically ニ ~~ドウ表ハスカトイフコト~~。

$$\alpha\psi = a\psi \qquad (20)$$

ナル equation デアラハサレル。逆ニ (20) ノ形ノ式ガ成立ツナラバ observable α ガ ψ ナル state ニ於テ a ナル数値ヲトルトイフコトヲアラハシテヰルト ~~解釈~~ 解釈シマス。

例ヘバ α ガ real ナ場合ニハ a ハ real デナケレバナラヌ。

∵ (18) ニ ψ ノ conj. imag. φ ヲ乗ズレバ

$$\phi\alpha\psi = a\phi\psi$$

ヲ得ル。(18) 及ビ (7) ニヨリ φαψ, φψ ハ共ニ real number デアルカラ a モ real デナケレバナラヌ。

コノ場合ニハ (20) ノ conjugate imaginary

$$\phi\alpha = a\phi \qquad (21)$$

ガ同様ニ成立ツテヰル。

一般ニ與ヘラレタ observable α ニ對シテ (20) (又ハ (21)) ノ式ハ a 及ビ ψ (又ハ φ) ノ二ツノ未知数ヲ含ムル equation デアル。a 及ビ ψ (又ハ φ) ガ此等ノ equation ノ一ツノ solution デアレバ a ヲ以ツテ observable α ノ eigenvalue 及ビ eigen-ψ (or eigen φ) ト呼ブコトニスル。eigen ψ (or eigen φ) デアラハサレル state ヲ eigenstate ト呼ブ。各一ツノ eigen ψ or eigen φ or eigenstate ハ一ツノ eigenvalue ニ ~~associate~~ 属シテヰルトイフコトガ出来ル。

eigenvalue ノ性質ヲ考ヘルノニ eigenvalue ニ属スル

任意の二つの observables α_1, α_2 に就て

* 又　$\cancel{(\alpha_1+\alpha_2)}$ $\alpha_1\psi = a_1\psi$, $\alpha_2\psi = a_2\psi$

が成立すれば

$$(\alpha_1+\alpha_2)\psi = (a_1+a_2)\psi \qquad (22)$$

$$\alpha_1\alpha_2\psi = a_1a_2\psi \qquad (23)$$

即ち和の eigenvalue は eigenvalue の和、積の eigenvalue は eigenvalue の積である。之から更に一般に power series デアラハシ得ル函数 $f(\alpha)$ に

任意の observable α に就て

就テ　$\alpha\psi = a\psi$ が成立すれば

$$f(\alpha)\psi = f(a)\psi \qquad (24)$$

が成立することが容易に deduce ~~される~~ 証明出来る

math induction による

証明

state ガ其ノ eigenstate ガ存在シテ居テ、ソノ state ニ対シテ
observable ノ測定ヲスル時ハ必ズソノ eigenvalue ガ結果トシテ
得ラレル。其ノ ~~eigenvalues~~ ハ一ツノ observable ノ eigenvalues
ガ其ノ observable ノ測定ノ総テ可能ナ結果ヲ表ハスモノデ
アル。又 α ノ測定ノ可能ナ結果ハ凡テ eigenvalue デ
ナケレバナラヌ。∴ (20) ヲ満ス ~~ψ ナル~~ ハ任意ノ測定結果 a ニ就テ ソノ測定ヲヤッテ直グ後ノ
state ニ於テ ~~満ス~~ 満足サレル筈ダカラデアル。
eigenvalue ノ全体ノ set ハ number ノ discrete set ダケカラ
ナル時モアリ、又 continuous range of numbers カラナル
時モアリ、又両方含ンデ居ル場合モアル。
eigenvalue ノ計算ハ重要ナ且ツ面白イ問題ノ一ツデアル。
所謂 Eigenwert problem ヲ構成シテ居ル。
例 Observable ガ number ノ時ハ唯一ツノ eigenvalue 其ノモノ
ヲ以ッテ居ルダケ。而シテ総テノ state ガ eigenstate デアル。
即チ (20) ノ式ハ総テノ state ψ ト数ニ等シイ α ノ値ニ対シテ満
足サレル。又 α + c (c: number) ノ各 eigenvalue ハ α ノ
各 eigenvalue ニ c ヲ加ヘタモノ、eigenstate ハ同一デアリ、cα ノ各 eigenvalue
ハ α ノ其ノ c 倍デ eigenvalue ハ同一デアル。
次ニ一ツノ observable α ノ二ツノ異ナル eigenvalue a_1, a_2 ニ属スル
二ツノ state ψ_1, ψ_2 ハ ~~orthogonal デアルカ~~ α ノ observation
ニ於ケル結果ガ確カニ違ッテ居ルカラ当然 orthogonal
デナケレバナラヌガ、実際

$$\alpha\psi_1 = a_1\psi_1 \qquad \text{~~(24)~~}\ (25)$$

次ニ

此等ノ ψ's ノ間ニ linear relation

$$\sum c_r \psi_r = 0 \qquad (24)$$

ガアレバ、ソノ内

$$\phi_2\alpha = a_2\phi_2 \qquad (26)$$

故ニ
$$\phi_2\alpha\psi_1 = a_1\phi_2\psi_1$$
$$\phi_2\alpha\psi_1 = a_2\phi_2\psi_1$$
$$(a_1-a_2)\phi_2\psi_1=0$$

∴ $a_1 \neq a_2$ ノ時ニハ $\phi_2\psi_1=0$. トナル。

ψ_1, ψ_2 ガ共ニ同ジ eigenvalue ニ属スル eigenstate ノ時ニハ任意ノ linear comb. $c_1\psi_1+c_2\psi_2$ モ亦同ジ eigenvalue ニ属スル eigen ψ トナル。

次ニ 異ナル eigenvalue ニ属スル eigen-ψ's ハ必ズ independent デアル。ソレ等ノ ψ's ノ間ニ linear relation ガアルナラバ elimination ニヨッテ ψ's ヲ減ジ

∴ $$\sum_r c_r\psi_r = 0 \qquad (27)$$

此式ガ只一ツヨリ多クノ項ヲ含ム様ニスルコトガ出来ル。スレバ

~~ソレ等ノ ψ's ノ間ニ関係スルナラバ~~

$$\alpha\sum_r c_r\psi_r = \sum_r c_r\alpha\psi_r = \sum_r c_r a_r\psi_r = 0 \qquad (28)$$

(28) ハ (27) ト linearly independent デナイ事ヲ要スル故、凡テノ a's ハ相等シクナケレバナラヌ。

此ノ theorem ハ superposition ノ definition ト相ツナガル。

即チ (27) ノ如キ式ハ ψ_1 ガ ψ_2, ψ_3 etc ノ superposition ナル事ヲ、換言スレバ ψ_1 ノ state ニ於ケル observation ヲ行ッタ時ニハ ψ_2, ψ_3 etc ニ於ケル observation ノ結果ノイヅレカニ一致スルコトヲ、之ニ依ッテ observable ノ異ナル eigenvalue states ψ_1, ψ_2 ニ [illegible] 或 observable ヲ測ッタ時ニハ [illegible] ハ起リ得ナイ。∴ (27) ノ type ノ式ハ成立シ得ナイ。

5月9日

expansion theorem ヲ証明スルニハ一ツノ observable ノ eigenvalue ヲ幾個カノ部分ニ分ケテ云ハバ

addition, multiplication 等
種々ノ operation ヲ考ヘル場合、ソレラノ operation ヲ表シテ行ヒウル記号ヲ abstract symbol トシテ使フコトハ出来ル。然シ一般ニ operation ノ結果ガ物理的意味アル ~~物理的意味~~ ナルヤ否ヤノ 形式的 結果ヲ引キ出スコトハ 出来ル 結局。物理的意味アルモノデアルカ否カハ 純理的ナ 物理的ナ考察カラ判定セネバナラヌ。

一ツノobservableノ　　　　　　ノset

~~eigenvalue~~ eigenvalues ガ number ノ continuous range ヲ含ンデヰル場合ニハ、之ニ属スル eigen-ψ or eigen-φ ノ superposition トシテ ~~ヲトル addition ニヨルモノ~~ ~~int~~ discrete ナ eigen-ψ's ノ sum ニヨラズ、continuous ナ range ノ eigenvalues ニ属スル ψ's ノ sum 即チ integral ニ相当スルモノヲ考ヘル必要ガアル。~~即チ~~ トコロガ 与ヘラレタ state ニ於テ ~~ψ~~ observable ノ値ヲ測ッタ時 continuous range 中ノドンナ値デモトリ得ル場合ニハ、ソノ state ψ ハ discrete ナ eigen-ψ's ノ ~~sum~~ enumerable number ノ sum トシテ 表ハサレナイ。ソコデ ~~…~~ ψ's or φ's ノ integral ヲ考ヘル必要ガアル。

~~今仮ニ~~ ψ_τ ガ τ ナル continuous range ノ値ヲトル parameter ヲ含ンダ ~~eigen-state~~ ψ-symbol トスル。~~オク。τノ各ノ値ニ於テ ψ_τ ハ normalize サレテヰルトスル~~ オク。~~今~~ ~~中~~ 普通ノ function ノ integral ヲ作ル場合ノ様ニ τ ノ範囲ヲイクツカニ分ケ、ソノ各々ガ τ_n ナル値ヲトリ

Δτ_n ハ各小範囲ノ巾

$$\sum_{n=1}^{N} c_{\tau_n}\psi_{\tau_n}\Delta_{\tau_n} \qquad (29)$$

ヲ作レバ、之ハ一ツノ state ヲ表ハス ψ デアル。但シ c_{τ_n} ハ ~~…~~ c_τ ナル τ ノ ~~inte~~ function ノ τ_n ニ於ケル値トシテヰル。ソコデ N ヲ限リナク大キクシ、~~各~~ ~~範囲~~ 各小範囲ヲ限リナク小サクシタ時

カヽル手続ノ収斂如何ハ問ハヌ？

$$\sum_{n=1}^{N} c_{\tau_n}\psi_{\tau_n}\Delta_{\tau_n}$$

~~極~~ 近ヅクベキ ψ トノ差ガ限リナク小サクナル。即チ

$$\psi - \sum_{n=1}^{N} c_{\tau_n}\psi_{\tau_n}$$

ノ ~~…~~ 自分自身トノ product ガ限リナク小

今一ツノ observable τ ノ eigenstate ノ ψτ ヲ対スルヲ考ヘテ見ルト

(27) ヲ用イテ $\int \cancel{c_\tau d\tau\, \psi_\tau}\, dc$ ナル state ニ於テ、アル ψ_{τ_m} ニ対スル ~~[illegible]~~ ノ値

probability of agreement ハ $\phi_{\tau_m}\int c_\tau \psi_\tau d\tau$

但シ ~~[illegible]~~ τ ノ異ナル値ニ対スル ψ's ハ orthogonal デアルカラ integral ハ τ_m 附近ヨリ c_{τ_m} ~~[illegible]~~ ナリ

ヨリトレルカラ。 ψ_{τ_m} ヲ適当ニ $\phi_{\tau_m}\int \psi_\tau d\tau = 1$ ナル様ニ normalize スレバ之ハ

依ツテ ~~[illegible]~~ 一ツノ observable α ノ eigenvalue デアル之等ノ $a_1, a_2, \ldots$ ナル

~~[illegible] (26) ヲ満足スル ψ_{τ_m} ハ~~ discrete set 又ハ a 或ル範囲 continuous ナ range ヲ作ル。任意ノ state ψ ニ於テ

α ノ値ヲ測定スレバ、之等ノ eigenvalues ノ中ノ何レカノ

値ヲトルコト確カデアル。適当ナ eigen state ヲトルコトニヨリ $\psi_{a_1} \cdots \psi_a$

$$\Psi = \sum_r \psi_{a_r} + \int \psi_a da \tag{31}$$

(~~28~~)

トシテアルハ之ヲ言ヒ換ヘテ ~~[illegible]~~ ψ ノ [illegible] デアル。之ハ superposition principle ノ generalization デアッテ 後述スベキ symbolic ナ state ノ ~~definition~~ algebra ニ於テ重要ナ役割ヲ演ズルモノデアル。依ッテ之ヲ一ツノ axiom トシテ認メルコトニシヨウ。Expansion Axiom ト名ヅケルコトニシヨウ。

$$\varphi_{a'}\int \psi_a da = \varphi_{a'}\int_{a'} \psi_a da = \cancel{\phi}\, 0$$

state ψ ノ ψ_τ ニ対スル probability of agreement ヲ考ヘルコトガ出来ル。

少サクスル時ニハ、コノ ψ ヲ

$$\psi = \int c_\tau \psi_\tau \, d\tau \qquad (30)\ (\cancel{29})\ (\cancel{28})$$

トアラハスコトガ出来ル。

~~然ルニ ψ_τ ト ψ トガ与ヘラレタ時 c_τ ヲ求メルニハ~~

ソコデ τ ガアル observable ノ eigenvalues デアルトシテ

然ル時ニハ (26) ニ於テ 各 ψ_{τ_n} ハ ~~互ニ~~ orthogonal ~~normalized~~ デアルカラ 又 c_τ ニ於テ integral $c_{\tau_m}\psi_{\tau_m}\phi_{\tau_m}\Delta\tau_m =$ ガ存在シテ居ル時ニハ

$$\phi_{\tau_m}\left(\sum c_{\tau_m}\psi_{\tau_m}\Delta\tau_m\right) = c_{\tau_m}\left(\phi_{\tau_m}\sum_n \psi_{\tau_m}\Delta\tau_m\right) \qquad (28)$$

or $$\phi_{\tau_m}\psi = c_{\tau_m}\lim_{\Delta\tau_m\to 0}\left(\phi_{\tau_m}\sum \psi_{\tau_m}\Delta\tau_m\right) = c_{\tau_m}\phi_{\tau_m}\int\psi_\tau \, d\tau$$

~~從ッテ c_{τ_m} ガ finite ノ値ヲトリ得ルタメニハ $\phi_{\tau_m}\psi_{\tau_m}$ ガ~~

ソレヲ用ヒテ ~~与ヘラレタ ψ ニ於テ c_{τ_m} ヲ求メルコトガ出来ル。~~

~~又 c_τ ヲ用ヒテ ニ於テ integral ガ存在シテ居ル時ニハ~~

$$\cancel{\phi\left(\psi - \sum c_{\tau_m}\psi_{\tau_m}\Delta\tau_m\right)} = \phi$$

今 (28) ヲ満足スル φ ニ c_τ ヲ用ヒテ integral ヲ作レバ

$$\phi\cdot\sum c_{\tau_n}\psi_{\tau_n}\Delta\tau_n =$$

次ニ real observable α ノ eigenvalue a_p ニ属スル eigen-ψ's ノ
~~ψ之デ ノ expansion ノ axiom カラ real variable ノ~~
一ツヲψトスレバ

前ニ16頁ノ(24)ヲ論ジタ ~~ψ之デ observable ノ~~

$$\alpha \psi_p = a_p \psi_p$$

power series デアラハサレル函数ガ ~~eigenvalue ノ函数~~

$$f(\alpha)\psi_p = f(a_p) \quad f(x) \text{ガ}$$

ヲ得ル。

$$f(\alpha)\psi_p = f(a_p)\psi_p. \tag{32}$$

我々ハモット一般ニ $f(x)$ ヲ real variable x ノ任意ノ函数デ、ソノ domain ガ a_p ヲフクンデ居レバ $f(a_p)$(32) ノ左辺ハ意味ガアル。$f(\alpha)\psi_p$ ヲ ~~(32)~~ ノ左辺デ define スルコトニスル。a_p ニ属スル eigen~~state~~ ψ's ガイクツモアッテ ソノ間ニ

$$\sum c'\psi'_p = 0$$

トイフ linear relation ガアレバ

$$f(\alpha)\sum c'\psi'_p = \sum c' f(\alpha)\psi'_p = \sum c' f(a_p)\psi'_p = 0$$

ダカラ(24) ~~ψ_p ノ一ツヲ他ノモノデ line~~ independent ナ ψ_p's ニツイテ $f(\alpha)\psi_p$ ヲ $f(a_p)\psi_p$ デ定義スレバ、ソノ linear combination デ得ラレル ~~ソノ他ノ~~ ψ_p's 全部ニ対シテモ $f(\alpha)\psi_p$ ハ $f(a_p)\psi_p$ デアルベキコトニ矛盾ハ生ジナイ。

$f(x)$ ノ domain ガ凡テノ eigenvalue ヲフクンデ居レバ

complete set $\overset{\text{of } \psi\text{'s}}{}$ ハ一般ニ discrete set $\overset{\text{of } \varphi\text{'s}}{}$ トハ限ラヌカラ．complete set ニツイテ述ベタ際ニ既ニ integral ヲ考ヘル必要ガアツタ。

Integral ノ場合 ~~Expansion theorem~~ ヲ認メレバ

$$\lim \left[\varphi' \left\{ \psi - \sum_{n=1}^{N} \psi_\tau \Delta\tau_n \right\} \right]$$

$$= \lim \left[f - \sum_{n=1}^{N} g_\tau \Delta\tau_n \right] \quad \text{for any } \varphi'$$

$$= f - \int g_\tau d\tau = 0$$

其ノ條件ハ φ' ニ對シ $\varphi'\psi_\tau \overset{= g_\tau}{}$ ガ integrable，換言スレバ ψ_τ ハ integrable．$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ ニ對シテ $g_{n\tau} = \varphi_n \psi_\tau$ ガ integrable ナラバ ~~$g_{n\tau}$~~ ……
Linear combination ニ對シテモ integrable.

