量子力学、Vol II.

昭和七年四月ヨリ十一月

湯川秀樹

MITSUKOSHI

六月十三日。　（五月廿二日）

Chap IV. Nonrelativistic Quantum Mechanics

§ Equations of Motion and Quantum Conditions

前ノ二章ニ述ベタ理論ハ個々ノ dynamical system ノ特殊ナ性質トハ無関係ニ成立スル。即チ任意ノ dynamical system ノ任意ノ state 及 observable ~~ニ関スル~~ 任意ノ個ノ間ニ存在シ得ル任意ノ関係ヲ事柄デアルノデ、ソレカラ色々ナ理論ヲ引キ出ス一般的ナ方法ヲ示シタモノデアル。

~~即チ~~ 之カラ我々ハ此ノ関係ヲ実際ニ存在スル dynamical system ノ states 及 observables ノ間ニ存在スル関係ハドンナモノデアルカ。即チ力学的法則 dynamical laws ハドンナ形デアルカヲ見出サナケレバナラヌノデアル。

ソコデ先 classical dynamics ニ於テ Newtonian dynamics ノ成立スル如キ場合即チ運動スル particles ノ ~~vel speed~~ velocity ガ light velocity ニ比シテ小サイ場合 ~~ニ対応スル~~ 特ニ之ニ対応スル Quantum mechanics ノ力学的法則ハドウイフ風ニ云ヒ表ハサナケレバナラヌカヲ考ヘテミル。

運動方程式

コノ場合 classical dynamics ニ於テハ ~~力学的~~

ハ種々ノ形ニ書キ得ル。例ヘバ Newton ノモトノ形、Lagrange ノ形、Hamilton ノ形ナドニ書キ得ル。
Bohr ノ classical quantum theory ニ於テハ orbital motion ノ quantisation ニ於テ Hamilton~~ian~~ ノ canonical variable ガ主要ナ役ヲシタ。従ッテ classical quantum theory ニ於テハ、Hamilton ノ ~~理論~~ ガ canonical form ガ運動方程式トシテ最モ役ニ立ツモノデアッタ。
~~精~~ 考ヘテ居ル今ノ場合ニモ矢張リ Hamilton ノ canonical equations of motion

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \qquad (1)$$

ヲトッテ、Quantum Mechanics ニ於ケル之ヲ如何ニカキカヘルベキカヲ考ヘテ見ル。
~~Quantum Mechanics ニ於テモ~~ classical dynamics ニ於ケル運動ノ問題ハ、与ヘラレタル dynamical system ニ於ケル Hamilton 函数（之ハ time ヲ explicit ニフクマヌ場合ニハ system ノ energy）ヲ canonical variables p_r, q_r デアラハシ、ソレカラ(1)ニヨッテ $\dot{p}_r, \dot{q}_r$ ヲ p_r, q_r, ~~t~~ ノ函数トシテアラハシ、ソノ differential equation ヲトイテ p_r, q_r ヲ time ノ function トシテ求メルコトデアル。

十分ニ 必要ナリ p_r, q_r ガ canonical variables デアル為ノ条件ハ

$$\left.\begin{array}{l}[q_r, q_s] = 0 \qquad [p_r, p_s] = 0 \\ [q_r, p_s] = \delta_{rs}\end{array}\right\} (5)$$

ナルコト P.B. デアラハサレル。

∵ p_r, q_r ノ函数 P_r, Q_r ガ can. var.

ナラバ

$$\dot P_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r} \qquad \dot Q_r = \frac{\partial H}{\partial P_r}$$

or $$\frac{\partial P_r}{\partial q_s}\dot q_s + \frac{\partial P_r}{\partial p_s}\dot p_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial Q_r} - \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial Q_r}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial q_s}\dot q_s + \frac{\partial Q_r}{\partial p_s}\dot p_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial P_r} - \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial P_r}$$

$\frac{\partial p_r}{\partial P_s}$ $$\frac{\partial P_r}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial P_r}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s} = -\frac{\partial p_s}{\partial Q_r}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial q_s}{\partial Q_r}\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial Q_r}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s} = -\frac{\partial p_s}{\partial P_r}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial q_s}{\partial P_r}\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$\frac{\partial P_r}{\partial q_s}$

証明セズニ略ス。

Whittaker: Analytical Dynamics
Chap. Transformation Theory

Hd. V. Die Hamilton-Jacobische Theorie der
Kap 3. Dynamik (Nordheim u Fues)

之ニ於テ Quantum Mechanics ニ於テ先ヅ問題トナルノハ ~~cl canonical variable~~ (1) ノ存在, H ヲ p_r 及ビ q_r デ differentiate スルコトデアル。

カクシテ Quantum Mechanics デハ一般ニ意味ヲモッテヰナイ。

所ガ classical dynamics デハ Poisson Bracket (P.B.)

$$[\xi, \eta] = \sum_r \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial q_r}\frac{\partial \eta}{\partial p_r} - \frac{\partial \xi}{\partial p_r}\frac{\partial \eta}{\partial q_r} \right\} \quad (2)$$

ヲ使ッテ

$$[q_r, H] = \frac{\partial H}{\partial p_r} \qquad [p_r, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

トスレバ can. eq. ハ

$$\dot{q}_r = [q_r, H] \qquad \dot{p}_r = [p_r, H] \quad (3)$$

ト云フ形ニカケル。

モット一般ニ任意ノ variable ξ ニ対シ

$$\dot{\xi} = \sum_r \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial \xi}{\partial p_r}\dot{p}_r \right) = \sum_r \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \xi}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_r} \right) = [\xi, H] \quad (4)$$

ガ成立スル。

シカシ ~~正シイカ~~ コノ Poisson Bracket ~~ヲ持ツ~~ ハ quantum ~~anal~~ theory デハドウ拡張スレバヨイカガ問題トナル。

$$(\xi_1\eta - \eta\xi_1)\xi_2 + \xi_1(\xi_2\eta - \eta\xi_2) = \xi_1\xi_2\eta - \eta\xi_1\xi_2$$

尚 (5) 及ビ (5') ニオイテ factor ノ順序ヲ入カヘヌ事ニ注意スベシ

(2)ノ結成カラ之テ

トコロデ ~~P, B, トモツテ~~ 示サレル括弧ノ持ツ諸性質ヲモツ事ハ

$$\cancel{[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]}$$

$$\cancel{[\xi, c] = 0}$$

$$\cancel{[\xi_1 + \xi_2, \eta]}$$

$$[\xi_1 \xi_2, \eta] = \sum_r \left\{\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial q_r}\xi_2 + \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial p_r}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_r}\xi_2 + \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial p_r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial q_r}\right\}$$

$$= \cancel{\frac{\partial \xi_1}{\partial q_r}}\ [\xi_1, \eta]\xi_2 + \xi_1[\xi_2, \eta] \qquad (6)$$

同様ニ之テ

$$[\xi, \eta_1 \eta_2] = [\xi, \eta_1]\eta_2 + \eta_1[\xi, \eta_2] \qquad (6)'$$

~~結合律~~

$$[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2] = [\xi_1, \eta_1 \eta_2]\xi_2 + \xi_1[\xi_2, \eta_1 \eta_2]$$

$$= \{[\xi_1, \eta_1]\eta_2 + \eta_1[\xi_1, \eta_2]\}\xi_2$$

$$+ \xi_1\{[\xi_2, \eta_1]\eta_2 + \eta_1[\xi_2, \eta_2]\}$$

$$= [\xi_1, \eta_1]\eta_2\xi_2 + \eta_1[\xi_1, \eta_2]\xi_2$$

$$+ \xi_1[\xi_2, \eta_1]\eta_2 + \xi_1\eta_1[\xi_2, \eta_2]$$

一方から

又 $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2] = [\xi_1 \xi_2, \eta_1]\eta_2 + \eta_1[\xi_1 \xi_2, \eta_2]$

$$= [\xi_1, \eta_1]\xi_2\eta_2 + \xi_1[\xi_2, \eta_1]\eta_2$$

$$+ \eta_1[\xi_1, \eta_2]\xi_2 + \eta_1\xi_1[\xi_2, \eta_2].$$

P.B.ガ　及ビ

ナルコノ関係ハ (5) ~~，(5)' 関係~~ ヲ $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ ガ
タトヘ noncommutative ナルモアツテモ ~~P.B. symbol~~
~~ガ (5) ナ~~ Bracket symbol [　] ガ (5) 及ビ (5') ヲアノ
マヽノ factor ノ順序ヲ適当ニ入レ換ヘナモノナラバ
依然トシテ成立ツベキ関係デアルコト

故ニ noncommutative ナル symbol ~~数(ヲ)~~ ナラバ
(ξ_1, η_1 ガ dynamical system ノ
$\xi_2\ \eta_2$　observables デアツテハ

~~ナルニ $\xi_2\eta_2 - \eta_2\xi_2$ = a number~~

~~ナルトキニ ξ_2, η_2 ガ [illegible]~~

之ノ両方ヲ比較スルト

$$[\xi_1,\eta_1](\xi_2\eta_2-\eta_2\xi_2)=(\xi_1\eta_1-\eta_1\xi_1)[\xi_2,\eta_2]\ \dagger$$

之ノ関係ガ ξ_2,η_2 ニ independent ニ ~~ξ_1,η_1 ニツイテ~~
成立 ~~スルタメニハ~~ スルタメニハ

$$\xi_1\eta_1-\eta_1\xi_1=i\hbar[\xi_1,\eta_1]$$

従ッテ

$$\xi_2\eta_2-\eta_2\xi_2=i\hbar[\xi_2,\eta_2]$$

コヽニ $\hbar$ ハ $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2$ ニ independent ナモノデ
~~ナケレバナラヌ~~ 故ニ凡テノ量ト commute セネバナラヌ
故ニ一ツノ number デアル。

更ニ real ~~variable~~ observables ニ就テハ
P, B ハ real デアルナラバ $\xi_1\eta_1-\eta_1\xi_1$ ハ
pure imaginary デアルカラ, $\hbar$ ハ real デナケレバナラヌ。

即チ ~~$\xi\eta$~~ Quantum Mechanics ニ於テハ

$$\xi\eta-\eta\xi=i\hbar[\xi,\eta] \qquad (8)$$

ガ任意ノ二ツノ observables ニ就テ成立セネバナラヌ。

但シ $\hbar$ ハ real ナ universal constant デ
~~dimension~~ classical ナ $[\xi,\eta]$ ハ $\frac{\partial\xi}{\partial p_r}\frac{\partial\eta}{\partial q_r}$ ノ如キ形ヲ

一ツノ dynamical system ノ状態ノ變數ヲ particular time
tニ於ケル値及ビ time parameter ニ對スル状態ノ
observable ヲ一括シテ 此
或

ナッテヰルカラ dimension ハ action ノデアル。
実験ト一致サスニハ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ニトレバヨイ。
h : Planck ノ constant
classical ノ P.B. ト同様ニ (7)(8) ニヨッテ定義サレル
P.B. ハ次ノ諸関係ヲ満足スル。

$$\left.\begin{aligned}
&[\xi, \eta] = -[\eta, \xi] \\
&[\xi, c] = 0 \qquad c : \text{a number} \\
&[\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta] \\
&[\xi, \eta_1 + \eta_2] = [\xi, \eta_1] + [\xi, \eta_2] \\
&[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0
\end{aligned}\right\} (8)$$

又(8)及ビ(8')ハソノママノ順序デ満足サレル。

・12テ (7) ニヨッテ define サレル P.B. ~~ニ対シテ~~ ヲ用ヰル時
量子力学ニ於テモ classical dynamics ニ於ケルト同ジ
形ノ Equation of motion 式

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\xi} = [\xi, H] \\
&\text{or } i\hbar\dot{\xi} = \xi H - H\xi
\end{aligned}\right\} (9)$$

ガ成立ツ。canonical variable p_r, q_r ノ満足スベキ
條件モ又 classical ノ時ト同様ニ

$$[q_r, q_s] = 0 \qquad [p_r, p_s] = 0$$
$$[q_r, p_s] = \delta_{rs} \qquad (10)$$

or $q_r q_s - q_s q_r = 0 \qquad p_r p_s - p_s p_r = 0$ (10)

$q_r p_s - p_s q_r = i\hbar\,\delta_{rs}$ (12)

ガ成立スルト假定シタ。*

~~之ノ (9), (10) ノ兩式ガ表ハス ノ内 (9) ハ 量子力学ニ於テハ~~

~~從來ノ dynamical variable ノ時間的變化ヲ 決定スル~~

~~方程式デアル~~

~~之ノ関係ヨリ~~ 今迄 (9) 及 (10) ハ observables ノ

間ノ関係 ~~トシテ考ヘラレテ居タ~~ 之ノ關係ノ際 observable ハ

time ヲ parameter トシテ持ツコトヲ示ス。此際從来ノ dynamical

variable ξ ノ時間的變化ノ割合 ξ̇ ~~(9)~~ ノアル時ニ於ケル

値ハ (9) デ與ヘラレル一ツノ observable デアル。

~~time rate ヲトル操作~~ 和ノ time rate ハ time rate

~~ノ和ニ等シイ~~ 二ツノ dynamical variables ξ, η ノ

和及ビ積ノ time rate ニ對シテ 普通ノ微分ノ法則

$$\frac{d}{dt}(\xi+\eta) = \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \quad \text{等}$$

$$\frac{d}{dt}(\xi\eta) = \xi\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\eta$$

ガ成立スル

$$\because \quad \dot\xi + \dot\eta = [\xi, H] + [\eta, H]$$

$$= [\xi+\eta, H] = \frac{d}{dt}(\xi+\eta)$$

$$\xi\dot\eta + \dot\xi\eta = \xi[\eta, H] + [\xi, H]\eta = [\xi\eta, H]$$

$$= \frac{d}{dt}(\xi\eta)$$

ソコデ量子力学ニオケル Poisson Bracket ヲ (7) ノ式ニヨッテ定義スルト 第一ニ p_r, q_r ガ canonical variables デアル條件トシテハ classical dynamics トノ analogy ニヨリ

$$[q_r, q_s] = 0 \quad , \quad [p_r, p_s] = 0 \qquad \Big\} (9)$$
$$[q_r, p_s] = \delta_{rs}$$

or
$$q_r q_s - q_s q_r = 0 \qquad p_r p_s - p_s p_r = 0 \qquad \Big\} (9')$$
$$q_r p_s - p_s q_r = i\hbar\,\delta_{rs}$$

トナル。之ハ particular time t ニオケル canonical variables ノ間ノ関係 従ッテ time t ヲ parameter ニフクンダ observables ノ間ノ関係ヲアラハシテヰル。~~第二ニ之ハ observables ノ間ノ~~ multiplication ノ ~~noncommutative ナコトヲ示シ~~ $\hbar \to 0$ ノ limiting case ニ於テハ dynamical variables ハ凡テ互ニ commute シ、従ッテ classical dynamics ノ成立スル場合トナル。故ニ (9') 式ハ quantum condition ヲ与ヘタモノト見テヨイ。

第二ニ classical dynamics ニ於ケル equation of motion ニ對スル analogy カラ從来ノ dynamical variable ノ含ンデヰル time ヲ

parameter ニツイテノ任意ノ observable ξ ノ変化ノ time rate ハ

$$\dot{\xi} = [\xi, H] \qquad (10)$$

$$\text{or} \quad i\hbar\dot{\xi} = \xi H - H\xi \qquad (10)'$$

デアラウ。

之レハ Poisson Bracket ノ性質カラ云ヘバ、observables ノ任意ノ函数ノ時間ニツイテノ微分ハ普通ノ微分ノ法則ヲ用ヰテ定マル。但シ factor ノ順序ニ注意セネバナラヌ。

∵ (8) デアルカラ Poisson Bracket ノ性質カラ、例ヘバ二ツノ observables ノ和及ビ積ニ就テハ

$$\frac{d}{dt}(\xi + \eta) = [\xi + \eta, H]$$

$$= [\xi, H] + [\eta, H] = \dot{\xi} + \dot{\eta}$$

$$\frac{d}{dt}(\xi\eta) = [\xi\eta, H]$$

$$= \xi[\eta, H] + [\xi, H]\eta$$

$$= \xi\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\eta$$

トナリ、一般ノ函数ノ微分ハ和及ビ積ニツイテノ法則ノ反復ニヨツテ出来ルノデアルカラ普通ノ微分ノ法則ト factor ノ順序サヘ注意スレバ同ジ結果ニナルノデアル

(9')ト(10')トハ矛盾シナイ。即チ(9')ガアル particular time t ニ於テ成立ツトスルナラバ、(10')ノ equation of motion ニヨッテ他ノ time ニ於テモ(9')ハ成立ツ。

∵ $$\frac{d}{dt}(q_r p_s - p_s q_r)$$

$$\cancel{= \dot{q}_r p_s + q_r \dot{p}_s - \dot{p}_s q_r - p_s \dot{q}_r}$$

$$\cancel{= [q_r, H] p_s + q_r [p_s, H] - p_s [q_r, H] - [p_s, H] q_r}$$

$$\cancel{= \frac{1}{i\hbar}\{q_r H p_s - H q_r p_s + q_r p_s H - q_r H p_s - p_s q_r H + p_s H q_r - p_s H q_r + H p_s q_r\}}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}[q_r p_s - p_s q_r, H]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\{q_r p_s H - H q_r p_s - p_s q_r H + H p_s q_r\}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\{i\hbar \delta_{rs} H - H i\hbar \delta_{rs}\}$$

$$= 0$$

即チ (9')ガアル instant ニ成立ツナラバ ~~其ノ左辺ノ time rate~~ 次ノ瞬間ニモ成立ツ
即チ 他ノ時刻ニ於テ成立ツ。

斯る変量の transformation によって observable quantity の間の algebraic relation は変はらぬ故、canonical variables の set は又他の canonical variable の set に transform される。
† classical dynamics に於ては一つの canonical variables の set から他 canonical variable の set への transf は contact transformation と称せられた。故に quantum mechanics に於ても 変量の obs. q. を他の obs. q に transf する所の transf は又 contact transformation と称することもある (Dirac) 併しこの言葉はあまりつかはれぬ。

