NOTE-BOOK

量子力学 Vol III

湯川秀樹

iii) A Particle in a Central Field

コノ場合ノ Hamiltonian ハ central field ノ potential ヲ $V(r)$ トスレバ

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r) \qquad (45)$$

デ表ハサレル。

コノ場合ニハ ~~Hamiltonian~~ classical dynamics ニ於ケル如ク angular momentum

$$\begin{aligned} m_x &= y p_z - z p_y \\ m_y &= z p_x - x p_z \\ m_z &= x p_y - y p_x \end{aligned} \qquad (46)$$

＊之等ヲ定義スレバ、

$$(47) \left\{ \begin{aligned} m_x x - \cancel{m_x x}^{\,x m_x} &= (y p_z - z p_y) x - x (y p_z - z p_y) \\ &= 0 \\ m_x y - y m_x &= (y p_z - z p_y) y - y (y p_z - z p_y) \\ &= i\hbar z \end{aligned} \right.$$

$$m_x z - z m_x = -i\hbar y \qquad \text{etc.}$$

関係トシテ

$$\left. \begin{aligned} m_x p_x - p_x m_x &= 0 \\ m_x p_y - p_y m_x &= i\hbar p_z \\ m_x p_z - p_z m_x &= -i\hbar p_y \end{aligned} \right\} \text{etc} \qquad (48)$$

ナル交換関係ガ成立ツ。

更ニ

$$(49) \left\{ \begin{aligned} m_x m_y - m_y m_x &= \{ m_x (z p_x - x p_z) - (z p_x - x p_z) m_x \} \\ &= i\hbar \{ x p_y - y p_x \} = i\hbar m_z \end{aligned} \right.$$

etc

従ッテ M ~~m²~~ $= m_x^2+m_y^2+m_z^2$ ハ m_x, m_y, m_z ト総テ commuteスル。

$$\because\quad (m_x^2+m_y^2+m_z^2)m_x - m_x(m_x^2+m_y^2+m_z^2)$$
$$= m_y(m_y m_x - m_x m_y)\cancel{m_y} + (m_y m_x - m_x m_y)m_y$$
$$+\ m_z(m_z m_x - m_x m_z) + (m_z m_x - m_x m_z)m_z$$
$$= -m_y \cdot i\hbar m_z - i\hbar m_z m_y$$
$$+\ m_z i\hbar m_y + i\hbar m_y m_z = 0$$

ソコデ m_x, m_y, m_z ノ ~~M²~~ Mノeigenvalueヲ求メテ見ヤウ。

~~M²~~ M ヲ diagonalニスル如キ representationヲトレバ、

m_x, m_y, m_z ノ総テ、ソレラ ~~α~~ M ト commuteスルカラ

$$\alpha M - M\alpha = 0$$
$$(M'..|\alpha|M''..)M'' - M'(M'..|\alpha|M''..) = 0$$

$\therefore$ $M' \neq M''$ ナラバ $(M'..|\alpha|M''..) = 0$.

$\therefore$ $(M'..|\alpha|M'..)$ ト云フtypeノmatrix elementノミガ ~~残ル~~ 0デナイ。

$\therefore$ m_x, m_y, m_z ノ間ノ総テノ関係式ノmatrix repres. ニハ唯 M'ノ一ツノ値ダケガ出テ来ル。従ッテ ~~ソレデ出テ来ル M'ハ~~ ~~一ツノ数ト見テ~~ m_x, m_y, m_z ノ matrix elementハ $(..|m_x(M')|..)$ etc トアラハシテヨイ。~~従ッテ~~ 即チ m_x, m_y, m_z ヲ M'ナル ~~数~~ parameterヲフクンデ居ルト見テ計算スレバヨイ。ソレカラ以下ノ計算ヲスレバ直チニ解ケル。

$$(m_x+im_y)m_z - m_z(m_x+im_y) = -i\hbar m_y + i(i\hbar m_x)$$
$$= -\hbar(m_x+im_y)$$

M 及 m_z ヲ diagonal トスル repr ニテ考ヘル, 式ハ

$$(M' m_z' | m_x + i m_y | M' m_z'')\, m_z'' = (m_z' - \hbar)(m_z' | m_x + i m_y | m_z'')$$

∴ $m_z'' = m_z' - \hbar$ or $(M' m_z' | m_x + i m_y |_{M'} m_z'') = 0$

但シ ~~多~~ $\frac{1}{2}\hbar + K\hbar - \sqrt{M' + \frac{1}{4}\hbar^2} \leq \sqrt{M'}$

$\cancel{\sqrt{M'} - \frac{1}{2}\hbar}$

or $(m_x+im_y)m_z=(m_z-\hbar)(m_x+im_y)$

m_z ヲ diagonal ニスル representation ヲ採レバ此ノ式ハ

$$(m_z'|m_x+im_y|m_z'')m_z''=(m_z'-\hbar)(m_z'|m_x+im_y|m_z'')$$

∴ $m_z''=m_z'-\hbar$ or $(m_z'|m_x+im_y|m_z'')=0$

ソコデ $(m_x+im_y)(m_x-im_y)$ ナルモノヲ考ヘル

$$=m_x^2+m_y^2-i(m_xm_y-m_ym_x)$$

$$=M-m_z^2+\hbar m_z$$

之レノ~~matrix element~~ハ両辺ノ matrix ニツイテハ

~~m_x+im_y~~

$$(m_z'|M-m_z^2+\hbar m_z|m_z'')=\sum_{m_z'''}(m_z'|m_x+im_y|m_z''')(m_z'''|m_x-im_y|m_z'')$$

右辺ハ $m_z'''=m_z'-\hbar$ ノ所丈ガ0デナイ。故ニ

$m_z'-\hbar$ ~~m_z ノ $M'-m_z^2$~~ ガ m_z ノ eigenvalue デナイナラバ左辺ハ 0。従テ

$$M'-m_z'^2+\hbar m_z'=0$$

$$\left(m_z'-\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2=M'+\tfrac{1}{4}\hbar^2$$

$$m_z'=\tfrac{1}{2}\hbar\pm\sqrt{M'+\tfrac{1}{4}\hbar^2}$$

所デ $M=m_x^2+m_y^2+m_z^2$ ノ eigenvalue ガ M' ナラバ m_z ノ eigenvalue ハ $\sqrt{M'}$ ヨリ小サクナケレバナラヌ

∴ m_z ノ一ツノ eigenvalue カラ m_z', $m_z'-\hbar$, … ~~m_z~~ ノ series ハドコカデ終ラネバナラヌ。終ル所デハ $\frac{1}{2}\hbar\pm\sqrt{M'+\frac{1}{4}\hbar^2}$ ノイヅレカノ値ヲトルガ m_z ノ eigenvalue ハ $\sqrt{M'}$ ヨリ大キクナイカラ

ナラヌ。終ル所ハ $\frac{1}{2}\hbar-\sqrt{M'+\frac{1}{4}\hbar^2}$

~~次ニ~~ 従テ series ハ $\frac{1}{2}\hbar-\sqrt{M'+\frac{1}{4}\hbar^2}$, $\frac{3}{2}\hbar-\sqrt{M'+\frac{1}{4}\hbar^2}$, …… $\frac{1}{2}\hbar+k\hbar-\sqrt{M'+\frac{1}{4}\hbar^2}$

他端ハ ――― 〈此

トイフ形ニナル。ソレデ今度ハ

$$(m_x - i m_y)(m_x + i m_y) = M - m_z^2 - \hbar m_z$$

ナル事ヲ示セバ. m_z' ガ ~~一ツ~~ m_z' ノ eigenvalue トスレバ $m_z'+\hbar$ ガ eigenvalue デナイタメニハ

$$M' - m_z'^2 - \hbar m_z' = 0$$

故ニ or $m_z' = -\frac{1}{2}\hbar \pm \sqrt{M' + \frac{\hbar^2}{4}}$

デナケレバナラヌ。 ~~故ニ上ノ関係ニ m_z ノ eigenvalue ハ~~

$$\cancel{-\tfrac{1}{2}\hbar + \sqrt{M' + \tfrac{\hbar^2}{4}},\ -\tfrac{3}{2} + \sqrt{M' + \tfrac{\hbar^2}{4}},\ \text{etc}}$$ ナル ~~ser~~ 系列デアル

~~ナシ~~。

~~従テ~~ コノ m_z' トシテ ~~$\frac{1}{2}\hbar - \sqrt{M' + \frac{1}{4}\hbar^2}$~~ カラ series ノ

~~ツヅク~~ ~~m_z~~ 最後ノ項ヲトレバ.

$$\frac{1}{2}\hbar + K\hbar - \sqrt{M' + \frac{\hbar^2}{4}} = -\frac{1}{2}\hbar \pm \sqrt{M' + \frac{\hbar^2}{4}}$$

or

$$(K+1)\hbar = 2\sqrt{M' + \frac{\hbar^2}{4}} \quad \text{or } 0.$$

K ハ 0 or positive integer ナル故, ~~0デ~~ $(K+1)\hbar$ ハ 0デナイ.

$$\therefore \quad M' + \frac{\hbar^2}{4} = \frac{1}{4}(K+1)^2\hbar^2$$

$$\therefore \quad M' = \hbar^2\,\frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}+1\right) \qquad (5\text{-}0)$$

ナリ, m_z ノ eigenvalue ハ

$$\frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{2}(K+1)\hbar,\ \frac{3}{2}\hbar - \frac{1}{2}(K+1)\hbar,\ \cdots,\ -\frac{1}{2}\hbar + \frac{K+1}{2}\hbar$$

or ~~$\frac{\hbar}{2}(-K,\ -K+$~~ $\qquad (51)$

$$-\frac{K\hbar}{2},\ \left(-\frac{K}{2}+1\right)\hbar,\ \cdots\cdots\ \left(\frac{K}{2}-1\right)\hbar,\ \frac{K}{2}\hbar$$

$$x^2 p_x^2 = x^{\cancel{2}} p_x x p_x + i\hbar x p_x$$

$$= x p_x p_x \cancel{x} + 2 i \hbar x p_x$$

サテ 之ニ 就イテ

$$m_x r^2 - r^2 m_x = m_x(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2)m_x$$
$$= (m_x x - x m_x)x + x(m_x x - x m_x) + \cdots$$
$$= 0 + 0 + i\hbar zy + i\hbar yz - i\hbar yz - i\hbar zy$$
$$= 0. \qquad etc$$

~~即チ~~ 又 同様ニシテ $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ トスレバ

$$\cancel{m_x p^2 - p^2 r}$$

$$m_x p^2 - p^2 m_x = 0 \qquad etc$$

即チ angular momentum ハ r 及ビ p^2 ト commute スル。従ッテ Hamiltonian (45) ト commute スル。即チ constant of motion デアル

classical dynamics ニ於ケル如ク central field ニ於テ A.M. ハ ソレデ Hamiltonian ヲ r 及ビ ソノ conjugate 及ビ angular momentum デ表ハスコトガ出来ル。

之 $M = \sum_{x,y,z} m_x^2 \cancel{x p_y \; p_y} = \sum_{x,y,z} (y p_z - z p_y)^2$

$$= \sum (y^2 p_z^2 + z^2 p_y^2 - y p_z z p_y - z p_y y p_z)$$
$$= \sum (y^2 p_z^2 + z^2 p_y^2 + x^2 p_x^2) - \sum (y p_y \cdot p_z z + z p_z p_y y + x p_x \cdot p_x x + 2 i\hbar x p_x)$$
$$= (x^2+y^2+z^2)(p_x^2+p_y^2+p_z^2) - (x p_x + y p_y + z p_z) \times (p_x x + p_y y + p_z z + 2 i\hbar)$$

~~従ッテ $p_x^2+p_y^2+p_z^2 =$~~ トナル

ナイヒカヘレバ、(0,0,0)附近デ、$\frac{\partial}{\partial r}$ トイフ Operator ハ意味ヲモッテヰナイ。

ソコデ $r^{-1}(xp_x + y p_y + z p_z - i\hbar) = p_r$ トオク。 (52)

~~$r(rp_r - p_r r) =$~~

$$x p_r - p_r x = r^{-1}(x^2 p_x - x p_x x) = r^{-1}\cdot x \cdot i\hbar = i\hbar \frac{x}{r}.$$

etc.