五月十六日

一ツノobservableノeigenvalueノsetガnumberノcontinuous rangeヲツクルコトガアル場合、ソノ時ニ属スルeigen-ψ or eigen-φノsuperpositionトシテdiscreteナeigen-ψ'sノsumノ外ニcontinuousナrangeノeigenvaluesニ属スルψ'sノsum或ハψノintegralノ如キモノヲ考ヘル必要ガアル。ト云フノハ或ルstateニ於テハobservableノ値ヲ測ッタ時continuous rangeノ中ノドレカノ値デモトリウル場合ニハ、ソノstateヲdisreteナψ'sノsumトシテ(enumerable number)表ハスコトハ不可能デアルカラデアル。

ソコデψ or φ-symbolノintegralヲdefineセネバナラヌ。

今ψ_τヲ以テτナル或ルcontinuousナrangeノ値ヲトリウルparameterヲ含ムψ-symbol、ソノconj. imagヲφ_τト表ハシ$\varphi_\tau\psi_\tau$ハ~~数ニ~~τノ一般ノ函数デアル。普通ノ函数ニ於ケルintegralト同様ニτノ~~範囲~~range ヲN個ノ部分ニ分ケテ夫々ノ部分カラ一ツ宛ψ_τノsumヲ作リ、分ケル数ヲ増シテ各部分ヲ段々小サクシタ時

$$\sum_{n=1}^{N}\psi_{\tau_n}\Delta\tau_n$$

n番目ノ$\Delta\tau_n$: domainノ大サ. ψ_{τ_n}ハソノ中ノ一ツノψ_τ

~~ナルトキ~~ 分ケ方ニ無関係ニ或ル一定ノψトノ差

$$\psi-\sum_{n=1}^{N}\psi_\tau\Delta\tau_n$$

ノ絶対ノφニ対スル数ガイクラデモ小サクナル時ニハコノψヲψ_τノintegralトシテ

$$\psi=\int\psi_\tau d\tau$$

ト書クコトニスル。

特ニ此ノ場合ニ其ノψトconj. imagナφハ ニナッテ

$$\varphi=\int\varphi_\tau d\tau$$

ソコデ一般ニカヽル integral ガ存在スルトスレバ discrete ナ場合ニ sum デアラハサレル所ハ continuous ノ場合ニハ integral デアラハサレル
ト云フ形ヲモツ real observable

即チ一ツノ ~~observable~~ α ノ eigenvalue ヲ $a_1 a_2 \cdots$ ナル
discrete set ト $a\ (b \leq a \leq c)$ ナル continuous range of
number ヨリナルトシ、ソレ等ニ属スル eigen-ψ's ヲ夫々 ψ_{a_1},
$\psi_{a_2} \cdots$ 及 ψ_a トスル。ソコデ任意ノ state ψ ニ於テ
α ノ値ヲ測定スルナラバ $a_1 a_2 \cdots$ $a\ (b \leq a \leq c)$ ノ内ノ
イヅレカノ値ヲ与ヘル筈デアル。従ッテ任意ノ ψ ハ ψ_{a_1} ψ_{a_2} etc
及 ψ_a ノ superposition ~~デ~~ ニヨリテ表ハサレル筈。コヽデ
イフ superposition トハ前ニ用ヒタヨリモ一層抽象的ナ
意味ニ使ッタノデアル。即チ symbolical ニ ~~superposition~~ ハ discrete ナ
場合ニハ addition トシテ、continuous ナ場合ニハ integration
トシテアラハサレル。~~トシテオク~~。即チ任意ノ ψ ハ

$$\psi = \sum \psi_{a_n} + \int \psi_a \, da \qquad (29)$$

トシテアラハサレル。之レハ一ツノ axiom トミルベキデアル。superposition principle ヲ extend シタ axiom
之ヲ Expansion theorem ト云フ。
(Expansion ハ unique デアルコトヲ証明スル。
~~com~~ minimum disturbance ノ條件ヲ要スル。)

ここに於て ϕ_c ノ integral ガ考ヘラレル筈デアル。

今 一ツノ observable α ノ eigenvalue ガ $a_1, a_2 \cdots$ ト ~~$b \leq a \leq c$ ナル~~ discrete set ト a ~~(a', a'') ナル範囲~~ continuous range of numbers a デアラハサレル $(b \leq a \leq c)$ ヨリ成ルトシ、 ソレゾレニ属スル eigen-ψ's ヲ夫々 $\psi_{a_1}, \psi_{a_2} \cdots$ 及 ψ_a トスル。然ルトキハ ψ_a ニ関スル integral

$$\psi_A = \int \psi_a \, da$$

ガ存在スルトシ、任意ノ ϕ ニ対シテ

$$\phi\left(\psi_A - \sum_n \psi_{a_n} \Delta a_n\right)$$

ガ分割ヲ細カクスルトキ 0 ニ収斂スルモノトスル。殊ニ 任意ノ eigen ϕ ; $\phi_{a'}$ ニ対シテ

$$\phi_{a'}\left(\psi_A - \sum_n \psi_{a_n} \Delta a_n\right)$$

ガ 0 ニ converge シナケレバナラヌ。

所デ eigen ~~state~~ ノ間ニ orthogonal デアルカラ

$$\phi_{a'} \psi_a = 0 \quad \text{for } a' \neq a.$$

$$\therefore \quad \phi_{a'}\psi_A - \sum_m \phi_{a'}\psi_{a_m}\Delta a_m$$

ガ 0 ニ conv セネバナラヌ。

タダシ a' ハ a'_m 番目ノ区間内ノ値デアルトシテオク。

然ルニ $\phi_{a'}\psi_A$ ハ 一定ノ a' ノ値ニ対シテ定マッタ値ヲ持ツニ $\phi_{a'}\psi_{a_m}\Delta a_m$ ノ方ハ分割ヲ細カクスルト共ニ限リナク小サクナリ 0 ニ conv スル。 ($\phi_{a'}\psi_{a_m}$ ガ ~~finite~~ limited ナラバ) 従ッテ

デアルカラ $\phi_{a'}\psi_a$ ガ a ノ limited 函数デアルトスルト conj imag デナケレバナラヌ a' ノ limit 点トナリ $(b \leq a' \leq c)$ ノ任意ノ値ニ対シ

† 故ニ 同ジ eigenvalue a_p ニ属スル linearly indep ナ ψ_p's ニ対シテ (30) デ $f(\alpha)\psi_p$'s ヲ定義シテヤルト ソレ等ノ linear comb デアル所ノ ~~任意~~

$$\psi = \sum c' \psi_p'$$

ニ対シテハ

$$f(\alpha)\psi = \sum c' f(\alpha)\psi_p' = \sum c' f(a_p)\psi_p'$$

$$= f(a_p)\sum c'\psi_p' = f(a_p)\psi$$

トナル。故ニ (30) ノ関係デ定義スルノニ矛盾ハ起ラヌ。

コノ expansion axiom ニヨッテ real observable ノ函数ノ定義ヲ real variable ノ ordinary function ノ定義ト同ジ程度ニ迄拡張スルコトが出来ル。

第一ノ場合 f(x) ガ x ノ power series デアラハサレルナラバ α ノ一ツノ eigenvalue a_p ニ属スル state ψ_p ニ対シ

$$f(\alpha)\psi_p = f(a_p)\psi_p \qquad (30)$$

ガ成立スル。

今 f(x) ヲ $x=a_p$ ヲフクム domain 内デ定義セラレタ real variable x ノ任意函数トスレバ (30) ノ右辺 $f(a_p)\psi_p$ ハ意味ヲモッテ居ル。ソコデ $f(\alpha)\psi_p$ ヲ ~~ト定義~~ $f(a_p)\psi_p$ ト定義スル。

一ツノ eigenvalue ニ属スル eigen ψ's ~~ガ~~ ~~属スル~~ ψ_p' ψ_p'' … ガ ~~属スル~~ ソノ間ニ

$$\sum c'\psi_p' = 0$$

ナル linear relation ガ存在スルナラバ (30) ノ definition カラ

$$f(\alpha)\sum c'\psi_p' = \sum c' f(\alpha)\psi_p' = \sum c' f(a_p)\psi_p' = 0$$

トナリ当然成立スベキ関係ガ成立シ、矛盾ヲ生ジナイ!

~~其~~ ソコデ f(x) ナル函数ノ domain ガ ~~任意ノ~~ α ノ凡テノ eigenvalue ヲフクンデ居ルナラバ f(α) ヲ任意ノ eigen-ψ ニ乗ジタモノガ意味ヲ持ツ。

然ルニ任意ノ ψ ハ eigen ψ デ expand 出来ルカラ任意ノ ψ ニ対シテ f(α) ヲ乗ジタモノハ各 expansion ノ各 term

† (30)ノ証ニ於イテ ‥ノ conj. imag

$$\phi_p f(a) \approx f(a_p)\,\phi_p \qquad (31)$$

ヲトツテモ同ジコトガ言ヘル。

ニ $f(\alpha)$ ヲ乗ジタモノノ sum ~~or~~ and integral トシテ表ハシタイ。
即チ α ナル real observable ノ ~~従来~~ 凡テノ eigenvalue ヲフクム domain ニ於テ定義サレタ real variable x ノ函数 $f(x)$ ニ対シテ $f(\alpha)$ ~~ガ定義スルコトガ出来ル。~~ ハ意味ヲモツテ居ル。

之ハ eigenvalue ノ物理的意味カラ出テクルノデアル。何故ナラバ α ガ observable quantity ナラバ $f(x)$ ガ α ノ observation ノ結果ノ possible result ニ対シテ意味ヲ有スル函数ナラバ、言ヒ換ヘレバ α ヲ observe スレバ其ノ際ニ $f(\alpha)$ ヲモ observe シタコトニナルカラデアル。

(30) ノ definition カラシテ α ノ eigen-ψ ハ凡テ $f(\alpha)$ ノ eigen-ψ デアル。然シ逆ニ α ガ $f(\alpha)$ ノ one valued function デナイナラバ $f(\alpha)$ ノ eigen-ψ ハ必ズシモ α ノ eigen-ψ トナラヌ。~~例ヘバ~~ $\cancel{\alpha^2\psi = a^2\psi}$ ~~ハ~~ $\cancel{\alpha^2\psi = a^2\psi}$ ~~ノ α ノ eigenvalue ガ $+a$ ノ時デモ~~ $\cancel{\alpha\psi = -a\psi}$ ~~ノ solution ニヨッテ満足サレル~~ 又 $f(\alpha)$ ノ eigenvalue ハ凡テ α ノ eigenvalue ノ前記函数デアル。之ハ物理的意味カラ考ヘテ當然ノコトデアル。又 observable ノ二ツノ函数ノ和、積、~~其他~~ observable ノ函数ノ函数等モ亦 observable ノ函数デアル。

∵ 例ヘバ $f(\alpha)\psi_p = f(a_p)\psi_p$ $\qquad g(\alpha)\psi_p = g(a_p)\psi_p$

$$\{f(\alpha) + g(\alpha)\}\psi_p = f(\alpha)\psi_p + g(\alpha)\psi_p$$
$$= f(a_p)\psi_p + g(a_p)\psi_p = \{f(a_p) + g(a_p)\}\psi_p \quad *$$

上ノ如クシテ define シタ

* real observable ノ函数ノ例ヲ挙ゲテオク. 例ヘバ α ガ 0 ナル eigenvalue ヲ持ツテ居ナイ時ニハ reciprocal α^{-1} 逆ノ observable ハ

$$\alpha^{-1}\psi_p = a_p^{-1}\psi_p$$

デ define サレル. 但ニ ψ_p ハ α ノ eigenvalue a_p ニ属スル eigen-ψ.

従ツテ $$\alpha\alpha^{-1}\psi_p = \alpha a_p^{-1}\psi_p = \psi_p \quad \text{for any } \psi_p$$

$$\therefore\ \alpha\alpha^{-1} = 1 \qquad 同様ニ\ \alpha^{-1}\alpha = 1$$

逆ニ 之ノ如クシテ 例ヘバ $\alpha\alpha^{-1}=1$ ~~ガ成立スルナラバ~~ モシ reciprocal ガ存在スルトスレバ

之ニヨツテ 只一ツニ定マル。

∵ $(\alpha^{-1})_1$, $(\alpha^{-1})_2$ ノ二ツアルトスレバ

$$\alpha\{(\alpha^{-1})_1 - (\alpha^{-1})_2\} = 1 - 1 = 0$$

α ノ reciprocal ヲ左カラ掛ケレバ

$$(\alpha^{-1})_1 - (\alpha^{-1})_2 = 0$$

∴ solution ハ unique.

第二ノ例トシテ α ノ平方根 $\sqrt{\alpha}$ ハ

$$\sqrt{\alpha}\,\psi_p = \pm\sqrt{a_p}\,\psi_p$$

デ定義サレル。但シ ± ノ sign ハ各 eigenvalue ニ対シテ任意ニトツテヨイカラ eigenvalue ノ数ガ n ノ時ニハ 2^n 個ノ平方根ガ存在スル。

又 observable α ノ modulus $|\alpha|$ ナルモノヲ

$$|\alpha|\psi_p = |a_p|\psi_p$$

ニヨツテ定義スル。**

ココニ S ヲ reciprocal S^{-1} ヲ有スル 任意ノ observable トスレバ
任意ノ observable α ト $S\alpha S^{-1}$ ノ eigenvalues ハ同一デアル

何トナレバ

$\alpha\psi_a = a\psi_a$ トスレバ

$$S\alpha S^{-1} S\psi_a = S\alpha\psi_a = S a\psi_a = a S\psi_a$$

即チ a ハ又 $S\alpha S^{-1}$ ノ eigenvalue デ $S\psi_a$ ガ之ニ属スル eigenstate デアル。逆ニ $S\alpha S^{-1}$ ノ一ツノ eigenvalue ヲ a, eigen ψ ヲ ψ'_a トスレバ $S\alpha S^{-1}\psi'_a = a\psi'_a$ ナルニヨリ

$$\alpha S^{-1}\psi'_a = S^{-1}\cdot S\alpha S^{-1}\psi'_a = S^{-1}a\psi'_a = a S^{-1}\psi'_a$$

即チ $S\alpha S^{-1}$ ノ eigenvalue ハ又 α ノ eigenvalue デアル。
$S^{-1}\psi'_a$ ガ eigen ψ トナル。

α real ノ場合 $S\alpha S^{-1}$ モ亦 real

$$S\alpha S^{-1} = \overline{S\alpha S^{-1}} = \bar{S}^{-1}\alpha\bar{S}$$

$$\bar{S}S\alpha = \alpha\bar{S}S$$

即チ $\bar{S}S$ ハ任意ノ real α ト commute スル故.