$s\bar{s} = \bar{s}s = 1$

† ~~reciprocal~~ $s^{-1} = \bar{s}$ なる條件を満足する互の observable

~~($ss^{-1} = s^{-1}s = 1$)~~

なる reciprocal を有する. 而して conj. comp. が一致する場合 $s^{-1} = \bar{s}$

五月廿九日

Quantum Mechanics ニ於ケル Poisson Bracket ハ classical dynamics ニ於ケル ソレト相似ナ意味ヲモツテ居ル。然シナガラ Quantum mechanics ニ於テハ classical ノ場合ノ如ク一ツノ canonical (P.B.ヲ定義スベキ) variables ノ set ニ refer スル必要ガナイ。任意ノ二ツノ variables ~~組ノ間~~ 或ニツノ間ノ P.B. ハ ソレ等ノ variables ノ間ノ algebraic ~~ナ~~ 関係デアル。

classical dynamics ニ於テハ一ツノ canonical variables ノ set カラ他ノ variables ノ set ヘノ transformation ハ contact (canonical) transformation トナラナケレバナラヌガ之ニ對應スル如キ contact transformation ハ次ノ如クデアル。

S ヲ以テ 任意ノ unitary observable トシ ~~reciprocal S^{-1} ヲ持ツ任意ノ observable~~ トスル時、任意ノ observable α ヲ $S\alpha\bar{S}$ ニ移ス如キ transformation ハ contact transformation ト呼バレル。

コノ transformation ノ性質ヲ述ベル。

i) 先ヅ α ガ real ナラバ $S\alpha\bar{S}$ モ real

∵ $\overline{S\alpha\bar{S}} = S\bar{\alpha}\bar{S} = S\alpha\bar{S}$ for real α.

ii) 次ニ α ノ eigenvalue ト $S\alpha\bar{S}$ ノ eigenvalue ハ同一

証明。

i) ~~Sα~~ $\alpha\psi = a\psi$ ナラバ

$$S\alpha\bar{S}\cdot S\psi = S\alpha\psi = Sa\psi = aS\psi$$

故ニ ψ ガ α ノ a ニ属スル eigenstate ナラバ

$S\psi$ ガ $S\alpha\bar{S}$ ノ a 〃 〃 証明。

($S\psi = 0$ トハナラヌ。∵ S ガ 0 ノ eigenvalue ヲモタヌ

$S\bar{S} = \bar{S}S = 1$ トシタカラ)

又 $S\alpha\bar{S}\cdot\psi' = a'\psi'$ ナラバ

$$\alpha\bar{S}\psi' = \bar{S}\cdot S\alpha\bar{S}\psi' = \bar{S}\cdot a'\psi' = a'\bar{S}\psi'$$

iii) ~~次ニ~~ 二ツノ observables α_r ノ間ノ凡テノ algebraic ナ関係ハ、transform サレタ observables $\beta_r = S\alpha_r S^{-1}$ ニツイテモ同様ニ成立スル

∵ $\sum c\,\alpha_p\alpha_q\cdots\alpha_z = 0$

カラハ $\sum c\,S\alpha_p\alpha_q\cdots\alpha_z \cancel{S^{-1}} S^{-1} = 0$

or $\sum c\,S\alpha_p S^{-1} S\alpha_q S^{-1} S\cdots S\alpha_z S^{-1} = 0$

or $\sum c\,\beta_p\beta_q\cdots\beta_z = 0$

iv) 又 α ノ一ツノ~~ガ~~函数ナル α_1 ガ他ノ一ツノ函数ナル α_2 ノ function ナラバ $\beta_1 = S\alpha_1 S^{-1}$ ハ $\beta_2 = S\alpha_2 S^{-1}$ ノ

及び函数である。

∵ $\alpha_1 = f(\alpha_2)$ とすれば、α_2 の eigenvalue a に属する ψ_a に対して

$$f(\alpha_2)\psi_a = f(a)\psi_a$$

$$\therefore\ S f(\alpha_2) S^{-1} S\psi_a = f(a) S\psi_a$$

となるが $S\psi_a$ は β_2 の eigenvalue a に属する eigen-ψ であるから

$$f(\beta_2) S\psi_a = f(a) S\psi_a$$

~~∴ 任意の α_2 の任意の eigen~~

$$\beta_1 S\psi_a = S f(\alpha_2) S^{-1} S\psi_a = f(\beta_2) S\psi_a$$

之が β_2 の総ての eigen-ψ $S\psi_a$ に対して成立するから任意の ψ に対して

$$\beta_1 \psi = f(\beta_2)\psi$$

$$\therefore\ \beta_1 = f(\beta_2)$$

v) Contact transformation は group の性質を有する。

∵ identical transformation は $S = 1$ とすれば得られ、reciprocal transf は S の代りに $\bar{S}$ をとれば得られる。二つの contact transf の積は $T(S\alpha S^{-1})T^{-1} = TS\alpha S^{-1}T^{-1}$

$$= TS\alpha(TS)^{-1} \qquad \overline{TS} = \bar{S}\bar{T} = S^{-1}T^{-1} = (TS)^{-1}$$

~~[illegible]~~ ヲ使フ contact Transf デアル。

contact Transf ノ形ニ於テ、canonical ~~variables~~ Transf トハ呼ビテアル。

ξ' 及ビ ~~variable~~ observable ξ ニ於ケル repr ヲ考ヘルト

$$\frac{(\xi'|S|\xi'')(\xi''|\alpha|\xi''')(\xi'''|\bar{S}|\xi^{(iv)})}{}$$

$$(\xi'|S|\xi'') \to (\xi''|\bar{S}|\xi')$$

$$\int (\xi'|S|\xi'')\,d\xi''\,(\xi''|\bar{S}|\xi''') = \delta(\xi',\xi''')$$

$$\int (\xi'|\bar{S}|\xi'')\,d\xi''\,(\xi''|S|\xi''') = \delta(\xi',\xi''')$$

即チ (ξ'/η'') ノカハリニ $(\xi'|S|\xi'')$

(η''/ξ') ノカハリニ $(\xi''|\bar{S}|\xi')$

ガ入ッタモノト見レバ全ク同形デアル。

次ニ意味ハ異ナル点ヂ。canonical transf ハ repres ノ間ノ関係デアッテ classical analogue ヲモタヌガ、cont. transf ハ一ツノ ~~variable~~ observ カラ他ヘノ Transf デアリ (iii) ノ性質ニヨリ observables ~~ニヨッテ~~ ノ間ノ algebraic ナ関係ヲカヘナイ。即チ之ノ canon. ~~observables~~ ニ関スル quantum conditions (9') ハ Transf サレタ observables ニ対シテモ成立スル

次ニ classical ~~dyn~~ ニ於ケル contact transf. ノ quantum analogue ヲ考ヘル。
classical dyn. ニ於テハ contact transf ヲ canonical transf ト ~~同~~ 同ジ意味ニ使ッテ居タガ、quant. mechanics ニ於テハ上ノ様ナ二種ノ
~~変~~ transf. ヲ区別スル (已ムヲ得ズ ~~変換ノ方程式ヲ考ヘル~~)。之ニ依リ、此ノ事ヲ只今ニ
ツイテ述ベタイ。

infinitesimal ナ real observable トス

~~始メニ~~ A ヲ eigenvalue ガ凡テ非常ニ小サイ observable (real ノ値ヲトル者)
トスレバ、

$$S = 1 + iA$$

トナレバ

$$\bar{S} = 1 - iA = S^{-1}$$

$\because$ A^2 ヲ neglect スレバ $(1+iA)(1-iA) = (1-iA)(1+iA) = 1$
ニヨッテ infinitesimal contact transformation

$$\beta = (1+iA)\,\alpha\,(1-iA)$$

A^2 ヲ neglect スレバ or

$$\beta - \alpha = i(A\alpha - \alpha A)$$

ヲ得ル。A ガ real ナラバ ~~βモ~~ α ガ real ナラバ
β モ亦 real デアル。

observable ξ ガ time ヲ explicit ニフクンデ居ル場合ハ (10) or (10') ノ equation of motion ハ classical ノ場合ト analogous ニ

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + [\xi, H] \qquad (11)$$

$$\text{or} \quad i\hbar\dot{\xi} = i\hbar\frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi H - H\xi \qquad (11)'$$

トカキカヘラレル事ハ明カデアル。

ξ ガ time ヲ explicit ニフクマヌ observable トスレバ (10)' ノ equation of motion カラ直チニ ~~考ヘル~~ Hamiltonian H ト commute スル時ハ ソノ時ニ限リ ξ ガ constant of motion デアル。

特ニ H 自身 time ヲ explicit ニフクマヌ場合ハ、又ソノ時ニ限リ constant デアル。

Hamiltonian ニ任意ノ number, 或ハソレガ time ト共ニカハルモノデアッテモ 任意 number ヲ増減シテモ ~~Hamilt~~ equation of motion ニ変化ハ起ラヌ。

○ カクシテ我々ハ equation of motion ト quantum condition ヲ classical dynamics トノ analogy ニヨリテ之ヲ得ルコトガ出来タ。ソコデ我々ハ問題ヲ例ヘバ dynamical system ニ於テハ Hamilton 函数ヲ canonical variables p_r, q_r ノ函数トシテ ~~与ヘ~~ 与ヘルコトガ出来ル。コノ問題ハ classical dynamics トノ analogy 丈ケハ完全ニ解決ガ出来タ。

~~ソコデ我々ハ先ヅ一ツノ dynamical system ニ~~
~~就テノ最後ノ問題ニ帰ル問題ハ~~
~~與ヘラレタ Hamiltonian ト canonical variables~~
~~p_r, q_r ノ 及ビ time t ノ函数トシテ決定スルコトデアル.~~
~~(9) 又ハ (10) or (11) ニヨツテ Ham~~ ノ rule ニ従ッテ
~~(10) or (11) ノ右辺ヲ計算スル~~

ソコデ我々ハ先ヅ問題ヲトリアゲ 假ニ dynamical system ニ於テハ Hamiltonian ヲ canonical variables p_r, q_r ノ函数トシテ與ヘラレタモノト仮定スル。コレヲ仮定ス.

~~コノ場合ニ於テ~~ 我々ハ classical dynamics トノ analogy ヲ考ヘルヨリ他ニ一般的ナ途ハナイ。

~~例ヘバソコデ~~ 即チ我々ハ classical ナ Hamiltonian ニ對應スル quantum theoretical ナ Hamiltonian ヲ unique ニ決定スルコトハ出来ナイ。
何故ナラバ例ヘバ ~~H classical~~ ナ Hamiltonian ガ ~~quantum~~ non-commutative ナ factors ノ積ヲ含ンデヰルトスレバ、ソノ様ナ factor ノ順序ヲ変ヘルコトニヨッテ quantum mechanics デハ異ナル system ヲ得ル。

勿論カクノ如キ ambiguity ノナイ場合モアル。
factor ノ順序ニ関スル問題ノナイ場合

例ヘバ potential field $V(x,y,z)$ ナル中ニ於ケル mass m ナル particle ノ Hamiltonian ハ cartesian coordinate デ表ハセバ

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \qquad (12)$$

ナリ。ambiguity ハ存在セヌ。
然シ之ヲ他ノ一般ノ curvilinear coordinate 例ヘバ polar coordinate デ表ハセバ ambiguity ヲ生ズ。

カクノ如ク dynamical system ノ性質ヲ決定スベキ Hamiltonian 函数ヲ量子力学ニ於テ如何ニシテ求ムベキカト云フ問題ハ満足ナル解答ハ与ヘラレテ居ナイ。
特ニ ~~場合ニ於テハ~~ classical ナ場合トノ analogy
ノ類推ヲ許サナイ場合ニハ
~~ニヨリテ求メル~~ ~~以外ニ~~ ~~解決ノ方法ナキ場合ガアル。~~
以外ノ場合ニ於テハ
~~此レヲ行フ外ハナイ。~~ Hamiltonian ヲ決定スル為ニハ ~~特別ノ~~ 困難ナ問題デアル。
ソノ一例ハ後ニ述ベル。

C ヲ any real number トスレバ

$$e^{\frac{cq}{i\hbar}}$$

ハ q ノ any ~~real value~~ ニ対シテ ガ real ナル eigenvalues ガ real ノ場合ニハ意味ヲモッテ居ル。

~~[illegible]~~ and Schrödinger's differential Equation

§ Canonical Conjugate Observables

係ル dynamical system ノ中デ p ト q トガ canonical conjugate observables トスルト 前節ノ(9)ニヨリ

$$q\,p - p\,q = i\hbar \qquad (13)$$

ナル関係ヲ満足シナケレバナラヌ。

~~トスレバ (13) ナル関係ヲ満足スル~~ トスレバ (13) ナル関係ヲ満足スル observables p, q ノ eigenvalue ハ $-\infty$ カラ $+\infty$ ノ範囲ノ総テトナリウル。

$\because$ ~~$q\,p - p\,q = i\hbar$~~

~~故ニ~~ $$q^n p - p q^n = n q^{n-1} i\hbar$$

$$\because\ q^{n+1} p - p q^{n+1} = q(q^n p - p q^n) + (q p - p q) q^n$$

$$= q \cdot n q^{n-1} i\hbar + i\hbar q^n$$

$$= (n+1) q^n i\hbar$$

$n = 1$ $\quad qp - pq = i\hbar$

従ッテ $$e^{\frac{cq}{i\hbar}} p - p e^{\frac{cq}{i\hbar}}$$ any real c-number

$$= \sum \frac{1}{n!}\left(\frac{cq}{i\hbar}\right)^n p - p \sum \frac{1}{n!}\left(\frac{cq}{i\hbar}\right)^n$$

$$= \sum \frac{n}{n!}\left(\frac{c}{i\hbar}\right)^n q^{n-1} i\hbar = c e^{\frac{cq}{i\hbar}}$$

~~[illegible]~~ 従ッテ $$e^{\frac{cq}{i\hbar}} p = (p + c) e^{\frac{cq}{i\hbar}}$$

$$m\ddot{q} = \cancel{m}\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -4\pi^2\nu^2 m q$$

例ヘバ $qp-pq$ ($\cancel{pq-qp}$) 以外ノ eigenvalue ハ依然ニツイテ ~~去来~~ 大デアル。

classical dynamics ニオケル

例ヘバ one dimensional ノ harmonic oscillator (ノ frequency ω ハ)

ニ於テハ Hamiltonian ハ particle ノ mass ヲ m, oscillation

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + 4\pi^2\nu^2 m^2 q^2\right)$$

デアル。

今 p ヲ $(2\pi\nu m)^{\frac{1}{2}} p$　q ヲ $(2\pi\nu m)^{-\frac{1}{2}} q$ デ置キカヘルト

$$H = \frac{1}{2}\, 2\pi\nu \cdot (p^2 + q^2)$$

トナル。

古典論ニテハ eigenvalue ハ negative デナイコトハ明ラカ。∵ $\cancel{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2}$ ノ ($\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ノ eigenvalue) ハ state

[illegible] eigenvalue ハソレゾレ negative デナイコトハ明ラカノ state ($\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ノ eigen)

ニ於テハ平均値モ negative デナイコトハ ∴ ソノ 例ヘバ $\cancel{\frac{1}{2}(p^2+q^2)}$ モ亦 negative デナイ

故ニ $e^{\frac{cq}{i\hbar}}$ ノ逆 $e^{-\frac{cq}{i\hbar}}$ ヲ両辺ニ掛ケルコトニヨリ

$$e^{\frac{cq}{i\hbar}}\, p\, e^{-\frac{cq}{i\hbar}} = p + c.$$

(之ハ contact transformation デアル。
今 $e^{\frac{cq}{i\hbar}} = S$ トスレバ $\bar{S} = e^{-\frac{cq}{i\hbar}} = S^{-1}$ デアルカラ)

~~理論~~故ニ p ノ eigenvalue ト $p+c$ ノ eigenvalue トハ一致スル。即チ p ノ一ツノ eigenvalue ヲ p' トスレバ $p'+c$ モ又 p ノ eigenvalue デアル。c ハ任意ノ real number ナルガ故ニ p ノ eigenvalue ハ任意ノ real ナ値ヲトリ得ル。q ニツイテモ同様デアル。

一般ニ

故ニ dynamical system ニ於テ canonical variables $p_r q_r$ ノ eigenvalues ハ凡テ $-\infty$ カラ $+\infty$ ノ値ヲトリ得ルモノナルコトニナル。シカシナガラ p_r, q_r ノ函数ハ必ズシモ任意ノ real ノ値ノ eigenvalue ヲモツテ居ナイ。†

・ソレデ 例ヘバ ~~H~~ $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ノ eigenvalue ヲ計算シテミヨウ。*
~~one dimensional harmonic oscillator~~

$$A = \frac{1}{2}(p+iq)(p-iq) = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + \frac{1}{2}i(i\hbar)$$
$$= \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{\hbar}{2}$$

又 $$\frac{1}{2}(p-iq)(p+iq) = \frac{1}{2}(p^2+q^2) + \frac{\hbar}{2} = A + \hbar$$

$$\therefore \frac{1}{2}(p-iq)(p+iq)(p-iq) = (A+\hbar)(p-iq) = (p-iq)A$$

トナル。

* ニ於テハ [illegible]
[illegible]

∴, $A' \neq 0$ ナラバ　$A' - \hbar$ ガ eigenvalue デナケレバナラヌ。

$A' - \hbar$ ガ eigenvalue デナイナラバ　$A' = 0$.