従ッテ ~~$(rp_r - p_r r)\psi(x',y',z') = (r-r')p_r\psi(x',y',z')$~~

$$\therefore\ r^2 p_r - p_r r^2 = \cancel{2i\hbar}\ 2i\hbar\{x/r\cdot x + y/r \cdot y + z/r\cdot z\} = 2i\hbar r$$

従ッテ $(r^2p_r - p_r r^2)\psi(x'y'z') = 2i\hbar r'\psi(x',y',z')$

$$(r+r')(r-r')p_r\psi = 2i\hbar r'\psi.$$

$$\therefore (r-r')p_r\psi = (r+r')^{-1}\, 2i\hbar r'\psi.$$

$$\therefore (rp_r - p_r r)\psi = i\hbar\psi \quad \text{for } r'\neq 0.$$

然ルニ $\psi(0,0,0)$ ヲ除イタ任意ノ $\psi(x',y',z')$-state ニ 従ッテ

ソノ superposition ニ対シテ $(rp_r - p_r r)\psi = i\hbar\psi$

ガ成立スル。

∴ 任意ノ state ニ対シ approximately ニ コノ式ガ成立スル。

$$\therefore\ rp_r - p_r r = i\hbar.$$

ガ approximately ニ成立スル。

∴ p_r ハ r ノ conjugate ナルモノ。ソノ conjugate complex

$$\bar p_r = (p_x x + p_y y + p_z z + i\hbar) r^{-1} = (xp_x + yp_y + zp_z - 2i\hbar)r^{-1}$$

$$\cancel{p_x r^{-1}} = \frac{x}{r^3}$$

$$r^{-1}p_x - p_x r^{-1} = i\hbar\left(-\frac{x}{r^3}\right)$$

$$= r^{-1}(xp_x + yp_y + zp_z - 2i\hbar)$$
$$+ x\frac{x}{r^3} i\hbar + \cdots \quad = r^{-1}(xp_x + yp_y + zp_z - i\hbar)$$

∴ p_r ハ real observable デアル。

又 p_r ヲ使ッテ

$$M = r^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (rp_r + i\hbar)rp_r$$
$$= r^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - r^2p_r^2$$
$$\therefore H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{M}{r^2}\right) + V(r) \quad (53)$$

所デ M ハ H 及ビ r ト commute スルカラ、p_r^2 トモ commute スル。従ッテ M ヲ diagonal ニスル時ハ r, p_r ノ repr. ニ於テハ M′ ニ関シ diagonal ナ term ノミガ 0 ニナラヌカラ、コノ場合ニハ M ヲ一ツノ numerical ナ parameter ト見テヨイ。

(50) ニ於テ $\frac{\kappa}{2} = l$ トオクト

$$M' = \hbar^2 l(l+1) \qquad l\text{ ハ integer or half integer}$$

従ッテ

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2}\right) + V(r) \quad (54)$$

Coulomb field ノ場合ヲ考ヘル。

$$V(r) = -\frac{\varepsilon}{r} \qquad \varepsilon\text{ : const}$$

コノ場合ニハ $A = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{2m}(\mathbf{m}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{m}) + \frac{\mathbf{x}}{r}$ (55)

$$A_x H - H A_x = A_x\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\varepsilon}{r}\right) - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\varepsilon}{r}\right) A_x$$

$$= -\frac{1}{2m\varepsilon}(m \times p - p \times m)_x \frac{\varepsilon}{r} - \frac{\varepsilon}{r}(\qquad\qquad)_x$$

$$+ \frac{x}{r}\frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}\frac{x}{r}$$

$$= -\frac{1}{2m}\left\{ m \times \left(p\frac{1}{r} - \frac{1}{r}p\right) - \left(p\frac{1}{r} - \frac{1}{r}p\right) \times m \right\}$$

$$+ \frac{1}{2m}\sum_{xyz}\left(\frac{x}{r}p_x - p_x\frac{x}{r}\right)p_x + \frac{1}{2m}\sum p_x\left(\frac{x}{r}p_x - p_x\frac{x}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{2m}\frac{1}{r^3}(i\hbar)\{m \times r - r \times m\}_x$$

$$+ \frac{1}{2m}(i\hbar)\left\{\frac{y^2+z^2}{r^3}p_x - \frac{xy}{r^3}p_y - \frac{xz}{r^3}p_z\right\} + \frac{1}{2m}i\hbar\left\{p_x\frac{y^2+z^2}{r^3} - \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2m}\frac{1}{r^3}i\hbar\{m \times r - r \times m\}_x$$

$$- \frac{1}{2m}\frac{1}{r^3}i\hbar(z m_y - y m_z) + \frac{1}{2m}i\hbar(m_z y - m_y z)\frac{1}{r^3}$$

$$= - \;\;,\;\; - \frac{1}{2m}(r \times m - m \times r)\frac{i\hbar}{r^3}$$

$$= 0.$$

ガ constant of motion デアル。

依ッテ ~~AA~~. $A_x m_y - m_y A_x = \frac{1}{2m\varepsilon}(m_y p_z - m_z p_y - p_y m_z + p_z m_y)\,\underbrace{}_{\times m_y}$

$$- \frac{1}{2m\varepsilon}\{ m_y (m_y p_z - m_z p_y - p_y m_z + p_z m_y)$$

$$+ \frac{x m_y - m_y x}{r} = \frac{r}{2m\varepsilon}\{ m_y(-i\hbar)p_x + \cancel{m_y(-i\hbar)} p_x y + p_y i\hbar m_x$$

$$- i\hbar p_x m_y \} + i\hbar \frac{z}{r} \quad i\hbar m_x$$

$$= i\hbar A_z \qquad \text{etc}$$

$$\underbrace{}\ + \frac{x}{r}\}$$

$$A_x A_y - A_y A_x = \left\{\frac{1}{2m\varepsilon}(m_y p_z - m_z p_y - p_y m_z + p_z m_y)\right.$$

$$\times\left\{\frac{1}{2m\varepsilon}(m_z p_x - m_x p_z - p_z m_x + p_x m_z) + \frac{y}{r}\right\} - \cdots$$

$$= A_x (m \times p - p \times m)_y - (\quad)_y A_x$$

$$+ A_x \frac{y}{r} - \frac{y}{r} A_x + \frac{x}{r} A_y - A_y \frac{x}{r}$$

$$= -i\hbar \frac{2}{m\varepsilon} m_z H.$$

~~従ッテ~~ 今 H ノ一ツノ eigenvalue ヲ W' トシテ A 及ビ M ハ H ト commute スルカラ、H ヲ number トミテヨイカラ、

$$I = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\cancel{\hbar}} M + \frac{m_a \varepsilon}{\cancel{\hbar}\sqrt{-2W'}} A\right\}$$

ヲ得ル、

$$I_x I_y - I_y I_x = \frac{1}{4} i\hbar m_z / \cancel{\hbar} + \frac{1}{2} i\hbar A_z \frac{m_a \varepsilon}{\cancel{\hbar}\sqrt{-2H'}} \frac{1}{\cancel{\hbar}}$$

$$+ \frac{1}{4}(-i\hbar)\frac{2}{m\varepsilon} m_z H' \cdot \frac{m^2\varepsilon^2}{\cancel{\hbar}^2(-H')}$$

$$= i\frac{1}{2}\hbar\left\{ m_z/\cancel{\hbar} + \frac{m\varepsilon}{\cancel{\hbar}\sqrt{2H'}} A_z \right\} = i\hbar I_z$$

$$I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = \left(\frac{1}{\cancel{2\pi}}\hbar\right)^2 M + (mA + Am) + A^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{m\varepsilon^2}{\cancel{\hbar^2}(-2H')} - \hbar^2\right\}$$

然るに前節によって

~~$I_x^2 + I_y$~~

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{m\varepsilon^2}{\cancel{\hbar}^2(-2H')} - \hbar^2\right\} + \frac{\hbar^2}{4} = \frac{1}{4}(\cancel{n\ldots})\hbar^2 \quad n^2\hbar^2$$

n: ~~0 or~~ positive integer.

$(n-1)$: 0 or positive integer.

$$\therefore \quad \frac{m\varepsilon^2}{-2H'} = n^2\hbar^2$$

$$\therefore \quad \overset{\cancel{H'}}{W'} = -\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar^2 n^2}$$

Hydrogen like Atom の ~~場合~~ ε に atomic number Z の場合 $\varepsilon = Ze^2$ となる

$$W'\cancel{H'} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} = \frac{-\cancel{2\pi}R\hbar Z^2}{n^2} \qquad (56)$$

$$\left(= \frac{-R\hbar Z^2}{n^2}\right)$$

$$R = \frac{me^4}{\overset{4\pi}{\cancel{2}}\hbar^3} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$$

~~之より~~ 即ち（Hydrogen like Atom の Energy level に対して ~~Balmer の式が得られる~~。之は Bohr の理論と一致し、之から Balmer の式が直ちに出る。

然シナガラ今ノ場合ニ付テハ Schrödinger ノ wave equation ノ解キ方ガ遥カニ簡単デアル。

Hamiltonian (45) ニ対スル Schröd. ノ wave eq. ハ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(xyzt)=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(r)\right\}\psi(xyzt) \quad (57)$$

之ヲ polar coordinate ニ ~~直シ~~ 直シ $\psi(xyzt)=f(r\theta\varphi t)$ トスレバ、

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\overbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}^{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}f+V(r)f \quad (58)$$

H ノ eigenvalue W' ニ属スル eigenstate ニ対スル Schröd. ノ dif. eq. ハ

$$\cancel{\text{従ッテ}}\; W'f=-\frac{\hbar^2}{2m}\{\quad\}f+V(r)f \quad (59)$$

classical dynamics ニ於ケルト同様ニ此ノ式ハ

$$f(r\theta\varphi)=\chi(r)S(\theta,\varphi)$$

ナル形ノ solution ヲ持ツ。従ッテ χ, S ハ

$$(60)\begin{cases}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}S(\theta,\varphi)=-\lambda S(\theta,\varphi)\\ \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\cancel{n(n+1)}\,\lambda}{r^2}\right)+V\right\}\chi(r)=\cancel{W}\,W'\chi(r)\end{cases}$$

ナル式ヲ満足スル。

S(θ,φ) ガ θ,φ ノ one valued function デアル為ニハ

$$\lambda=l(l+1) \qquad l: 0 \text{ or positive integer.}$$

註　$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}S(\theta,\varphi)=-\lambda S$$

ノ solution ハ　$S=\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$　ナル形デアタラバ。

然ル　$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi=-\mu\Phi.$$

$$\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}\Theta=-(\lambda\sin^2\theta-\mu)\Theta$$

~~sin Φ ガ one valued function デアルタメニハ~~

然ル時　$\Phi=e^{\pm im\varphi}$　$m^2=\mu$.