今 $\alpha\psi_a = a\psi_a$

ナラバ $\bar{S}S\, a\psi_a =$

§ Commutative Observables and Simultaneous Eigenstates

一ツノ real observable α ト commute スル任意ノ observable β ハ又 α ノ任意函数 f(α) ト commute スル。

特ニ f ガ power series デアラハサレル時ハ容易ニ証明サレルガ、~~モット一般ニ f 函数~~ f ハ函数デ定義セラレタ時モ、モット一般ノ函数デアッテモ成立スル。

証明. α ノ eigenvalue a_p ニ属スル eigen-ψ ヲ ψ_p

a_q ノ eigen φ ヲ ϕ_q トスレバ

$$\alpha\psi_p = a_p\psi_p \qquad \phi_q\alpha = a_q\phi_q$$

ト置キ $\phi_q\beta\alpha\psi_p$　~~$\alpha\beta-\beta\alpha=0$~~ $\beta\alpha-\alpha\beta=0$ ナル故

~~$\phi_q(\beta)\alpha-($~~

$$\phi_q(\beta\alpha-\alpha\beta)\psi_p = \phi_q\beta a_p\psi_p - a_q\phi_q\beta\psi_p$$
$$= (a_p-a_q)\phi_q\beta\psi_p = 0$$

$$\therefore\ \phi_q\beta\psi_p = 0 \quad \text{or} \quad a_p = a_q$$

従ッテ $\phi_q\beta\psi_p = 0$ or $f(a_p) = f(a_q)$

$$\therefore\ [f(a_p)-f(a_q)]\,\phi_q\beta\psi_p = 0$$

トコロガ $\phi_q[\beta f(\alpha) - f(\alpha)\beta]\psi_p = [f(a_p)-f(a_q)]\,\phi_q\beta\psi_p$

上ノ関係ニヨリ　$= 0$

トナリ之ハ任意ノ eigen-ψ ψ_p 及ビ任意ノ eigen φ ϕ_q ニ就テ成立スル。~~従ッテ任意ノ ψ, φ ニ就テ成立スル~~ 故ニ任意ノ ψ, φ ハソレ等ニヨッテ expand サレル故ソレニ就テモ成立スル。

$$\therefore\ \beta f(\alpha) - f(\alpha)\beta = 0$$

** 次ニ我々ハ与ヘラレタ state ψ ニアル system ニ於テ一ツノ観測（observable α ノ）ヲ行ッタ時 与ヘラレタ結果 a ヲ得ル probability P(a) ヲ求メヨウ。

observable α ノ任意函数 f(α) ノ ~~state~~ ψ ニアル system ニ於ケル average value ハ一方ニ於テ

$$\varphi f(\alpha)\psi = \sum_a f(a)P(a) \qquad \text{但シ } \varphi\psi = 1$$

デ与ヘラレル。他方 φ, ψ ヲ α ノ eigen-φ, eigen-ψ デ expand スレバ

$$\varphi = \sum_a \varphi_a, \quad \psi = \sum_{a'} \psi_{a'}$$

トスレバ　$\varphi f(\alpha)\psi$ = 零ナラヌ eigen ~~state~~ value ニ属スル eigen state ハ orthogonal デアルカラ

$$\varphi f(\alpha)\psi = \sum_{aa'} f(a)\varphi_a\psi_{a'}$$
$$= \sum_a f(a)\varphi_a\psi_a$$
$$\therefore f(a)P(a) = f(a)\varphi_a\psi_a$$

之ガ real variable a ノ arbitrary fn f(α) ニ対シテ成立スルニハ

$$P(a) = \varphi_a\psi_a \qquad (32)$$

デナケレバナラヌ。

但シ $\sum_a \varphi_a \sum_{a'} \psi_{a'} = \sum_a \varphi_a\psi_a = 1$

expansion ノ係数ヲ加ヘテ normalized φ_a's ψ_a's ヲトリ.

$$\varphi = \sum_a \bar{c}_a\varphi_a \qquad \psi = \sum_{a'} c_{a'}\psi_{a'}$$

トスレバ　$P(a) = \bar{c}_a\varphi_a c_a\psi_a = |c_a|^2$ ***(33)

逆ニ real observable α ト commute スル凡テノ observables ガ又他ノ observable f ト 〃 〃 ナラバ f ハ α ノ函数デアル。

証明，先 α ノ eigenvalue a_p ニ属スル eigen ψ ψ_p ニ対シテハ

$$\beta\psi_p=\psi_p$$

a_p ト異ナル eigenvalue a_q ニ属スル eigen ψ ψ_q ニ対シテハ

$$\beta\psi_q=0$$

又 ψ_p' ヲ以テ a_p ニ属シ ψ_p ト共ニ a_p ニ属スル eigen ψ ノ complete independent set ヲツクル様ナモノトスレバ，之ニ対シテ

$$\beta\psi_p'=0$$

ヲ満足スル様ナ β ヲ考ヘル。之等 ψ_p, ψ_p', ψ_q ニヨツテ complete set ヲツクリ得ルカラ，上ノ式ニヨツテ β ハ完全ニ define サレル。

スルト
$$(\alpha\beta \cancel{\psi_q} - \beta\alpha)\psi_q = 0 - \beta a_q\psi_q = 0$$
$$(\alpha\beta - \beta\alpha)\psi_p = a_p\psi_p - \beta a_p\psi_p = 0$$
$$(\alpha\beta - \beta\alpha)\psi_p' = 0 - \beta a_p\psi_p' = 0$$

従ツテ $(\alpha\beta-\beta\alpha)\psi=0$ for any ψ

$$\therefore\ \alpha\beta-\beta\alpha=0$$

∴ 仮定ニヨリ　$f\beta-\beta f=0$

$$\therefore\ \beta f\psi_p = f\beta\psi_p = f\psi_p$$

所ガ任意ノ ψ ニ就テ　ψ_p, ψ_p', ψ_q デ expand スレバ明カナ様ニ

$$\beta\psi = c\psi_p$$

$$\therefore\ f\psi_p = c\psi_p$$

∴ 従ツテ α ノ eigen ψ ハ又 f ノ eigen ψ デアル。

*** ここニ於テ ψ ガ eigenvalue a ニ属スル eigenstate デアル場合ニハ
α ガ a ナル value ヲトル probability ハ

$$P(a) = \phi_a \psi_a = \phi\psi = 1$$

従ッテ $\alpha\psi = a\psi$ ナル ψ (φ state ψ ニ於テ) α ハ 確実ニ a ナル値ヲトルトイフコトガ observable α ノ average value ヲ与ヘルトイフ general assumption (φαψ ガ) (ト expansion theorem) カラ出テクル。

~~又 $c_1\psi_1$ ψ_1 ト ψ_2 ノ superposition デアル $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ ナル state ニ於テ~~

又 $\psi_1 = \sum_a \cancel{c_a\psi_a}\; b_a \psi_a$

$\psi_2 = \sum_a b'_a \psi_a$

トスレバ $\psi_0 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$

$= \sum_a (c_1 b_a + c_2 b'_a)\psi_a$

ψ_1 ニ於テ observable α ガ a ナル値ヲトル Prob

$P_1(a) = |b_a|^2$

ψ_2 〃 〃

$P_2(a) = |b'_a|^2$

ψ_0 〃

$$P_0(a) = |c_1 b_a + c_2 b'_a|^2 = |c_1|^2 P_1(a) + |c_2|^2 P_2(a) + (c_1\bar{c}_2 b_a \bar{b}'_a + \bar{c}_1 c_2 \bar{b}_a b'_a)$$

従テ $P_0(a) \neq 0$ ノ条件ハ $P_1(a)$ 或ハ $P_2(a)$ ノイヅレカガ 0 デナイ場合ニ限ル。従テ ψ_1, ψ_2 ノ superposition ニヨッテ出来タ state ニ於ケル (結合) observation ノ結果ハ ψ_1, ψ_2 ニ於ケル observation ノ結果ノイヅレカト一致スル。如此考ヘ方ノ superposition ノ definition ト全ク一致シテ ~~居ル~~ 而モ此ガ φαψ ガ出来ルノ デアルカラ φαψ ヲ average value デアルト解釈スルコトニヨリ symbolic ナ algebra ニ於ケル superposition ノ def.

然るに α の凡ての eigenvalue に属する二つ以上の ψ の linear comb をつくれば 之は 従って 矢張り α の eigen ψ であるから f の eigen ψ となる。 之は 其の二つ以上の ψ's が又 f の凡ての eigen value に属する~~こと~~事に外ならない る。 故に α の一つの eigen value には f の一つの eigen-value が属する事になる。 この事によって f と α との間に function なる relation が決定される。故に f は α の函数に外ならない。

一つの state が同時に二つの observable の eigen state である場合を simultaneous eigenstate となづける。
若し α と β とが commute する場合には任意の state は α, β の simultaneous eigenstate によって expand する事が出来る。

証明 ~~又~~ α の任意の eigen ψ ψ_a を β の eigen ψ で expand して

$$\psi_a = \sum_b \psi_b$$

とする。

これに一方 $\alpha f(\beta)\psi_a = \alpha \sum_b f(\beta)\psi_b$

$$= \alpha \sum_b f(b)\psi_b = \sum_b f(b)\cdot\alpha\psi_b$$

他方 $\alpha f(\beta)\psi_a = f(\beta)\alpha\psi_a = f(\beta)\, a\psi_a$

$$= a\sum_b f(b)\psi_b$$

任意とす *** 之が任意の f 故に b の各々に付き別に任意の値 f(b)

$$\therefore \cancel{\alpha}\sum_b f(b)\,\alpha\psi_b = \sum_b f(b)\, a\psi_b$$

21頁第八

~~※※※ 次ニ expansion theorem カラ出テクル級数ニ~~.

ヲ求ムル條件ヲ満ス一般ノ函数ガ存在シナケレバナラヌ。

$$\therefore\ \alpha\psi_b = a\psi_b$$

即チ expansion ノ各項ハ α ノ eigenstate デアル

即チ任意ノ(α) eigenstate ハ α, β ノ simultaneous eigenstate デ expand サレル。然ルニ任意ノ state ハ α ノ eigenstate デ expand サレル故、従ッテハ α, β ノ sim. eigenstate デ expand サレル。

即チ　$\psi = \sum_{ab} \psi_{ab}$

逆ニ任意ノ state ガ α, β ノ simultaneous eigenstate デ expand サレル時ニハ α ト β トハ commute スル。

証明、

$$(\alpha\beta-\beta\alpha)\psi$$
$$= (\alpha\beta-\beta\alpha)\sum\psi_{ab}$$
$$= 0 \qquad \text{for any } \psi$$
$$\therefore\ \alpha\beta-\beta\alpha = 0$$

以上ノ結果ノ~~證明~~方法ニヨリ、任意個数ノ commutative observables (α β γ …) ノ simult. eigenstate ニヨッテ任意ノ state ヲ expand サレル事ヲ知ル。

$$\psi = \sum_{abc..} \psi_{abc..}$$

従ッテ ~~2ツ場合~~ 2ノ場合 α β γ .. ノ一般ナ函数ヲ

$$f(\alpha\beta\gamma..)\psi_{abc..} = f(abc..)\psi_{abc..}$$

ニヨッテ定義出来ル。但シ f(abc..) ハ real variables

abc.. ノ函数デナイモノ domain ニ於ケル α β γ .. ノ eigenvalue ヲトルコトヲ許サレルモノトシテ考ヘル。

又之ノ第一種トノ二ツノ定理ハ多クノ commutative observables ノ set ニ對シテモ成立スル。

所謂 commutative observables α, β, γ .. ノドレトモ commute スル observable θ ハ之等ノ函数 f(α, β, γ ..) ト commute スル。

∵ α, β, γ .. ノ ~~sim~~ 二ツノ simult. eigenstate ヲ $\psi_{abc..}$, $\psi_{a'b'c'..}$ トスレバ

$$\psi_{a'b'c'..}(\theta\alpha-\alpha\theta)\psi_{abc..} = \cancel{a}\,(a-a')\,\psi_{a'b'c'..}\theta\psi_{abc..} = 0$$

$$= (b-b') \quad " \quad " \quad = 0$$

etc

∴ $a=a'$, $b=b'$ etc ~~デナケレバ~~ or $\psi_{a'b'c'..}\theta\psi_{abc..}=0$ デナケレバナラヌ。即チ $f(a,b,c..)=f(a',b',c'..)$ ~~デナケレバ~~ or $\psi_{a'b'c'..}\theta\psi_{abc..}=0$

$$\therefore \psi_{a'b'c'..}(\theta f - f\theta)\psi_{abc..} = [f(a,b,c,..) - f(a',b',c'..)]\psi_{a'b'c'..}\theta\psi_{abc..} = 0,$$

五月十六日

127 independent commutative observables ノ maximum possible number ヲトレバ、ソレニ對スル simult. eigenstate (一ツノ eigenvalue ノ set) ハ一ツシカナイ。

commutative observables α's の

∵ 例へば ψ₁, ψ₂ とは同じ eigenvalue の set に属する simul. eigenstate とすれば

$$\rho\psi_1 = \psi_1 , \quad \rho\psi_2 = 0$$

and $\rho\psi_3 = 0$ ψ_3: other simult. eigenstates

とすれば、これは凡ての ~~obs~~ commutative observables (α's) と commute する

$$\because (\rho\alpha_r - \alpha_r\rho)\psi_1 = a_r\rho\psi_1 - a_r\psi_1 = 0$$

$$(\quad \text{〃} \quad)\psi_2 = 0$$

$$(\quad \text{〃} \quad)\psi_3 = 0$$

しかるに ψ_1, ψ_2 の any linear comb は α's の eigenstate なれば ρ の eigenstate でなければならぬ ρ は α's の函数でない。従って α's は maximum possible commutative observables の set でない . . .