$A + \hbar = \frac{1}{2}(p - iq)(p + iq)$

$A' + \hbar = (A'|A|A') = \frac{1}{2}(A'|p - iq|A'')(A''|p + iq|A')$

所ガ $A' + \hbar \neq 0$ A' ガ eigenvalue ナラバ　$A'' = A' + \hbar$ モ又 eigenvalue デナケレバナラヌ。

従ッテ A ヲ diagonal matrix トスル様ナ representation ヲトレバ

$$(A'+\hbar)(A'|p-iq|A'') = (A'|p-iq|A'')A''$$

従ッテ $A' + \hbar = A''$

or $(A'|p-iq|A'') = 0$

ソコデ $A' = (A'|A|A') = \sum_{A''} \frac{1}{2}(A'|p+iq|A'')(A''|p-iq|A')$

右辺ハ A'' ニツイテ sum 又ハ integral ヲトツタモノデアル。

所デ $(A''|p-iq|A') \neq 0$ ~~ナラバ~~ トナレバ $A''+\hbar = A'$ トナルカラ、又ソコニ A' ガ一ツノ eigenvalue デアレバ、

~~$A'-\hbar$ モ又 eigenvalue トナル~~

~~従ッテ $(A'|A|A') = A' \geq 0$.~~

故ニ A', ~~$A'-\hbar$~~, ガ一ツノ eigenvalue ナレバ $A'-\hbar$, $A'-2\hbar$, ... ガ皆 eigenvalue トナル。所ガ $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ノ eigenvalue ハ negative デアリ得ナイカラ $A = \frac{1}{2}(p^2+q^2)-\hbar$ ノ eigenvalue モ又 $-\hbar$ ヨリ小デアリ得ナイ。ナラナイカラ $A'-\hbar$, $A'-2\hbar$, ... ノ sequence ハ ~~terminate~~ ドコカデ終ル筈。ソレハ所ヲ見レバ終ル所ハ 0 デナケレバナラヌ。

∴ A ノ eigenvalue ハ $0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \ldots$ to ∞

一般ニ ~~$\frac{h}{2}$~~ $(n+\frac{1}{2})\hbar$

∴ $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ノ eigenvalue ハ $\frac{1}{2}\hbar,\ \frac{3}{2}\hbar,\ \frac{5}{2}\hbar \ldots$

∴ Harmonic Oscillator ノ Energy ノ値即チ

$\frac{1}{2}2\pi\nu(p^2+q^2)$ ノ eigenvalue ハ $2\pi\nu(n+\frac{1}{2})\hbar$

or $(n+\frac{1}{2})h\nu$ デナケレバナラヌ。

~~粒子ノ場合~~ ニ於テ

$$e^{\frac{2\pi i}{N}\left\{\frac{p^2+q^2}{\hbar}-1\right\}}$$

ノ eigenvalues ハ

$$e^{\frac{2\pi i}{N}n} \qquad n=0,1,2,\ldots n-1$$

ノ n 個丈デアル。

ソウイフワケデアルカラ $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ 等ノ如キ variable ヲ canonical variable ノ一ツニトル~~コトハ出来ナイ~~、事ハ出来ナイ。然シナガラ ニ於テ(B)デ define サレル様ナ canonical conjugate ハ存在シ得ル。~~要~~ 函数 p or q ニ於テ contact transformation ニヨッテ $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ 等ノ variable ヘウツレナイト云フ事デアル。

~~解~~

ソコデ我々ハ canonical ~~variables~~ observables ノ函数ヲ撰ンデ eigenvalue ノ範囲ノ決ラレタモノ即チ discrete ~~var.~~ observable

ト eigen value ノ存在ハ observables ヲモツテ考ヘラレルト思ヒ
ヨイト思フ。

~~Canonic~~

~~§ Canonical Observables~~

$$(q') \quad \text{理由} \quad q_r q_s - q_s q_r = 0 \qquad p_r p_s - p_s p_r = 0$$

$$q_r p_s - p_s q_r = i\hbar\,\delta_{rs}$$

ナル関係ヲ満足スル canonical variables ノ性質ヲ考ヘテ見ルニ、与ヘラレタ q's ニ対シテ p's ハ unique ニハ定マラヌ。

例ヘバ今一ツノ p's ニ対シテ (q') ガ満足サレルナラバ

~~$p_r + \frac{\partial F(q_r)}{\partial q_r}$ $F(q)$ ニヨッテモ満足サレル。~~

~~但シ $F(q)$ ハ q's ノ任意函数~~

~~理由 $q_r\left(p_s + \frac{\partial F(q)}{\partial q_r}\right) - \left(p_s + \frac{\partial F(q_r)}{\partial q_r}\right) q_r = i\hbar\,\delta_{rs}$~~

$$\left(p_r + \frac{\partial F}{\partial q_r}\right)\left(p_s + \frac{\partial F}{\partial q_s}\right) - p_s$$

~~理由 $q_r(p_s + F_s(q))$~~

$p_r + f_r(q_r)$ モ又 (q') ヲ満足スル。

但シ f_r ハ q_r ノ任意函数トシテオク。

q_r ト $p_s (s \neq r)$ トハ commute スルカラ

∵ q_r ノ任意ノ函数ハ $p_s (s \neq r)$ ト commute スルカラ

∴ 理由 $\{p_r + f_r(q_r)\}\{p_s + f_s(q_s)\} - \{p_s + f_s(q_s)\}$
$\times \{p_r + f_r(q_r)\} = 0$

又 $q_r\{p_s + f_s(q_s)\} - \{p_s + f_s(q_s)\} q_r = i\hbar\,\delta_{rs}$

トニヨテ $f(q_r)$ ヲ q_r ノ任意ノ power series デ define サレル任意函数トスレバ

$$f(q_r)p_r - p_r f(q_r) = i\hbar f'(q_r) \quad (14)$$

トナル。

∵ (13) ガ f_1, f_2 ニ就テ満足サレルナラバ

$$(f_1+f_2)p_r - p_r(f_1+f_2) = i\hbar f_1' + i\hbar f_2'$$

$$f_1 f_2 p_r - p_r f_1 f_2 = f_1\{f_2 p_r - p_r f_2\} + \{f_1 p_r - p_r f_1\} f_2 = i\hbar\{f_1 f_2' + f_1' f_2\}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r}(f_1 f_2)$$

故ナルヲ以テ (13) ハ f_1+f_2, $f_1 f_2$ ニ就テモ満足サレル。然ルニ $f = q_r$ ノ場合ハ (13) ハ勿論満足サレル故、induction ニヨリ q_r ノ power series デアラハサレル任意函数ニ就テ満足サレル。

~~p's~~ q's ノ simul eigenstate $\psi(q')$ ヲ fundamental ~~従ッテソレデ 任意ノ state ψ ヲ 其 state~~ state トスル場合ノ p's ノ representation ハドウナルカニツイテ。先ヅ任意ノ state ψ ヲ $\psi(q')$ ニ就テ expand シ

$$\psi = \int \psi(q')\,dq'\,(q'|)$$

トナツテヰル。q's ノ eigenvalue ハ $(-\infty, +\infty)$ ノ凡テノ値デアル

$$= \int \psi(q')\, dq' \frac{\partial (q'|)}{\partial q_r'}$$

ナニハ ψ ヲ　~~$\psi' = \int \frac{\partial \psi(q')}{\partial q_r'} dq' \frac{\partial (q'|)}{\partial q_r'} (q'|)$~~

ニカヽル所ノ operator ハ 結果ガ不定デアル。

∵ 位相ノ ψ^* ニ對シ　~~$\psi(q')$ ノ normierung ヲヨクシテモ~~

~~適當ニカヘルカラ~~　~~$e^{iF(q')}\psi(q')$ トナル~~

~~$\psi' = \frac{\partial e^{iF(q')}\psi(q')}{\partial q_r'} dq' \{ e^{-iF(q')} (q'|) \}$~~

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_r'} = \frac{\partial \int \psi(q') dq' (q'|)}{\partial q_r'} = \int \frac{\partial \psi(q')}{\partial q_r'} dq' (q'|) + \int \psi(q') dq' \frac{\partial (q'|)}{\partial q_r'}$$

$= 0$

カラ integration ハ $q_1', q_2', \cdots q_n'$ ニツイテ行ハレル一ツ, 其ノ間ニトッタモノ。

コノ ψ ヲ ~~〔判読不能〕~~ ト

$$\psi' = \int \frac{\partial \psi(q')}{\partial q_r'} dq' \,(q'|) \quad \cancel{\int \psi(q')\, dq' \frac{\partial (q'|)}{\partial q_r'}}$$

コレカラ解ル様ナ operation ハ ~~一ツノ observable ト~~ linear operator デアルカラ、一ツノ observable ト見ルコトガ出来ル。之ヲ π_r トスルト

$$\pi_r \psi = \pi_r \int \psi(q')\, dq' \,(q'|)$$

$$= \int \psi(q')\, dq' \frac{\partial (q'|)}{\partial q_r'}$$

~~従ッテ π_r ノ $\psi(q')$ ニ対スル representation ハ~~

故ニ

$$\pi_r \psi(q'') = \cancel{\pi_r \int \psi(q')\, dq'\, \delta(q'-q'')} \frac{\partial \psi}{\partial q_r''}$$

$$= -\int \psi(q')\, dq'\, \delta(q_1'-q_1'')\,\delta(q_2'-q_2'') \cdots \delta(q_{r-1}'-q_{r-1}'')$$

$$\times \delta'(q_r'-q_r'')\,\delta(q_{r+1}'-q_{r+1}'') \cdots \delta(q_n'-q_n'')$$

$$= \int \psi(q')\, dq' \,(q'|\pi_r|q'')$$

お

$$\therefore \; (q'|\pi_r|q'') = -\delta(q_1'-q_1'')\,\delta(q_2'-q_2'') \cdots \delta(q_{r-1}'-q_{r-1}'')\,\delta'(q_r'-q_r'')\,\delta(q_{r+1}'-q_{r+1}'') \cdots \delta(q_n'-q_n'') \qquad (15)$$

任意ノ state ψ ノ observable q_r ニ就テノ微分ヲ

† ソレデ

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_r} = \int \frac{\partial\psi(q)}{\partial q'_r}\, dq'(q'/)$$

ト書クト π_r ヲ define スレバ

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_r} = \pi_r\psi \qquad (16)$$

之ト並ンデ共軛ニ

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_r} = -\phi\,\pi_r \qquad (17)$$

ガ得ラレル。

$$\frac{\partial F(q)}{\partial q_r}\psi = i\int \frac{\partial F(q')}{\partial q'_r}\psi(q')\, dq'(q'/)$$

† 次ニ

$$\int \frac{\partial^2\psi(q')}{\partial q'_r\,\partial q'_s}$$

トナル。

故ニ ~~Ann~~ observable $\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ハ unique デナイコトニナル。

何故 $\psi(q')$ ノ代リニ $e^{iF(q')}\psi(q')$ ヲトレバ

$F(q')$: q's ノ任意函数.

$$\frac{\partial \psi(q')}{\partial q'_r} \to \frac{\partial \psi(q')}{\partial q'_r} e^{\cdots} + iF(q')\frac{\partial F(q')}{\partial q'_r}\psi(q')e^{\cdots}$$

トナル。 $\psi(q') \to e^{-iF(q')}\psi(q')$ トスレバ

故ニ

$$\frac{\partial \psi^{*}}{\partial q_r} \to \frac{\partial \psi^{*}}{\partial q_r} + i\int \frac{\partial F(q')}{\partial q'_r}\psi(q')dq'(q'/)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial q_r} + i\frac{\partial F(q)}{\partial q_r}\psi$$

何故 fundamental ψ ノ (何故 q's ノ simul. eigen-ψ) phase ノ indefiniteness ニ依ッテ $\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ノ indefiniteness ガ起ルノデアル。 ~~q's ノ eigen simult. eigen ψ ヲ知ッテモ之ヲ定メ~~ ~~fundamental ψ ヲ~~

~~故ニ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_r \partial q_s} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_r}$~~

$\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ノ $\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ハ unique ニナル。 ~~故ニ $\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ガ一ツノ operator,~~ ~~q's ヲ diagonal matrix トスル repres. ハ~~

之ヲ π_r トカケバ, q's ヲ diagonal matrix トスル $\frac{\partial \psi}{\partial q_r}$ ニ対スル一ツノ operator ヲ

$$t\;i\int \delta''(q_1'-q_1'')\,\delta(q_2'-q_2'')\cdots\delta(q_{r-1}'-q_{r-1}'')\,\delta'(q_r'-q_r'')\,\delta(q_{r+1}'-q_{r+1}'')$$

$$\cdots\delta(q_n'-q_n'')\,\cancel{dq''\,q_r''(q''/)}\;q_r'(q''/)$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial q_r''}\{q_r''(q''/)\}} = -\frac{\partial}{\partial q_s''}\,q_r'(q''/)\;\cancel{dq''}\,q = -q_r'\,\frac{\partial(q'/)}{\partial q_s} \mp d_{rs}(q'/)$$

$$+\;\cancel{\int (q''/)\,dq_r'\;\delta(q_1'-q_1'')\,\delta\cdots dq''(q''/)}$$

之ハ representation ハ (15) デ与ヘラレル。

~~あれ~~ソレデ之ノ π_r ノ性質ヲ見ルニ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_r\partial q_s} = \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\partial q_r} = \int \frac{\partial^2\psi(q')}{\partial q'_s\partial q'_r}\, dq'(q'/)$$

~~[illegible]~~ or $\quad \pi_r\pi_s\,\psi = \pi_s\pi_r\,\psi \qquad$ for any ψ

$$\therefore\quad \pi_r\pi_s - \pi_s\pi_r = 0$$

又 $\quad \frac{\partial}{\partial q_s}(q_r\psi) = q_r\frac{\partial\psi}{\partial q_s} + \delta_{rs}\psi$

$$\cancel{= \int \frac{\partial}{\partial q'_s}\{q'_r\psi(q')\}\ \ \frac{\partial}{\partial q_s}\int q'_r\psi(q')\,dq(q'/)}$$

$$\cancel{= \int \frac{\partial\psi(q')}{\partial q_s}\,dq'\ q'_r(q'/)}$$

$$\cancel{= \frac{\partial\psi(q')}{\partial q_s}\,d}$$

故ニ $\quad \pi_s\, q_r\psi = q_r\pi_s\,\psi \mp \delta_{rs}\psi \qquad$ for any ψ

$$q_r\pi_s - \pi_s q_r = \pm\delta_{rs}$$

f ヲ q's ノ任意ノ differentiable function トスレバ

$$\frac{\partial}{\partial q_s}(f\psi) = f\frac{\partial\psi}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial q_s}\psi$$

or $\quad \cancel{[illegible]} -\pi_s f\psi = -f\pi_s\,\psi + \frac{\partial f}{\partial q_s}\psi$

or $\quad \cancel{[illegible]}\ f\pi_s - \pi_s f = \frac{\partial f}{\partial q_s}$

於 integration は $q_1', q_2', \cdots q_n'$ について夫々 $(-\infty, \infty)$ の間にとるとし

この ψ を

$$\psi' = \int \psi(q')\, dq' \frac{\partial(q'/)}{\partial q_r'}$$

にかへる様な operator は linear operator であるから一つの observable と見ることが出来る。

之を π_r とかくと

$$\pi_r \psi = \int \psi(q')\, dq' \frac{\partial(q'/)}{\partial q_r'} \qquad (15)$$

或は $$\pi_r \psi(q'') = \int \psi(q')\, dq' \frac{\partial}{\partial q_r'} \delta(q'-q'')$$

$$\therefore (q'|\pi_r|q'') = \delta(q_1'-q_1'')\cdots\delta(q_{r-1}'-q_{r-1}'')\,\delta'(q_r'-q_r'') \times \delta(q_{r+1}'-q_{r+1}'')\cdots\delta(q_n'-q_n'') \qquad (16)$$

但これは observable は unique でない。

∵ $\psi(q')$ の代りに $e^{iF(q')}\psi(q')$ をとれば

$(q'/)$ は $e^{-iF(q')}(q'/)$ となるから

$\int \psi(q')\, dq' \frac{\partial(q'/)}{\partial q_r'}$ は $\int \psi(q')\, dq' \left\{ \frac{\partial(q'/)}{\partial q_r'} - i \frac{\partial F(q')}{\partial q_r'} (q'/) \right\}$

$\phi \pi'_r =$

$$\phi(q') \pi'_r = \int \frac{\partial}{\partial q''_r} \delta(q' - q'') \, dq'' \, \phi(q'')$$

$$\cancel{\phi(q}(q' | \pi'_r | q'') = - \quad \cdot\cdot \quad \delta(q'_r - q''_r) \cdot$$

$\pi_r \psi$ ハ $\left(\pi_r \cancel{\Psi} - i\frac{\partial F}{\partial q_r}\right)\psi$

即チ ~~故~~ ψ' ハ $\psi' - i\frac{\partial F}{\partial q_r}\psi$

トナル。

~~故ニ indefiniteness~~ ヲ除クニハ $q's$ ノ simultaneous eigen ψ $\psi(q')$ ヲ決メルモノヲオケバ observable π_r ハ unique ニキマリソノ representation ハ (16) デ与ヘラレル。

(16) カラシテ

$$\phi\pi_r = \cancel{\int \phi(q')\,dq'\,\frac{\partial(q'|)}{\partial q}}$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial q'_r}(/q')\,dq'\,\phi(q') \qquad (17)$$

ソコデ π_r ノ性質ヲ調ベルニ

$$\pi_r\pi_s\psi = \pi_s\pi_r\psi = \int \psi(q')\,dq'\,\frac{\partial^2(q'/)}{\partial q'_r\,\partial q'_s}$$

for any ψ

$$\therefore\ \pi_r\pi_s - \pi_s\pi_r = 0 \qquad (18)$$

$$\pi_s(q_r\psi) = \int \psi(q')\,dq'\,\frac{\partial\, q'_r(q'/)}{\partial q'_s}$$

$$= \int q'_r\, \psi(q')\,dq'\,\frac{\partial(q'/)}{\partial q'_s} + \delta_{rs}\int \psi(q')\,dq'\,(q'/)$$

$$= q_r \pi_s \psi + \delta_{rs} \psi$$

$$\therefore \quad q_r \pi_s - \pi_s q_r = -\delta_{rs} \qquad (19)$$

尚一般ニ f ガ q_s ノ任意ノ differentiable 函数ナル時

$$\pi_s f \psi = f \pi_s \psi + \frac{\partial f}{\partial q_s} \cdot \psi$$

$$\text{or} \quad f \pi_s - \pi_s f = -\frac{\partial f}{\partial q_s} \qquad (20)$$

~~之ノ意味ハ p_s ニ可換ナルモノト同ジ、~~

~~∴ $-i\hbar\pi_s$~~ (18)(19) ニ於テ $-i\hbar\pi_s$ ハ p_s ト同ジ commutability ノ condition ヲ満足シテ居ル。

~~π_s ナル observable ハ上ニノベタ様ナ indefinite ナモノデアルガ 何レニシテモ (19)(20) ノ関係ヲ満足シテ居ル。~~

ソコデ $p_s + i\hbar\pi_s$ ナル observable ノ set ヲ考ヘテ見ルト 之ハ ~~凡テノ~~ q's ノ凡テト commute スル故 q's 丈ノ函数デアル。

~~故ニ~~ ソコデ ~~p_s~~ $p_s + i\hbar\pi_s = f_s(q)$

トオクト

$$p_r p_s - p_s p_r = (-i\hbar\pi_r + f_r)(-i\hbar\pi_s + f_s) - (-i\hbar\pi_s + f_s)(-i\hbar\pi_r + f_r)$$

$$= -i\hbar\left[\pi_r f_s + f_r \pi_s - \pi_s f_r - f_s \pi_r\right] = 0$$

or $\pi_s f_r - f_r \pi_s = \pi_r f_s - f_r \pi_r$

(20)ニヨリ $\dfrac{\partial f_r}{\partial q_s} = \dfrac{\partial f_s}{\partial q_r}$