之ガ one valued function デアルタメニハ　m : 0 or integer (positive)

~~然ル時 Θ ハ~~ 次ニ　$\cos\theta=x$ トオケバ

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\qquad \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}$$

∴ Θ ハ　$$\left\{\frac{(x^2-1)}{(1-x^2)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x^2-1)}{(1-x^2)}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\Theta+\left(\lambda-\frac{m^2}{(1-x^2)}\right)\Theta=0$$

ヲ満足セネバナラヌ。

$$\cancel{(x^2-1)}\ (1-x^2)^2\frac{d^2\Theta}{dx^2}-(1-x^2)\,2x\frac{d\Theta}{dx}+\{(1-x^2)\lambda-m^2\}\Theta=0.$$

~~此ノ式ノ singular point ハ x=±1, ∞ デアル.~~

~~$\Theta=\sum a_\nu(x-1)^\nu$, $\Theta=\sum b_\nu(x+1)^\nu$~~

$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u$ トオケバ

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(\lambda-m-m^2)u=0$$

$$u=\sum a_\nu x^\nu$$

$$(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}=\{\nu(\nu-1)+2(m+1)\nu-\lambda+m+m^2\}a_\nu$$

$\lambda=(k+m)(k+m+1)$ ナラバ　$a_{k+2}=a_{k+4}=\cdots=0$.

$=l(l+1)$

ソノ他ノ場合ハ　u ハ $x=\pm1$ ノ時 ∞ トナル。

ヲ得タノデアル。

従ッテ $\chi(r)$ ハ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\chi+V\chi=W'\chi \quad (60)$$

ヲ満足セネバナラヌ。

(54) カラ直接 ~~wave~~ Schrödinger eq ヲ出スト、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}(r/)+V(r/)=W'(r/) \quad (61)$$

∴ $(r/) = r\chi(r)$ トオケバ

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\chi)=r\frac{\partial\chi}{\partial r}+\chi \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\chi)=r\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}+2\frac{\partial\chi}{\partial r}.$$

セレバ、χ ハ丁度 (60) ヲ満足セネバナラヌ。即チドチラカラ出発シテモ結果ハ同ジ。

略ス

ソコデ Coulomb field ノ場合ニツイテ (60) or (61) ノ Solution ヲ求メテ見ヨウ。 $V(r)=-\frac{\varepsilon}{r}$ トスレバ、(60) ハ

$$(62) \quad \left\{\frac{d^2}{dr^2}\left(+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\}\chi=-\frac{2mW'}{\hbar^2}\chi$$

トナル。

~~Eigenvalue W' ガ既ニワカッテ居レバ~~ $W'=-\frac{m\varepsilon^2}{\hbar^2 n^2}$

~~トオケバ.~~

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\frac{1}{r}+\frac{2m^2\varepsilon^2}{\hbar^4 n^2}\right\}(r/)=0$$

其ノ Legendre associated function ニ対する。

十ニノ場合ニハ $P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}$

ガ方程式ノ solution デアル。

$$\because \quad (1-x^2)\frac{d^{m+l+2}(x^2-1)^l}{dx^{m+l+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+l+1}(x^2-1)^l}{dx^{m+l+1}} + \left(l(l+1)-m(m+1)\right)\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}} = 0$$

ガ l ノ値ニ 成立スルナラバ.

$$(1-x^2)\,\cancel{\frac{d^{m+l+1}(x^2-1)^{l+1}}{dx^{m+l+1}} = (1-x^2)}$$

(63)′ ノ solution ハ

$U_n = e^{-x/2} V_n$ トオクト

$$\frac{dU_n}{dx} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}V_n + e^{-\frac{x}{2}}\frac{dV_n}{dx}, \qquad \frac{d^2U_n}{dx^2} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 V_n - \frac{dV_n}{dx} + \frac{d^2V_n}{dx^2}\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2V_n}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dV_n}{dx} - \frac{dV_n}{dx} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{n-1}{x}\right\}V_n = 0.$$

$$V_n = x^{l}\cdot W_n, \quad \frac{dV_n}{dx} = l x^{l-1} W_n + x^{l}\frac{dW_n}{dx}$$

$$\frac{d^2V_n}{dx^2} = l(l-1)x^{l-2}W_n + 2l x^{l-1}\frac{dW_n}{dx} + x^{l}\frac{d^2W_n}{dx^2}$$

$$x\frac{d^2W_n}{dx^2} + \{2(l+1)-x\}\frac{dW_n}{dx} + (n-l-1)W_n = 0.$$

ソコデ $L_{n+l}(x) = e^x \dfrac{d^{n+l}(x^{n+l}e^{-x})}{dx^{n+l}}$ ナル ~~fun~~ ~~polynomial~~ function

$2r\sqrt{-\frac{2mW'}{\hbar^2}} = x$ ~~トオクト~~ $\chi(r) = u(x)$ トオクト

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} \pm \frac{2m\varepsilon}{2\hbar^2}\sqrt{\frac{-2mW'}{\hbar^2}}\,\frac{1}{x} \pm \left(\frac{2mW'}{\hbar^2}\right)^2\right\}u = 0 \quad \frac{1}{4}$$

eigenvalue W' ガ既ニワカッテヰルトシテ

$W' = -\frac{2m^2\varepsilon^2}{\hbar^2 n^2}$ トスレバ、ソレニ対スル eigenfunction u_n ハ

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} \pm \frac{2m^3\varepsilon^2}{\hbar^4 n}\sqrt{2}\,\frac{1}{x} \pm \left(\frac{2m^2\varepsilon^2}{\hbar^4 n^2}\right)^2\right\}u_n = 0$$

$\frac{2m^2\varepsilon^2}{\hbar^4} = \alpha$ トオクト

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} \pm \sqrt{2}\,\frac{1}{nx} + \frac{1}{n^2}\right\}u_n = 0$$

$u_n = e^{-x}\cdot v$ トオクト.

$\chi(r) = u(x)$

$e^{-\frac{x}{2}}$ $2r/\sqrt{\frac{-\hbar^2}{2mW'}} = x$ トオクト.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2m\varepsilon}{2\hbar^2}\sqrt{\frac{-\hbar^2}{2mW'}}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\right\}u = 0, \qquad (63)$$

$\left(+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}\right)$

eigenvalue W' ガ既ニワカッテヰルトシテ

$W' = -\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar^2 n^2}$ トスレバ、ソレニ対スル eigenfunction u_n ハ

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{n}{x} + \frac{1}{4}\right\}u_n = 0. \qquad (63)'$$

$\left(+\frac{2}{x}\frac{du_n}{dx}\right)$

次ニ Laguerre ノ polynomial ヲ考ヘル。

$$\frac{dL_{n+l}}{dx} = (n+l)\frac{dL_{n+l-1}}{dx} - (n+l)L_{n+l-1}$$

ナルコトハ容易ニワカル。

~~次ニ n+l ノ時ニ~~ 2レハ

(*) $$x\frac{d^2L_{n+l}}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_{n+l}}{dx} + (n+l)L_{n+l} = 0$$

ナル式ヲ得ルニハ ~~之ヲ容易ニハ~~ induction デ証明スル。

$$\because \quad x\frac{d^2L_{n+l}}{dx^2} = x(n+l)\frac{d^2L_{n+l-1}}{dx^2} - x(n+l)\frac{dL_{n+l-1}}{dx}$$

$$= (n+l)\left\{(x-1)\frac{dL_{n+l-1}}{dx} - x\frac{dL_{n+l-1}}{dx}\right\}$$
$$-(n+l-1)L_{n+l-1}$$

$$+\quad (1-x)\frac{dL_{n+l}}{dx} = (n+l)(1-x)\frac{dL_{n+l-1}}{dx} - (n+l)L_{n+l-1}(1-x)$$

$$\text{''} \quad = -x\frac{dL_{n+l-1}}{dx} - (n+l)\{(1-x)+(n+l-1)\}L_{n+l-1}$$
$$+(n+l)\frac{d}{dx}$$

$$dL_{n+l} = x\frac{dL_{n+l-1}}{dx} + (n+l)\frac{d}{dx}L_{n+l-1}$$
$$-xL_{n+l-1} + (n+l-1)L_{n+l-1}$$

$$L_{n+l} = x\frac{dL_{n+l-1}}{dx} + (n+l-1)L_{n+l-1} + (1-x)L_{n+l-1}$$

$$\text{''} \quad = \quad 0.$$

従ッテ $\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}L_{n+l}$ ''

$$x\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left(\frac{d^2L_{n+l}}{dx^2}\right) + \left(-\frac{1}{x}\right)(1-x)\frac{dL_{n+l}}{dx} +$$

(*)ヲ 2l+1 回微分スレバ

$$x\frac{d^{2l+3}L_{n+l}}{dx^{2l+3}} + (2l+1)\frac{d^{2l+2}L_{n+l}}{dx^{2l+2}} + (1-x)\frac{d^{2l+2}L_{n+l}}{dx^{2l+2}} - (2l+1)\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}$$
$$+(n+l)\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}$$

ヲ満足セシメル。ソノ solution ハ

$$u_n = x^{l+1} e^{-x/2} \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}} \left\{ e^{x} \frac{d^{n+l}}{dx^{n+l}} \left(x^{n+l} e^{-x} \right) \right\}$$

ナル形デ表ハサレル。{ }ノ中ハ Laguerre ノ polynomial ト称セラレテ居ル。コノ函数ハ x ノ ~~区間~~ $(0, \infty)$ ノ間ニ於テ一ツモ singular point ヲモツテ居ナイ。$x \to \infty$ ニ於テ expon. ニ0ニナル。~~従ツテ~~ 依ツテ (51) 従ツテ $X(r)$ ハ $r\,(0, \infty)$ ニ於テ singularity ヲ有セズ $r \to \infty$ ニ於テ exp. ニ0トナル。従テ

次ニ (56) ナル Energy value ニ対スル式ガ如何ニシテ出テ来ルカ ~~[illegible]~~ ハ次ニ述ベル。(62) ヲ以テ直接解カネバナラヌ。~~何故ナレバ (63)' ニ於テ n ヲ任意ノ unknown number (real or complex) ト見ナシタ。ソシテ W'<0 ノ時ニハ n real デ 又固有値 x ヲ imaginary~~

~~$$u = x^{l+1} e^{-x/2} w$$~~

~~トスレバ w ハ~~

~~$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + \{2(l+1) - x\} \frac{dw}{dx} + (n-l-1) w = 0$$~~

~~ヲ満足セシメル。~~

ソコデ $W' < 0$ ノ時ニハ $n = \sqrt{-\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar^2 W'}}$ トスレバ n ハ positive number デ x ハ ~~固有値~~ ニナル [?]