かくして α's が maximum possible commutative observables の set である限り eigenstate は一つの eigenvalues の set によって uniquely に定まる、かかる observables の set を complete set とよぶ。

~~前節~~ 前節の終りに得た Probability に関する expression は二つ以上の commutative observables の場合にも成立する。例へば α, β 二つの com . . の場合に於ては ψ を α, β の simult. eigenstate で expand し、

$$\psi = \Sigma_{ab}\psi_{ab}$$

トスルト、state ψ ニアル system ニ於イテ同時測定スル結果ガ夫々 a, b デアル Probab ハ

$$P(a, b) = \psi^*_{ab}\psi_{ab}$$

デアラウ。但シ ψ ハ normalized トシテオク。

カクノ如キ commutative observables ニ ~~於テ~~ 夫々測定シタ ~~結果~~ 一定ノ結果ノ得ラレル Probability ハ測定ノ行ハレル順序ニカヽハラズ一定デアル。コレガツテ commutative observables ノ maximum possible number ノ測定ヲ同時ニ行フコトハ 一ツノ意味ニ於ケル完成ニ達シタ一ツノ maximum observation デアル。従ッテ ~~[illegible]~~ カヽル observation ヲ行ッタ後ノ system ノ state ハ unique ニ定マル。即チ maximum possible number of commutative observable ノ simultaneous eigenstate ハ ~~各々唯一デナケレバ~~ 各 observables ノ 各 eigenvalues ~~デナケレバ一定~~ ヲ来ッタ時 ~~各々唯一~~ simultaneous eigenstate ハ唯一ツシカナイ筈デアル。

次ニ例ヘバ α ト β トガ commutative observables デアレバ β ノ測 ~~$\psi = \Sigma_a\psi_a$~~ 定ヲ行ッテモ行ハナクテモ α ノアル値ノ得ラレル Probab ニハ変リハナイ。

$$\because \quad \psi = \Sigma_{ab}\psi_{ab} = \Sigma_a(\Sigma_b\psi_{ab})$$

$$\text{or} \quad = \Sigma_b(\Sigma_a\psi_{ab})$$

先 β ノ測定ヲ行ッテ b ナル結果ガ得ラレ ~~タトスルト~~ ハ

Normalize にあはせて α の eigenstate で expand した時、a に対する coef は $\frac{\psi_{ab}}{\sum_a \psi_{ab}}$ となる

$P(b)$

Probab は ψ を β の eigenstate で expand した時、eigenvalue b に対する coef は $(\sum_a \psi_{ab})$ だから

$P(b) = (\sum_a \phi_{ab})(\sum_a \psi_{ab})$。~~従って~~ いつでも b といふ結果が得られるから

α の値を測って a といふ値の得られる Prob は $\sum_a \psi_{ab}$

~~$P(b,a) =$~~ $\frac{\phi_{ab}\psi_{ab}}{(\sum_a \phi_{ab})(\sum_a \psi_{ab})}$

従って β に就いて b といふ結果が得られ、しかも α に就いて a といふ結果の得られる Prob $P(b,a)$ は

$$P(b,a) = \frac{\phi_{ab}\psi_{ab}}{(\sum \phi_{ab})(\sum_a \psi_{ab})} \cdot (\sum_a \phi_{ab})(\sum_a \psi_{ab})$$

$$= \phi_{ab}\psi_{ab}$$

従って β の測定を行った後、α を測定して a といふ結果の得られる probab ~~$P_b(a)$~~ は

$$\cancel{P_b(a)} = \sum_b P(b,a) = \sum_b \phi_{ab}\psi_{ab}$$

所で初めから α を測定して a といふ結果の得られる prob は

$$P(a) = \sum_b \phi_{ab} \sum_b \psi_{ab}$$

orthogonality から

$$= \sum_b \phi_{ab}\psi_{ab}$$

即ち両者は一致する。

この説明に於て eigenvalue を測定した後の state は初めの state の expansion に於て其の eigenvalue に属する eigenstate となってゐる state であると仮定してゐる。~~逆に測定後の stat~~

逆ニ斯クノ state ガ測定結果ニ於ケル A ノ state ノ superposition
ニヨッテ表ハサレル場合ニ expansion theorem ガ
要求セラレル。

為ニハ ψ_1, ϕ_2 ガ normalize サレテ居ル時ニハ $|\phi_2\psi_1|^2$
ガ二ツノ state ノ Prob. of Agreement ヲ与ヘルトイフ
コトハ observable ノ average ノ general assumption
カラ出テクル。

∵ ψ_2 トイフ state ニ対シテ. $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ ナル commutative
observables ノ maximum possible number ヲ[illegible]（接ニ）シテ
ソノ[illegible]測定スル時, 確カニ一定ノ結果ガ得ラレル時, コレト
ガ出来ル。次ニコレト同ジ結果ノ得ラレル state ノ[illegible] state ヲ[illegible].
ψ_1 ヲ 2ツノ observables ノ simul. eigenstate デ
~~1/2デ ψ_1 ヲ 2ツノ observables ノ simultaneous~~ expand シ~~[illegible]~~ [illegible] eigen ガ
~~eigenstate デ expand シタ時.~~ $\psi_1 = c_2\psi_2 + \sum c_2'\psi_2'$
ψ_1 ニ対シテ(実際)測ッテ結果ノ得ラレル Prob. ハ

$$\cancel{|\phi_2\psi_1|^2} = |c_2|^2$$

然ルニ orthogonality ト normalization ノ条件カラ

$$c_2 = \phi_2\psi_1 \quad \therefore |c_2|^2 = |\phi_2\psi_1|^2 .$$

(iii) state ノ maximum observation ニヨッテ define サレルコト。

以上ノ事デ述ベタコトヲ要約スルト次ノ如クデアル。

state ヲ表ハス symbol ψ, ϕ ニ対スル addition 及ビ multiplication ニ関スル或ル一ツノ規則ト、observable ヲ表ハス symbol α ト ψ, ϕ トノ積ニ対スル definition ヲ与ヘ、$\phi\alpha\psi$ ニ対シテ observable α ノ state ψ ニ於ケル ~~observe~~ average value トシテ physical meaning ヲ与ヘ、任意ノ state ハ eigenstate ニヨッテ expand シ得ルト仮定スルコトニヨッテ、(i) ψ or ϕ symbol ノ addition ガ superposition ヲ表ハシテ居ルコト。

(ii) ϕ_2 ト ψ_1 トノ積ガ（ノ絶対値ノ二乗）ψ state ト ϕ state ノ Probab of agreement ヲ表ハシテ居リ、(iii) $\alpha\psi = a\psi$ ヲ満足スル state ψ ニ於テ observable α ハ確カニ a ナル値ヲトルコト。

(iv) 一ツノ state ニ於テ α ノ各固有値ヲトル Prob ハ expansion coef ノ絶対値ノ二乗デ与ヘラレルコト。

(v) observables ニ関スル色々ノ計算ノ規則ガ得ラレルコト等ヲ deduce スルコトガ出来ル。

Orthogonal

§ General ~~Case~~ of Representation

Representation by discrete set of fundamental states

Representation ニ関スル Expansion Theorem

適用シ representation ニ関スル an eigenfunction

理論ヲ [illegible]。

Chapter III. Representations of States and Observables.

前章ニ於テ 取扱ツタ state 及ビ observable ヲアラハス abstract ナ symbol ~~ノ間ノ代数的関係ヲ取扱ッテ来タ~~ ノデアッタガ、コノ abstract symbol ニ ~~対応シテ其ノ他ノ性質ヲ~~ トドコマデモ対応サセルコトノ出来ル ~~数ノ~~ number ノ set ヲ考ヘヨウトスル。即チ ~~symbol~~ state 及ビ observable ノ representation ニ就テ考ヘテ見ヨウ。勿論斯ノ如キ representation ガアレバ以上ハ ~~abs~~ representations ノ間ニ成立スル関係ハ凡テ abstract symbol 間ニモ成立シナクテハナラヌ。ドチラヲ用ヒテモ 計算ヲ進メテ出テクル結果ハ同ジデアル筈デアルガ、唯 representation ニアラハレテクル number 自身ニ物理的ナ意味ヲ与ヘラレル場合ガ ~~多カラウ~~ アリ、又計算ノ容易ナル場合モアルカラ representation ニ就テ考ヘテ見ルコトハ意義ガアル。

indep. ψ ノ complete ~~independent~~ set ψ_p ~~ニヨッテ~~ ノ linear combinationトシテ任意ノ ψ ヲ ~~アラハシ~~ アラハシ

$$\psi = \Sigma_p a_p \psi_p \qquad (1)$$

~~トスル~~ アラハシタ時ニ coefficient トシテ出テクル number ノ set a_p ト ψ トノ間ニ one-one correspondence ガ成立スル。

$$\because \quad \psi = \Sigma_p a_p \psi_p$$
$$\psi = \Sigma_p a'_p \psi_p$$

ナレバ二ツノ expansion ノ差ヲトレバ

$$0 = \Sigma_p (a_p - a'_p) \psi_p$$

如何ニテ　ψ_p's ハ independent デナケレバナラヌ。

次ニ　$\psi_a = \Sigma_p a_p \psi_p$　　$\psi_b = \Sigma_p b_p \psi_p$

ナルトキ　$\psi_a + \psi_b = \Sigma_p (a_p + b_p) \psi_p$

即チ ψ-symbol ノ和ノ ~~representation~~ ハ ~~repres.~~ ノ coef ノ和デアル。
=對應スル coef ハ　　各々ノ symbol ニ對應スル coef ノ

又同様ニシテ　$c\psi_a = \Sigma_p c a_p \psi_p$
ニ對應スル coef ハ　對應スル元ノ

之レカラ ψ-symbol ニ一ツノ number ヲカケタモノハ coef ニソノ number ヲカケタモノデアル。

ソレ故 ψ-symbol ~~ト symbol~~ ノ間ニ成立スル關係 (commutative, associative law…) ハソノ number ノ set
One-one corresp
従ッテ ψ-symbol ト number ノ set トノ間ノ關係ハ 完全ナル 並行 ヲ示ス事ガ出来ル。

即チ number ノ set a_p ハ ψ-symbol ψ_a ノ一ツノ representation デアル。コノ場合 ~~ψ_p's ヲ~~ fundamental representation ψ ト名付ケル。

別ノ complete set of indep ψ ヲトレバ又他ノ representation ガ得ラレル。

次ニ一ツノ repres ノ fundamental ψ　ψ_q ト observable α トノ積ヲ fund ψ デ expand シ

$$\alpha \psi_q = \Sigma_p \psi_p \alpha_{pq} \qquad (2)$$

トナッタトスレバ、coef α_{pq} ハ p, q ナル二ツノ suffix ニ depend スル量デアル。

トニカク α ト α_{pq} ~~トガ對應~~ ノ間ニモ one-one corresp ガアル。

$$(\alpha + \beta)\psi_q = \Sigma_p \psi_p (\alpha_{pq} + \beta_{pq})$$

† 一ツノ number c ハ observable ノ special case トミナシウルガ

ソノ repres c_{pq}

$$c\psi_q = \sum_p \psi_p c_{pq}$$

ナリ $\quad c_{pp} = c \qquad c_{pq} = 0 \quad (p \neq q)$

∴ $\quad c_{pq} = c\,\delta_{pq}$

トナリテ対角要素ノミ。但シ $\quad \delta_{pp} = 1,\ \delta_{pq} = 0\ (p \neq q)$ (6)

δ_{pq} ハ unity ナラシムル matrix デ 絶対 matrix ニ外ナラズ

ト其ノ乗法ヲ ~~ニ matrix デ~~ ミトカ換ナル性質ヲ有ス。

ψ_p, ψ_q

$$\cancel{(c\alpha)_{pq}}\ (c\alpha)\psi_q = \sum_p \psi_p \alpha_{pq} \quad \text{for any fund}$$

ナレバ

$$(\alpha+\beta)_{pq} = \alpha_{pq} + \beta_{pq} \qquad (3)$$

$$(c\alpha)_{pq} = c\,\alpha_{pq} \qquad (4)$$

故ニ

$$(\alpha\beta)\psi_q = \alpha\sum_r \psi_r \beta_{rq}$$

$$= \sum_{p,r} \psi_p \alpha_{pr} \beta_{rq}$$

ナレバ

$$(\alpha\beta)_{pq} = \sum_r \alpha_{pr}\beta_{rq} \qquad (5)$$

従ツテ二ツノsuffixヲモツタnumberノset α_{pq}
ガ (pヲrow qヲcolumnトスル) matrixヲ作ツテ居ルト考~~ヘルコトガ出来~~ヘレバ、
observableノ~~和~~ 積ノ規則、observableトnumberノ積
ニ~~関スル~~ 対応シテ matrixノ和、積、matrixトnumberノ積、
ガ対応スルコトトナリ。~~observableノsymbolニ対シテ~~
~~成立スル~~ ~~di~~ 交換、結合ノ commutative ~~law~~, distrib, assoc.
law ガ observableノsymbolニ対シテ成立スル~~様ニ~~場合ニハ ~~亦(他)~~ matrixニ対シテモ成立スル ~~場合モ成立スル事~~ 関係ハ一致シテ居ル
カラ、observableノsymbolトmatrixトヲ[illegible]
完全ニ対応サセルコトガ出来ル。故ニ matrix α_{pq}
ヲ以テ observable α ノ representation ト
考ヘルコトガ出来ル。

次ニ ψ-symbol ト observable トノ積ノ representation (ノ repr α_p) (ノ repr α_{pq})

b_q ハ

$$\alpha\psi = \sum_q \psi_q b_q$$

又一方

$$= \alpha \sum_p \psi_p a_p$$
$$= \sum_{pq} \psi_q \alpha_{qp} a_p$$

之レカラ

$$b_q = \sum_p \alpha_{qp} a_p \qquad (7)$$

ヲ得ル。

(3)式及ビ(7)ノ関係ハ ~~observables ト ψ-symbols ノ~~ ~~abstract symbol~~ ノ間ノ式 (E.G.) ニ関係シテ representation ノ間ノ式ニ直スコトガ出来ル。コノ場合 ~~ヲ論ジテ~~ ~~suffix ヲ[illegible]~~ suffix ノ関係ハ 二ツ重ナッタ suffix ニ付イテハ和ヲトリ 一ツノ suffix ニ付イテハ [illegible] ヲ論ジテ suffix ハ凡テ [illegible] 同一デナケレバナラヌ。

例ヘバ
$$\alpha\beta\psi = \gamma\psi' + \psi''$$
ニ対応シテ
$$\sum_{pr} \alpha_{qr}\beta_{rp} a_p = \sum_p \gamma_{qp} a'_p + a''_q$$

eigenvalue 及ビ eigenstate ヲ定メル式 即チ前章ノ(20)ハ

$$\sum_q \alpha_{pq} a_q = a a_p \qquad (8)$$

トナル。之ハ α_{pq} ガ与ヘラレタ時 a 及ビ a_p ヲ未知数トスル連立一次式デアル。(~~fundamental state of discrete~~ elimination ニヨッテ得ラレル

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-a & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-a & \alpha_{23} \\ - & - & - \\ - & & \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

~~物理的量ニ相当スル~~ observable ナルモノ

ガ eigenvalue a ヲ之レニ就テ求メル。此ノ matrix ノ eigenvalue ガ observable 〔物理量〕ノ eigenvalue ト考ヘラレル。

次ニ ϕ-symbol ノ repres 理論ニ於テハ状態ノ ϕ ヲ complete set of indep ϕ デ expand シテ

$$\phi = \sum_p a_p^* \phi_p \qquad (10)$$

ψ ノ場合ト同様 ここニ ϕ-symbol ハ
トイフ事ニナル ~~ϕ_p ヲ fundamental ϕ_p ト~~ 云ヘバ number ノ set a_p^* デ表ハサレル。 ϕ_p ハ ψ ノ場合ト同様 fund. ϕ ト呼バレル。

従ッテ
$$\phi_p \alpha = \sum_q \alpha'_{pq} \phi_q \qquad (11)$$
ナル expansion ニヨッテ observable α ハ 二ツノ suffix ヲ持ツ ~~set of~~ number ノ set α'_{pq} デ表ハサレル。此ノ場合 ~~ψ ノ場合~~ fund ϕ ニヨッテ α ヲ表ハス事ハ ψ ノ場合ト同様 α_{pq} ヲ matrix ト考ヘル事ニヨッテ (p: row, q: column トシテ) observable ~~α~~ ト ノ間ニ one-one corresp ヲ容易ニ表ハス事ガ出来ル。

然ラバ一般ニ 一ツノ repr ニ於ケル fundamental ψ (ψ_p) ト 相対応スル fundamental ϕ (ϕ_p)

† コノ場合 fund. ノ中デアラハサレル state ヲ fund. state トナヅケル。

カツ fund. ~~ノ中デ~~ state ヲ用ヒタ ~~repr.~~ ノ representation ノ ~~fundamental state~~
~~ガ orthogonal normalized~~ ノ場合ヲ orthogonal
repres トナヅケル。

及ビ state

トガ互ニ conjugate imaginary ノ時ニハ ~~対応スル~~ 対応スル

ニ対スル conjugate imag. symbols ψ, φ ノ repres.

a_p ト a_p^* トハ conj. complex ニナッテ居ルコトヲ示シタ。

トシタ時 observable ニ対スル repres. α_{pq} ト α'_{pq}

ト ~~ニ対スルモノトガ同ジモノニナルコトニスルト~~

ヲ比較スルニ

$$\phi_p \alpha \psi_q = \Sigma_r \phi_p \psi_r \alpha_{rq} \qquad \text{by (2)}$$

$$= \Sigma_r \alpha'_{pr} \phi_r \psi_q \qquad \text{by (11)}$$

デアルカラ、総テノ observable ニ対シテ ニツノ repr ガ一致スル為ニハ

即チ トナル為ニハ 必要十分

$$\alpha_{pq} = \alpha'_{pq} \qquad \text{for any } \alpha$$

$$\phi_p \psi_q = 0 \qquad (p \neq q)$$

$$\phi_p \psi_p = c \qquad c;\ \text{a number indep of } p$$

c = 1 トシテモ一般性ヲ失ハナイカラ

$$\phi_p \psi_q = \delta_{pq} \tag{12}$$

デナケレバナラヌ。即チ fundamental ψ, φ ハ orthogonal, normalized デナケレバナラヌ。

~~コレヲ orthog ナル fund. ψ, φ ヲ用ヒタ repres. ヲ~~

orthogonal representation ト云フコトニシヨウ。

コノ場合ニハ

$$\phi_q \psi = \phi_q \Sigma_p a_p \psi_p = \Sigma_p a_p \delta_{pq}$$

$$= a_q \tag{13}$$

同様ニシテ $$\phi \psi_q = a_q^* \tag{14}$$

又 $$\phi_p \alpha \psi_q = \sum_r \alpha_{pr} \phi_r \psi_q = \alpha_{pq} \qquad (15)$$