従ツテ $f_r = \dfrac{\partial G}{\partial q_r}$ ナル形ヲトルコトガ出来ル。

∴ $p_s + i\hbar\pi_s = \dfrac{\partial G}{\partial q_s}$ ナル形トナル。

所ガ前ニモ述ベタ様ニ ~~simultaneous eigen f. ψ(q')~~ ~~ノトリ方ニツイテ~~ ~~π_r ガ~~ simultaneous eigen f. $\psi(q')$ ノトリ方ニ indefiniteness ガアルカラ ~~π_s ト $\pi_s - i\dfrac{\partial F}{\partial q_s}$ 等 トハ equivalent デアル。~~ π_s ト $\pi_s - \dfrac{1}{i\hbar}\dfrac{\partial G}{\partial q_s}$ トハ equivalent デアル。~~コノ新シイ~~ $\pi_s - \dfrac{1}{i\hbar}\dfrac{\partial G}{\partial q_s}$ ヲ新シイ π_s トスレバ

$$p_s = -i\hbar\pi_s \tag{21}$$

トナル。

コレハ quantum condition (9') カラ出テクル ~~ノ~~ 一ツノ結論デアル ~~expression ト見ルコトガ出来ル~~。コレハ Schrödinger ニヨツテ發見セラレタ。

6月20日

42

ソコデ $f(q_s, p_r)$ ヲ q's, p's ノ power series デアラハサレル様ナ任意ノ函数トスレバ、之ハ $f(q_s, i\hbar\pi_r)$ ト equivalent デアル ~~ト~~ up 事デ、之ヲ ψ-symbol ニ operate スレバ

$$f(q_s, -i\hbar\pi_r)\psi$$

$$= f(q_s, \cancel{i\hbar\pi_r})\int \psi(q')\,dq'(q'/)$$

$$= \int \psi(q')\,dq'\, f\left(q'_s, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(q'/)$$

然ルニ ~~従ッテ~~ $f(q_s, -i\hbar\pi_r)$ ノ eigenvalue f' ニ属スル eigenstate $\psi_{f'}$ ~~ニ対シテハ~~ ニ対シテハ

$$f(q_s, -i\hbar\pi_r)\psi_{f'} = f'\psi_{f'}$$

$$= \int \psi(q')\,dq'\, f'(q'/f')$$

~~故ニ~~

$$= \int \psi(q')\,dq'\, f(\quad)(q'/f')$$

ナルカラ、

$$f\left(q'_s, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(q'/f') = f'(q'/f') \qquad (22)$$

~~然ルニ~~ 之ハ p, q ノ任意ノ函数 $f(q_s, p_r)$ ノ eigenvalue ~~及ビ eigenstate~~ ヲ求メル differential equation デアッテ

特ニ f ヲ Hamilton 函数 H ニトレバ (22) ハ system energy value E ヲ求メル diff eq

$$H\left(q'_s, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(q'/E) = E(q'/E) \qquad (23)$$

~~一般~~ Potential $V(x,y,z)$ ナル Field ニ於ケル mass m ナル particle ノ motion ニ對スル Schrödinger ノ eq. ハ ~~Hamiltonian~~ ~~ハ~~ 式 (12) ニナル.

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + V(x\ y\ z) \quad (12)$$

ソレ故, ~~(~~(23) ニ於テ q_r ~~即~~ ニ x, y, z, ~~p_r~~ ニ $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_r}$ ニ

トシ, ~~(23)~~ $(q'/E) = f_E(x\ y\ z)$ トオケバ

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x\ y\ z)\right\} f_E(x,y,z) = E\, f_E(x,y,z) \quad (24)$$

~~或ハ~~ 簡單ニ書ケバ

$$\text{or} \quad \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right\} f_E = E f_E$$

トナル。

之ハ Schrödinger ノ differential equation デアル。†

$f(q_s, p_r)$ ヲ ϕ-symbol ニ operate スル

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ 場合ニハ、f ノ中ノ factor ノ順序ヲカヘタモノヲ $\tilde{f}$
(q_s, p_r ノ power series デアラハサレテ居ル場合ノ)

ト名ヅケレバ

$$\phi\, f(q_s, -i\hbar\pi_r)$$

$$= \int \tilde{f}\left(q'_s, +i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(\;/q')\,dq'\,\phi(q')$$

従ッテ f' ヲ eigenvalue トスル diff eq ハ 又

$$\tilde{f}\left(q'_s, i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(f'/q') = f'(f'/q')$$

トナルコトガ出来ル。 f ガ real observable ナラバ f' ハ real デアルカラ

トスレバ (f'/q') ト (q'/f') トハ conjugate complex デアル 故ニ $\tilde{f}\left(q'_s, i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)$ ト $f\left(q'_s, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)$ トハ conjugate complex ナ differential operator デナケレバナラヌ。

今迄述~~来タ~~ヲ持ツ ~~representation~~ diagonal observables ヲ定メルダケデハ representation ニ indeterminancy ガ残ッテヰル。

所謂 q's ヲ diagonal ~~observab~~ ニスル様ナ色々ノ representation ~~ニ於テハ~~ヲ考ヘテ見ルニ、ソレ等ハ夫々異ナル phase ヲ持ッテヰル。従ッテ q's ニ conjugate ナ observable p's ニ対スル representation モ夫々 phase ヲ異ニシテヰル。コノ中カラ p's ノ representation ガ簡単ナ形 $-i\hbar\,\partial/\partial q_r'$ 即チ $\delta(q_1'-q_1'')\cdots\delta'(q_r'-q_r'')\cdots\delta(q_u'-q_u'')$ 換言スレバ (21) ヲ満足セシメル様ナモノデアラハサレルモノヲ選ビ出スナラバ、phase ノ indeterminacy ハ殆ド無クナル。唯 $e^{i\gamma}$ (γ : independent of q) ナル trivial ナ factor ~~丈ケ残~~ ノ arbitrariness ~~ガ~~ノ残ルノミトナルコトガワカル。

~~然ルニコノ representation ニ於テハ~~

最後ニ ~~p's ノ eigenstate ψ(p') ト~~ q's ヲ diagonal ニシ、~~(21)ヲ満足スル様ナ~~ r. ~~p_r ヲ (21)デ~~ ~~アラハス~~ $-i\hbar\,\partial/\partial q_r'$ ヲ以テアラハス様ナ representation ニ於テ p's ノ eigenstate $\psi(p')$ ノ representation

此の transformation function ~~p~~ (q'/p') ノ
満足スベキ式ハ

$$p_r \psi(p') = -i\hbar \pi_r \psi(p')$$

カラシテ

$$p_r' \int \psi(q')(q'/p')dq' = -i\hbar \int \psi(q') \frac{\partial (q'/p')}{\partial q_r'} dq'$$

而シテ $\psi(q')$ ノ任意ナルコトカラ

$$p_r'(q'/p') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r'}(q'/p') \quad r=1,2,\ldots n.$$

トナル。

ソコデ $\quad (q'/p') = (q_1'/p_1')(q_2'/p_2')\cdots(q_n'/p_n')$

トオケバ

$$p_r'(q_r'/p_r') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r'}(q_r'/p_r')$$

$$\therefore (q_r'/p_r') = c\, e^{iq_r'p_r'/\hbar}$$

従ッテ $\quad (p_r'/q_r') = \bar{c}\, e^{-iq_r'p_r'/\hbar}$

c ハ p_r' ノミノ function デアル。

而シテ orthogonality ト normalization ノ條件カラシテ

$$\bar{c}c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_r'(p_r'-p_r'')/\hbar} dq' = \delta(p_r'-p_r'')$$

ニ於テ p' ガ representation ~~simult.~~ eigen ノ fundamental ~~state~~ ψ

ト $\psi(p')$ ヲ $e^{+i\gamma'}\psi(p')$ デアル様ナ representation

ニハ ~~arbitrary~~ $e^{i\gamma}(q'/p')$ ガアル。従ッテ

phase ノ ~~arbit~~ ~~function~~ factor ハナイ，

$c = h^{-\frac{1}{2}}$ トナリ

or $\bar{c}c \dfrac{i\hbar}{p_r'-p_r''}\left[e^{-iq_r'(p_r'-p_r'')/\hbar}\right]_{q_r'=-\infty}^{q_r'=\infty} = \delta(p_r'-p_r'')$

or $\bar{c}c \dfrac{2\hbar}{p_r'-p_r''} \sin q_r'(p_r'-p_r'')/\hbar \Big|_{q_r'=\infty} = \delta(p_r'-p_r'')$

両辺ヲ p_r'' ニツイテ $\int$ スルト

$$\bar{c}c \cdot 2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin q_r'(p_r'-p_r'')/\hbar}{p_r'-p_r''}\, dp_r'' \Big|_{q_r'=\infty} = 1$$

$$\bar{c}c\, 2\hbar [\pi]_{q_r'=\infty} = 1.$$

$$\therefore \quad \bar{c}c = \frac{1}{2\hbar\pi} = \frac{1}{h}$$

故 $c = h^{-\frac{1}{2}} e^{iF(p_r')}$

~~但シ F(p) ハ p_r' ノミノ real function~~
~~故ニ p-representation ニ於イテハ arbitrary~~
~~phase ヲ適當ニトレバ γ' ヲ const ニスルコトガ~~
~~出来ル。普通ハ trivial ナ constant ノ phase ヲトラナイ~~

$$\therefore \quad (q_r'/p_r') = h^{-\frac{1}{2}} e^{iq_r'p_r'/\hbar}$$

トナル。

続ク ~~transformation function ノ~~

~~$(q'/p') = (q_r'/p_r')$~~

元来 $q_r p_r - p_r q_r = i\hbar$ or $p_r(-q_r) - (-q_r)p_r = i\hbar$ カラ明カナ如ク q_r ノ can. conjugate ガ p_r ナルト p_r ノ can. conj. ハ $-q_r$ デアルガ

第1 ノ ~~=~~ transformation ヲ考ヘル ~~場合~~

~~第2ノ場合ニハ~~

$$q_r' \cancel{\frac{q_r'}{p_r'}} \left(p_r'/q_r'\right) = q_r' h^{-\frac{1}{2}} e^{-iq_r'p_r'/\hbar}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial p_r'} \left(p_r'/q_r'\right)$$

続ク

$$\cancel{q_r \psi(p')} = \int q_r' \psi(q')(q'/p')$$

$$\cancel{= \int \psi}$$

$$(p'|q_r|p'') = \int (p_r'/q_r')\, q_r'\, dq_r' (q_r'/p_r'')$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial p_r'} \int (p_r'/q_r')\, dq_r' (q_r'/p_r'')$$

$$= i\hbar\, \delta(p_1'-p_1'') \cdots \delta'(p_r'-p_r'') \cdots \delta(p_n'-p_n'')$$

即チ ~~2ノ場合ニ~~ q_r ノ p-representation ハ $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_r'}$ トナル。~~故ニ p ノ or p-representation ノ arbitrary phase ヲトルコトニナル~~

~~ナル。~~

transformation function (q'/p') ハ

続ク ~~一般ノ ψ-symbol ニ於テ p-representatio~~

Transformation function ~~ノ(p'/q')~~ ハ (q'/p')

~~$(p'/q') = (p_1'/q_1') \cdots (p_n'/q_n')$~~

$$(q'/p') = (q_1'/p_1') \cdots (q_n'/p_n')$$

$$= h^{-n/2} e^{i(p_1 q_1' + \cdots + p_n q_n')/\hbar}$$

從ッテ 任意ノ ~~state~~ state ψ ノ q-representation ト q-rep トノ間ノ關係ハ

$$(p'|) = h^{-\frac{n}{2}} \int e^{-i(p_1 q_1' + \cdots + p_n q_n')} dq' (q'|)$$

及ビ

$$(q'|) = h^{-\frac{n}{2}} \int e^{i(\cdots)} dp' (p'|)$$

デ與ヘラレル。

ソコデ canonical ~~conjugate~~ observables ノ二組ヲ持ツテ來テ 一般ニ transformation function ガ

[illegible] $(q_r'/p_r') = c\, e^{i q_r' p_r'/\hbar}$

トナツタトスル デアルナラバ此ノ時ニハ p_r, q_r ハ互ニ canonical conjugate デアルト言ヘル。

然シ orthogonality ト normalization ノ條件

$$\int (q_r'/p_r')\, dp_r' (p_r'/q_r'') = \delta(q_r' - q_r'')$$

及ビ

$$\int (p_r'/q_r')\, dq_r' (q_r'/p_r'') = \delta(\cancel{q_r' - q_r''}\ p_r' - p_r'')$$

Jordan 44 s.1 参照

カヽル條件ヲ満足スル canonical observable ノ pair トシテ角変数 J, w ~~ヲ~~ ヲトル。

$J' = n'h$　　　n' : 0 or pos. int

w' ノ eigenvalue ハ conti. (w_1, w_2) ノ範囲デアル

$$\cancel{\left(J'/w'\right)} = \left(w'/J'\right) = C e^{-in'w'}$$

orth. ~~norm~~ 條件ハ ~~規格化~~ 規格化

$$c\bar{c}\int_{w_1}^{w_2} e^{i(n'-n'')w'}\,dw' = \delta_{n'n''}$$

$$c\bar{c}\,\frac{e^{i(n'-n'')w_2} - e^{i(n'-n'')w_1}}{i(n'-n'')} = 0 \quad \text{for } n' \neq n''$$

$$c\bar{c}\,(w_2 - w_1) = 1 \quad \text{for } n' = n''$$

$\cancel{c\bar{c} =}$ ∴ $w_2 - w_1 = 2m\pi$　$c\bar{c} = \dfrac{1}{2m\pi}$　m : int.

所デ完全性ノ條件ハ

$$c\bar{c}\sum_{n'=0}^{\infty} e^{i(w''-w')n'} = \delta(w'-w'')$$

左辺ハ $w''=w'$ ノ外ニモ $w''=w'+2n\pi$ ノ所デモ∞トナル。コレハ右辺ト一致セヌ。∴ w ノ eigenvalue ノ範囲ヲ初メカラ $0 \leq w' < 2\pi$ トトラネバナラヌ。從ッテ $c\bar{c} = \frac{1}{2\pi}$

所デ Fourier Series ノ理論ニヨルト

ヲ満足セネバナラヌ。勿論

~~ヲ満足セネバナラヌ。~~ハ p_r, q_r ノ eigenvalue ガ discrete ナル場合 integral ハ sum ニ δ-function ハ δ-symbol ニカヘラレネバナラヌ。

カヽル條件ヲ満足スル canonical ~~conjugate~~ observables ~~トシテハ例ヘバ[illegible]~~ ト正負整数ノ q ノ eigenvalue

$\cancel{q = A = \frac{1}{2}(p+iq)(p-iq)}$ $q' = n'h$ n': any integer

~~ヲトレバソノ eigenvalue ハ 0, h, 2h, etc~~ トナル

~~例ヘバ $q' = n'h$~~

之ニ對スル canonical conjugate ナル p ノ eigenvalue ハ

$$(q'/p') = c e^{in'p'}$$

デ上ノ條件ノ

$$\cancel{c\bar{c}\sum_n e^{in(p'-p'')} = \delta(p'-p'')}$$

第二ノ方ハ

$$c\bar{c}\int_a^b e^{i(n'-n'')p'}dp' \;\cancel{= \delta(q'-q'') = h\,\delta(n'-n'')}$$
$$= \delta_{n'n''}$$

~~時ニヨルトナルカラ~~, p' ノ範囲トシテ.

故ニ

$$c\bar{c}\,\frac{e^{i(n'-n'')b} - e^{i(n'-n'')a}}{n'-n''} = 0 \quad \text{for } n' \neq n''$$

$$c\bar{c}\,(b-a) = 1 \quad \text{for } n' = n''$$

∴ ~~$a=0,\ b=2\pi$~~ $c\bar{c} = \dfrac{1}{2m\pi}$ ニナレバヨロシ。

$b - a = 2m\pi$ m: integer

$$\dagger\quad f(p'') = \sum_{n'=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p')e^{-ip'n'}dp'\right\}e^{ip''n'}$$

上ノ所ニ
$n'-n''$ ガ m' ノ役割ヲ果シテ居ル。

m'

$$\dagger\dagger\quad f(\omega'') = \sum_{n'=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega')e^{-i\omega'n'}d\omega'\right)e^{i\omega''n'}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n'=0}^{\infty} e^{i(\omega''-\omega')n'} = \delta(\omega'-\omega'')$$

ハ $f(\omega')$ ヲ ~~f(ω) ナル function~~ ノ Fourier series ニ展開シタ時
$e^{i\omega'n'}$ $(n'\geq 0)$ ノ係数ダケガ0デナイ様ナ ~~函数~~ 函数
~~δ-function~~ ニ制限シタ時 ~~ノミ~~ 云ヘルノデ $f(\omega')$ ガ
$e^{i\omega'x}$ ノ power series ニ展開出来ル時ニ制限シタ時ノミ
成立ツノデアル $\dagger\dagger\dagger$

此時 p' ノ eigenvalue ハ $(a, a+2m\pi)$ ノ間ノ値ヲトリうる。

~~此時 p ノ eigenvalue ハ $(0, 2\pi)$ ノ間ノ値デアル。~~

トスレバ 後ノ方ノ條件ハ

$$c\bar{c}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{i(p''-p')n'} = \delta(p'-p'')$$

左辺ノ方ハ $p''=p'$ ノ所ノミナラズ $p''=p'+2m\pi$ ノ時 (m: any integer) ノ所デモ ∞ トナル。之レガ右辺ト一致スルタメ p ノ eigenvalue ノ範囲ハ 例ヘバ $0 \leq p' < 2\pi$ トトル必要ガアル。

之レデ $\frac{1}{2\pi}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{i(p''-p')n'} = \delta(p'-p'')$

トナル。

第二ノ例トシテ q ノ eigenvalue ヲ $0, 1, 2, \ldots n-1$ ($\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots (n-1)\varepsilon$)
p ノ eigenvalue ヲ $0, \frac{2\pi}{n}, 2\pi\left(\frac{2}{n}\right) \ldots 2\pi\frac{n-1}{n}$

~~トスレバ~~

~~$(q'/p') = ce^{in'p'}$~~ 但シ $n'=0, 1, \ldots n-1$

~~$c\bar{c}\sum_{p'} e^{i(n'-n'')p'}$~~

$$(q'/p') = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i\frac{n'}{m'}} \qquad n', m' = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

トスレバ orth. nor. ノ條件ハ 満足サレル

即チ $$\frac{1}{n}\sum_{m'=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{(n'-n'')m'}{n}} = \delta_{n'n''}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{n'=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{n'(m''-m')}{n}} = \delta_{m'm''}$$

卅かれ

$\psi(q')$ -

即ち q' の平均値の近傍で測って見ると一般に生じる
分布をなして居る.