~~(63)' ナル微分方程式~~ ノ式ガ solution u ハ (63)' ヲ満足セシメル

$$u = x^{l+1} e^{-x/2} w \quad \text{トスレバ}$$

w ハ

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + \{2(l+1) - x\} \frac{dw}{dx} + (n-l-1) w = 0$$

從テ $w_n = \dfrac{d^{2l+1} L_{n+l}}{dx^{2l+1}}$ ナリトオケバ

$$x\frac{d^2 w_n}{dx^2} + \{2(l+1)-x\}\frac{dw_n}{dx} + (n-l-1)w_n = 0$$ ヲ満足ス。

$$\therefore \quad u_n = e^{-x/2} x^{l} \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left\{ e^x \frac{d^{n+l}(x^{n+l}e^{-x})}{dx^{n+l}} \right\}$$

ガ (63)′ ノ solution ナリ。

$\nu_0 = -2l-1$ ノ時ニハ u ハ $x=0$ ニ於テ x^{-l-1} ノ order ノ infinity トナル。~~$x=0$ ノ附近デハ方程式ハ~~

$l=0$ ノ時ニハ $\nu_0=-1$ ニ対スル ~~満足スル~~ 故ニ $\varepsilon \to 0$ ニシテ

$$\Delta(\chi S) = -4\pi\delta(x,y,z)$$

トイフ如キ solution ヲ得ル。　$l=1$ 以上ノ場合ニハ勿論 $\nu_0=-2l-1$ ニ対スル solution ハ物理的意味ヲ持タヌ。

ヲ満足セシムベキデアル。

$$w = \sum_\nu a_\nu x^\nu$$

トオクト

x^ν ノ係数ハ $(\nu+1)\nu a_{\nu+1} + 2(l+1)(\nu+1)a_{\nu+1} - \nu a_\nu$
$+ (n-l-1)a_\nu = 0.$

$$(\nu+1)(\nu+2l+2)a_{\nu+1} = (\nu-n+l+1)a_\nu$$

series ノ初項ヲ $a_{\nu_0}x^{\nu_0}$ トスレバ

$$\nu_0(\nu_0+2l+1)a_{\nu_0} = 0.$$

$\nu_0 = 0$ or $-2l-1$.

n: integer ~~l, 0 or positive integer デナイ。~~ 後ノ場合ニハ

~~u ハ $x=0$ ニ於テ~~ x^{-l-1} ノ order ノ infinity トナル。

~~後ノ場合ニ $\nu=0$ ニ於テ u ハ co ノ ...~~

~~前ノ場合ニ於テ~~ $n \geq l+1$

n: integer デアル場合ニハ $\nu = n-l-1$ ノ所デ series ハ terminate スル。此ノ場合ハ前ニ求メタ u_n ト一致スル。

n: integer デナイ場合ニハ ν ヲ大キクスルトキ

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \to \frac{1}{\nu}$$

故ニ $x \to \infty$ デ e^x ノ order ノ infinity トナル。

∴ u ハ $e^{\frac{x}{2}}$ ノ order ノ infinity トナル。而シテ this state ハ物理的意味ヲモタナイコトニナル。

repr

物理的ニ

$W' < 0$ ノ場合 eigenvalue ハ $W' = -\frac{me^2}{2\hbar^2 n^2}$ n: int. ノ場合ニ限ラレル。

$W' > 0$ ノ場合 $n' = \sqrt{\frac{me^2}{2\hbar^2 W'}}$, $2r\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mW'}} = x$ トオクト

$\frac{2}{x}$

$$\frac{du}{dx} = \underline{l x^{l-1} e^{\pm\frac{x}{2}i} v} \pm \frac{i}{2} x^{l} e^{\pm\frac{x}{2}i} v + x^{l} e^{\pm\frac{x}{2}i} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \underline{l(l-1) x^{l-2} e^{\pm\frac{x}{2}i} v} \pm 2\frac{i}{2} l x^{l-1} e^{\pm\frac{x}{2}i} v$$
$$+ 2l x^{l-1} e^{\pm\frac{x}{2}i} \frac{dv}{dx} - \underline{\frac{1}{4} x^{l} e^{\pm\frac{x}{2}i} v}$$
$$\pm 2\frac{i}{2} x^{l} e^{\pm\frac{x}{2}i} \frac{dv}{dx} + x^{l} e^{\pm\frac{x}{2}i} \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left\{(2l+2)/x \pm i\right\}\frac{dv}{dx} \pm (2l+2)\, i/x\, v$$

$$+ n'/x\, v = 0$$

(65) ノカハリニ

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}-\left\{\frac{l(l+1)}{x^2}-\frac{2m\varepsilon}{2\hbar^2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV}}\,\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right\}u=0$$

or $$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}-\left\{\frac{l(l+1)}{x^2}-n'\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right\}u=0$$

$u=x^l e^{\pm\frac{x}{2}i}v$ トオケバ，v ハ

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left\{\frac{2l+2}{x}\pm i\right\}\frac{dv}{dx}+\frac{n'\pm(2l+2)i}{x}v=0$$

$v=\sum_\nu a_\nu x^\nu$ トオケバ

x^ν ノ係数ハ $(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}+(\nu+2)(2l+2)a_{\nu+2}$
$\pm i(\nu+1)a_{\nu+1}+n'\pm(2l+2)i\,a_{\nu+1}=0$

初項ヲ a_{ν_0} トスレバ．

$\nu_0\{\nu_0+2l+1\}a_{\nu_0}=0$．

$\therefore\ \nu_0=0$ or $-2l-1$，

ν ガ非常ニ大キクナレバ

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\to\mp i/\nu+1$$

即 $x\to\infty$ ニテハ series ハ大体 $e^{\mp ix}$ ノ如ク振舞フ．

(今度ハカウシテモヨイ x ノ大ナル所デハ方程式ハ大体

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}+\left(n'\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\right)u=0$$

故ニ u ハ $e^{\pm\frac{x}{2}i}$ ノ如ク振舞フ．)

$\frac{i}{x}v$ $\qquad\qquad$ $\frac{2}{x}$

$$\frac{2}{x}\frac{du}{dx} = \pm\frac{i}{2}e^{\pm\frac{x}{2}i}v + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx}e^{\pm\frac{x}{2}i}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{4}e^{\pm\frac{x}{2}i}v \pm i e^{\pm\frac{x}{2}i}\frac{dv}{dx} + e^{\sim}\frac{d^2v}{dx^2}$$

$u = e^{\pm\frac{x}{2}i}\, v$ ト置ク

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} \pm i\right)\frac{dv}{dx} + \frac{n' \pm i}{x} v = 0$$

x ノ大キイ所デハ ~~右側ノ~~ v ノ変化ハ少イ故ニ $\frac{d^2v}{dx^2}$ ハ $\frac{dv}{dx}$ ニ比シテ小ナレバ

$$\cancel{\frac{d^2v}{dx^2} \pm 2i\frac{dv}{dx}}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1 \mp in'}{x} v = 0$$

$$v = \frac{e^{\pm in'\log x}}{x}$$

$$\therefore\quad u = \frac{e^{\pm\left(\frac{x}{2} + n'\log x\right)i}}{x}$$

故ニ x ノ大キイ時ハ $\frac{1}{x}$ ノ order デ 0 トナル。
∴ $W' > 0$ ノ時デハ総テノ値ガ eigenvalue トナル。故ニ energy level ハ positive ノ所デハ continuous トナッテ居ル。
コレハ Hydrogen ノ series limit ノ short wave length side ニ continuous spectra ノ存在スルコトヲ示シテ居ル。

~~Matrix element~~ 以上ハ水素原子ニ於ケル Energy ノ eigenvalue 及 eigenfunction ヲ求メタカラ、依テ、~~dynam~~ observable ニ対スル ~~m~~ Heisenberg ノ matrix element ヲ計算スルコトガ出来ル。

spherical harmonics ノ normalization ハ次ノ如クシテ出来ル

$$S(\theta,\varphi) = e^{\pm im\varphi}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}$$

$$x = \cos\theta,$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int \bar{S}S\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^m\left(\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left((1-x^2)^m\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}\right)\frac{d^{m+l-1}(x^2-1)^l}{dx^{m+l-1}}\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}(\quad)\frac{d^{m+l-1}(\ )}{dx^{m+l-1}}dx$$

$$= (-1)^m\int_{-1}^{+1}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}\right\}\cdot\frac{d^{l}(x^2-1)^l}{dx^{l}}dx$$

$$= (-1)^{m+l}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}\right\}(x^2-1)^l dx$$

$$= (-1)^{m+l}(-1)^m\frac{2l!\,(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l dx$$

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l dx = \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{l-1}x^2 dx - \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{l-1}dx$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-1}^{+1}x\frac{d}{dx}(x^2-1)^l dx - \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{l-1}dx = \frac{-1}{2l}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l dx - \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{l-1}dx$$

$$\therefore \int(x^2-1)^l dx = -\frac{2l}{2l+1}\int(x^2-1)^{l-1}dx = (-1)^l\frac{2l(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3}\cdot 2$$

$$= (-1)^l\frac{(2^l l!)^2\, 2}{(2l+1)!}$$

$$\therefore \int \bar{S}S\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\frac{(2l)!\,(l+m)!\,(l!)^2}{(2l+1)!\,(l-m)!}2^{2l+1} = 2\pi\frac{2^{2l+1}(l!)^2(l+m)!}{(2l+1)\,(l-m)!}$$

~~[illegible]~~ 先 eigenfunctionヲ normalizeスル。

energyノ negative valueニ於テハ

$$\int \bar{f}(r\theta\varphi) f(r\theta\varphi) r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 1$$

ナル様ニトレバヨイ。

ソレニハ radial part $\chi(r)$ ト angular part $S(\theta,\varphi)$

ヲ別々ニ normalizeスレバ。

$$\int \bar{S} S \sin\theta \, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \left| \left(e^{\pm im\varphi} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}} \right) \right|^2 dx\, d\varphi$$

$$= 2\pi \frac{2^{2l+1}(l!)^2 (l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

故ニ ~~radial~~ angular part トシテハ

$$\sqrt{\frac{(l-m)!\,(2l+1)}{(l+m)!\;\pi}} \cdot \frac{1}{2^{l+1}\, l!}\, e^{\pm im\varphi} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}(x^2-1)^l}{dx^{m+l}}$$

ヲトレバヨイ。

次ニ radial part トシテハ

$$2^3 \left(\sqrt{\frac{-\hbar^2}{2mW}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\, \chi_n(r) \qquad //$$