(13)(14)(15) 即チ ~~之レニヨリテ~~ ニヨリテ state 及ビ observable ノ symbol トシテノ representation トノ間ノ関係ガ explicit ニアラハサレル。

α ガ real observable ナラバ (15) カラシテ

$$\alpha_{pq} = \overline{\alpha_{qp}} \qquad (16)$$

ナル條件ヲ満足スル ~~of~~ matrix ヲ Hermitian matrix トイフ。尚ホ、matrix element ガ real ナラバ

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp}$$

即チ matrix ハ symmetrical。又 (15) カラ matrix ノ diagonal element α_{pp} ハ fundamental state ψ_p ニ於ケル α ノ average value ヲアラハシテヰル。

α ガ real デナケレバ conj. complex observable $\bar{\alpha}$ ハ

$$\phi_p \bar{\alpha} \psi_q = \overline{\phi_q \alpha \psi_p}$$

デ与ヘラレル。従ッテ

$$\bar{\alpha}_{pq} = (\bar{\alpha})_{pq} = \overline{\alpha_{qp}} \qquad (17)$$

~~matrix~~ $\bar{\alpha}_{pq}$ ヲ α_{pq} ノ conj. complex matrix トナヅケル。

5月23日

§ Representation by ~~a~~ continuum of fundamental states

前節デハ fundamental states ガ discrete set ヲ作ッテ居ル場合ノミヲ考ヘタガ、実際ニ於テハ fundamental state ノ数ガ ~~continuum~~ ヲ形作ッテ居ル場合ガアル。又 discrete set ト continuum ノ両方カラナル場合モアル。

continuum ヲ形作ッテ居ル場合ニハ

従ッテ任意ノ ψ ヲ fundamental ψ デアラハス際ニ ~~ハ~~ 又ハ ~~sum~~

sum ノ代リニ integral ヲ用ヒネバナラヌ。

~~例ヘ~~ 例ヘバ fundamental state ガ ~~discrete~~ continuous range ノ値ヲトル parameter p ヲフクンデ ψ_p デアラハサレルトスレバ任意ノ ψ ハ

$$\psi = \int a_p \psi_p \, dp \qquad (18)$$

デアラハサレル。

コノ際注意スベキコトハ a_p ヲ finite ト限ッテオクト任意ノ ψ ヲ (18) ノ形デアラハスコトガ出来ナイ。例ヘバ fund. state ノ一ツ ψ_q 又ハ $\frac{\partial \psi_q}{\partial q}$ ノ如キモノデアル。之ヲ (18) ノ形デアラハスニハ a_p ハ $p \neq q$ ノ所デハ 0 デ $p=q$ ノ所デ ∞ トナラネバナラヌ。

~~ナラバ~~ 故ニ 之レハ 任意ノ ψ ヲ (18) ノ形デアラハスタメニハ ~~[illegible]~~ coef a_p ニハ ∞ ヲモ許サネバナラヌ。

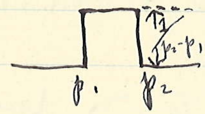
~~サテ ψ_q ヲアラハス coef a_p ハ $\delta(p-q)$~~ トスレバ

p, q ノ函数デアルカラ之ヲ

~~ソレハ ψ_q~~ a_p ~~$\psi_q = \int \delta(p-q)\psi_p \, dp$~~

~~如キ函数ノ~~ $= \int$

$$\int a_p \psi_p \, dp$$



$$\lim_{p_2 \to p_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{\psi_p}{p_2 - p_1} \, dp$$

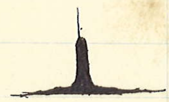
$$a_p = 0 \qquad p \leq p_1 \;,\; p > p_2$$

$$a_p = \frac{1}{p_2 - p_1} \qquad p_1 \leq p \leq p_2$$

~~之ハ improper function デアルガ~~
~~limit トシテアラハサレル。~~

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} a_{pn} = 0} \quad (\text{for } p \neq q)$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \int a_{pn}\, dp = 1}$$



~~トナル様ナ函数~~ a_{pn} ~~ノ limit トシテ考ヘラレル。~~

ソコデ ψ_q ヲ展開シタ係数 a_p ノ性質ヲ考ヘテミルニ

$$\psi_q = \int a_p \psi_p\, dp$$

~~def~~
~~故ニ~~

$$\cancel{\phi_q \psi_q = \int a_p \phi_q \psi_p\, dp} \quad \int \phi_r \psi_q\, dr = \int a_p A_p\, dp$$

$$\cancel{\phi_r \psi_q = \int a_p \phi_r \psi_p\, dp}$$

$$\cancel{\int \phi_r \psi_q\, dr = \int a_p\, dp \int \phi_r \psi_p\, dr}$$

カクシテ　a_p ハ p ガ q ト少シデモ違ヘバ 0

トナリ。 $p=q$ ノ所デ ~~非常ニ大キクナル~~, 無限大トナリ

~~従ッテ~~

$$\psi_q = \psi_q \int a_p\, dp$$

故ニ $\int a_p\, dp = 1$

トナル様ナ函数デアル。

之ハ improper function デアルガ, ~~proper function~~

~~a_{pn} ノ limit~~

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} a_{pn} = 0} \quad (\text{for } p \neq q)$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \int a_{pn}\, dp = 1}$$

** δ-function ノ定義ハ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

ガ任意ノ $f(x)$ ニ対シテ成立スル所ノ函数トシテ与ヘル

$$\varphi'\left\{\psi(a) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\delta(x-a)\,dx\right\} = \varphi'\psi(a) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'\psi(x)\,\delta(x-a)\,dx$$

$$= f(a) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx$$

$$= 0 \quad \text{for any } \varphi'$$

$$\psi_q = \lim_{n\to\infty}\int a_{pn}\,\psi_p\,dp$$

~~ト云フ様ニ~~ 但シ

$$\lim_{n\to\infty} a_{pn} = 0 \qquad (p \neq q)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int a_{pn}\,dp = 1$$

ヲ満足スル様ナ proper function ノ limit トシテアラハサレル。

但シ

$$\psi_q = \int a_p\,\psi_p\,dp$$

$$a_p = \lim_{n\to\infty} a_{pn}$$

a_p ハ $p-q$ ノミニ depend スルカラ

$$a_p = \delta(p-q) \qquad \psi_q = \int \psi_p\,\delta(p-q)\,dp \quad \cancel{(19)}\ (19)$$

ト書ケル。但シ

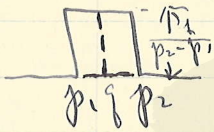
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

$$\delta(x) = 0 \qquad (\text{for } x \neq 0)$$

カヽル δ-function ヲ introduce スルコトハ勿論少シモ理論ノ厳密性ヲコハスモノデハナイ。何故カトイヘバ δ-function ~~[illegible]~~ ヲツカツタ凡テノ expression ハイツデモ δ-function ヲツカハズニ書キカヘルコトガ出来ルカラデアル。例ヘバ (19) ノ右辺ノ様ナ expression ハ左辺ノ様ニ書キカヘルコトガ出来ル。

ψ [illegible]を求むれば。例へば

$$\int \psi_p \delta(p-q)\,dp = \lim_{\substack{p_2\to q\\ p_1\to q}} \int_{p_1}^{p_2} \frac{\psi_p}{p_2-p_1}\,dp$$



$a_p = 0$ for $p < p_1$, $p > p_2$

$a_p = \frac{1}{p_2-p_1}$ for $p_1 \leq p \leq p_2$

之れは. $x\delta(x) = \cancel{\lim}\ x\frac{1}{x} = 1$ for $x = 0$

$x\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$

此の一般には $x=0$ に於ては $\delta(x)$ の infinity の order は $\frac{1}{x}$ より小と無ければならぬ。（$\frac{1}{x}$ の場合は $\log x$ が出て来て integral が infinity となる。）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)da \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\,dx\,\delta(x-b)\,\cancel{\;} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,\delta(x-b)$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{\infty}}\ f(b),$$

for any f.

δ-functionノ性質トシテハ

先 $\delta(-x) = \delta(x)$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\,dx = -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\delta(-x) = 0 \quad (\text{for } x \neq 0)$$

次ニ $x\delta(x) = 0$ ト

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

$$\text{or} \int_{a'}^{a''} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \quad a' < a < a''$$

コノ関係ハ f(x)ガ ordinary function デアル時ノミナラズ x ヲ parameter トスル q-symbol ニ対シテモ成立スル。式(19)ノ関係ガアル。(証明参照 頁**)

$\delta(x-a)$ ハ x ヲ a トカヘル operation デアル。

次ニ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\,dx\,\delta(x-b) = \delta(a-b)$

∵ 左辺ノ函数ヲ $\bar{F}(b)$ デアラハスト

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(b)\,db = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b)\,db$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\,dx = 1$$

而シテ $b \neq a$ ノ時ニハ $\bar{F}(b) = 0$.

故ニ $\bar{F}(b) = \delta(a-b)$. #

五月廿日、

§ Representation by continuum of fundamental states

前節デハ fundamental states ガ discrete set ヲナシテヰル場合ノミヲ考ヘタガ、実際ニ於テハ fundamental state ガ continuum ヲ形作ツテヰル場合又ハ discrete set ト continuum ノ両方カラナル場合ガ多イ。

従ツテ任意ノ ψ ヲ fundamental ψ デアラハスニハ sum ノ~~代リニ~~代リニ integral ヲモ用ヰネバナラヌ。

例ヘバ fundamental state ガ continuous range ノ値ヲトル parameter p ヲ含ンデ ψ_p デアラハサレルトスルト任意ノ ψ ハ

$$\psi = \int a_p \psi_p \, dp \qquad (18)$$

デアラハサレル。トコロガモシ a_p ヲ finite ト限ツテオクト任意ノ ψ ヲ (18) ノ形デアラハスコトガ出来ナイ。例ヘバ fundamental state ノ一ツ ψ_q 自身、又ハ $\frac{\partial \psi_q}{\partial q}$ ノ如キモノデアル。之等ヲ (18) ノ形デアラハシタトスレバ a_p ハ $p \neq q$ デハ 0 デ $p = q$ ノ所デ ∞ トナラネバナラヌ。

故ニ任意ノ ψ ヲ (18) ノ形デアラハス為ニハ coef. a_p ニ ∞ ヲモ許サネバナラヌ。

ソコデ 次ノ性質ヲモツテヰルト考ヘラレル δ(x) ナル函数ヲ考ヘテ見ル。

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{for } x \neq 0$$

先　$\delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0$

∵ $f(x)$ トシテ ~~(a_1, a_2) ノ範囲デ 1 デハナイ~~

~~$x = a$ ノ近傍 $(a \neq 0)$ 0 デナイ 任意ノ函数トスルト~~

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) = 0}$$

~~$f(x)$ ガ~~

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\,\delta(a)\,da = f(0) -}$$

~~δ~~

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)}$$

~~$f(x)$ トシテ~~

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$

$f(x)$ トシテ $x = a$ $(a \neq 0)$ ニ於テハ 0 デ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

トナル 任意ノ 函数トスルト

故 $\delta(a) = f(0) = 0 \quad \text{for } a \neq 0.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = 0 \quad \text{for any } f(x)$$

と ~~then~~ [illegible] $\cancel{g(x)=0}$. [illegible] 0 と函數 ~ 等しいとみてよい。

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1}, \text{ then } g(x)=0$$

(continuous fn)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \quad \text{for any } f(x).$$

$$\text{or } \int_{a'}^{a''} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \quad a' < a < a''$$

2.1 記號から見て

$$\delta(-x) = \delta(x) \qquad \cancel{x\,\delta(x) = 0}.$$

$$\because \quad \cancel{\delta(-x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0.}$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\,dx = 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(-x+a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\,\delta(x+a)\,dx$$

$$= f(-(-a)) = f(a).$$

かゝる函數は proper function の limit として表はされ、決して unique ではない。

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\{\delta_1(x-a) - \delta_2(x-a)\}\,dx = 0 \quad \text{for any } f(x)$$

又 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$, for $f(x) = 1$.

次に $x\,\delta(x) = 0$.

$$\because \quad \cancel{x\,\delta(x) = 0} \quad \text{for } x \neq 0.$$

$$\cancel{x\,\delta(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\,\delta(x)\,dx = f(0)\times 0 = 0. \quad \text{for any } f(x)$$

又 $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\,dx\,\delta(x-b) = \delta(a-b)$$

∵ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a-x) = \delta(a-x)$ トナル如キ f_n ノ sequence ヲ考ヘレバ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(a-x)\,dx\,\delta(x-b) = f_n(a-b)$$

ガ lim トシテ求メラレル。

21 δ-function ニヨッテ

$$\psi_q = \int \psi_p\, \delta(p-q)\,dp \qquad (19)$$

トシテ考ヘラレル。

∵ $$\varphi\left(\psi_q - \int \psi_p\, \delta(p-q)\,dp\right)$$
$$= f(q) - \int f(p)\,\delta(p-q)\,dp = 0.$$
for any φ.

次ニ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = -f'(a)$$
for any $f(x)$.

ニヨッテ定義サレル函数 δ' ヲ考ヘル。
之ハ δ-function ヲ define スル sequence of function ノ derivative ノ sequence ノ limit トシテ考ヘラレル。

∵ $$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x-a)\,dx = f(a)$$

両辺ヲ a デ微分スレバ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n'(x-a)\,dx = -f'(a)$$

2) 之ヨリ分ルコト $\delta'(-x) = -\delta'(x)$

∵ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(-x+a)\,dx \cancel{= -f'(x)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\,\delta'(x+a)\,dx = -\frac{df(-x)}{d(-x)}\Big|_{x=-a}$$

$$= \frac{df(-x)}{d(-x)}\Big|_{x=-a} = f'(a)$$

for any $f(x)$

又 $x\,\delta'(x) = -\delta(x)$

∵ $$\int f(x)\cancel{x\,\delta'(x)}\,(x-a)\,\delta'(x-a)\,dx = -\frac{d}{dx}\{f(x)(x-a)\}\Big|_{x=a}$$

$$= -f(a)$$

次ニ $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(a-x)\,dx\,\delta(x-b) = \delta'(a-b)$$

之ハ $\delta'(a-x)$ ヲ sequence of fns ノ limit ト考ヘレバヨイ。

又 δ'-fn ニツイテ

$$-\frac{\partial\psi_q}{\partial q} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_p\,\delta'(p-q)\,dp \qquad (20)$$

トシテ表ハサレル。
左邊ハ ψ_q 自身ノ representation ノ形ニ非ズ。

同様ニシテ δ-function ノ higher derivative ヲトレバ夫々 $\frac{\partial^2\psi_q}{\partial q^2}$ etc ノ representation ガ得ラレル。

~~次ニ一般ノ ψ-fun~~ symbol ハ
fundamental state ノ $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ representation ノ
~~一般ノ~~ continuum ヲナス状態ノ observable ノ

$$\alpha\psi_q = \int\psi_p\,dp\,\alpha_{pq} \qquad (21)$$

ニ於テ p, q ナル二ツノ parameter ヲツケタ number α_{pq} デ表ハサレル。
コノ場合モ α_{pq} ヲ matrix ト呼ブニハ何等差支ナイ。
(5) ノ掛算ノ rule ニ相当シテ

$$(\alpha\beta)_{pq} = \int\alpha_{pr}\,dr\,\beta_{rq} \qquad (22)$$

同様ニシテ $\alpha\psi$ ヲ表ハス p ノ函数 b_p ハ ψ ヲ表ハス a_p ト α ヲ表ハス α_{pq} ニヨッテ

$$b_q = \int\alpha_{qp}\,dp\,a_p \qquad (23)$$

(18)においては $\varphi = \Phi_q \int a_p^* \varphi_p \, dp$

が成立しない

デ表ハサレル。

次ニ number c ヲ observable ト見ルトキソノ repres. ハ

$$c\psi_q = \int \psi_p \, dp \, c_{pq}$$
$$= c\int \psi_p \, \delta(p-q) \, dp$$