~~即ち q の値が $q-\bar{q}$ の平均値からの偏差の平均値~~
~~の自乗平均~~ $(\Delta q)^2 = \int (\;/q')(\cancel{q'-\bar{q}})^2\, q'^2 (q'/\;)\, dq'$

$= \int (\;/q')(q'^2 - 2q'\bar{q} + \bar{q}^2)(q'/\;)\, dq'$ となる.

$= \int (\;/q')\, q'^2 (q'/\;)\, dq' - 2\bar{q} \int (\;/q')(q'/\;)\, dq'$

$+ \bar{q}^2 = \int (\;/q')\, q'^2 (q'/\;)\, dq' - \bar{q}^2$

~~conj~~

~~canonical observables~~ ハ二ツノ observables ガ互ニ canonical conjugate デアルトイフコトカラ
次ノ様ナ簡単ナ ~~簡単ナ~~ 物理的ナ意味ヲモッテヰル。

一方 p

即チ canonical variables ノ ~~pair~~ ノ一方 ~~ノ値~~ ガ

p　p, q

アル定マッタ値ヲトルトキ p, q ツガフテヰル時他ノ

方ガ ~~色々ナ~~ eigenvalue ヲトル probability ハ

q ノ ~~ソノ~~ 値 q′

$$(q'/p')(p'/q') = \text{const} \quad \text{independ of } p', q'$$

~~ヲ表ハシテヰル~~。云ヒカヘレバ、q ガドノ値ヲトル事モ

p ガ或ル定マッタ値ヲトル時

equally probable デアル。逆ニ q ガ定マッタ値

ヲトルトキニハ、p ガドンナ値ヲトル prob ハ

等シイ。~~即チドンナ値ヲトルカ全クワカラナイ~~。

最後ニ任意ノ canonical conjugate observables ~~pair~~

ニ就テ Heisenberg ノ unbestimmtheitsrelation

今任意ノ state ψ ~~ヲ取ル~~ ノ q-representation ヲ　ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。

$(q'|)$ トスレバ、此ノ state ニ於テ q_r ノ値ヲ測ルトキ

ノ平均ノ ~~誤差~~ ハ値ハ (~~...~~) $\int (|q')q'_r(q'|)$ デ

$q_r^* =$

平均ノ誤差 Δq_r ノ二乗ハ

$$(\Delta q)^2 = \int (|q')(q'_r - q_r^*)^2 (q'|)\, dq'$$ デ

又、所デ q_r^* ヲ coord ニ ... q_r ヲ ~~coordinate transf~~ ヲ $q_r - q_r^*$ displace シテ

~~然ルニ~~ 此ノ state ニ就テ p_r ノ値ヲ測ルトキノ

平均値及ビ平均誤差ノ二乗ハ

$$\cancel{(\;/p'/) = \int (p'/q')(q'/)\,dq'}$$

$$\therefore \cancel{(\Delta p)^2 = \iiint (q'/p')\,dq'\,(/q')(p'-\bar{p})^2 (q''/)\,dq''\,(p'/q'')\,dp'}$$

$$= \cancel{(p'-\bar{p})^2 (q'/) = \frac{\partial^2}{\partial q'^2}(q'/) =}$$

$$(p'/q') = e^{-iq'(p'-\bar{p})}$$

$$(p'-\bar{p})(p'/q') =$$

此系に於て

$$\bar{p} = \int (/q')\, p'\, (p'/)\, dp'$$

又 $(\Delta p)^2 = \int (/q')(p' - \bar{p})^2 (p'/)\, dp'$

$$= \cancel{\int (/p')\, p'^2 (p'/)\, dp' - \bar{p}^2}$$

となる。

~~∴ $(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 =$ 即 p に関して $p - \bar{p}$~~

~~q に関して $q - \bar{q}$ を夫々て平均値を出し~~

~~加へ合はせる 次に~~

~~$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 = \int (/q')\, q'$~~

然るに $(p'/) = \int (p'/q')(q'/)\, dq'$

故に

$$(\Delta p)^2 = \iiint (q'/p')\, dq'\, (/q')(p' - \bar{p})^2 (q''/)\, dq''\, (p'/q'')\, dp'$$

$$= \cancel{\iiint (q'/p')(/q')\left(\frac{\partial}{\partial q''} - \bar{p}\right)(q''/)(p'/q'')\, dq'\, dq''\, dp'}$$

$$= \cancel{\iint (/q')\left(\frac{\partial}{\partial q''} - \bar{p}\right)(q''/)\, dq'\, dq''\, \delta(q' - q'')}$$

$$= \cancel{\int (/q')\left(\frac{\partial}{\partial q'} - \bar{p}\right)^2 (q'/)\, dq'}$$

$$-\hbar^2\int (q')\frac{\partial^2}{\partial q'^2}(q'/)\,dq'$$

$$= \hbar^2\int (/q')\,\frac{\partial(/q')}{\partial q'}\,\frac{\partial(q'/)}{\partial q'}\,dq'$$

$$\left(\int f_1 g_1\, dq' + \int f_2 g_2\, dq'\right)^2 \left(\int \bar{f}_1\bar{g}_1\, dq' + \int \bar{f}_2\bar{g}_2\, dq'\right)$$

$$\leqq \left(\int f_1\bar{f}_1\, dq' + \int f_2\bar{f}_2\, dq'\right)\left(\int g_1\bar{g}_1\, dq' + \int g_2\bar{g}_2\, d\right.$$

$f_1 = \delta'(q'/)$ $\quad g_1 = \frac{\partial(q'/)}{\partial q'}$

$f_2 = \delta'(/q')$ $\quad g_2 = \frac{\partial(/q')(q'/)}{\partial q'}$

トボケト

$$\bar{p}_r = \int (/q')\, \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r'}\right) (q'/)\, dq'$$

$$(\Delta p_r)^2 = \int (/q') \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r'} - \bar{p}_r\right)^2 (q'/)\, dq'$$

p ノ平均値ヲ 0 トシテモ一般性ヲ失ハナイ

~~p [illegible] p − p̄ ヲ[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$(\Delta p_r)^2 = -\hbar^2 \int (/q') \frac{\partial^2}{\partial q_r'^2} (q'/)\, dq'$$

$$\therefore (\Delta p_r)^2 (\Delta q_r)^2 = \hbar^2 \int (/q')\, q_r'^2 (q'/)\, dq'$$

$$\cancel{\times \int (/q') \frac{\partial^2}{\partial q'^2} (q'/)\, dq}$$

$$\times \int \frac{\partial}{\partial q'}(/q') \frac{\partial}{\partial q'} (q'/)\, dq'$$

$$\geq \frac{1}{4}\hbar^2 \left| \int q_r' (q'/) \frac{\partial (/q')}{\partial q_r'} + \int q_r' (/q') \frac{\partial (q'/)}{\partial q'} \right|^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left| \int q_r' \frac{\partial}{\partial q'} \{(q'/)(/q')\}\, dq' \right|^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \int (q'/)(/q')\, dq' \right\}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\int (f\lambda+g)(\bar{f}\lambda+\bar{g})\,dq' = 0$$

~~ヲ満足スル λ ハ real デアリ得ナイ。~~

or $$\int f\bar{f}\cdot\lambda^2 + \int (f\bar{g}+\bar{f}g)\lambda + \int g\bar{g} = 0$$

ヲ満足スル λ ハ real デアリ得ナイ。

$$\therefore\ 4\int f\bar{f}\,dq' \int g\bar{g}\,dq' \geq \left\{\int (f\bar{g}+\bar{f}g)\,dq'\right\}^2$$

但シ等號ハ f ト g トガ比例スル場合デアル。

即チ $f\lambda + g = 0$. 等

$$f = q'(q'/)$$

$$g = \frac{\partial(q'/)}{\partial q'}$$

~~但シ f ト g トガ比例スル $f\lambda+g=0$ 即チ f ト g トガ~~
~~比例スル場合ニ限ル。~~

$$\lambda q'(q'/) + \frac{\partial(q'/)}{\partial q'} = 0$$

實際、$\Delta p\,\Delta q' = \frac{\hbar}{2}$ トナル場合ハ

~~or~~ $(q'/) = C e^{-\lambda q'^2/2}$

即チ ~~or~~ $(/q')(q'/) = C\bar{C} e^{-\lambda' q'^2}$　　λ' : λ ノ real part

即チ ~~座標~~ 座標 q ガ eigenvalue ヲトル probability

ガ Gauss ノ error function デアラハサレル

場合ニ q ト p ノ測定ノ Δq ノ平均誤差ノ積ガ

最小トナル。

一般ニ $\frac{\hbar}{2}$ ヨリ大サナルモ可能
ソレニハ
ソノ平均値的範囲ノ積ハ

∴ $\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$

canonical ~~variable~~ observable ノ pair ノ observation ヲ同時ニ行ツタ時
誤差ノ間ニハ前節ニ述ベタ Heisenberg ノ
Unbestimmtheitrelation ガ ~~一般ノ~~ 一般ノ
canonical variables ノ場合ニツイテ
~~証明サレタコトニナル~~。量子力学ノ立場カラ見テ殆ド
確カナコトデアルトイフコトモノデアル。

† 尚又 $\frac{\partial}{\partial q_r}$ ナル operator ヲ前ニハ ~~[illegible]~~ q_r ヲ diagonal ニスル representation ノ助ヲカリテ define シタガ、~~[illegible]~~ ニシテモット直接的ナ方法デ定義シヨウ。

Displacement of state

§ Space and Time Displacement Operators

前節 ~~ニ於テ~~ ニハ classical dynamics ノ analogy ニヨツテ、equation of motion 及ビ quantum condition ヲ出シテ来タガ、ソレ等ノモツト直接的ナ而シテモツト一般的ナ意味ヲ考察シテ見ヤウ。

今仮ニ dynamical system ガ ψ ナル state ニアレバ ~~之~~ ニ、状態ヲ空間的ニ少シク移動セシメタ状態 ~~ヲ考ヘルコトガ出来ル~~ ヲ考ヘルコトガ出来ル。例ヘバ ~~此~~ ニ、system ノ全体ノ座標ヲ (x, y, z) トスレバ
Cartesian coord

ψ ヲ ~~…~~ x 方向ニ δx 丈 displace シタ state ψ' ヲ ~~定義~~ 作ルニハ、~~time t 及ビ 其ノ時~~

system ニ働ク ~~state ψ ヲ用意シ~~ ψ ナル state ヲトル

ソレヨリ後ニ apparatus 及ビ time t

ニ於テ system ニ働キ得ル力ヲ与ヘテ x 方向ニ δx 丈 displace

~~シテ得タ state~~ スレバヨイ。従ツテ time t ニ

於テハカヽル通リニ働クト考ヘル。

カクシテ得ラレル state ψ' ト元ノ state ψ カラ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\psi' - \psi}{\delta x}$$

ナル limiting state ヲ作ツテミル。之ハ元ノ state ψ

ニ対シテ一ツノ ~~operator d_x ヲ乗ジテ得~~

operation ヲ施シテ得ラレルモノト考ヘ

21

其ノ operator ヲ d_x トナヅケル

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\psi'-\psi}{\delta x} = d_x\psi$$

之ハ所デ任意ノ ψ_1, ψ_2 ニ對シ

$$d_x(\psi_1+\psi_2) = d_x\psi_1 + d_x\psi_2$$

ガ成立スルカラ、d_x ハ linear operator デアル。又 d_x ハ任意ノ state ニ乗ジテ他ノ state ヲ作ル linear operator デアルカラ コレモ一ツノ observable ト見ナシ得ル。

以上ノ如ク定義シタ displacement operator d_x ハ unique ニハ決ラナイ。何故ナラバ ψ-symbol ハ arbitrary ナ numerical factor ヲモッテ居ルカラデアル。即チ ψ' ガ ψ ~~…~~ ト同ジモノヲ表ハスモノデモヨイ。又同ジ様ニ normalize サレテ居ルトシテモ居レバヨイトスルト

$$\phi'_\xi\psi'_\alpha = \phi_\xi\psi_\alpha$$

arbitrary factor ハ $e^{i\gamma}$ (γ ハ real) ナル形トナリ、ψ' ノカハリニ $\psi'^{*} = e^{i\gamma}\psi'$ 等ヲトレバ 新シイ displacement operator ハ

$$d_x^{*}\psi = \lim_{\delta x\to 0}\frac{e^{i\gamma}\psi'-\psi}{\delta x}$$

displacement ニヨツテ変ハラヌ為

ト假ナラバ

∴ ~~$d_x \phi = \phi \bar{d}_x$~~

今 $\phi\psi$ ナル量ハ一ツノ number デアルカラ、之ニ d_x ヲ operate スレバ0トナル 故ニ

$$d_x(\phi\psi) = \lim_{\delta x \to 0}\left\{\frac{(\phi' - \phi)\psi'}{\delta x} + \frac{\phi(\psi' - \psi)}{\delta x}\right\}$$

故ニ普通ノ微分ト同様ニ

$$= (d_x \phi)\psi + \phi(d_x \psi) = 0$$

$$\therefore \quad \phi(d_x\psi) = -(d_x\phi)\psi$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{\psi'_{x'} - \psi_{x'}}{\delta x} + \frac{e^{i\gamma} - 1}{\delta x} \psi'_{x'} \right\}$$

トナリ、$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\gamma}{\delta x}$ ガ有限ナル値ヲ a トスルト a ハ real デ

$$= d_x \psi + i a \psi$$

$$\therefore \quad d_x^* = d_x + ia \qquad (25)$$

此ノ displacement operator ~~ト任意ノ~~ ~~ノ indefiniteness ハ additive ニ任意ノ pure imaginary number ヲ加ヘタモノハ又一ツノ displacement opera ノ indefiniteness~~ ハ此ノ様ニ任意ノ pure imaginary number ガ additive constant トシテ残ツテヰル。

次ニ d_x ナル operation ハ ϕ-symbol ニ對シテモ ψ-symbol ト同様ニ operate シ得ル。此ノ $d_x\phi$ ナルモノヲ上ト同様ニ定義シ得ル。之ハ丁度 $d_x\psi$ ノ conjugate imaginary ニナツテヰル。從ツテ一方 d_x ヲ observable ト見レバ ϕd_x ナル product ヲ作ルコトガ出来ル

之ハ $\phi(d_x\psi) = (\phi d_x)\psi$ ナル関係ヲ満足シテヰル。

$\therefore (\phi d_x)\psi = -(d_x\phi)\psi$

從ツテ $-d_x\phi = \phi d_x$

トナル。

$\phi \bar{d}_x =$

~~∴ $\phi_x(d_x)$ ト $d_x\psi$ トが conjugate imaginary ニナツテ居ル。~~

即チ $d_x\psi$ ノ conj. img. ハ $\phi(-d_x)$。即チ
$$\phi\,\overline{d_x} = \phi(-d_x)$$
∴ d_x ナル ~~of~~ observable ハ pure imaginary デアル。

ソレデ゛ス d_x ナル observable ~~operator~~ ヲ x ヲ diagonal ニスル様ナ representation ~~デ~~ 表ハシテ見ルト、
$$\psi = \int \psi(x'\cdots)\,dx'\cdots(x'\cdots|)$$
~~Φ' representation~~
トスレバ、コレヲ δx 丈 displace シタ state
$$\psi' = \int \psi(x'+\delta x)\,dx'\cdots(x'\cdots|)$$
$$= \int \psi(x'\cdots)\,dx'\,(x'-\delta x\cdots|)$$
$$\therefore\quad d_x\psi = \lim_{\delta x\to 0}\int \psi(x'\cdots)\,dx'\,\frac{(x'-\delta x\cdots|)-(x'\cdots|)}{\delta x}$$
$$= -\int \psi(x'\cdots)\,dx'\,\frac{\partial(x'|)}{\partial x'}$$
$$\therefore\ (x'\cdots|d_x|x''\cdots) = -\,\delta'(x'-x'')\,\delta(\cdots) \qquad (26)$$
即チ $-d_x$ ガ、写像ノ π ト同様ナ observable デアル。

~~之ハ函数 $\psi(x'\cdots)$ ノ phase~~

従ッテ x ニ ~~対スル~~ conjugate ナ momentum p_x

トスルト

$$p_x = i\hbar d_x$$

トナルデアラウト想像サレル。

所デ ψ-symbol $x\psi$ ヲ x 方向ニ δx 丈

displace スルト $(x-\delta x)\psi'$ トナル。何故ナラ

ソレ. ~~apparatus ヲ δx 丈 displace スレバ~~ 前ニ

~~x~~ x ヲ測定スル apparatus ヲ δx 丈 displace

スレバ $x-\delta x$ ヲ測定スル apparatus ニナルカラ

デアル。

従ッテ $$d_x(x\psi) = \lim_{\delta x \to 0}\{(x-\delta x)\psi' - x\psi\}/\delta x$$

$$= x(d_x\psi) - \psi$$

$$\therefore\quad d_x x - x d_x = -1 \qquad (27)$$

同様ニシテ ~~更ニ~~ d_x ハ y, z, p_x, p_y, p_z ノ他 time t ニ

対スル x ヲフクマヌ総テノ dynamical variable

ト commute スルコトガ容易ニワカル。

∴ $p_x - i\hbar d_x$ ハ総テノ dynamical

variable ト commute スル。∴ コレハ number

デアル。而シテ ノ number ハ (25) ノ a ニ対シ arbitrary number a トナリ

故ニ之ハ 0 トスルコトト同値デアル。

$$\therefore \quad p_x = i\hbar d_x \qquad (28)$$

即チ momentum ハ多分ノ場合ニ於テハ (他ノ dynamical system ノ ~~coo~~ 座標ニ conjugate ナ) space displacement operator ノ $i\hbar$ 倍トナッテ居ル。~~之ノ (28) ハ spa d_x ノ definition カラ出テ d_x (27) ノ関係ガ常ニ出テクルカラ、(28) ハ取リモナオサズ quantum condition ノ一ツノ形デアル。~~

~~(x, y, z) ガ system 全体ノ座標ニ conjugate ナ momentum ハ即チ system ノ total momentum~~ ニ他ナラヌ。

~~故ニ~~ system ニ external force ガ働イテ居ナイ時ニハ space displacement ~~d_x~~ ナル operation ハ apparatus ノ displacement ヲ以テ define サレ従ッテ time ニ independent ナ operator デアル。故ニ system ノ全体ノ座標ニ conjugate ナ momentum ハ即チ system ノ total momentum ニ他ナラヌ。従ッテ external field force ガ存在シテ居ナイ場合ニハ system ノ ~~total~~ momentum ハ time ト共ニ変ラナイ。