ヲトレバヨイ。

ソノ eigenfunctionヲ後ヘ記ス [illegible] 　　　工、己略之。

$$u_n = e^{-x/2}\, x^l \,\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left\{ e^x \frac{d^{n+l}(x^{n+l}e^{-x})}{dx^{n+l}} \right\}$$

$$\int_0^\infty u_n^2 x^2\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} \left[\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left\{ e^x \frac{d^{n+l}(x^{n+l}e^{-x})}{dx^{n+l}}\right\}\right]^2 dx$$

$$= (-1)^{2l+1}\int_0^\infty \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left\{ e^{-x} x^{2l+2} \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\left\{\quad\right\}\right\}\left\{ e^x \frac{d^{n+l}(x^{n+l}e^{-x})}{dx^{n+l}}\right\} dx$$

$$= (-1)\cdot (-1)^{n+l}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\cancel{\frac{(-1)^{2l+1}(n+l+1)!}{(n-l)!}}\,(n+l+1)!\int_0^\infty \{x^{n+l+1}e^{-x}\}\,dx$$

$$\therefore\ u_n' = \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\, e^{-x/2} x^l \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\{\cdots\}$$

トナレバ $\int_0^\infty u_n'^2 x^2\, dx = 1$ トナル。 $\therefore\ u_n(x) = \chi_n(r)$ トスレバ

$x = \dfrac{2r}{\sqrt{-\frac{\hbar^2}{2mW}}}$ トオケバ $2^3\left(\dfrac{-\hbar^2}{2mW}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\, \chi_n(r)$ ヲトレバ

$\cancel{\dfrac{2r}{x^3}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}}$ normalized eigenfunction トナツテ居ル。

~~ヤユデ Coum~~

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}v + e^{-\frac{x}{2}}\frac{dv}{dx} \qquad \frac{2}{x}\frac{du}{dx} = \left\{-\frac{1}{\cancel{4}x}v + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right\}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}v - e^{-\frac{x}{2}}\frac{dv}{dx} + e^{-\frac{x}{2}}\frac{d^2v}{dx^2}$$

次デ Coulomb field ノ場合ニツイテ (60) 又ハ (61) ノ Solution ヲ求メテ見ル。 $V(r) = -\frac{\varepsilon}{r}$ トスレバ (60) ハ

$$(62)\quad \left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\}\chi(r) = -\frac{2mW'}{\hbar^2}\chi(r)$$

トナル。

次ニ先ヅ eigenvalue $W'<0$ ノ場合ヲ考ヘル。

$\sqrt{-\frac{\hbar^2}{2mW'}} = r_0$　　$x = \frac{2r}{r_0}$　~~トオケバ~~ $\chi(r) = u(x)$ トオケバ.

(62) ハ

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{du}{dx} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} - \overbrace{\frac{2m\varepsilon}{2\hbar^2}\sqrt{-\frac{\hbar^2}{2mW'}}}^{C}\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\right\}u = 0 \quad (63)$$

然ルニ

$$C = \frac{2m\varepsilon}{2\hbar^2}\sqrt{-\frac{\hbar^2}{2mW'}} = \sqrt{-\frac{m\varepsilon^2}{2W'\hbar^2}}$$

$u = x e^{-\frac{x}{2}} v$ トオケバ

(63) ハ

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{dv}{dx} - \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} - (C-1)/x\right\}v = 0$$

or

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2} + (2x - x^2)\frac{dv}{dx} + \{(C-1)x - l(l+1)\}v = 0.$$

$v = \sum a_\nu x^\nu$ トオケバ

x^ν ノ係数ハ $\underbrace{\nu(\nu-1)a_\nu + 2\nu a_\nu - (\nu-1)a_{\nu-1} + (C-1)a_{\nu-1} - l(l+1)a_\nu}_{=0}$

or $\{\nu(\nu+1) - l(l+1)\}a_\nu = (\nu - C)a_{\nu-1}$

∴ ~~初項 a_{ν_0} 最低次ノ power ν_0~~ ハ $a_{\nu_0-1} = a_{\nu_0-2} = \cdots = 0$　$a_{\nu_0} \neq 0$

ノ時ニハ $\{\nu_0(\nu_0+1) - l(l+1)\} = 0$.　∴ $\nu_0 = l$ or $-(l+1)$.

後ノ方ヲトレバ eigenfunction ハ $x=0$, 即チ $r=0$ ニ於テ $\frac{1}{r^{l+1}}$ ノ

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{r} \right\} \chi(r) = -\frac{2mW'}{\hbar^2}\chi(r)$$

$r=0$ ノ附近 ~~ト合致スル~~

order ノ infinity トナル。 $l \geq 1$ ノ場合ニハ electron ガ ~~origin ノ附近~~

~~dv ナル容積ノ中ニ在ル probability ハ $\int \chi^2(r)\, r^2 dr \cdot \int S^2(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta d\varphi$~~

内ニ在ル probab. ハ $c(r) = c\, r\, \chi(r)$ ガ normalized eigenfn ナレバ

$$\int |c(r)|^2 dr = \bar{c}c \int \chi^2(r)\, r^2 dr$$ ~~……~~ ナリ

故ニ r ヲ 0 ニ近付ケテモ prob ハ 0 トナル。

c ハ実際 finite ノ値ヲトル故 カヽル state ハ 物理的ナ意味ヲ モッテ居ル。カクシテ central motion ヲ行ツテ居ル ~~elect~~ particle ニ於ケル stationary state ト認メルコトガ出来ル。

$l=0$ ノ場合ニハ angular part $S(\theta,\varphi) = \text{const}$ トナル。

$$\chi(r) \qquad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{\varepsilon}{r} \right\} \chi(r) = W' \chi(r)$$

ヲ満足セネバナラヌ。然ルニ $\varepsilon \to 0$ ニスレバ $c \to 0$ デ従ツテ

~~$a_{-1} \neq 0 \quad a_0 = a_1 = \cdots = 0$ トナリ $\chi(r) = \frac{c}{r}$ トナル故~~

$\chi(r) \to \frac{1}{r}$ トナル。 ~~ヨツテ此場合~~

$$-\frac{\hbar^2}{2m}$$

故ニ $\nu_0 = l$ ノ場合ヲトレバ. $c = n$ ノ時ニハ $a_n = 0$ トナル。

従ツテ v ハ x ニ関スル polynomial トナリ

$$u(x) = e^{-\frac{x}{2}} v$$

ハ x $(0,\infty)$ 従ツテ $\chi(r)$ ハ r ノ $(0,\infty)$ ニ於テ continuous ヲ ∞ ニ於テ exponentially ニ 0 トナル函数トナル。

~~$c \neq n$ ノ時ニハ~~ 即チ $\sqrt{\frac{-m\varepsilon^2}{2W'\hbar^2}} = n$ or $W' = -\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar^2 n^2}$

ハ eigenvalue デアル。

Cナル，時ニハ　νガ大キ~~ナ所デ~~クナルニツレ

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \rightarrow \frac{1}{\nu}$$

series ハ x ~~ノ大キナ値デ~~ ハヲ比ベルト

級数ハ大体　e^{x} ノ order デアル。

∴ $u = e^{-\frac{x}{2}} v$ ハ $e^{\frac{x}{2}}$ ノ order デアル。

カヽル state ~~ハ~~ハ 物理的ナ意味ヲモチ得ナイカラ.

W<0 ノ時ノ eigenvalue ハ

$$W' = -\frac{m\varepsilon^2}{2\hbar n^2}$$

ナル discrete ナ値ニ限ラレル。

W' > 0

charged particle ノ ~~particle~~ ニヨツテ absorb emit サレ

Classical theory ニヨレバ ~~X~~ノ vibrating ~~system~~ ガ発スル
radiation ハ ~~最~~ 大体ニ於テ ~~dipole~~ electric dipole ニヨルモノデ、
~~[illegible]~~ x, y, z ヲ Fourier series ニ展開シタ時、~~[illegible]~~ ~~振動数~~
出テクル term ノ振動数ト同ジ振動数デ、~~x, y, z~~ ノソノ各係数ノ
絶対値ノ二乗ニ比例スル（各振動数ニ関係スル）
~~radiation~~ intensity ノ radiation ヲ emit スル。
absorb

system ノ
然ニ此ノ場合ニ ~~[illegible]~~ 量子力学ニ於テ ~~electric dipole~~ ニ
charged particle
~~radiation~~ emit 又ハ absorb サレル radiation ノ ~~intensity~~ 中
dipole ニヨルモノノ、振動数ハ x, y, z ノ Heisenberg ノ matrix
ノ各 element ノ振動数ト同ジデ、intensity ハ ~~[illegible]~~ matrix element
ノ絶対値ノ二乗ニ比例スル（　〃　〃　）。
~~intensity~~ ソレデ radiation ガ ~~ノ~~ matrix element ノ関係シテ居ル二
ツノ state ノ間ノ transition ニヨツテ emit 又ハ absorb サレルモノト
考ヘルノデアル。従ッテ x, y, z ノ matrix element ガ 0
デナイ様ナ 2ツノ state ノ間ノ transition ニヨッテ dipole radiation
起リ得ルノハ ~~ノ間~~
ガ emit サレルノデアル。
absorb

カクシテ central symmetric field ニ於ケル particle ノ stationary state ハ energy value W', angular momentum 量ノ絶対値ニ関係シタル数 l, angular momentum ノ z component ノ $\frac{1}{\hbar}$ デアル m ナル数ニヨッテ characterize サレル。
Coulomb field ノ場合ハ n'

(W', l, m) ヲ diagonal ニシタル ~~座標~~ x, y, z ~~ナル~~ ノ matrix element ヲ作ッテ見ルニ

r

$$m_z z - z m_z = 0$$

デアルカラ $\cancel{m_z' = m_z''}$ ノ

$$m'(W'l'm'|z|W''l''m'') - (W'l'm'|z|W''l''m'')m'' = 0$$

∴ $m' \neq m''$ ノ場合ハ ~~z ノ matrix~~ $(W', l', m'|z|W'', l'', m'') = 0$

~~∴ electric dipole dis~~ ニヨル radiation ノ emission ~~ノ中ノ z 方向ニ polarize シテ居ルモノ~~

即チ z-direction ニ polarize シタ dipole radiation ハ m ノ change ガ 0 デアル様ナ transition ニ際シテ emit (absorb) サレル。 $\Delta m = 0$。

次ニ $m_z(m_z x - x m_z) - (m_z x - x m_z) m_z = i\hbar(m_z y - y m_z) = i\hbar(-i\hbar x)$

∴ $m_z^2 x - 2 m_z x m_z + x m_z^2 - \hbar^2 x = 0$

or $m'^2(m'|x|m'') - 2 m_z'(|x|) m'' + (|x|) m''^2 - \hbar^2(|x|) = 0$

∴ $\frac{m_z'^2}{\hbar^2} - 2\frac{m_z'}{\hbar}\frac{m_z''}{\hbar} + \frac{m_z''^2}{\hbar^2} - \hbar^2 = 0$

or $(m_z' - m_z'' - \hbar)(m_z' - m_z'' + \hbar) = 0$

デナケレバ $(m'|x|m'')$ ハ 0。z ノ関係ハ y ニツイテモ同様

$l' - l''$

$\cancel{-2(l'+1)^2 l''(l''+1) + 2(l'+1)l''(l''+1)}$

$\cancel{l' = -(l''+1)}$.