而シテ

$$c_{pq} = c\,\delta(p-q) \qquad (24)$$

トナル。

$\delta(p-q)$ ヲ matrix ト見ルトキ之ヲ他ノ ~~observable~~ matrix ニ右カラ乗ジテモ左カラ乗ジテモ元ト変ラナイ。即チ unity ヲ表ハス matrix デ discrete fundamental ψ ノ場合ノ δ-symbol ニ相当スル。

而シテ fundamental ψ ガ discrete ノ時ト continuum ノ時ノ差ハ常ニ sum ヲ integral ニカヘ δ-symbol ヲ δ-function ヲ以テ代ヘルノミデアル。

従ッテ orthogonal representation ノ場合ニハ fund. ψ, φ ハ

$$\varphi_p \psi_q = \delta(p-q) \qquad (25)$$

ヲ満足シテ居ル。

$$\left.\begin{array}{l} \text{or} \quad \varphi_p \psi_q = 0 \quad \text{for } p \neq q \\ \int \varphi_p \psi_q \, dp = 1. \end{array}\right\} (26)$$

之ハ $\underbrace{\varphi_p \psi_p}_{\text{discrete ノ場合ノ}} = 1$ トイフ normalization ノ代リトシテ置イタモノ。

~~但シ~~ 但シ continuousナ場合モ discreteナ場合モ

共ニ $\varphi_q \psi_q = 1$ ニ normalize シタ時,

$\varphi_q \alpha \psi_q$ ニ observable α ノ ψ_q state ニ於ケル平均値

トシテ意味ヲ与ヘルコトガ出来ル。

トシテ $\varphi_q \psi$ ...

orthogonal representationノ場合ニ考ヘテ見ル。

$$\varphi_q \psi = \varphi_q \int a_p \psi_p \, dp = \int a_p \delta(p-q) \, dp = a_q$$

同様ニ $\varphi \psi_q = a_q^*$

又 $\varphi_p \alpha \psi_q = \int \varphi_p \psi_r \, dr \, \alpha_{rq} = \int \delta(p-r) \, dr \, \alpha_{rq}$

$= \alpha_{pq}$

即チ ~~observable α ノ ψ_q stateニ於ケル平均値ハ~~

~~α_{qq} ヂ~~ $\varphi_q \alpha \psi_q = \alpha_{qq}$

デアル。

然ルニ α ガ unity ノ時ニハ $\alpha_{qq} = \delta(q-q) = \infty$

トナル。所ガ unity ハドンナ stateニ於ケル平均値モ

1トナル筈。∴ $\varphi_q \alpha \psi_q$ ヲ平均値トシテ

意味ヲ与ヘルコトハ出来ナイ。 ~~ノ場合モ~~ $\varphi_p \psi_q = \delta(p-q)$ ノ場合

ノ場合モ無限ニ $\varphi_q \psi_q = 1$

ニ normalize 出来ル時平均値ヲ与ヘルト考ヘルノ

デアル。

[illegible]

[illegible]

state 及ビ observable ノ representation ニ weight function ヲ introduce スレバ便宜ナ場合ガアル。

rep (18) (21) ニ対応シテ

$$\psi = \int a_p \psi_p \rho_p dp \qquad (18)' \quad (pp)$$

$$\alpha \psi_q = \int \psi_p \rho_p dp \, \alpha_{pq} \qquad (21)' \quad (28)$$

而シテ此ノ weight function ρ_p ハ p ノ全範囲デ define サレタ 0 ヨリ大ナル函数トシテオク。

之ノ representation ト今迄ノモノノ間ニハ、本質的ナ相違ハナイ。只 weight function ヲ適当ニトレバ rep ノ expression, symmetry ヲヨクシ、物理的ナ意味ヲヨリ直接的ニ表ハシウル場合ガアル。

~~21 場合ニ~~ (22) ニ対応シテ

$$(\alpha\beta)_{pq} = \int \alpha_{pr} \rho_r dr \, \beta_{rq} \qquad (22)'$$

(23) ニ対応シテ

$$b_q = \int \alpha_{qp} \rho_p dp \, a_p \qquad (23)'$$

(24)

$$c \psi_q = \int \psi_p \rho_p dp \, c_{pq}$$

従ッテ

$$c_{pq} = c \rho_p^{-1} \delta(p-q) = c \rho_q^{-1} \delta(p-q) \qquad (24)'$$

(26) ニ対応シテ

$$\int \phi_p \psi_q \, \rho_p dp = 1 \qquad (26)'$$

従ッテ (25) ニ対応シテ

$$\phi_p \psi_q = \rho_p^{-1} \delta(p-q) \qquad (25)'$$

(18') … (28') 迄ノ式ノ間ニ ~~於テ成立スル~~ アラルナメニハ

(18'') … $\Phi(p(x))$ 等ニ於イテ ~~Φ_p, Ψ_p ニ $\rho_p^{-\frac{1}{2}}$~~ ヲ $\Phi_p\rho_p^{-\frac{1}{2}}, \Psi_p\rho_p^{-\frac{1}{2}}$ ヲ

~~a_p ヲ $a_p\rho_p^{-\frac{1}{2}}$ ヲ~~ トス。

~~$a_{pq}(\rho_p\rho_q)^{-\frac{1}{2}}$ ヲ~~ a_{pq} Φ_p, Ψ_p ニ $\rho_p^{-\frac{1}{2}}$ ヲ掛ケ、

a_p ニ $\rho_p^{-\frac{1}{2}}$、a_{pq} ニ $(\rho_p\rho_q)^{-\frac{1}{2}}$ ヲ掛ケレバヨイ。

一般ニ $p\,q\cdots$ ノ suffix ヲ有スル函数ニハ $(\rho_p\rho_q\cdots)^{-\frac{1}{2}}$ ヲ掛ケレバヨイ。スレバ p ニツイテノ integral ニ於テ ~~suffix~~ p ガ suffix ニ含マレル weight function ρ_p ガ消エテシマフノデアル。

次ニモット一般ニ fundamental state カラノ state suffix $p_1 \cdots p_n$ ニヨッテ label サレル函数ハ

$$\Psi = \iint \cdots a_{p_1p_2\cdots}\Psi_{p_1p_2\cdots}\,dp_1\,dp_2\cdots$$

$$\alpha\Psi_{q_1q_2\cdots} = \iint \cdots \Psi_{p_1p_2\cdots}\,dp_1\,dp_2\cdots a_{p_1p_2\cdots q_1q_2\cdots}$$

又

$$\Psi_{q_1q_2\cdots} = \iint \cdots \Psi_{p_1p_2\cdots}\,\delta(p_1-q_1)\,\delta(p_2-q_2)\cdots\delta(p_n-q_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_m}\Psi_{q_1q_2\cdots} = -\delta(p_1-q_1)\,\delta(p_2-q_2)\cdots\delta(p_{m-1}-q_{m-1})$$
$$\times\,\delta'(p_m-q_m)\,\delta(p_{m+1}-q_{m+1})\cdots\delta(p_n-q_n)$$

等ニヨッテ representation サレル。

モット一般ナ場合トシテ integral ト sum ノ混合ノ場合ヲ考ヘラレル

場合ニハ

$$\psi = \sum_p a_p \psi_p + \int a_p \psi_p \, dp$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \psi_Q &= \sum_P \psi_P \alpha_{PQ} + \int \psi_p \, dp \, \alpha_{pQ} \\ \alpha \psi_q &= \sum_P \psi_P \alpha_{Pq} + \int \psi_p \, dp \, \alpha_{pq} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (\alpha\beta)_{PQ} &= \sum_R \alpha_{PR} \beta_{RQ} + \int \alpha_{Pr} \, dr \, \beta_{rQ} \\ (\alpha\beta)_{pQ} &= \\ (\alpha\beta)_{Pq} &= \\ (\alpha\beta)_{pq} &= \end{aligned}\right\}$$

トナル場合　~~ope~~ state ノ observable representation ハ continuous ナ ~~domain~~ range ト discrete ナ point ノ両方カラナル domain ヲ持ツル variable ノ函数、即チ variables ヲ row 及 column トモツ matrix トシテ考ヘラレル。

orthogonality ノ條件ハ

$$\left.\begin{aligned} \phi_P \psi_Q &= \delta_{PQ} & \phi_p \psi_Q &= 0 \\ \phi_P \psi_q &= 0 & \phi_p \psi_q &= \delta(p-q) \end{aligned}\right\}$$

モットモ一般ナ場合ハ fundamental state ガ continuous ナ range ト discrete ナ point ノ両方カラナル domain ヲ持ツル variable ~~...~~ ノ函数ニヨッテ label サレル場合デ、其上 weight function ヲツケタ場合デアルガ、ソノ general expression ヲ与ヘルコトハ出来ナイ。

$\xi'_1 \xi'_2 \cdots \xi'_n$ ヲ eigen-value トスル fundamental state 函数ヲ Ψ_p トカケバ 前章ノ notation ニヨレバ (3'1) ハ a_p デアル。

§ Transformation Theory

~~以上ハ representation ヲ一般的ナ fundamental state ニ関シテ論ジタノデアルガ、次ニ之ナ fundamental states ナル物理的ナ性質ヲ明カニシツツ representation ノ物理的ナ意味ヲモ之ニ従ッテ明カナラン。~~

~~此ノ例ヲ考ヘルノハ目的 orthogonal representation ナル例ヲ考ヘルガ~~、orthogonal 及ビ eigenvalue ノ理論ニヨレバ ~~orthogonal state ノ complete set~~ ハ commutative observable ノ complete set ノ simultaneous eigen states ヲトレバ、ハ orthogonal state ノ complete set ヲツクル事ニナル。従ッテ之ヲ orthogonal representation ノ fund. state トスルノガ便利デアル。

今 commutative observable ノ complete set ヲ $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ トシ ξ_n ノ eigenvalue ヲ $\xi_n', \xi_n'' \cdots$ トスル。一ツノ fundamental ψ ハ $\psi(\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n')$ 又ハ略シテ $\psi(\xi')$ トスレバ之ガ定マル。之ト fundamental ψ ト conjugate ナ ϕ ハ $\phi(\xi')$ ~~デアル~~ トシテヨイ。

一般ノ ψ-symbol ノ representation ハ ~~set of~~ numbers ヲ $\xi_1 \xi_2 \cdots$ ノ eigenvalue $\xi_1' \cdots$ ニ associate シタ $(\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n'|)$ ~~set~~ 又ハ簡単ニ $(\xi'|)$ デアラハサレル number ノ set デ表ハサレル。殊ニ state ガ ψ_k ノ場合ニハ之ヲアラハス代リニ $(\xi_1', \xi_2', \cdots \xi_n'/k)$ or (ξ'/k) トカク。

同様ニ一般ノ ϕ-symbol ノ representative ヲ $(|\xi')$ 殊ニ ϕ_k ノ representative ハ (k/ξ') トカク。

~~$\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n'$ ヲ row ニ~~

observable α ノ representative ハ matrix

$$(\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n' | \alpha | \xi_1'' \xi_2'' \cdots \xi_n'')$$

デアラハサレル. 但シ $\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n'$ ハ matrix ノ row ヲ, $\xi_1'' \xi_2'' \cdots \xi_n''$ ハ matrix ノ column ヲ specify スルモノデアル.

モシ $\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n'$ ヲ eigenvalue トモツ fundamental state ガ ψ_p デ, $\xi_1'' \xi_2'' \cdots \xi_n''$ ヲ eigenvalue トモツ fundamental state ガ ψ_q ナラバ

$$(\xi_1' \xi_2' \cdots \xi_n' | \alpha | \xi_1'' \xi_2'' \cdots \xi_n'')$$

ハ ~~α_{pq}~~ 前章ノ notation デ云ヘバ α_{pq} デアル.

コノ新シイ notation ヲ使ッテ例ヘバ前章ノ notation デアル

$$(\alpha+\beta)_{pq} = \alpha_{pq} + \beta_{pq} \qquad (3)$$

ナドハ次ノ式ハ

$$(\xi' | \alpha+\beta | \xi'') = (\xi' | \alpha | \xi'') + (\xi' | \beta | \xi'')$$

トナリ, 又

$$\psi = \Sigma_p a_p \psi_p \qquad (1)$$

$$\text{or} \quad \psi = \int a_p \psi_p dp \qquad (18)$$

ハ関子ノタメ ξ's ノ eigenvalue ガ continuous range ニ亘ッテ居ルトスレバ

$$\psi = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi' |) \qquad (27)$$

又 ~~(5)~~ $(\alpha\beta)_{pq} = \alpha_{pr}\beta_{rq}$ (5)

or $(\alpha\beta)_{pq} = \int \alpha_{pr}\, dr\, \beta_{rq}$ (22) ハ

又 $\psi_l = \alpha\psi_k$ ~~[illegible]~~ ナル関係ハ

$b_q = \int \alpha_{qp}\, dp\, a_p$ (23) ハ

トナル。 但シ $d\xi'$ ハ $d\xi_1' d\xi_2' \cdot d\xi_n'$ ノ ~~…~~ 積
デアリ又 $\int$ ハ此等ノ variable ニ就テノ integration
ヲ表ハシテヰル。

$$\alpha\psi_q = \sum_p \psi_p \alpha_{pq} \quad (2)$$

$$\alpha\psi_q = \int \psi_p \alpha_{pq}\, dp \quad (21)$$

ハ

$$\alpha\psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi'|\alpha|\xi'') \quad (28)$$

トナル。

$$(\xi'|\alpha\beta|\xi'') = \int (\xi'|\alpha|\xi''') d\xi''' (\xi'''|\beta|\xi'') \quad (29)$$

$$(\xi'|\alpha k) = \int (\xi'|\alpha|\xi'') d\xi'' (\xi''|k) \quad (30)$$

$(\xi'|k)$

α ノ conjugate complex ハ

$$(\xi'|\bar{\alpha}|\xi'') = \overline{(\xi''|\alpha|\xi')} \quad (31)$$

次ニ observables $\xi_1'' \xi_2 \cdots \xi_n$ ~~ノ函数~~、ノ一ツ 例ヘバ ξ_m
ノ ~~…~~ ノ representation $(\xi'|\xi_m|\xi'')$
ハ (28) ニヨリ

$$\xi_m \psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' (\xi'|\xi_m|\xi'')$$

ヲ満足シテヰル。ナルニ一方 $\psi(\xi'')$ ナル state ニ於テ ξ_m ノ eigenvalue
ハ ξ_m'' デアルカラ

$$\xi_m \psi(\xi'') = \xi_m'' \psi(\xi'') = \int \psi(\xi') d\xi' \xi_m' \delta(\xi'-\xi'')$$

但シ $\delta(\xi'-\xi'') = \delta(\xi_1'-\xi_1'') \cdots \delta(\xi_n'-\xi_n'')$

$$\int f(\zeta',\zeta''')\,\delta(\zeta'-\zeta''')\,d\zeta''' g(\zeta''',\zeta'')\,\delta(\zeta'''-\zeta'') = \int f(\zeta',\zeta''')\,g(\zeta''',\zeta'')\,\delta(\zeta'-\zeta'')$$

$$- \int g(\zeta',\zeta''')\,\underbrace{f(\zeta''',\zeta'')}_{\delta(\zeta'-\zeta''')\,d\zeta'''}\,\delta(\zeta'''-\zeta'') = \int g(\zeta',\zeta''')\,f(\zeta''',\zeta'')\,\delta(\zeta'-\zeta'')$$

$$= \int \{ f(\zeta',\zeta')\,g(\zeta',\zeta'') - g(\zeta',\zeta')\,f$$

$$= 0$$

representation ハ unique ニナルカラ

~~従ッテ~~

$$(\xi'|\xi_m|\xi'') = \xi_m' \,\delta(\xi'-\xi'') \qquad (32)$$

ξ's ノ eigenvalue ガ discrete ノ時ニハ

$$(\xi'|\xi_m|\xi'') = \xi_m' \,\delta_{\xi'\xi''}$$

但シ $\delta_{\xi'\xi''} = \delta_{\xi_1'\xi_1''}\,\delta_{\xi_2'\xi_2''} \cdots \delta_{\xi_n'\xi_n''}$