次ニ (x, y, z) ト (p_x, p_y, p_z) ニ関スル quantum

condition ハ (27) 及ビ (28) カラ derive サレル。
従ッテ吾々ハ茲ニ classical dynamics ト ノ
analogy ヲ離レテ momentum ノ ~~概念~~ ニ就テ
~~sp dis~~ 本ニ上ノ如キ簡単ナ意味カラシテ
equation of motion 及ビ quantum condition
ヲ derive ~~スルコトガ出来~~ シ得ルコトヲ注意セラレ度イ。
system ガ唯一ノ particle ヨリナッテイル時ニハ
~~ヨリ (27), (28) ニヨリテ~~ 空間ノ変位ハ particle
ノ変位ニ等シイカラ、(27), (28) ニヨッテ ~~co~~ quantum
condition ガ得ラレタガ、一般ノ system ニ
於テハ空間ノ変位以外ノ coordinate ニ
~~関シテハ~~ ニ於ケル momentum ニハ上ノ如キ
直接ナ意味ヲ与ヘルコトガ出来 十分 ~~ナイカラ~~ 注意サレタシ. 上ノ様ナ
点ハ nonrelativistic ナ quantum mechanics
ニ於テハ成立シナイガ、relativistic ナ
quantum mechanics ニ於テハ momentum ヲ
space displacement ト ~~結合~~ 個々ノ particle ノ ト見ル事ヘ帰着シ、
~~基礎~~ 従ッテ ~~其ノ~~ 先ニ述ベタ 様ナ wave equation ガ
基礎トナッテ ~~ヰル~~。classical dynamics ト ~~ノ dynam~~
~~a~~ analogy ヲ離レテ理論ガ建設セラレントシテ居ル。

~~波動 equation~~ 次ニ space displacement operator ニ対応シテ time displacement operator ヲ次ノ如ク定義スル。

四任意ノ ψ-symbol ψ デアラハサレル state ヲ prepare スルニ必要ナ apparatus ヲ ~~time t ヨリ δt ダケ後~~ time δt ダケ遅レテ動カシ、time t 迄ニ system ニ働イテ居タ external force ヲ ~~δt t ヨリ~~ δt ダケ遅ラス。カクシテ得ラレタ state ヲ ψ' トスレバ、 $\lim_{\delta t\to 0}(\psi'-\psi)/\delta t$ ~~ガ存在スルトスレバ之ヲ $d_t\psi$ ト定~~ ナル limit ヲ作リ、之ヲ元ノ state ψ ニ d_t ナル operation ヲ施シテ得ラレタモノト考ヘ

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\psi'-\psi}{\delta t} = d_t\psi$$

~~トシ d_t~~ トスレバ、之ニヨッテ d_t ナル displacement operator ガ define サレル。

d_t ガ observable ナラザル d_x ノ場合ト同様ニシテ d_t ガ pure imaginary ~~operator~~ デ observable デ arbitrary ナ pure imaginary ~~number~~ additive constant ヲ除イテ、完全ニ決定サレルコトモ容易ニ証明サレル。

$$\therefore \; d_t \xi(t)\psi = L\{\xi(t+\delta t)\psi' - \xi(t)\psi\}/\delta t$$

$$= \xi(t) d_t \psi + \dot{\xi}(t)\psi$$

ソレデ

$$-i\hbar d_t = H \qquad (29)$$

デ定義サレル如キ real observable H ヲ introduceスル

$$\text{or}\quad H\psi = -i\hbar d_t \psi \quad \text{for any } \psi \qquad (30)$$

ソレデ任意ノ observable ξ. ソレカラ又ハ任意ノ dynamical variable, time ニオケル値 ξ ヲトリ. ψ-symbol ξψ ニ対シ (30)ヲ applyスレバ

$$H\xi\psi = -i\hbar d_t \xi\psi$$
$$= -i\hbar\{\xi d_t\psi + \dot{\xi}\psi\},$$

$$\text{or}\quad H\xi\psi = \xi H\psi - i\hbar\dot{\xi}\psi \quad \text{for any } \psi$$

$$\therefore\ i\hbar\dot{\xi} = \xi H - H\xi \qquad (31)$$

之ハ前ニ classical dynamics トノ analogy カラ得タ equation motion ト同ジデアル。

我々ガ使ッタノ場合ニハ Hamiltonian ガ ~~time displacement operator ニナツテ定義サレタモノデ~~ 故 canonical variables ノ函数トシテ time displace classical dynamics トノ ~~一致~~ analogy ヲ利用シテ

-ment operator ニヨツテ記述サレテヰル。

~~故ニ任意ノ dynamical system ニ於ケル equation of motion ハ、多クノ system ガ canonical variables ニヨツテ describe~~ classical dyn

classical dynamics ニ於テ analogous ナモノノ存在出来ナイ様ナ dynamical system ヤ又 canonical variable ニヨツテ describe スル事ノ出来ナイ様ナ system ニ対シテモ、更ニ equation of motion ヲ (31) ノ如キ Hamiltonian form ニカク事ガ出来ル。

従ツテ ~~一般ニ~~ quantum mechanics ニ於テハ一般ニ dynamical variables ガ任意ノ commutability relation ヲ満足シ Hamiltonian ハ任意ノ函数トシテ与ヘラレル様ナ system ヲ取扱フ事ガ出来ル。更ニ一般的ニハ Hamiltonian ガ dynamical variables ノ analytic function トシテアラハサレナイ場合ニ於テモ pq representation ニ於テ Hermitian Matrix トシテアラハサレルナラバ ソノ dynamical system トシテ取扱ハレル。

之れと同様 $\psi(q',t)$ を δt だけ time displacement を行った state は $\psi(q',t+\delta t)$ で、従って之の関係は t に於ける（之の state の）representation が $t+\delta t$ に於ける（displaced state の）representation に等しいことを示す。之は ~~q の値 eigenvalue~~

$\psi(q',t)$ の q' に色々な値を入れたものの superposition に於いて之を成立たしめる。

上ニ於ケル

最後ニ(30)ノ式ヲ次ノ様ナ representation ヲ用ヰタ時、通常ノ differential equation トシテアラハサレル。
~~即チ 任意ノ state ψ ヲアラハスニ~~ time t ニ於テハ ~~ソノ時ニ q' トイフ値~~ 即チ 互ニ commute スル dynamical variables ノ complete set, 即チ $q_1 q_2 \cdots q_n$ ヲ 簡単ニ q ト記シ、ソノ eigenvalue ヲ $q' q'' \cdots$ ト ~~シテアラハスナラバ~~ 記シ、任意ノ state ψ ヲアラハスノニ、time t ニ於テハ、ソノ時ニ ~~q' ト q ノ方~~ ガ q' トイフ値ヲモツ様ナ state $\psi(q',t)$ ヲ fundamental state ニトリ $\psi(q't)$ or

~~即チ~~ $\cancel{\psi(t)} = \int \psi(q',t)dq'(q',t/)$

ガ time t ノ凡テノ値ニツイテ成立スル様ナ representation ヲ考ヘル。

~~次ニ~~ δt 丈 time displacement ヲ行ッテ得ラレル state ψ' ニ ~~於テ~~ ψ' ニ於テ t+δt ニ於ケル representation ト
~~fundamental state トシテ ψ(q',t) ノ 代ガ~~ ψ(q',t+δt) トナッタトシテアル為ニ
~~$\psi'(t+\delta t) = \int \psi(q', t+\delta t)(q',t/)dq'$~~
ガ ψ, t ニオケル representation トナル
コトニナッテ居ル。

即チ $\psi'(t+\delta t) = \int \psi(q', t+\delta t)dq'(q', t-\delta t/)$

従って $\psi'(t) = \int \psi(q',t)(q',t-\delta t/)\,dq'$

∴ $d_t\,\psi(t) = \lim_{\delta t\to 0} \dfrac{\psi'(t)-\psi(t)}{\delta t}$

$$= -\int \psi(q',t)\,\frac{\partial(q',t/)}{\partial t}\,dq'$$

となる。

一方 $H\psi(t) = H\int \psi(q',t)(q',t/)\,dq'$

$$= \int \cancel{\psi(q',t}(q'',t|H|q',t)\,\cancel{\psi(q'}\,\psi(q'',t)\,dq''\,(q',t/)\,dq'$$

従って(30)の式は

$\cancel{\int \psi\,(-i\hbar)\,\frac{\partial}{\partial t}(q',t/)}$

$$-(-i\hbar)\int \psi(q',t)\,dq'\,\frac{\partial}{\partial t}(q',t/)$$
$$= \int \psi(q'',t)\,dq''\,(q',t|H|q'',t)\,dq'\,(q',t/)$$

両辺の $\psi(q',t)$ の係数を等しとおくと

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}(q',t/) = \int (q',t|H|q'',t)\,dq''\,(q'',t/) \qquad (32)$$

従って此の式は $i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial t}(q_1',q_2',\ldots q_n',t/) = \int(q_1'q_2'\ldots q_n'\,t|H|\ldots$ (32)'

トセル。コレ従ツテ state ψ ノ representative $(q't|)$ 又ハ詳シクカケバ $(q_1'q_2'\cdots q_n't|)$ ガ time ト共ニドウカハルカヲアラハス式デアル。

q_r ガ conjugate momentum p_r ヲモツテヰル場合ニハ H ハ ~~di~~ q ト p ノ函数トシ differential ~~$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$~~ operator トナツテヰルナラバ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(q't|) = H\left(q', t, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'}\right)(q't|) \qquad (33)$$

トセル。

コノ要件ノ partial differential equation デ Schrödinger ニヨツテ発見サレタモノデ Schrödinger ノ wave equation トナツテヰル。

コノ式ノ任意ノ solution $(q't|)$ ノ絶対値ノ二乗 $|(q't|)|^2$ ハ アル state ニ於ケル system ノ

任意ノ time ニ於テ
$q's$ ガ コレ等ノ値 q' ヲトル probability ヲ与ヘル。

(33) ノ式ハ classical ナ理論ニ於ケル wave equation ト同形ノモノデアルカラ wave equation トナヅケラレ、ソノ solution 任意ハ wave function ト呼バレル。

然ニ Hamiltonian ガ time ヲ explicit ニ含マヌ
場合ニハ wave equation (33) 即チ更ニ一般ニ
equation (32) or (32') ハ time ニ関シ
periodic ナ solution ヲモチ得ル。

即チ $(q', t|) = (q'|W')\, e^{-iW't/\hbar}$

$(q'|)$ ハ time ヲフクマヌ函数 W': number

トオケバ、$(q'|)$ 及ビ W' ガ

$$W'(q'|W') = \int (q'|H|q'')\, dq''\, (q''|W')$$

ヲ満足スレバヨイコトトナル。

or $$W'(q'|W') = H\left(q', -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'}\right)(q'|W')$$

第二ノ場合ハ (23) 式ヲ用ヒテ

之ハ即チ system ノ energy level W' 及ビ
W' ハ energy value ヲ表ハス
eigen function $(q'|W')$ ヲ与ヘル
Schrödinger ノ Differential equation デ
アル。

以上ノ如ク
Schrödinger ノ ~~di~~ wave equation ノ満足サレル
様ナ representation ヲ Schrödinger ノ representation
ト名ヅケルト、コノ representation ニ於テハ位置ノ
ヲ dynamical variable ξ ノ t ニ於ケル値 ξ_t

$$(q', t \,|\, \xi_t \,|\, q'', t) = \int \phi(q' t)\, \xi_t\, \psi(q'' t)_{dq'dq''}$$

$$= \phi(q', t)\, \psi(q'' t)\, (q'' t \,|\, \xi \,|\, q'' t)_{dq''}$$

$$(q'\; t+\delta t \,|\, \xi_{t+\delta t} \,|\, q''\; t+\delta t)$$

$$= \phi(q', t+\delta t)\, \xi_{t+\delta t}\, \psi(q'', t+\delta t)$$

~~ノ representative ガ time t ニ於テ $(q',t|\xi_t|q'',t)$~~
~~デアツタトスレバ~~、$\xi_{t+\delta t}$ ノ ~~representative ハ~~ time $t+\delta t$ ニ於ケル
~~$(q'_t, t+\delta t|\xi_{t+\delta t}|q'', t+\delta t)$~~
~~ハ、之レカラ、q', q'' ニ関シテハ同ジ函数デ~~
~~アル。即チ~~

$$(q',t|\xi_t|q'',t) \quad \text{or} \quad (q'_t|\xi_t|q''_t)$$
$$\phi(q',t)\,\xi_t\,\psi(q'',t) \;\underset{\text{or}}{=}\; \phi(q'_t)\,\xi_t\,\psi(q''_t)$$

トスレバ、$\xi_{t+\delta t}$ ノ time $t+\delta t$ ニ於ケル representation ハ $(q',t+\delta t|\xi_{t+\delta t}|q'',t+\delta t) = (q'_{t+\delta t}|\xi_{t+\delta t}|q''_{t+\delta t})$

$$\cancel{\phi(q',t} \qquad \phi(q'_{t+\delta t})\,\xi_{t+\delta t}\,\psi(q''_{t+\delta t})$$

ヲ $q'_{t+\delta t}$, $q''_{t+\delta t}$ ノ函数ト見タ場合、~~之ノ state~~ $(q'_t|\xi_t|q''_t)$ ヲ q'_t, q''_t ノ函数ト見タト全ク同ジ形ノ者。即チ $(q'_t|\xi_t|q''_t)$ ヲ $q'_t\, q''_t$ ノ函数ト見タ場合 function ノ形ハ time ト共ニ変ラナイ。~~即チ~~ Schrödinger ノ representation ~~ニ於テ~~ 従ッテ於ケル ξ_t ハ time t ニ independent デアル。

故ニ此ノ二ツノ representation ニ於テハ dynamical variable ~~[illegible]~~ ξ等ノ time t ニ於ケル値 ξ_t ノ representation ノ如キモノハ ソノ time t ニ於テノミ上ノ様ナ simple ナ形ヲトルガ, ~~其ノ time ニ於ケル或ル値ニ於ケル~~ 一ツノ observable ノ種々ノ time ニ於ケル representation ニ於テハ不適当ナモノデアル。

~~故ニ一般ニ~~ 種々ノ相異ナル time $t_1, t_2 \cdots$ ニ於ケル observables $\xi_{t_1}, \eta_{t_2} \cdots$ ガ同時ニ測ラレル場合ニ於テ representation ガ必要デアル。

ξ等ノ observable 等

Hamiltonian ガ time ヲ explicit ニ含マナイ場合ニハ, ~~之ト commute スル~~ dynamical variables ノ中ノ constant of motion ~~デアル~~ デアル如キ ~~様ナモノヲ選ビ, ソシテ~~ 之等ト commute スルモノノ complete set ヲトリ, 之等ガ diagonal ニナル様ナ representation ヲトルト, H ハ ~~α's ノ fun~~ α's ト commute シ, α's ノ function デ diagonal matrise トシテ表ハサレル。

α's

即チ $(\alpha'|H|\alpha'') = H(\alpha')\delta_{\alpha'\alpha''}$,

$= H'\delta_{\alpha'\alpha''}$.

~~斯クセラ~~ 斯カル representation ハ 當然 time ニ independent デアル。即チ ξ_t ノ representation ヲ $(\alpha'|\xi_t|\alpha'')$ ~~トセバ~~ $\xi_{t+\delta t}$ ノ representation ハ $(\alpha'|\xi_{t+\delta t}|\alpha'')$ デアル

$\frac{d\xi_t}{dt}$ ノ representation ~~ハ $\frac{d\xi_0}{dt}$~~

$$(\alpha'|\dot{\xi}_t|\alpha'') = \lim_{\delta t\to 0}\{(\alpha'|\xi_{t+\delta t}-\xi_t|\alpha'')\cancel{-(\alpha'|\xi_t|\alpha'')\}/\delta t} \}/\delta t$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\{(\alpha'|\xi_{t+\delta t}|\alpha'') - (\alpha'|\xi_t|\alpha'')\}/\delta t$$

$$\cancel{= \lim_{\delta t\to 0}} \frac{d}{dt}(\alpha'|\xi_t|\alpha'')$$

故ニ equation of motion (第 R ノ (10) 即チ $i\hbar\dot{\xi} = \xi H - H\xi$)

カラ

$$i\hbar(\alpha'|\dot{\xi}|\alpha'') = (\alpha'|\xi|\alpha'')H'' - H'(\alpha'|\xi|\alpha'')$$

従ッテ

$$i\hbar\frac{d}{dt}(\alpha'|\xi_t|\alpha'') = -(H'-H'')(\alpha'|\xi|\alpha'')$$

トナル。之ヲトケバ

$$(\alpha'|\xi|\alpha'') = (\alpha'|\xi|\alpha'')_0\, e^{i(H'-H'')t/\hbar}$$

トセバ従ッテ (α'|ξ|α'') ハ time ニ independent
トナル。 dynamical variable ヲ
現ハス従量ノ ~~Observable~~ ノ matrix element
(α'|ξ|α'') ハ time ニ関 ~~シテ~~ シテ

$$|H'-H''|/2\pi\hbar = |H'-H''|/h$$

ノ frequency ヲモッテ periodic ニ変化スル。
カヽル matrix ノ scheme ハ Heisenberg ニ
ヨッテ最初ニ考ヘラレタモノデアル。 ~~之ヲ Heisenberg~~ 故ニ representation ヲ
ノ representation トナヅケル。
之ハ従来 ~~matrix~~ 従来ノ dynamical variable ヲ
現ハス matrix ノ diagonal element (α'|ξ|α')
ハ time ト無関係デアル。 之ハ representation
ノ fundamental state ψ(α') ニ於ケル ξ ノ
平均値デアル。 従ッテ ψ(α') ニ於ケル従量ノ ~~ξ~~
dynamical variable ξ ノ平均値ガ time ト無
関係デアル。 ~~従ッテ ξ ガ従量 ξ ニ平均値ガ~~
ξ ノ従量期待ノ平均値ガ ξ ガ各々ノ値ヲトル
probability ~~ハ之ヲ決定スル~~ 、ξ ガモ又
time ト無関係デアル。 現ハ従量ノ測定結果
ノ得ル probability ガ time ニ independent デ
アル。 カヽル state ヲ stationary ト名ヅケル。

之ハ Heisenberg ノ Representation ノ Fundamental State ハ stationary state デアルトイフコトニナル。
~~Heisenberg~~ Hamiltonian H ノ任意ノ eigenstate ハ Heisenberg ノ representation ノ fundamental state ト取ルコト出来ル故、ソレハ stationary state デアル。

Heisenberg ノ Matrix Element ハ Radiation ノ Emission, Absorption ノ Intensity ト密接ナ関係ヲモツテキル、之ハ後ニ Radiation ノ理論ノ所デノベル。

最後ニ Schrödinger ノ representation ト Heisenberg ノ representation トノ関係ヲ見ルニ、両者共ニ constant of motion α's ヲ diagonal ニスル様ナ representation トスルト Schröd ノ wave eq. ハ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\alpha'|) = \sum_{\alpha''}(\alpha'|H|\alpha'')(\alpha''|)$$

$$= H'(\alpha'|)$$

従ッテ

$$(\alpha'|) = (\alpha'|)_0 e^{-iH't/\hbar}$$

ナル形トナル。 但シ $(\alpha'|)_0$ ハ time ニ independent.