$(2\alpha+1)\, l''$

$l'^2(l'+1)^2 - 2\, l' l'' (l'+1)(l''+1) \quad l''^2 (l''+1)^2 - 2\, l'(l'+1) \cancel{2l''} - 2\, l''(l''+1) = 0$

l''^2

$\cancel{(l'+1)^2 \{ l'^2 - 2\, l''(l''+1)}$

$\{(2\alpha+1)\, l''\}^2 - 2\{l''^2 + (2\alpha+2)\, l''\} = 0$

$l' = l'' + \alpha. \quad \cancel{l''+1}$

$\{(2\alpha+1)^2 - 4\}\, l''^2 - 2\{(2\alpha+1)^2 - 2\alpha - 2\}\, l''$

$+ (2\alpha+1)^2$

故に x or y direction に polarise した dipole radiation が emit 又は absorb される時は m の change $\Delta m = \pm 1$ なる如き transition に限られる。

次に
$$Mz - zM = (m_x^2 z - z m_x^2) + (m_y^2 z - z m_y^2)$$
$$= i\hbar(-y m_x - m_x y + x m_y + m_y x)$$
$$= 2i\hbar(m_y x - m_x y + i\hbar z)$$
$$= 2i\hbar(m_y x - y m_x) = 2i\hbar(x m_y - m_x y)$$
$$Mx - xM = 2i\hbar(y m_z - m_y z)$$
$$My - yM = 2i\hbar(m_x z - x m_z)$$
$$\therefore M(Mz - zM) - (Mz - zM)M$$
$$= 2i\hbar\{M(m_y x - m_x y + i\hbar z) - (m_y x - m_x y + i\hbar z)M\}$$
$$= -4\hbar^2\{m_y(y m_z - m_y z) - m_x(m_x z - x m_z)\}$$
$$- 2\hbar^2(Mz - zM)$$
$$= -4\hbar^2\{(m_x x + m_y y + m_z z)m_z - (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2)z\}$$
$$- 2\hbar^2\{Mz - zM\}$$
$$M^2 z - 2MzM + zM^2 - 4\hbar^2 Mz + 2\hbar^2 Mz - 2\hbar^2 zM = 0$$
$$M'^2 - 2M'M'' + M''^2 - 2\hbar^2 M' - 2\hbar^2 M'' = 0$$
それ故 z の matrix el. は 0.
$$(M' - M'')^2 - 2\hbar^2(M' + M'') = 0$$
$$\{l'(l'+1) - l''(l''+1)\}^2 - 2\{l'(l'+1) + l''(l''+1)\} = 0$$
or
$$(l' - l'' + 1)(l' - l'' - 1)(l' + l'')(l' + l'' + 2) = 0$$
$\therefore$ l の change $\Delta l = \pm 1$ or for $l' = l'' = 0$.

然るに $l' = l'' = 0$ なれば $m_x' = m_y' = m_z' = m_x'' = m_y'' = m_z'' = 0$

$\therefore$ x, y, z の ~~direction~~ matrix は皆 0. $\therefore$ $l' = l'' = 0$ なる transition は起らず。 $\therefore$ l の selection Rule は $\Delta l = \pm 1$.

transformation を考へる (linear operator の中で, state ~~一つの state を他に移す~~) ~~特に悪くない状態の中で~~ 逆をもつて居るものを見ることが ~~出来る~~. とすれば.

$\psi \to A\psi = A^{-1}(A\psi) \to \psi$.

α: real ~~observable~~ (linear) operator

any $\qquad \alpha\psi = a\psi$ とすれば

$$\to \quad A\alpha A^{-1}(A\psi) = A\alpha'\psi = \alpha'(A\psi)$$

逆に $\qquad A\alpha A^{-1}\psi = \alpha'\psi$.

$$\alpha(A^{-1}\psi) = A^{-1}\alpha'\psi = \alpha'(A^{-1}\psi) \;!!$$

$A\alpha A^{-1}$ は real.

$$A\alpha A^{-1} = \tilde{A}^{-1}\alpha\tilde{A} \qquad \text{for any real observable}$$

~~$\therefore \tilde{A}^{-1}A\alpha = \alpha\tilde{A}^{-1}A$.~~

$\therefore \alpha A^{-1}\tilde{A} = A^{-1}\tilde{A}\alpha \qquad$ for any real observable

$\therefore \quad A^{-1}\tilde{A} = c$: number

or $\tilde{A} = cA$. $\qquad \therefore A = \bar{c}\tilde{A}$

$|c| = \cancel{1}$

$\tilde{A}A\alpha = \alpha\tilde{A}A$. $\qquad \tilde{A}A = c^2$: pos. ~~real~~ number $\quad$ c: real

従って $A\tilde{A} = c^2$, $\qquad c$ を $A = AcT$ とすれば.

$T\tilde{T} = 1 \quad \tilde{T} = T^{-1}$.

この逆をもつて居る様な operator は unitary operator 又はそれに real な numerical factor のかゝつたものに限られる。

$A(\xi') =$

Chapter. V. Transformation Group and Perturbation Theory

緒言

前章ニ述ベル様ニ吾々ガ学ブ問題ハ一般ニ system ニ適當ナ 与ヘラレタ Hamiltonian H ~~ヲ含ム wave fn~~ equ ヲ立テ、system ノ任意ノ dynamical variable ξ ニ對スル Equation of motion

$$i\hbar\dot{\xi} = i\hbar\frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi H - H\xi \qquad (1)$$

又ハ之ト equivalent ナ ~~wave equation~~ system ノ状態 (state) ノ満足スベキ

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \qquad (2)$$

ノ問題ノ條件ニ適スル solution ヲ求メルコトニ帰着スル。

併ルニ前章ノ example デ述ベタ様ナ簡単ナ場合ノ他ハ eq. of motion 又ハ wave equation ノ exact solution ヲ求メルコトハ困難デアル。ソレナラズ一般ニハ Hamilton 函数ノ正シイ形ガ知ラレテ居ナイ場合モアル。

カヽル ~~一般~~ 複雑ナ問題ヲ解ク一般的方法ニハ二ツアル。

第一ハ eq of motion 又ハ wave eq. ノ approximate solution ヲ求メル方法デアッテ、Perturbation Theory ~~ト云ハレテ居ルモノデアル。~~ ナル systematic ナ方法ガアル。

第二ハ ~~Hamilton 函~~ system ノ持ッテ居ル種々ノ性質殊ニ対称的ナ性質 ~~ヲ考慮スルコトニ依ッテ~~ ヲ考慮シ、ソレカラ多クノ重要ナ結論ヲ derive スル方法デアッテ、之ハ所謂 Transformation Group ノ理論ヲ吾々ノ学ニ応用スルコトニ他ナラヌ。コノ場合ニハ屡々 Hamiltonian 函数ノ ~~正確ナ形~~ exact ナ ~~exact~~ 形ヲ知ラナクテモアル程度ノ結論ガ得ラレル点ニ大ナル長所ガアル。先ヅ第一ノ方法ヲ論ジヨウ。

コノ二ツノ方法ハ相互ニ密接ナ関係ヲ持ッテ居ル。

Contact Transformation ノ逆ハ又、ヘモツテヰル。
(unitary 〃 〃)

$$A^{-1}A = E$$

A^{-1} ノ逆ヲ A' トスレバ。 $A'A^{-1}A = A'E$ $\therefore A = A'$.

コノ場合 system ハ

コレ等 Transformation Group ハ inner system ノ Hamilton 函数ノ性質ニ依テ定マル

§ Transformation Group

一ツノ dynamical system ~~ノ state~~ ガ アル種ノ変換ニ対シテ ~~不変~~ 不変ナ ~~性質ヲ持ッテキル~~ 場合ニ、カカル変換ノ全体ハ一ツノ Group ヲツクル。何故ナラバ、二ツノ変換 A, B ヲ続ケテ行ッタトキ ~~ニナル結果~~ BA ナル積ノ形ニカケル。A, B 共ニ system ノ一ツノ性質ヲカヘナイ ~~ナラバ~~ カラ、コレヲ二ツ続ケテ行ッテモ system ノ性質ハカハラズ、カラ BA モ又其ノ群ニ属スル。又 system ニ何等ノ変換ヲモ行ハナイ場合 ~~即チ Einheit モ又~~ 即チ Einheit E モ群ニ属スルコトハ明カデアル。又任意ノ element A ノ逆 A^{-1} ヲ ~~transform スル~~ A ト A^{-1} トヲ引キ続イテ行ヘバ元ヘ戻ル故、~~モトノ~~ 変換ナキ即チ $A^{-1}A = E$ (従ッテ $AA^{-1} = E$.) ト云フコトニナリ、之モ矢張群ニ属スルモノ。

例ヘバ system ガ central symmetric ナ性質ヲモッテ居ルナラバ、centrum ノマハリニ任意ノ rotation ヲ行ッテモ ~~sys 同様ナ system デアル~~ Hamilton 函数ハ変化ヲ受ケナイカラ、此 system ~~即チ atomic system ノ如キモノ~~ ハ Rotation Group ニ対シ invariant デアル。~~ナル~~ 例ヘバ atomic system ハ ~~ある~~ nucleus ヲ fixed ト見レバカカル system ノ一種デアル。

又同ジ particles ヨリナル system ハ particles ノ間デ任意ノ交換ヲ行ッテモ元ト ~~同様ナ~~ (区別ノ出来ナイ) system デアルカラ、カカル system ハ Permutation Group ニ対シ invariant デアル。故ニ凡テノ実在スル system ハ凡テコレニ属シテ居ル。

此ノ Permutation group ノ如キモノモ Transformation group ノ内ニ入レテオク。

又 ~~special~~ relativity ノ principle ニ従ヘバ凡テノ dynamical

ト実際上ニ入ル二ツノ制約 transformation ハスベテ linear operator デアル。

(Group ノ任意ノ ~~element~~ transformation A ニヨッテ) [両方向ナ] system ノ任意ノ state ψ ハ (其ノ) system ノ一ツノ state ニ transform サレル。結果ヲ表ハスニ $A\psi$ ヲ以テスル。然ルニ 二ツノ transf. A, B ノ積 BA ヲ新シイ変数トシテ $BA\psi = B(A\psi)$ トセバ 従ッテ [掛算ノ] associative law ハ hold スル。又 ~~transf~~ ハ一般ニ ニツノ state ψ_1, ψ_2 ニ対シ transformation ハコノ任意 linear operator デアルトスル

$$A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(A\psi_1 + A\psi_2)$$

ガ成立スルトスル。スル Transformation ヲ各系ノ observable ト見ナサレ

ナイ。今 H ノ eigenvalue W' ニ属スル eigen state

$$H\psi = W'\psi$$

然ル時ハ Transformed サレタ system ノ Ham. ヲ H' トスレバ $A\psi$ ハ H' ニ属スル

$$H'A\psi = W'A\psi$$

system ノ偏在スル時分子的位置ノ分布ハ Lorenz transformation ニ對シテ invariant デアル。

コレ等三ツノ例ニ於ケル invariancy ノ性質ニハ更ニ相違ガアル。即チ第一ノ場合ニハ Hamilton 函數自身、次ノ場合ニハ system ノ任意ノ實際 observe サレル確率、最後ノ場合ニハ分子的位置分布ハ relativistic ナ wave eq. ガ invariant デアル。
然シ後ノ二ツノ場合デモ wave eq. ノ形ハ變ハラヌ。
（分子的位置分布ノ場合）
即チ system ノ任意ノ state ヲ transform ~~サレタ~~ シテ得ラレル state モ又 system ノ state デアル。