即チ observable ξ_m ハ ~~ξ_m~~ eigenvalues ξ_m' ヲ diagonal element トスル diagonal matrix デアラハサレル。

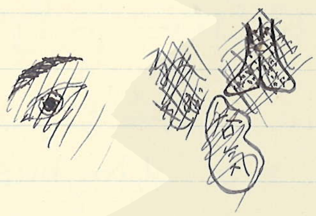
(例ヘバ ξ_m ノ eigenvalue ガ $\xi_m^{(1)}\ \xi_m^{(2)}\ \xi_m^{(3)} \cdots$ ナラバ

$$\begin{pmatrix} \xi_m^{(1)} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \xi_m^{(2)} & 0 & & \\ 0 & 0 & \xi_m^{(3)} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

ナル matrix デアラハサレル)

但シ ξ's ノ eigenvalue ガ continuous range ヲナス場合ニハ general element $(\xi'\xi'')$ ガ δ-function $\delta(\xi'-\xi'')$ ヲ factor トシテモツ ~~contin~~ diagonal matrix トナツテヰル。スルト、~~其ノ場合ニモ~~ コノ diagonal matrix ハ互ニ commute スルトイフコトガ ~~[illegible]~~ コノ場合ニモ成立ツ。

$(\xi'\xi'')\}\delta(\xi'-\xi'')$



$f(\xi)$ ガ ξ's ノ任意ノ函数ナルトキ

$$(\xi'|f(\xi)|\xi'') = f(\xi')\,\delta(\xi'-\xi'')$$

トナルコトハ上ノ関係ニヨリ明ラカナリ。

即チ ξ's 自身ノ任意ノ函数ハ diagonal matrix トシテ現ハサレル。

逆ニ任意ノ diagonal matrix ハ ξ's ノ函数ノ representation デアル。diagonal ニ於ケル element (ξ',ξ') ヲ ξ''s ノ函数ト見做ストキ ~~ξ's ノ函数ノ representation トシノ~~ 函数ヲ(例)表ハス。

之ヲ要スルニ互ニ commute スル observables ノ complete set ヲトルト、ソレラヲ diagonal matrix トスル様ナ representation ガ存在シ、(ソノ observable ノ complete set ヲ指定スレバ) ~~ソノ~~ representation ハ arbitrary phase ヲ除ケバ unique ニ定マル。

fund. state
arbitrary phase トハ ~~eigenstate~~ $\psi(\xi')$ ハ $\psi(\xi')e^{-if(\xi')}$ デ置キ換ヘテモ良イ。但シ $f(\xi')$ ハ $\psi(\xi'')$ ハ $\psi(\xi'')e^{+if(\xi'')}$ デ置キ換ヘテモ orthogonality normalisation ハ変ハリハナイ。ソノ為ニ state ノ representative $(\xi'|)$ ハ $e^{if(\xi')}(\xi'|)$ ニ変ハリ、observable ノ representative $(\xi'|\alpha|\xi'')$ ハ $(\xi'|\alpha|\xi'')\,e^{i\{f(\xi')-f(\xi'')\}}$ ニ変ハル。故ニ物理的意味ヲ持ツ ~~中~~ diagonal element ハ変ハラナイ。一般ニ phase ハ一般ニ物理的ニ重要ナ意味ヲ持タヌカラ

diagonal ナ observable ニヨツテ representation ハ限定サレルコトハ既ニ述ベタ。従ツテ上ノ notation ノ suffix ハ diagonal ナ observable ヲ denote スル、又ハ ξ'、ξ'' ... ノ ξ'、一ツ一ツニ対シテ representation ヲ specify スルモノト考ヘテヨイ。

之ニ反シテ 任意ノ orthogonal representation ハ ~~fundamental~~ 上ノ様ナ real commuting observables ノ simultaneous eigenstate ヲ fundamental state トスル representation ト考ヘルコトガ出来ル。

fund.

故ニ ψ_p, ψ_q etc ヲ ψ トスル representation, fund. ψ ヲ ψ_p, ψ_q etc トスル general element ξ_{pq} ガ $a_p\delta(p-q)$ ノ形ノ時ハ diagonal matrix ト云フコトガ出来ル。但シ a_p ハ p ノ任意ノ real 函数トスル。之ハ ξ_{pq} ガ ξ ナル observable ノ representation トスルト

ξ ハ real デ

$$\xi\psi_q = \int \psi_p\, dp\, \xi_{pq} = \int \psi_p\, dp\, a_p\, \delta(p-q) = a_q \psi_q$$

言ヒカヘレバ 各 fundamental ψ, ψ_q ハ ξ ノ eigen ψ デアル。

ソシテ fundamental ψ ヲ ~~label~~ 区別スル為ニ suffix ヲ使フノハ 便利

例ヘバ fund. Ψ ガ $\Psi_{p_1'p_2'\cdots p_n'}$, $\Psi_{p_1''p_2''\cdots p_n''}$ ノ如ク表ハサレル

場合ニハ

$$(\xi_m)_{p_1'p_2'\cdots p_n';\,p_1''p_2''\cdots p_n''}$$

$$= a_{p'}\,\delta(p_1'-p_1'')\cdots\delta(p_n'-p_n'')$$

此ノ representation ニ於テ總テ observable $\xi_1,\cdots\xi_n$ ヲトレバ 各 state ハ 之等ノ observables ノ simultaneous eigenstate トナル。／五月廿日。

廿一

任意ノ state ψ ヲアラハセバ

$$\psi = \int \psi(\eta')\,d\eta'\,(\eta'/) \qquad (34)$$

之等ガ即チ $\psi(\xi'), \psi(\eta')$ ニ関係スル representation ナル

ナホ ~~(36)~~ $(\xi'/)$, $(\eta'/)$ (η'/ξ') ノ representation ニ indeterminate ナ phase ガツクコトヲ示シテヰルガ ~~…~~ $e^{-ig(\eta')}\psi(\eta')$

~~(36)ガ成立スルコトハ、ノ附近ヲ通ジテ~~ $\psi(\xi')$ ヲ $e^{-if(\xi')}\psi(\xi')$,

~~移ルコトデアル~~ $(\xi'/)$ ガ、$e^{if(\xi')}(\xi'/)$ ~~ニナルコトニ~~

$(\eta'/)$ ハ $e^{ig(\eta')}(\eta'/)$

(η'/ξ') ハ $(\eta'/\xi')\,e^{-i(f(\xi')-g(\eta'))}$ ナルガ、(36) 式ニ形ヲ変ヘズニソノママ成立スル。~~即チ (η'/ξ') ト $(\xi'/)$ トハ同ジ $\psi(\xi')$ ニ関係スル representation デ~~

六月六日

同一ノ state 又ハ observable ノ

サテ state 及ビ observable ニツイテ, representation ニツイテ説明シテ来タガ. 任意ノ異ナル 二ツノ representation ノ間ニハ定マツタ関係ガ ~~存在スルコトハ明ラカデアル~~。ヲ示サウ。

今 互ニ commute スル observables ノ set ξ_m ニツイテ

任意ノ state ψ ヲ表ハセバ

$$\psi = \int \psi(\xi') \, d\xi' \, (\xi'/) \tag{33}$$

同様ニ 他ノ互ニ commute スル observables ノ set η_m ニツイテ state $\psi(\xi')$ ヲ表ハセバ

$$\psi(\xi') = \int \psi(\eta') \, d\eta' \, (\eta'/\xi') \tag{34}$$

~~トスレバ~~ トナル。

従ツテ又, $\psi(\xi')$ ヲ(33)ニ入レレバ

$$\psi = \iint \psi(\eta') \, d\eta' \, (\eta'/\xi') \, d\xi' \, (\xi'/)$$

~~故ニ~~ 之ト(34)ヲ比較スレバ

$$(\eta'/) = \int (\eta'/\xi') \, d\xi' \, (\xi'/) \tag{36}$$

即チ 任意ノ二ツノ representation ノ間ニハ linear ナ 一ツノ同ジ state ヲ表ハス 関係ガアリ. ソノ transformation ノ function linear transformation function ハ 一方ノ fundamental state $\psi(\xi')$ ヲ他方ノ fundamental state $\psi(\eta')$ ニツイテ表ハシタ representation ~~ψ~~ (ξ'/η') デアル。

ぼくぼくせい

○ スイ湖のへりに来ると。[illegible]は言ふことはない
生んでいくのがある

(35) ニ 左ノ如ク $\phi(\eta')$ ヲカケ η' ニツイテ積分スルト

$$\phi(\eta')\psi(\xi') = (\eta'/\xi') \qquad (37)$$

ξ ト η トヲ交換シテヤルト

$$\phi(\xi')\psi(\eta') = (\xi'/\eta') \qquad (38)$$

∴ (ξ'/η') ト (η'/ξ') トハ conjugate complex

記ス。 $(\xi'/\eta') = (\eta'/\xi')$

又 (36) デ ξ, η ヲ入レカヘルト

$$(\xi'/) = \int(\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta'/)$$

之ヲ (36) ニ ~~入レルト~~ ヨツテ

$$\cancel{(\eta'/)} = \iint(\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta'/\xi'')\,d\xi''\,(\xi''/)$$

一方 $= \int\delta(\xi'-\xi'')\,d\xi''\,(\xi''/)$

之ガ ξ' ノ任意函数 $(\xi''/)$ ニツイテ成立スル故

∴ $$\int(\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta'/\xi'') = \delta(\xi'-\xi'') \qquad (39)$$

同様ニシテ $$\int(\eta'/\xi')\,d\xi'\,(\xi'/\eta'') = \delta(\eta'-\eta'') \qquad (40)$$

従ッテ transformation function ハ orthogonality normalization ノ條件ヲ満足スルコトガ分ル.

○ 次ニ ϕ-symbol ノ representation ニ就テモ上ト同様ニ

$$(/\eta') = \int(/\xi')\,d\xi'\,(\xi'/\eta')$$

従ッテ $$\phi(\xi') = \int(\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta') \qquad (41)$$ 故

ガ出テクル

(ξ'/η') ハ

今 Ψ_{q} ナル state ノ $\psi(\xi')$ ニ於ケル repr トシテ (ξ'/q) トカイテモ

又 Φ_{p} ナル state ノ $\phi(\eta')$ 〃 〃 (p/η') トカイテモ

ヨイ。

(41) ノ極カラ $\psi(\eta'')$ ヲカケレバ

$$\phi(\xi')\,\psi(\eta'') = (\xi'/\eta'')$$

ニノ式ハ(28)ト同ジモノデアル。~~故ニ今ノ場合ニ~~ ~~(ξ'/η') ハ $\phi(\xi')$ ノ $\phi(\eta')$ ニヨル representation ト考ヘテ差支ナシ。~~
~~任意ノ state ハ fundamental state ノ一ツト考ヘラレ~~
~~故ニ ψ_k ノ simultaneous eigenstate ニヨル representation ノ~~

~~$\psi(\xi'/k)$ ハ ξ'_k ナル state ノ $\phi(\xi')$ ニヨル~~
~~representation デアル ト見倣ス時ニ~~

~~ニノ式~~ → 即チ (ξ'/η') ハ $\psi(\xi')$ ノ $\phi(\eta')$ ニヨル representation
ト考ヘラレ、逆ニ亦 $\psi(\eta')$ ノ $\psi(\xi')$ ニヨル representation
ト考ヘルコトモ出来ル。~~又~~ 任意ノ二ツノ state ψ_p,
ψ_q ハソレゾレ ~~simult~~ orthogonal repr. ノ fund. state
~~ノ一ツ~~ト考ヘラレルカラ、~~ (p/q) ナル記号~~
一般ニ ψ(ξ'), ψ(η') ト分ケラレル。

$$(\xi'/q) = (p/\eta') = (\xi'/\eta')$$

→ 即チ $(\xi'/\ )$, (一般ニ ψ, φ ノ representation ヲ表ハス $(\xi'/\ )$, $(\ /\xi')$
ノ如ク書ク ~~コトニスル~~ 記号ヲ用ヒルコトスル。

~~故ニ~~

f(ξ'), g(η') ハ ξ', η' ノ real 函数 ニシテ fund. ニ依存

故ニ一ツノ representation ノ phase arbitrariness カラ 即チ ~~transformation~~
~~function~~ state. $\psi(\xi')\ \psi(\eta')$ ハ夫々
$e^{-if(\xi')}$, $e^{-ig(\eta')}$ ヲ乗ジタモノデモ構ハナイカラ (37)(38)ニヨリ
~~(ξ'/η')~~ ニ対シテハ $e^{-i[f(\xi')-g(\eta')]}$ ヲ乗ジタモノデモ構ハナイ。
(η'/ξ') 即チ transf. 函数ノ modulus ハ一定デアルガ phase ハ
等

arbitrary デアル。

次ニ observable ノ representation ノ間ノ関係ハ

$$(\xi'|\alpha|\xi'') = \phi(\xi')\,\alpha\,\psi(\xi'')$$

ノ仮定ニ (35) 及ビ (41) ヲ入レルト

$$= \iint (\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta'|\alpha|\eta'')\,d\eta''\,(\eta''/\xi'')$$

逆ニ

$$(\eta'|\alpha|\eta'') = \iint (\eta'/\xi')\,d\xi'\,(\xi'|\alpha|\xi'')\,d\xi''\,(\xi''/\eta'')$$

state ノ ~~transformation~~ 変換 ハ ~~transformation ノ~~ 如ク ~~ナツテヰル~~

デ 是等ハ linear transformation ニヨツテ一方カラ他方ヘ

移ルコトガ出来ル。

次ニ ξ, η, ζ ~~ナル~~ ナル三ツノ observable ノ set
ニ関スル三ツノ

represe ヲ求メルタメノ間ノ transf. ハ (~~ξ'/ζ'~~ ξ'/ζ') (~~ζ/ξ'~~)

$\phi(\xi'), \psi(\zeta')$

$$(\xi'/\zeta') = \phi(\xi')\,\psi(\zeta')$$

ハ ~~(ξ'/η'), (η'/ζ') ニヨリ~~

$$= \int (\xi'/\eta')\,d\eta'$$

而シテ

$$\phi(\xi') = \int (\xi'/\eta')\,d\eta'\,\phi(\eta')$$

及ビ

$$\psi(\zeta') = \cancel{\int (\xi'/\eta')\,d\eta'} \int \psi(\eta'')\,d\eta''\,(\eta''/\zeta')$$

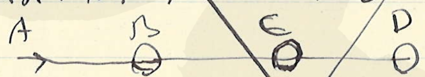
ヲ入レルト

$$(\xi'/\zeta') = \iint (\xi'/\eta')\,d\eta'\,\phi(\eta')\,\psi(\eta'')\,d\eta''\,(\eta''/\zeta')$$

$$= \int (\xi'/\eta')\,d\eta'\,(\eta'/\zeta') \qquad (41) \quad \cancel{(42)}$$

† ニ於テ述ベタ ~~Transf.~~ fund. state ノ ~~eigenvalues~~ ノ continuous ナ場合ヲ考ヘル
ガ今迄 ~~Transf. fn.~~ 二組ノ ~~variable ノ pair~~ fund. state $\varphi(\xi'), \psi(\eta')$ ~~ξ', η'~~ ノ一方ガ
conti, 他方 discrete (ξ', η') 両方トモ discrete ナノ場合
モ考ヘラレル。 然シ一方ノ fund. state ~~eigenvalue~~ ノ数ガ finite ナ
ラバ他方モ finite デ ~~ナケレバナラヌ~~。同数デナケレバナラヌ。