トスレバ Heisenberg ノ representation ニ於ケル總テノ state ノ representation ハ time ニ dependent シナイ。故ニ ~~本~~ 二ツノ representation ニ於ケル time ニ関スル phase ノ差ハ $e^{iH't/\hbar}$ デアル。

以上ヲ. non-relativistic quantum mechanics ニ ~~全ク一般的関係ヲ~~ 於テ、任意ノ dynamical system ノ variables ノ満足スベキ一般的関係ヲ種々ノ形デ述ベタ。之レヲ要約スルト、先ヅ ~~任意~~ 一ツノ dynamical system ヲ characterize スル Hamilton 函数 H ~~ニヨツテ~~ ~~charact~~ 及 canonical variables ~~ニヨツテ~~ $p_r\ q_r$ 及 time ノ函数トシテ与ヘラレタ ~~ナラバ~~、ソレノ場合ニモ、又モツト一般ニ、H ノアル representation $(\alpha'|H|\alpha'')$ ノミガ与ヘラレタ場合ニ於テモ、~~[illegible]~~ 任意ノ dynamical variable ξ ハ equation of motion

$$i\hbar\frac{d\xi}{dt} = i\hbar\frac{\partial\xi}{\partial t} + \cancel{[\xi, H]}\ \xi H - H\xi$$

$$\text{or}\quad i\hbar(\alpha'|\frac{d\xi}{dt}|\alpha'') = i\hbar(\alpha'|\frac{\partial\xi}{\partial t}|\alpha'') + \int(\alpha'|\xi|\alpha''')d\alpha'''(\alpha'''|H|\alpha'') - \int(\alpha'|H|\alpha''')d\alpha'''(\alpha'''|\xi|\alpha'')$$

ヲ満足セネバナラヌ。 [illegible]

~~[illegible]~~

q'_r ヲ diagonal ニスル

ii) ~~ニ~~ 適當ナ representation ニ於テハ p_r ハ $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_r}$

ト equivalent デアル故、Hamiltonian 函数ノ eigenvalue

即チ energy ノ value H' ~~eigenvalue~~ E' ニ属スル eigenstate $\psi(H')(E')$

ノ representation

(q'_r/E') ハ Schrödinger ノ ~~$H(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_r}, q_r)$~~ diff. eq.

$$H\left(q_r, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q'_r}\right)(q'_r/E) = E\,(q'_r/E)$$

ヲ満足セネバナラヌ。

~~此ノ一般ニハ~~ 一ツノ variable q_r ニ對シ

$$q_r p_r - p_r q_r = i\hbar$$

ナル関係ヲ満足スル一般ノ conjugate momentum

p_r ハ 無数ニ存在スル故。

以上 nonrelativistic quantum mechanics ニ
於ケル従来ノ dynamical system ニ適用スベキ state & dynamical variables
一般的関係ヲ纏メル
前ノ方ニ述ベタ事ヲ要約スレバ.
i) System ヲ characterize スル Hamilton 函数 H ガ
canonical variables ノ函数 ~~H(p_r q_r)~~ H(q_r p_r) トシテ与ヘラレルコトニヨリ
system ノ従来ノ variable ノ満足スベキ ~~式~~ equation of motion

$$i\hbar\dot{\xi} = i\hbar\frac{\partial\xi}{\partial t} + \xi H - H\xi \qquad (6)$$

ヲ得ル. 又 canonical variables ~~ノ~~ 相互ノ関係ハ

$$\cancel{p_r q_s - q_s p_r = i\hbar\delta}$$

$$q_r p_s - p_s q_r = i\hbar\delta_{rs} \quad \text{etc} \qquad (8)$$

ノ関係ガ成立スル.
iii) time displacement operator d_t ナルモノヲ introduce セバ
~~…~~スレバ. ~~$-i\hbar d_t = H$~~ system ノ従来ノ state ニ対シ
~~ナル関係~~

$$-i\hbar d_t\psi = H\psi$$

ナル関係ガ成立セネバナラヌ. 之ハ上ノ equation of motion ト equivalent ナモノデアル. 之ノ関係ハ Hamiltonian
~~Hamiltonian~~ H ハ必ズシモ canonical variables ノ
函数タルヲ要セヌ.
~~色々ナ~~ representation ヲトレバ. 上ノ関係ハ Schrödinger
ノ representation デアラハサレル.

気付、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(q', t|) = \int (q', t|H|q'', t)\, dq''(q'', t|)$$

~~其ノ~~ 特ニ ~~特殊ノ q ノ~~ ~~ノ conjugate~~ q's ガ conjugate momentum p's ノ場合、H ガ q's 及ビ p's ノ function トシテ與ヘラレタ場合ニハ Schrödinger ノ wave equation
(狀態 state ノ repr. ハ)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(q', t|) = \int H(q', t, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'})(q', t|)$$

ヲ陽ニ含マナイ場合
Hamiltonian ガ time ヲ explicit ニ含マヌ場合ニハ

(iv) Heisenberg ノ representation ニ於テハ (ト云ッタ) 總テノ dynamical variables ノ matrix element ハ

$$\frac{d}{dt}(\alpha'|\xi|\alpha'') = -(H' - H'')(\alpha'|\xi|\alpha'')$$

ヲ滿足スルコトガ分ル。之ハ equation of motion ト同等ノモノデアル。

以上ノ四ツノ形式ハ ~~場合ニ於テ~~ 何レモ互ニ等價デアッテ ~~以上~~ ~~之等~~ (i) (ii) (iii) (iv) ノ何レカヲ ~~出~~ 問題ノ ~~基礎トシテモ~~ 出發シテモ同様ノ結果ニ到達シ得ル。~~問題ノ性質ニ依テ~~ ドレヲ使フノガ便利カハ問題ノ性質ニヨッテ定マルノデアルガ、一般ニハ classical ト ~~比較~~ (對應) 場合ト同ジ ~~形ヲ~~ 様ニ取扱ヒ得ル Schrödinger ノ形ヲトルノガ便利デアル。

§

力學ニ於テ吾々ハ一般ノ dynamical system ノ state 及ビ dynamical variables ガ満足スル関係式ヲ満足スベキカヲ知ル。次ノ問題ハ個々ノ場合ニツイテカヽル関係ヲ満足スル solution ヲ求メルコトデアル。

即チ Hamilton 函数ガ定マッタ時ノ函数トシテ系ノ(時間的)変化ヲ、例ヘバ ~~…~~ initial condition 及ビ boundary condition（，問題ノ物理的性質カラ定マッテ居ル）ヲ満足スル如キ ~~wa~~ Schrödinger ノ wave equation ノ solution ヲ~~求メルコト~~、即チ wave function ヲ求メルコトデアル。

Chapter V. Transformation Group ~~of~~ and Perturbation Theory

§

前章ニ於テ、吾々ハ一般ノdynamical systemガ
~~満足スベキ式ヲ得タ~~ ソレ得ナル関係ヲ満足スベキ事ヲ
state及ビdynamical variablesガ
知ッタ。~~然シ~~ 次ノ問題ハ ~~実際的~~ (個々ノ場合ニ)ツイテ(カヽル関係ヲ満)式ヲ
考ヘル
解クコトデアルガ、特ニ簡単ナ場合ヲ除イテハ
solutionヲ見出ス、然シテモ本ナ函数トシテ得ル
スコトハ不可能デアル。従ッテ、近似的ナ (approximate) solution
ヲ以ッテ満足セネバナラヌ 得ル
場合ガ多イ。ソレニハ与ヘラレタsystemト近似ノ
systemデ ~~解ケル~~ ソノsystemニ関スルequation
ハ解カレル様ナモノヲ考ヘルコト

Hノ eigenstate ハ
縮退 ~~Hノ eigenstate~~
p_x, p_y, p_z ノ

~~$p_x\Psi = p_x'\Psi$~~ † ~~system ノ~~ 任意ノ state ハ ~~simultaneous~~

~~$p_y\Psi =$~~ eigenstate ノ superposition トシテ表ハサレル

~~故ニ, Hノ eigenstate ハ~~ Hノ eigenvalue ハ

~~p_x^2, p_y^2, p_z^2 ノ 二ノ場合~~

~~最モ簡単ナ例ニツイテ前ノ章節ノ i) ii) iii) iv) ノ~~

§ Examples ~~行シ方ノ関係ヲ示ス~~

i) Free motion of a particle

~~一ツノ~~ 最モ簡単ナ例ハ一ツノ particle ガ external force ヲ受ケナイデ自由ニ運動シテ居ル時ノ場合デアル。コノ場合ニハ classical ナ Hamilton 函数ハ

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) \qquad (34)$$

デアル。コノ Hamilton 函数ハソノ儘 quantum mechanics ニ於テモ採用サレ~~ナケレバ~~ルデアラウ。コノ時ハ運動量 p_x, p_y, p_z ハ constant of motion デアル。

$\because\quad i\hbar\dot{p}_x = p_xH-Hp_x=0$.

次ニ H ノ eigenvalue 即チ系 (0, ∞) ノ総テノ値ヲ ~~ノ~~ system ノ energy ハ、~~energy ノ value ハ (0:∞) ノ間ノ総テノ~~ 総テノ positive value ナ ~~energy~~ ヲトリウル。

~~∵ p_x^2, p_y^2, p_z^2 ハ互ニ commute スルカラ 各々ノ eigenvalue ハ eigenvalue ノ和デアル。 system ノ総テノ state 即チ H ノ総テノ eigenstate ハ p_x^2, p_y^2, p_z^2 ノ simult eigenstate ノ superposition トシテ表ハサレル。而シテ superpose サレル各 term ハ又 H ノ eigen state デアリ、H ノ固有 eigenvalue ニ対シテオルモノデアル。故ニ H ノ eigenvalue ハ~~ p_x^2, p_y^2, p_z^2

~~之ハ除外ノ内部ヲ考ヘル場合~~

~~測定シタル~~ $x'y'z'$ ノ代リニ xyz ト書キ、

$(xyzt) \equiv f(xyzt)$ トナル、

$$\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \right\} f(xyzt) = 0 \qquad (35)$$

~~ノ eigenvalue ノ和デアル。~~

然ルニ p_x^2, p_y^2, p_z^2 ハ互ニ commute スルカラ、ソレラノ共通ノ simultaneous eigenstate ヲ考ヘル。ソレハ H ノ eigenstate デ、ソノ state ニ対スル H ノ eigenvalue ハ p_x^2, p_y^2, p_z^2 ノ eigenvalue ノ和ノ $\frac{1}{2m}$ デアル。 p_x^2, p_y^2, p_z^2 ノ eigenvalue ハ凡テ 0 又ハ positive ナルタメ、H ノ eigenvalue ハ 0 又ハ positive ノ値ノミヲトルコトニナル。又 p_x^2, p_y^2, p_z^2 ノ共通ノ state ニ対スル平均値ハ 0 又ハ positive デアルカラ、ソノ和モ又共通ノ state ニ対スル平均値モ 0 又ハ positive. 従ッテ eigenvalue
従ッテ又 H ノ eigenvalue ハ 0 又ハ positive デアル。

次ニ velocity ヲ求メルト

$$\dot{x} = \frac{1}{i\hbar}(xH - Hx) = \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{2m}(xp_x^2 - p_x^2 x)$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{2m}\{(xp_x - p_x x)p_x + p_x(xp_x - p_x x)\}$$

$$= \frac{1}{m}p_x \qquad \text{etc}$$

ソノ場合ノ schrödinger wave Equation ハ (33) 及ビ (34) カラ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x'y'z't) = \frac{1}{2m}\left\{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z'}\right)^2\right\} \psi(x'y'z't)$$

$$\cancel{\text{or}\ \frac{\partial}{\partial t}(xyzt) = \frac{-\hbar}{2m}\{\Delta(xyzt)}$$

$$\cancel{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(xyzt) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta f(xyzt)}$$

periodic solution は
21式の ~~solution は次の如くなる~~.

$$f(xyzt) = Ce^{i(p'_x x + p'_y y + p'_z z - W't)/\hbar}$$

である。但し $W' = \frac{1}{2m}(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2)$

~~ここに p'_x, p'_y, p'_z は $p_x\psi =$ なる function に於ける~~
~~representation にて~~

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} f = p'_x f \text{ etc}$$

$$+i\hbar\frac{\partial}{\partial t} f = W' f$$

故に W' は system の energy value で ~~あ~~ この state

p'_x etc は momentum p_x etc の eigen

は p_x, p_y, p_z の simultaneous eigenstate である。

かかる function f にて representation される state は

H の eigenstate であるから stationary state である。

即ち free particle の stationary state は plane wave

で表はされる。その wave length は Schrödinger の Repr では momentum の波動性は p 方向

$$\lambda = 2\pi\hbar/(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2)^{1/2} = ~~h/|p|~~ = h/p$$

frequency は $\nu = ~~2\pi\hbar/W'~~\ W'/2\pi\hbar = W'/h$

propagation の velocity は $W'/p = \frac{p}{2m}$

となる。

~~かかる wave の存在を始めて考へたのは de Broglie で~~
~~あつて 彼は particle の motion に associate する~~
~~wave 即ち de Broglie wave と呼んでゐる。~~

$W = eV.$

結晶格子ノ~~反射~~回折ノ実験ニヨッテ斯ル wave ヲ考ヘネバナラヌ ~~ガ考ヘラレ~~ ~~ナルベシ~~ 波長ガ λ ニ丁度 de Broglie ノ関係
$\lambda = \frac{h}{p}$ ヲ満足シテヰルコトガ証明セラレ、又 Proton ニツイテモ斯ル wave ヲ考ヘネバナラヌコトガ証明セラレタ。又 radiation ヲ light quanta (photon) ヨリナルト考ヘルナラバ、之ニ associate シテヰル wave ノ波長 h/p 振動数 W/h ハ通常ノ light wave ノ波長振動数ト一致スルコトハ Compton ノ実験カラ明デアル。~~只~~ 只 wave function ガ complex ニナツテヰルコトト polarization ガ考慮サレテヰナイコトガ違ツテヰル。

カヽル wave ノ概念ヲ始メテ唱ヘタノハ de Broglie デアッテ. particle ノ motion ニハカヽル wave ガ associate スル。particle ノ motion ハコノ wave ニヨッテ control サレルト考ヘタノデアル。

彼ノ出発点トナツタノハ relativistic ナ場合デアッテ

コノ場合ハ

$$H = c(m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$$

トシテモ同様ニ取扱フコトガ出来ル。

上ニ述ベタ plane wave デアラハサレル様ナ state ニ於テ particle ガ ~~[illegible]~~ dxdydz ナル volume 内ニアル Probability ハ

$$|\psi(xyzt)|^2 dxdydz = C^2 dxdydz$$

~~此ハ constant デアル~~ constant デ位置ニ independent デアル。∴ particle ガドコニアルカ全クワカラナイ。

$$p_x = \hbar c\, p$$

$$x = c^{-1} q.$$

$$\frac{c^2 \hbar^2}{2m} p^2 + \frac{(4\pi\nu)^2 m}{2} c^{-2} q^2$$

$$\frac{c^2 \hbar^2}{2m} = \frac{(4\pi\nu)^2 m}{2} c^{-2}$$

$$c^4 = \frac{(4\pi\nu)^2 m^2}{4\hbar^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\nu m}{\hbar}}$$

$$\frac{\hbar\ 2\pi\nu m}{2m} \cdot (p^2 + q^2)$$

ii) Harmonic Oscillator in One Dimension

この場合は既に前の節で述べたのであるが、粒子(particle)の mass を m, oscillation の frequency を ν とすれば classical な Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + 4\pi^2\nu^2 m^2 q^2\right) \qquad (35)$$

で与へられ、quantum mechanics に於てもこの Hamiltonian をそのまま採用すればよい。H の eigenvalue は前に求めた如く

$$\left(n+\tfrac{1}{2}\right)h\nu \qquad n=0,1,2,\ldots$$

である。

この場合の p, q の Heisenberg の representation を求めるには、~~前と同じく~~ 前と

$$A' = \frac{1}{2}(A'|p+iq|A'')(A''|p-iq|A')$$

なる関係を利用し、但し p, q は上の p, q を夫々 $(2\pi\nu m)^{\frac{1}{2}}$, $(2\pi\nu m)^{-\frac{1}{2}}$ で割ったものとする

$A' = A'' + \hbar$ なるときのみ $(A''|p-iq|A') \neq 0$ で

又 $\overline{(A'|p+iq|A'')} = (A''|p-iq|A')$

なる故、上の式は

$$A' = \frac{1}{2}\left|(A'|p+iq|A'-\hbar)\right|^2$$

故に

$$H = 2\pi\nu A + \frac{1}{2}\,\hbar\, 2\pi\nu$$

なる故 A の eigenvalue は $A' = \frac{H'}{2\pi\nu} - \frac{1}{2}\hbar = n\hbar$

従って ~~前と同じく~~ J ~~を~~, w なる canonical observables ~~A = J とおく~~ A はちょうど J となり

J は勿論 constant of motion で

$$e^{i\{H'-(H'-2\pi\hbar\nu)\}t/\hbar} = e^{2\pi i\nu t}$$

~~独立ナル~~、上ノ式ハ

$$J' = \frac{1}{2}\,|(J'|p+iq|J'-h)|^2$$

所デ $(J'|p+iq|J'')$ ナル Heisenberg Rep ニオケル matrix element ハ time ニ関シテ

$$e^{i(H'-H'')t/h} = e^{2\pi i(n'-n'')\nu t}$$

$$= e^{2\pi i\nu t}$$

ナル factor ヲモツテ居ル。

$$\therefore\ \sim\sim (J'|p+iq|J'') = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(n'-n'')t+i\gamma}$$

$$\therefore\ (J'|p+iq|J'-h) = (2)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\gamma)}$$

~~同様ニ~~カラシテ

$$(J'-h|p-iq|J') = (2)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(\nu t+\gamma)}$$

従ツテ

$$(J'|p|J'-h) = \frac{1}{2}(J'|p+iq|J'-h) + \frac{1}{2}(J'|p-iq|J'-h)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\gamma)}$$

$$(J'-h|p|J') = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(\nu t+\gamma)}$$

etc.