函數ヲ transformation ヲ A トスレバ ~~デアラ~~ 任意ノ state ψ ガ ~~$A\psi$ ニナッタトスル~~ A ニヨッテ ψ' ニカハッタトスレバ $\psi' = A\psi$ トカイテ $A\psi$ モ又 system ノ state デアル。
又二ツノ transf. A, B ノ積 BA ハ定義ニヨリ $BA\cdot\psi = B(A\psi)$ デ與ヘラレ、從ッテ transf. ノ掛算ノ associative law ハ hold スル。又 transf. ハ linear operator デナケレバナラヌ。
（上ノ例デハ今迄ノ所ハ總テ滿足シテヰル。）
即チ任意ノ二ツノ state ψ_1, ψ_2 ニ對シ

$$A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1 \cancel{(A\psi_1 + A\psi_2)}\, A\psi_1 + c_2 A\psi_2$$

ナルヲ要ス。次ニ transf A ハ observable ト如何ナル關係ニアルカ。
今 system ノ任意ノ observable ヲ α トシ、ノ eigenvalue α' ニ屬スル eigenstate ヲ $\psi_{\alpha'}$ トスレバ

$$\alpha\psi_{\alpha'} = \alpha'\psi_{\alpha'}$$

此ノ transf A ニヨッテ α ハ α_1 ニ、$\psi_{\alpha'} \to A\psi_{\alpha'}$ ニナッタトスレバ、

transform ノ variable ノ change トスルカ, q ノ eigenvalue q' …
又ハ variable ノ eigenvalue Aq' ニカハラザルナリ
repr. ヲ変ヘルトスルカ

* ~~rep.~~ ヲトルカ,
$$A(q'|) = (q'|)(Aq'|)$$
$$(q''|A|q') = \delta(q''-Aq'|) \quad (q''|A^{-1}|q') = \delta(q''-A^{-1}q'|)$$
$$(q''|\bar{A}|q') = \overline{(q'|A|q'')} = \delta(q'-Aq''|) = \delta(A^{-1}q'-q''|)$$
$$\therefore \bar{A} = A^{-1}.$$

† $\bar{A} = A^{-1}$ ハ一般デハ

α: real ナラバ
$$A\alpha A^{-1} = \bar{A}^{-1}\alpha\bar{A} \quad \text{or} \quad \bar{A}A\alpha = \alpha\bar{A}A. \text{ for any } \alpha$$
: real
$$\therefore \bar{A}A = C^2 : \text{real pos. number.} \quad \therefore \bar{A} = C^2A^{-1}$$
∴ transformation A ハ一般ニ $A = CB$　C: real number ナルモノ
トナル。但シ $\bar{B} = B^{-1}$. *

† ∴ ~~$AHA^{-1} = H$~~

~~故ニ~~. ~~$H\psi = W'\psi$ or $AHA^{-1}A\psi = W'A\psi$~~

又ハ ~~$H'(A\psi) = W'A\psi$~~

ナルニテ ~~$(AHA^{-1})A\psi = H'A\psi$ for any eigen ψ~~

∴ ~~AH~~

∴ $H\psi = W'\psi$.

$A H\psi = AW'\psi$ or $H(A\psi) = W'(A\psi)$ for any eigen ψ

ナルニ transformed system ノ Hamil. ヲ H' トスレバ.

$H'(A\psi) = W'(A\psi)$　for any eigen ψ

∴ $H'A = HA$ for any eigen ψ. ∴ $H'A = HA$　∴ $H' = H$.

or 故ニ

$$\alpha_1 (A\psi_{\alpha'}) = \alpha' A\psi_{\alpha'} = A\alpha'\psi_{\alpha'}$$

∴ $$(\alpha_1 (A) \psi_{\alpha'}) = A\,\alpha_1\,\psi_{\alpha'}$$

ガ α ノ総テノ eigenstate ニ対シ成立スレバ 総テノ state ニ対シテ成立スル
コレニ Transf ヲ行ヒ 逆 A^{-1} ハ存在スルカラ. ∴ $\alpha_1 A = A\alpha$

∴ $$A\alpha_1 A^{-1} = \alpha_1 \qquad (3)$$

総テノ observable ガカヽル風ニ transform サレルカラ A ハ
其ノ transformation ハ contact transformation デアル。

∴ $$\bar{A} = A^{-1} \qquad (4)$$

ノ条件ヲ満足セネバナラヌ。 †

nonrelativistic ナ場合ニハ、一般ニ与ヘラレタ system ノ Hamilton 函数ヲ invariant ニスル様ナ Transformation ノ Group ~~ヲ作~~ ガ重要ナ意義ヲモッテ居ル。コノ場合ニハ

$$AHA^{-1} = H. \qquad (5)$$

or $$AH = HA. \qquad (5)'$$

其ノ transf. ハ H ト commute スル。其ノ transf. ヲ observable ト見レバ constant of motion デアル。
逆ニ ~~(5) or (5')~~ ~~constant of motion~~ (逆ヲモッテ居ル様ナ) H ト commute スル ~~様ナ~~ observable ハ transf. group ノ element デアル。†
例ヘバ central field ニ於ケル一ツノ particle ノ motion ニ就テ $M_z = xp_y - yp_x$ ハ const of motion デアルガ. Schröd. ノ repr. ニ於テハ

$$i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}$$

∴ $1+\delta m_z$ ナル observable ヲ考ヘル. 然シ δ ハ infinitesimal

~~…~~ $(1 - \frac{\delta i}{\hbar} m_z) f(r,\theta,\varphi) = f(r,\theta,\varphi+\delta)$

即チ ~~$1+i\delta m_z$~~ $1-\frac{i\delta}{\hbar}m_z$ ハ Z 軸ノ周リノ infinitesimal rotation ヲ表ハシテヰル。 m_z ハ 0 トイフ eigenvalue ヲモッテヰルカラ m_z^{-1} ハ存在シナイ。 ∴ m_z 自身ハ transformation デハナイ。

次ニ二ツノ transformation A, B ノ和 A+B ヲ

$$(A+B)\psi = A\psi + B\psi \qquad \text{for any } \psi$$

トシテ定義スレバ transf 全体ノ線型ノ函数ヲ define スルコトガ出来ル。之ハ transf ヲ observ トスレバ当然出テクルワケデアル。 而シ 二ツノ transf ノ和、従ッテ transf ノ一次ノ函数ハ最早 transf トハ限ラヌ。

Transformation Group ヲ考ヘルトキニハ continuous group ト finite group ガアル。

先ヅ n 個ノ parameter $s_1, s_2 \ldots s_n$ デアラハサレル conti. group ヲ考ヘル。但シ恒等ニ対スル parameter ノ値ハ $0, 0, \ldots 0$ ニナルトシテオク。 A ナル transf ニ対スル parameter ノ値ヲ $a_1, a_2, \ldots a_n$, B ナル transf ニ〃〃〃 $b_1, b_2 \ldots b_n$ 而シテ トスルト

$BA = C$ ナレバ $\qquad c_m = f(a,b)$

$S_m^k(a) = \left(\frac{\partial c_k}{\partial b_m}\right)_{b=0} \qquad T_k^m(a) = \left(\frac{\partial b_m}{\partial c_k}\right)_{c=a}$ ナル matrix $S(a)$, $T(a)$

ヲツクレバ $\qquad S_l^k(a)\, T_k^m(a) = \sum_k \left(\frac{\partial c_k}{\partial b_l}\right)_{b=0} \left(\frac{\partial b_m}{\partial c_k}\right)_{c=a}$

$= \sum$

transf
Bヲ $(q'/)$ ニ operateスルト
~~$(q'/)$ ハ transformation ノ parameter~~
但シ q' ハ transformation ノ parameter b_n ニ depend スルトスル

$$q' \rightarrow q' + \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial q'}{\partial b_m} \right)_{b=0} b_m + \cdots$$

$$(q'/) \rightarrow (q'/) + \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial (q'/)}{\partial b_m} \right)_{b=0} b_m + \cdots$$

$$\cancel{\rightarrow (q'/) + \frac{\partial (q'/)}{\partial q'} q' + \frac{\partial^2 (q'/)}{2 \partial q'^2} q'^2 + \cdots}$$

$$= \cancel{(q'/) +}$$

$$q'' \leftarrow q'$$

$$f(q'') \leftarrow f(q')$$

$$I_m H \psi \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left\{ (q''/)(q''|H|q') \right\}_{b=0} = \left(\frac{\partial (q''/)}{\partial b_m} \right)_{b=0} (q''|H|q')$$

$$\rightarrow H I_m \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial b_m} H \psi$$

$$= \sum \left(\frac{\partial c_k}{\partial b_l} \frac{\partial b_m}{\partial c_k} \right)_{b=0} = \delta_{lm}$$

ここで ~~S(a)T(a) =~~ $E = T(a)S(a)$

B $(q'|)$ ヲ ~~任意~~ 任意ノ state ノ ~~任意ノ~~ q's ヲ diagonal ニスル representation トスレバ

$$B(q'|) \quad \cancel{(q'|B|q''B)(q''|)} = (q'|) + \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial (q'|)}{\partial b_m} \right)_{b=0} b_m + \cdots$$

$$(6) \quad \left(\frac{\partial (q'|)}{\partial b_m} \right)_{b=0} = I_m(q'|)$$

トオクト、従ッテ

任意ノ state ノ rep. $(q'|)$ ヲ $\left(\frac{\partial (q'|)}{\partial b_m} \right)_{b=0}$ ニカヘル故、operator ヲ I_m トスレバ 之ハ linear operator デアッテ 一ツノ observable トナッテヰル。

次ニ

$$\left(\frac{\partial (q'|)}{\partial b_m} \right)_0 = \sum_l \left(\frac{\partial (q'|)}{\partial c_l} \right)_{c=a} \left(\frac{\partial c_l}{\partial b_m} \right)_{b=0}$$

$$= \sum \frac{\partial (q'|)}{\partial a_l} S_m^l(a)$$

故ニ $\sum_m T_k^m$ ヲ施スト

$$\frac{\partial (q'|)}{\partial a_k} = \sum_m T_k^m(a) I_m (q'|)$$

即チ ~~既ニ~~ $I_m(q'|)$ ヲ知レバ、$\frac{\partial (q'|)}{\partial a_k}$ ガ parameter ノ函数トシテ定マル。従ッテ $A(q'|)$ モ定マル。

即チ ~~infinitesimal operator~~ trans. operator $I_1, I_2 \cdots I_n$ ~~丈~~ ヲ知レバ 凡テノ transf. ヲ定メルコトガ出来ル。

更ニ $\dfrac{\partial^2(q'/)}{\partial a_k \partial a_l}$ ヲツクレバ 之レ一致ス

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\sum_m T_l^m(a) I_m(q'/) = \sum_m \frac{\partial T_l^m}{\partial a_k} I_m(q'/) + \sum_{m,i} T_l^m I_m T_k^i I_i(q'/)$$