†† からくり
~~transformation~~ function (ξ'/η') ハ indeterminate ナ
phase ヲ除イテ一意ニ定マル。 ソレカラ求メタ probability
ハ 普通ノイフ probability トイフ概念ニハ [illegible]
特殊ナ性質即チ interference ノ性質ヲモッテヰル。
以下ノ如キ実験ヲ考ヘル。 A 粒子 atom ガ ~~A~~ B C D ナル三個所デ ~~観測~~ 測定



ξ, η, ζ トイフ三ツノ observable ノ値ヲ測定スル
~~AB C, CD~~ ノ間ニノ場合 ξ, η ノ値ハ途中デ変ラヌモノ
トシテオク。 ソレデ B デ ξ ノ値ガ ξ' デアルコトガワカッタ時
~~D C デ η ノ値ガワカッタ [illegible] η' ナリ~~ D デ ζ ノ値ガ
~~[illegible]~~ ζ' トナル probability ハ モシ C デ
η ノ値ガワカラナカッタナラバ

$$|(\xi'/\zeta')|^2 \underset{ニハナラヌ}{=} \sum_{\eta'} |(\xi'/\eta')|$$

デナクシテ、 C デ η ノ値ガワカッタ ~~[illegible]~~ 場合ニハ

$$\sum_{\eta'} |(\xi'/\eta')|^2 \, |(\eta'/\zeta')|^2$$

即チ ξ, ξ ノ間ノ transf. fn. ハ (ξ, η), (η, ξ) ノ二ツノ transf. fn. ニヨツテ表サレル。+

Transformation fn. (ξ'/η') ノ物理的意味 ~~ハ次ノ如クデアル~~、(38) カラ直チニワカル。即チ ~~ξ_m ガ~~ ξ_m $|(\xi'/\eta')|^2$ ハ ~~ソレガ~~ observables ~~η' ナル~~ $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ガ夫々 η_1' η_2' — η_n' ナル値ヲトル事ガ知レテ居レバ、$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ガ夫々 ξ_1' ξ_2' — ξ_n' ナル値ヲトル observables ノ probability デアル。

ソシテ Jordan ハ (ξ'/η') ヲ Probability Amplitude ト云ツテ居ル。(ZS. f. Phys. 40, S. , 44. S1,)

ソノ P. A. ノ mod. ハ一定デアルガ、ソノ phase ハ一定デナイ。#

所デ $|(\xi'/\eta')|^2 = (\xi'/\eta')(\eta'/\xi') = |(\eta'/\xi')|^2$

デアルカラ

η's ガ η''s ナル値ヲトルコトガ知レテ居レバ
ξ's ガ ξ''s ナル値ヲトル prob ハ
ξ's ガ ξ''s ナル 〃
η's ガ η''s 〃 〃 ニ等シイ。

之ハ ~~二ツノ~~ 云換エレバ prob. of agreement ガ二ツノ state ニ関シテ symmetrical デアルコトヲ意味スルコトヲ示シテ居ル。# #

トシテ η's ノ一ツノ simul. eigenstate $\psi(\eta')$
ヲ $\psi(\xi')$ ニツキ expand シ

$$\psi(\eta') = \sum_{\xi'} c_{\xi'} \psi(\xi') \qquad (42)$$

ト ナツタトスレバ、~~$|c_{\xi'}|^2$~~

$$\phi(\eta')\psi(\eta'') = \delta_{\eta'\eta''} \qquad (43)$$

$$\phi(\xi')\psi(\xi'') = \delta_{\xi'\xi''} \qquad (44)$$

ナレバ、$|c_{\xi'}|^2$ ガ η ガ η' ナル時ニハ ξ ガ ξ' ナル
確率即チ Prob ヲ与ヘテ居ル。

observable ξ ノ eigenvalues ξ'

ξ's ガ continuous range ヲ値ヲトル時ハ

$$|(\xi'|\eta')|^2 d\xi'$$

~~コレハ~~ η's ガ η' ナル値ヲトル時、ξ's ガ ξ' ト $\xi'+d\xi'$ ノ間ノ値ヲトル probability ヲアラハスモノ。

∵ ~~variables~~ observables ξ's ノ内ノ一ツノ ξ_s ヲ ~~考ヘ~~ トリ、

ξ ノ eigenvalues ξ_s', ξ_s'', … ガ非常ニ接近シテ来タ場合ノ limiting case トシテ eigenvalues ノ conti ナル場合ヲ考ヘ ~~ル~~ ルコトニスル。今 ξ' ト $\xi'+d\xi'$ ノ間ニアル ξ ノ eigenvalues ガ ~~内部ニ~~ S 個存在スル ~~様ナ範囲~~ $d\xi'$ ヲトル トスル。従ッテ $d\xi'$ ハ相当ニ小サイケレドモ、S' ハ相当大キイ様ナ様ニ $d\xi'$ ヲトル。スルト η ガ η' ノ値ヲトル時 ξ ガ ξ' ト $\xi'+d\xi'$ ノ間ノ値ヲトル Prob ハ

$$|C_{\xi'}|^2 S' d\xi'$$

ξ's ノ eigenvalues ノ接近シタ limiting case ニテハ

(42) ハ

$$\psi(\eta') = \int_{\xi'} C_{\xi'} S' \,\phi(\xi')\, d\xi' \qquad (42)'$$

トナリ、(44) ノ normalization ノ条件ハ

$$\sum_{\xi''} \phi(\xi'')\ \psi(\xi'') = 1$$

ノ limiting case ハ

$$\int \phi(\xi')\ \psi(\xi'')\ S''\, d\xi'' = 1 \qquad (44)'$$

トナル。

observable ξ ノ eigenvalues ξ'

ξ's ガ continuous range ヲ取ル場合ハ

$$|(\xi'|\eta')|^2 d\xi'$$

~~ハ ニナル~~ η's ガ η' ナル値ヲトル時、ξ's ガ ξ' ト

ξ'+dξ' ノ間ノ値ヲトル probability ヲ表ハスモノ。

∵ ~~variables~~ observables ξ's ノ和ノ一ツノ値ヲ ~~~~ トリ、~~~~

ξ ノ eigenvalues ξ', ξ'', ... ガ非常ニ接近シテ来タ場合ノ limiting case トシテ eigenvalues ノ conti ナル場合ヲ考ヘル ~~~~。今 ξ' ト ξ'+dξ' ノ間ニハ ξ ノ eigenvalues ガ s'個存在スル ~~~~ トスル。但シ dξ' ハ相当ニ小サイケレドモ、s' ハ相当大キイ様ナ程度ニ dξ' ヲトル。スルト η ガ η' ノ値ヲトル時 ξ ガ ξ' ト ξ'+dξ' ノ間ノ値ヲトル Prob ハ

$$|c_{\xi'}|^2 s' d\xi'$$

ξ's ノ eigenvalues ノ接近シタ limiting case ニハ (42) ハ

$$\psi(\eta') = \int_{\xi'} c_{\xi'} s' \varphi(\xi') d\xi' \qquad (42)'$$

トナリ、(44) ノ normalization ノ関係ハ

$$\sum_{\xi''} \varphi(\xi'') \psi(\xi'') = 1$$

ノ limiting case トシテ

$$\int \varphi(\xi'') \psi(\xi'') s'' d\xi'' = 1 \qquad (44)'$$

トナル。

從ツテ $\phi(\xi')$ ノ ~~normalization ヲカヘテ~~ ノカハリニ $s'^{\frac{1}{2}}\psi(\xi')$ ヲトリ之ヲ, $\psi(\xi')$ トカク

ト(~~(44)~~)ノ limiting case トシテ之(45), (44)ハ

~~之ニ~~ 之ハ $\Sigma_{\eta'}(\xi'|\eta')(\eta'|\xi'') = \delta(\xi'-\xi'')$, (45')

(45) $\int\phi(\xi')\phi(\xi')d\xi''$ or $\int(\eta'|\xi')\,d\xi'(\xi'|\eta'') = \delta_{\eta'\eta''}$

~~ナル條件ガ~~ normalization ノ ~~條件ガ満足サレテ~~
~~ヰル場合ニハ (45)ハ~~ トナル。

コノ場合ニ於テ $c_{\xi'}$ (42')ハ

$$\psi = \int c_{\xi'}\psi(\xi')s'^{\frac{1}{2}}d\xi'$$

トナルカラ、一方、

$$\psi = \int\psi(\xi')d\xi'(\xi'|\eta')$$

デアルカラ、

$$(\xi'/\eta') = c_{\xi'}s'^{\frac{1}{2}}$$

故ニ

$$|c_{\xi'}|^2 s'd\xi' = |(\xi'/\eta')|^2 d\xi'$$

ガ η ガ η' ナル値ヲトルトキ ξ ガ ξ' ト $\xi'+d\xi'$ ノ間ノ値ヲトル probab. ヲ表ハス。

而シテ(45')ニヨリ、

$$\int|(\xi'/\eta')|^2 d\xi' = 1.$$

故ニ ξ ガ任意ノ値ヲトル prob. ハ當然予想サレル如ク 1 トナッテヰル。

~~η'等ノ eigenvalu~~ observables ξ等ノ ~~固有値ガ~~ 連續的ナ
場合モ同様ニシテ扱ハレル。

詳カタニスベキ prob ハ

T ニモ述ベタ如ク transformation function (ξ'/η') ハ、ソノ絶対値ノ二乗ガ probability ヲ与ヘルガ (ξ'/η') 自身ハ phase ヲモツテ居ルカラ 普通ノ probability (transf. func.) トシテ取扱ヘナイコトヲ示セバ 粒子ノ性質、即チ interference ノ性質ヲ持ツテ居ル。B 後ノ如キ実験ヲ考ヘテ見ル。A カラ来ル Atom ニ対シテ

$$A \rightarrow B \quad C \quad D$$

BCD 三個所デ 順次ニ ξ, η, ζ ナル observables ノ値ヲ
従ツテ適当ナル observable ノ値ガ分カルトスル。
測定スルトスル。B デ ξ ノ値ガ ξ'、C デ η ノ値ガ η'
デアルコトガワカツタトキ
D デ ζ' ノ値デアル為ノ Prob ハ

$$|(\xi'/\eta')|^2 \, |(\eta'/\zeta')|^2 \, d\eta'$$

従ツテ B デ ξ ノ値ガ ξ' デアルコトガワカツテ居レバ
D デ ζ ノ値ガ ζ' デアル為ノ prob ハ (η ノ eigenvalue ヲ conti トシテオク)

$$\int |(\xi'/\eta')|^2 \, d\eta' \, |(\eta'/\zeta')|^2 \qquad (45)$$

デアル。

トコロデモシ C デ η ノ値ヲ測ラナカツタナラバ
~~B デ prob~~ ハ B デ ξ' ・・・・・ prob $|(\xi'/\zeta')|^2$
~~次ニ initial condition トシテ~~
ハ (41) ニヨリ $|(\xi'/\zeta')|^2 = \left|\int (\xi'/\eta') \, d\eta' \, (\eta'/\zeta')\right|^2$ (46)
以下
~~(45) (46)~~ Prob (45) ト (46)
トナル。コノ二ツノ場合ノ結果 ハ一般ニ異ナル。
コレハ即チ probability amplitude (ξ'/η'), (η'/ζ') ノ間ノ interference ガ来ルモノデアル。
前章ニ述ベタ如ク ~~ξ ト η~~ (η ト ζ) トガ commute スル場合ニハ 両者ノ結果ハ
一致スル。

η's ノ eigenvalues モ conti ノ時ニハ

$|(\xi'|\eta')^2|\,d\xi'$

ξ's ガ ξ' ト ξ'+dξ' ノ間ノ値ヲトル relative probability ヲ与ヘテ居ル。

最後ニ述ベタ eigenwert problem ヲ states及ビ observables ノ representation ヲ用キテ ~~化アラハサウトセバ~~、例ヘバ ξ's ノ eigenvalues ガ continuous ナ場合ニハ

~~$\xi\,\alpha\psi(\eta') =$~~

$$\eta_m\psi(\eta') = \eta_m'\psi(\eta')$$

$$\int(\xi'|\eta_m|\xi'')\,d\xi''\,(\xi''/\eta') = (\xi'/\eta')\,\eta_m' \qquad (47)$$

トナル。此ノ eigenwert problem ハ ξ' ヲ variable トスル所ノ (ξ'/η') ヲ unknown function トスル linear integral equation ノ eigenwert problem トナル。

此ノ integral equation ヲトイテ ノ eigenwert η_m' 及ビ eigenfunction (ξ'/η') ヲ ~~求メ~~ 見出スナリ。

然ル時 observable η_m ヲ測ッタル時ノ possible result η_m' ガワカリ。

次ニ ξ observable ξ ノ値ガワカッテ居ル時ノ η_m ヲ測ッタ ~~possi~~ 時 result ノ得ラレル probability ガ ~~(ξ'/η')~~ $|(\xi'/\eta')|^2$ ガワカル。

~~(ξ'/η') カラシテ~~

若シ一般ニ transformation (ξ'/η') ヲ知レバ 任意ノ initial condition ノ下ニ ~~ξ'ガη'~~ ヲ result ニ得ル probability ガ計算サレルコトガ出来ル。

即チ (49) ナル linear integral eq. ヲトクコトニヨリ容易ニ 1 全ク問題ハナクナル。

~~アル場合ニハ linear integral eq. ハ differential eq. トナル。例ヘバ~~

§ ~~Canonical~~ conjugate Observables.

モシモ Matrix (ξ'|η_m|ξ'') ガ δ' function ヲ含ンデ居レバ (49) ノ integral eq. ハ linear differential equation デアラハサレ、カヽル diff. eq. デ物理的ニ最モ重要ナ ~~場合ハ 即チ~~ 先ニ述ベタ ~~即チ~~ Schrödinger ノ wave equation デアツテ、ソノ solution デアル ~~場合ノ~~ wave ~~equa~~ function ~~ハ 即チ~~ transformation function (ξ'/η') ノ一種デアル。

以上デ ~~所謂~~ Transformation Theory ノ一般的ナ理論ヲ一通リ述ベ終ッタガ、~~コノ考ヘ~~ 構成セラレタ 歴史的ニ云ヘバ Dirac 及 Jordan ニヨツテ初メテ (Proc. Roy. Soc. 113, 621, 1927 Zs. f. Phys. 40, ~~44~~ 809, 1927; 44, 1, 1927) Transformation Theory ガ ~~formulate サレタ~~ ニ依ル

前章ニ述ベタ様ナ state 及ビ observable ヲアラハス
abstract ナ symbol ヲ用ヰルトキハ ~~精~~ 次章デ述ベル
様ナ representation ノ間ノ transformation
ニ関スル ~~ノ性質~~ ナ性質丈ガ問題トナルノデアル。コノ様ニ
abstract ナ symbol ヲ考ヘルトキモ ~~表~~ representation
ヲヨリ考ヘ ~~ルコトニヨリ~~ ルコトナク理論ヲ構成シ、又 ~~解~~ 実際
実験ト比較シ得ル様ナ結果ヲ出スコトガ出来ル
ガ、理論ノ ~~構造ヲ~~ axiomatic ナ 明瞭ニシ、ソノ物理的ナ意味ヲ
~~明カニ~~ 理解シ易クスルニハ symbolical ナ方法
ノミヲ用ヰルコトガ必ズシモ適当デナイ。

④ Nonrelativistic Quantum Mechanics

§ Eq of motion and Quantum Conditions

§ canonical Variables ~~and Heisenbergs~~

§ Schrödinger's wave equation and de Broglie wave

§§ ~~Gro~~ Transformation Group

⑤ Perturbation Theory

§ Change of Energy caused by .. § Transition caused by . .

§ Theory of Collision

⑥ Theory of ~~Electron~~ Electron § System with many electrons

§ Statistics of Fermi-Dirac.

Theory of Assembly of similar particles

§ Assembly of particles satisfying Pauli's exclusion principle

§ 〃 〃 〃 satisfying Bose-Einstein's statistics

~~§ 〃 〃 〃~~ ⑦ Theory of Radiation

⑧ Relativity Quantum Theory.