之ノ p ニ当ル。

$$(J'|p|J'-h) = \left(\tfrac{1}{2}2\pi\nu m\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\delta)}$$

$$(J'-h|p|J') = \left(\tfrac{1}{2}2\pi\nu m\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(\nu t+\delta)}$$

$$(J'|q|J'-h) = \left(\tfrac{1}{2}\cancel{2\pi\nu}\frac{1}{2\pi\nu m}\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} i e^{2\pi i(\nu t+\delta)}$$

$$(J'-h|q|J') = \left(\tfrac{1}{2}\frac{1}{2\pi\nu m}\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}} i e^{-2\pi i(\nu t+\delta)}$$

之ヲ matrix ニ直シテミルト

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 2h & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 3h & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4h & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\cancel{p = \left(\tfrac{1}{2}2\pi\nu m\right)^{\frac{1}{2}} \left(0 \quad e^{-2\pi i(\nu t+\delta)} \right)}$$

$$p = \left(\tfrac{1}{2}2\pi\nu m\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & h^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(\nu t+\delta)} & 0 & 0 & \cdot \\ h^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\delta)} & 0 & \sqrt{2}h^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(\nu t+\delta)} & 0 & \cdot \\ 0 & \sqrt{2}h^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\delta)} & 0 & \sqrt{3}\cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\cdots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\xi = \Big($$

今 振動數ハ意味ヲナサヌ J ノ canonical conjugate ヲ ω トスレバ, transformation function ハ

前ニヤツタ如ク $\left(\omega'/J'\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-i(n'\omega' + \delta')}$

従ッテ J ヲ ~~主トスル~~ diagonal form ニ ナルトシテ ~~表ハス~~

$e^{i\omega}$ ノ matrix element ハ

$$(J'|e^{i\omega}|J'') = \int_0^{2\pi} (J'/\omega')\, e^{i\omega'}\, (\omega'/J'')\, d\omega' = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(n'\omega'+\delta)} \cdot e^{i\omega'} \cdot e^{-i(n''\omega'+\delta)}\, d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n'-n''+1)\omega'}\, d\omega' = \cancel{\frac{1}{2\pi}\frac{e}{i(n'-n'')}}$$

$= 1$ for $n'' = n' - h$

$= 0$ for $n'' \neq n' - h$

従ッテ Heisenberg ノ representation ニ於テハ phase ヲ適當トシテ

~~$(J'|e^{i\omega}|J'') =$~~

$$e^{i\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{2\pi i(\nu t+\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(\nu t+\gamma)} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix} = e^{2\pi i(\nu t+\gamma)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~

$$e^{-iw} = e^{-2\pi i(\nu t+\delta)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad J^{\frac{1}{2}} e^{iw} = e^{iw}(J+h)^{\frac{1}{2}} \qquad (37)$$

$$= h^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\nu t+\delta)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-iw} J^{\frac{1}{2}} = (J+h)^{\frac{1}{2}} e^{-iw} \qquad (38)$$

$$= e^{-2\pi i(\nu t+\delta)} h \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ ~~p~~ pヲ J, ωデアラハセバ

$$p = (\pi\nu m)^{\frac{1}{2}}\left(J^{\frac{1}{2}} e^{iw} + e^{-iw} J^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (39)$$

$$q = (4\pi\nu m)^{\frac{1}{2}}\left(-iJ^{\frac{1}{2}} e^{iw} + i e^{-iw} J^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \cancel{(39)}\ (40)$$

ナリ。以上ノ一般論ノ物理的ナ意味ハ後ニ Radiation ノ理論ノ所デ述ベル。

先ヅ Harmonic Oscillator ニ對スル wave equation ハ (33) 及ビ ~~(35)~~ (36) ヲ用ヒテ q' ヲ q トカクト

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(q|) = \frac{1}{2m}\left\{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \cancel{m^2\omega^2 q^2}\, 4\pi^2\nu^2 m^2 q^2 \right\}(q|) \qquad (41)$$

~~q' ノカハリニ q トカキ (q'|) = f(q) トカケバ~~

$$\cancel{i\hbar \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 4\pi^2\nu^2 m^2 q^2\right\} f(q)}$$

~~stationary state 即チ Hamiltonian ノ eigenstate~~

然ラバ stationary state 即チ Hamiltonian ノ eigenstate ヲ考ヘルト wave function ハ

$$(q|t|) = f(q)\, e^{-iW't/\hbar}$$

而シテ periodic solution ヲ得ルタメ

$$W' f(q) = \frac{1}{2m}\left\{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 4\pi^2\nu^2 m^2 q^2\right\} f(q) \qquad (42)$$

ヲ満足セネバナラヌ。

コノ式ハ ~~Hamiltonian ノ ei~~ Harmonic Osci ノ energy value W' ヲ

ルニ対スル eigenfunction $f(q)$ ヲ求メル方法デアル。

$$\frac{2mW'}{\hbar^2} = a \qquad \frac{4\pi^2 m^2 \nu^2}{\hbar^2} = b$$

トオク。

$$\frac{d^2 f}{dq^2} + (a - b q^2) f = 0$$

$x = q\sqrt[4]{b}$ トオクト

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - x^2\right) f = 0 \quad (43) \qquad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{W'}{\hbar\, 2\pi\nu}$$

$W' = 2\pi(2n+1)h\nu + \ldots$

コノ式ノ ~~eigenvalue~~ ハ $\frac{a}{\sqrt{b}} = 1, 3, 5 \cdots (2n+1) \cdots$

コノ式ノ ~~eigenfunction~~ ハ Hermite ノ Orthogonal function

ヲ満足スル solution $f_n(x)$

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^3}{2}} H_n(x) \quad (44)$$

デアル。

但シ H_n ハ Hermite ノ Polynomial デ

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

デアル、~~之ヲ計算~~ 例ヘバ

$H_0 = 1 \qquad H_1 = 2x$

$H_2 = 4x^2 - 2 \qquad H_3 = 8x^3 - 12x$ etc

$$\therefore \quad \cancel{\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}}} \left(\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(-2x e^{-x^2}\right)$$

$$\cancel{\frac{d^2}{dx^2}\left(\quad\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(-2+4x^2\right)e^{-x^2}} = \cancel{\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}}$$

$$= (-2+4x^2)\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} + 8nx\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}} + 4n(n-1)\frac{d^{n-2}e^{-x^2}}{dx^{n-2}}$$

∵
$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} + \{2n+1 - x^2\} f_n = 0$$

or
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right) + \{2n+1 - x^2\}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = 0$$

となることを示そう。

が n の時に成立つと ~~すれば $n+1$ の時には~~

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^{n+1} e^{-x^2}}{dx^{n+1}}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left\{-2x\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right\} + \left\{\frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2})\right\}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left\{-2x\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} - 2\frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\{-(2n+1)+x^2\}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right] = \{-(2n+1)+x^2\}\frac{d^{n+1} e^{-x^2}}{dx^{n+1}}$$
$$+ 2x\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

これより
$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right) = x e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} + e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n+1} e^{-x^2}}{dx^{n+1}}$$

or
$$\frac{df_n}{dx} = x f_n + f_{n+1}$$

従って
$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} = x\frac{df_n}{dx} + f_n + \frac{df_{n+1}}{dx}$$
$$= \{x^2 - 2n - 1\} f_n$$

x を乗じ 更に微分すれば
$$x\frac{d^2 f_n}{dx^2} + 2\frac{df_n}{dx} + \frac{d^2 f_{n+1}}{dx^2} = 2x f_n + \{x^2 - 2n - 1\}\frac{df_n}{dx}$$

or
$$x\{x^2-2n-1\} f_n + 2x f_n + 2f_{n+1} + \frac{d^2 f_{n+1}}{dx^2}$$
$$= 2x f_n + \{x^2-2n-1\}\{x f_n + f_{n+1}\}$$

or $\quad 2f_{n+1} + \frac{d^2 f_{n+1}}{dx^2} = \cancel{f_n} + \{x^2-2n-1\} f_{n+1}.$

故に n の時に成立すれば n+1 の時にも成立する。

然るに $n=0$ の時には $\quad f_0 = e^{-x^2/2}$

$$\frac{d^2 e^{-x^2/2}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-x e^{-x^2/2}\right) = x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2}$$

で方程式は満足せられる。故に任意の n に対して方程式の solution は $\quad f_n = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ で与へられる。

今、始めに於ては eigenvalue が既にわかって居るが、今 eigenvalue がわかって居なかつたとすれば (43) の solution を $\frac{a}{\sqrt{h}}$ の一般の値に対して

$f = e^{-\frac{x^2}{2}}\chi(x)$ とおくと

$$\frac{df}{dx} = -x e^{-\frac{x^2}{2}}\chi(x) + e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d\chi}{dx}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \cancel{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}} (x^2-1) e^{-\frac{x^2}{2}}\chi - 2x e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d\chi}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d^2\chi}{dx^2}$$

∴ (43) 式は $\quad \cancel{e}\frac{d^2\chi}{dx^2} - 2x\frac{d\chi}{dx} + \cancel{(x^2-1)\chi}\left(\frac{a}{\sqrt{h}}-1\right)\chi = 0$

となる。 $\quad \chi = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad$ とおけば

方程式の x^ν の係数を0とおけば $\quad (\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2} - 2\nu a_\nu + \left(\frac{a}{\sqrt{h}}-1\right)a_\nu = 0$

$$\therefore \quad a_{\nu+2} = \frac{2\nu+1-\frac{a}{\sqrt{h}}}{(\nu+2)(\nu+1)} a_\nu. \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

→ a_{ν_0+2} ナレバ

最低ノ項ガ0ニナラヌ所ハ $\cancel{(\nu_0+2)(\nu_0+1)a_{\nu_0}}$ $\nu_0(\nu_0-1)a_{\nu_0}=0$

∴ $\nu_0=0$ or 1. 従ッテ series ハ偶数次又ハ奇数次ノミ only

$\frac{a}{\sqrt{b}}=2n+1$ ノ場合ハ $a_{n+2}=0$

∴ χ ハ polynomial. 従ッテ f ハ $(-\infty, +\infty)$ ノ間デ singularity ヲモタズ $\pm\infty$ ニ於テ exponentially ニ0トナル。

然ルニ $\frac{a}{\sqrt{b}}\neq 2n+1$ ノ場合ニハ χ ノ series ハ terminate シナイ。然モ ν ノ大キクナルトキ $\frac{a_\nu}{a_{\nu-2}}$ ハ $2/\nu$ ニ converge スル。因テ之ヲ e^{x^2} ト比較シテ見ルト

$$e^{x^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{\nu!}=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{2\nu}x^{2\nu} \quad \text{トスルト} \quad \frac{b_\nu}{b_{\nu-2}}=\frac{2}{\nu}$$

∴ 大ナル $x=\pm\infty$ ニ於ケル χ ノ infinity ノ order ハ e^{x^2} ト大体同ジ。∴ $f=e^{-\frac{x^2}{2}}\chi$ ハ $\pm\infty$ ニ於テ ∞ トナル。カカル函数ニヨッテ represent サレル state ハ全ク物理的意味ヲモタヌ(存在シナイ)カラカカル solution ハ取除カネバナラヌ。

∴ Schrödinger ノ differential equation カラ出テ来ル eigenvalue ガ $\frac{a}{\sqrt{b}}=2n+1$ ニ限ラレルコトガワカル。

$$e^{x^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{\nu!}=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{2\nu}x^{2\nu}=$$

$(\frac{\mu}{2}-1)!$ $\frac{\mu}{2}!$ $(\frac{\mu}{2}-1)!$ $\frac{\mu}{2}!$ $\frac{\mu}{2}$ $\frac{b_\nu}{b_{\nu-2}}$

Chap. Central System

~~Theory~~ ~~Chap. Interaction of Matter and Radiation~~

§ Permutation Group and Exchange Phenomena

第二述ベタ如ク ~~eigenstat~~ fundamental state（= トイフ eigenstate）ガ discrete（+ eigenvalue ニ関シテ）ナ時ニハ 之ヲ ψ_m $m=0,1,2,\dots$ トスレバ

$$\phi_m \psi_n = \delta_{mn}$$

~~= norm~~

$$\text{~~or~~}\ \cancel{\int_0^\infty \bar{f}_m(x) f_n(x)\,dx = \delta_{mn}}$$

= normalize スルコトガ出来ル。

今、例ヘバ H ノ eigenstate ヲ fund. state トシテトスレバ $H' = (n+\frac{1}{2})h\nu$ ニ関スル eigenstate ノ ~~repres. ニ関シテ~~ Schrödinger ノ repr ヲ $C_n f_n$ ト書ケバ

故ニ
$$\int_0^\infty \bar{c}_m \bar{f}_m(x) c_n f_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

ナル様ニ C_n, $\bar{C}_m$ ヲ決メ ~~ルコトガ出来ル~~ ルコトガ出来ル。

$m \neq n$ ノ時ニハ勿論 $\int \bar{f}_m f_n\,dx = 0$.

$m=n$ ノ時ニハ
$$\int \bar{f}_n f_n\,dx = \int_0^\infty \left(e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right)^2 dx$$

$$= e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\Bigg|_0^\infty - \int \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right)\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\,dx$$

第一項ハ ~~e^{-x^2} ヲ含ム~~ $e^{-x^2}(a_0x^n+\dots)$ トイフ形ナルカラ ∞, 0 デ 0.

第二項ハ同ジ様ナ partial $\int$ ヲ繰リ返シテ行クト. $= (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n\left\{e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right\}}{dx^n} e^{-x^2}\,dx$

von Korrespondenzgemäßige Bedeutung der Kan. Veränd.
zu Ge~~oo~~ometrische Deutung - - -

Space-Displacement Operator
Time-Displacement 〃
Space-Rotation Operator
Lorentz 〃
Permutation 〃

Permutation

Application

Atomic Phenomena ニ於ケル [illegible]ノ [illegible]ハ 主トシテ
spectral ~~line~~ analysis ニヨツテ 得ラレル。
従ッテ 第一ニ ~~ニッイテ~~ 問題ハ atomノ stationary state 第2 ~~radiation~~ field トノ 相互作用 ニヨル ~~spectral~~ radiation, emission, absorption 及 dispersion ノ現象ヲ 理論的ニ説明スルコト ~~ヲ~~ ガ問題トナル。 ~~ニ at~~
次ニ

Transformation Group and Perturbation Theory
§
§ Rotation Group and Angular Momentum
§
§ Theory of Collision

Chap. Transformation Group and Perturbation Theory

Chap. Theory of Electron

Chap. Theory of System with many electron

Chap. Atomic System

Chap. Theory of Radiation

Chap. Relativistic Quantum mechanics

III

$$\cancel{q_{n,n+1}} = q_{n+1,n} = \cancel{\sqrt{\frac{2\pi m\nu}{\hbar}}}\sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{4\pi m\nu}}\, e^{2\pi i(\nu t+\delta)}$$

之ヲ前ニ於ケル

$$(J'|q|J'-\hbar) = -\left(\frac{1}{4\pi m\nu}\right)^{\frac{1}{2}} J'^{\frac{1}{2}}\, i\, e^{2\pi i(\nu t+\gamma)}$$

ト比較スレバ

$J'=(n+1)\hbar$ トスレバ

$$\{(n+1)\hbar|q|n\hbar\} = -\sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{4\pi m\nu}}\, e^{2\pi i(\nu t+\gamma+\frac{1}{4})}$$

$\therefore\ \delta = \gamma + \frac{1}{4}$ ニトレバ 両方ハ一致スル

[illegible]

$$2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr = \pi\int_0^\infty e^{-x}dx = \pi$$

$r^2 = x$

$$H = \frac{1}{2m}\left\{s_x\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)+s_y\left(p_y+\frac{e}{c}A_y\right)+s_z\left(p_z+\frac{e}{c}A_z\right)\right\}^2 - eV$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)^2+\cdots\right\}+\frac{1}{2m}is_z\left\{\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)\left(p_y+\frac{e}{c}A_y\right)\right.$$

$$\left.-\left(p_y+\frac{e}{c}A_y\right)\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)\right\}+\cdots$$

$$= \cdots+\frac{e}{2mc}is_z\{p_x(A_y)-p_y(A_x)\}+\cdots$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)^2+\cdots\right\}+\frac{e}{2mc}is_z(-i\hbar)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+\cdots$$

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)^2+\cdots\right\}+\frac{e\hbar}{2mc}(s_xH_x+s_yH_y+s_zH_z)$$

\#

$$\therefore \int f_n^2dx = (-1)^n\int_0^\infty\frac{(-2)^n}{n!}e^{-x^2}dx = \frac{(2)^n}{n!}\sqrt{\pi}.$$

$\therefore c_n = \left\{(2)^n n!\sqrt{\pi}\right\}^{-\frac{1}{2}}$ トトレバヨイ。

~~サテ~~

サテコノ normalized eigenfunction ヲ使ッテ例ヘバ observable ノ Heisenberg ノ matrix ヲツクルコトガ出来ル。

~~例~~ 例ヘバ $q_{mn} = b^{-\frac{1}{4}}x_{mn}$ $\left\{\sqrt{\pi}^{-1}(2)^{n+m}n!m!\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$$e^{2\pi i(m-n)\nu t+\delta_y}\quad = b^{-\frac{1}{4}}\int_0^\infty f_m x f_n dx = b^{-\frac{1}{4}}\int e^{x^2}\frac{d^me^{-x^2}}{dx^m}x\frac{d^ne^{-x^2}}{dx^n}dx$$

$$= b^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}\left\{(2)^{n+m}n!m!\right\}^{-\frac{1}{2}}\int e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{d^me^{-x^2}}{dx^m}\left\{\frac{d^{n+1}e^{-x^2}}{dx^{n+1}}+2n\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\right\}$$

$\therefore x_{mn} = 0$ unless $m = n\pm1$.

$$q_{n+1,n} = b^{-\frac{1}{4}}x_{n+1,n} = b^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}\left\{(2)^{n+n+1}n!(n+1)!\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot-\frac{1}{2}(2)^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi} = b^{-\frac{1}{4}}(-)\sqrt{\frac{(n+1)}{2}}$$ \#