他方 $$\frac{\partial}{\partial a_l}\sum_m T_k^m(a) I_m(q'/) = \sum_m \frac{\partial T_k^m}{\partial a_l} I_m(q'/) + \sum_{mi} T_k^i I_i T_l^m I_m(q'/)$$

ナルベシ。

$$\cancel{T_l^m T_k^i I_m I_i - T_k^i T_l^m I_m}$$

$$\sum T_k^i T_l^m (I_m I_i - I_i I_m)(q'/) = \sum\left(\frac{\partial T_l^m}{\partial a_k} - \frac{\partial T_k^m}{\partial a_l}\right) I_m(q'/)$$

$a=0$ ノ所ニテハ $T=E$ ナルベシ。

$$(I_l I_k - I_k I_l)(q'/) = \sum_m d_{lk}^m I_m(q'/)$$

之ハ総テノ state ニ対シテ成立スルベシ

$$I_l I_k - I_k I_l = \sum_m d_{lk}^m I_m \qquad (7)$$

但シ $$d_{lk}^m = \frac{\partial T_l^m}{\partial a_k} - \frac{\partial T_k^m}{\partial a_l}$$

コレデ d_{lk}^m ハ group ノ element ノ parameter ニ如何ニ depend スルカニヨッテ定マルカラ、system 及ビ representation ノ如何ニ関係シナイ定数デアル。

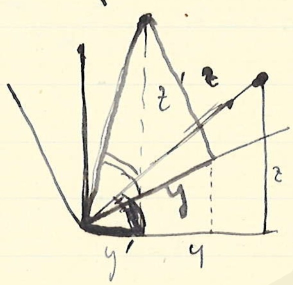
~~I_l~~

~~(?) ナル関係ハ総テノ system ニ~~

~~Example. Rotation Group and Spinning Electron.~~

(7) ノ式ヲ rotation group ノ場合ニ応用スレバ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & +\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} d \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & +\beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$



rotation group

全ハ三ツノ parameter デアラハサレル。ソノ parameter ヲ夫々 x, y, z 軸ノマハリノ廻転 ~~ニナル~~ 角ノ $i/\hbar$ 倍ニナル。

one particle ノ場合ニハ $(q'|)=f(x,y,z)$ デ

$$I_x = -i\hbar\left\{y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right\} = m_x$$

$$I_y = -i\hbar\left\{z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right\} = m_y$$

$$I_z = -i\hbar\left\{x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right\} = m_z$$

トナル。従ツテ之等ノ間ニハ

$$I_xI_y - I_yI_x = i\hbar I_z \quad \text{etc}$$

ノ関係ガアル。

之ハ一般ノ system ニ於テモ、x, y, z 軸ノマハリノ rotation ニ対応スル observable I_x, I_y, I_z ノ間ニハ

$$I_xI_y - I_yI_x = i\hbar I_z \qquad (8)$$

トイフ関係ガ成立スル筈。又 $I = I_x^2+I_y^2+I_z^2$ ハ I_x, I_y, I_z ト commute ス。

従ツテ之等ノ obs. ノ eigenvalue ハ 0 or half integer ノ $\hbar$ 倍

又 ~~$I_x^2+I_y^2+I_z^2$~~ $=I$ ノ eigenvalue ハ ~~0 or half pos. int~~ $\hbar^2 j(j+1)$ 但シ j ハ正ノ整数, 半整数 デナケレバナラヌ。

Rotation ~~Group~~ ニ対シテ Hamiltonian ガ invariant ナル如キ system ニ於テハ、I_x, I_y, I_z ハ constant of motion デアルカラ、之等ノ観測量ト commute スル ~~stationary diagonal~~ system ノ stationary state simult. eigenstate 中カラ stationary state ヲ選ビ出スコトガ出来ル。~~例~~ 例ヘバ I 及ビ I_z ノ simultaneous eigenstate ~~デアル~~ ~~ヲ~~ ~~求メル~~ ガ stationary state ニナル事ガアル。

その数ノ state ニ [illegible]。

$m_1/\hbar$: $-j_1$ . . . . . $+j_1$

$m_2/\hbar$: $-j_2$ . . . . . $+j_2$

$m_1+m_2/\hbar$: $-j$, ... j

$-(j_1+j_2)$ . . . . . j_1+j_2

從テ一般ニ

~~系~~ N個ノ dynamical system ヨリ成ル System ニ対スル Operator $I_1, I_2, \ldots I_n$ ハ 個々ノ system ノ Operator $I_1^{(\nu)}, I_2^{(\nu)}, \ldots I_n^{(\nu)}$ $\nu = 1, 2, \ldots N$ ノ和デアル。

∵ 各 ~~系~~ system ノ commutative observables ノ complete set ヲ $q^{(\nu)}_{\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots N_\nu$; $\nu = 1, 2, \ldots$) ~~トスレバ~~ トスレバ $(q'/) = \prod_\nu (q_\nu'/)$ ノ場合

$$I_m(q'/) = \left(\frac{\partial (q'/)}{\partial b_m}\right)_{b_m=0} = \sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial (q'/)}{\partial q^{(\nu)}_\mu}\frac{\partial q^{(\nu)}_\mu}{\partial b_m}\right)_{b=0} = \sum_\nu I_m^{(\nu)}(q'/)$$

~~従ッテ~~ 一般ニ $(q'/)$ ハ 各 system ノ eigenfunction ~~$(q^{\nu}/)$~~ ノ積ノ series ニテ展開サレルカラ、

$$I_m = \sum_{\nu=1}^{N} I_m^{(\nu)}.$$

今二ツノ system ヲ考ヘ、各ノ system ニ対スル 個々ノ I 及ビ I_z ノ値ガ夫々 ~~i_1, m_1 及ビ~~ $\hbar j_1(j_1+1)$, $m_1\hbar$; $\hbar j_2(j_2+1)$, $m_2\hbar$ トスレバ、total system ノ I_z ノ eigenvalue ハ

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$$

デアル。 $(m_1+m_2)\hbar$ ノ如シ。

次ニ Total system ニ対スル I ノ値ガ $j(j+1)$ トスレバ、

$$-j_1 \le m_1 \le j_1 \qquad -j_2 \le m_2 \le j_2$$

$$-j_1-j_2 \le m_1+m_2 \le j_1+j_2 \qquad -j \le m_1+m_2 \le j$$

$$-j-j_2 \le m_1 \le j+j_2$$

~~従ッテ~~ 故ニ $m_1 = j_1$ ナル値ヲトレバ、 $j_1 \le j + j_2$

∴ $j_1 - j_2 \le j$ ~~$j \quad -j-j_2 \le$~~ 同様ニ $j_2 - j_1 \le j$.

$m_1 + m_2 = j$ トスレバ、 $j \le j_1 + j_2$. ∴ $j \ge |j_1 - j_2|$

~~2+~~ $j = j_1 + j_2$ ノ時 m　　　$m_1 + m_2 = -j_1 - j_2 \;\cdots\cdots\; j_1 + j_2$

m_1	j_1	$j_1 - 1$	$\cdots$	$-j_1 + 1$	$-j_1$
m_2	j_2	$j_2 - 1$	$\cdots$	$-j_2 + 1$	$-j_2$

$m_1 + m_2$: $j_1 + j_2$　　$j_1 + j_2 - 1$　　$j_1 + j_2 - 2$　$\cdots$

　　　　　　　　　$j_1 + j_2 - 1$　　$j_1 + j_2 - 2$　$\cdots$

　　　　　　　　　　　　　　　$j_1 + j_2 - 2$　$\cdots$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} g_j (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

$$\cancel{m} \quad \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (g_j - 1)(2j+1) = 0.$$

$\mathfrak{M}_2$ノM_zト互ニcommu.

$\therefore |j_1-j_2| \leq j \leq j_1+j_2$

j_1, j_2 の夫々の値に対し m_1, m_2 の値の組合せの総数は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 個の state が得られる。~~此れに j の値に対する~~
~~範囲の j につき得られる state の数は $2(j_1-j_2)+$~~
~~$\{2(j_1+j_2)+1\}+\{2(j_1+j_2-1)+1\}+\cdots$~~

所で $m_1=j_1$, $m_2=j_2$ としたら $j=j_1+j_2$ になる筈である。
$j=j_1+j_2$ の場合には $m_1+m_2=j_1+j_2, \cdots, -j_1-j_2$
次に j の場合なりに m_1+m_2 の最大値は j_1+j_2-1. $\therefore j=j_1+j_2-1$ の場合を考へねばならぬ。かくして $j=j_1+j_2 \sim |j_1-j_2|$ の場合が凡て存在せねばならぬ。

そして T(?)は $\sum_{n=0}^{2j_2}\{2(j_1-j_2)+1+2n\}$
等しい

$$= (2j_2+1)\left\{\frac{2(j_1-j_2)+1+2(j_1+j_2)+1}{2}\right\}$$

$$= (2j_2+1)(2j_1+1)$$

§ Theory of Spinning Electron

~~緒言~~ / 序言

N個の particle より成る system に対して 例へば $I_z=\sum_{\nu=1}^{N} I_z^{(\nu)}$ の eigenvalue は 考へられる各々の particle の $I_z^{(\nu)}$ が m_z である時の [illegible] の eigenvalue ~~[illegible]~~ が凡て integer ならば I_z の eigenvalue も又 integer でなければならぬ。
（小さな場合の eigenvalue の和に従って）

それに従って 上の一般理論に於ては I_x, I_y, I_z の eigenvalue は integer 又は half integer である。~~而して half integer の値を有する場合に~~

† 1925年 Uhlenbeck u Goudsmit
Naturwiss, 1925, 953
Nature 117, 264, 1926.

~~素粒子ニ於テハ上ノ様ニ考ヘルノハ~~ 述ベタ 此ノ例ハ particle ノ angular momentum ガ

$$m_x = yp_z - zp_z \quad \text{etc}$$

此ノ ~~ang~~ orbital angular momentum ノ各成分ハ ~~ニハ~~ integer ノ値ヲ有スル。
m_x, m_y, m_z ノ eigenvalue ハ

所デ atomic spectra ヲ ~~説明~~ 説明スル為ニハ、atomic system 中ノ electron ノ取リ得ル stationary state ノ数ハ electron ヲ單ナル particle ト考ヘタ場合ノ二倍ナケレバナラヌ。コノ事實ヲ説明スル為ニ electron ニ更ニ一ツノ自由度ヲ許シ、electron spin ナルモノヲ考ヘル。此ノ ~~$\pm\frac{\hbar}{2}$ ニ~~ 方向ニ於テ $\pm\frac{\hbar}{2}$ ノ spin angular momentum ヲ有シ、~~ヲ有シテ居ル~~ ト共ニ $\frac{e\hbar}{2mc}$ ナル magnetic moment ヲ有スルト假定スル。

~~コノ様ナ spin ニ対シ~~ ソコデ spin ノ component $S_x\, S_y\, S_z$ ハ 三ツノ observable デ、他ノ variable ト commute スルモノ ~~デアル~~ ソノ eigenvalue ハ $\pm\frac{\hbar}{2}$ ノ二ツ丈デアルカラ
~~ソシテ $S_x S_y S_z$~~ ノ component

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

S_x 等ノ自乗ノ eigenvalue ハ $\frac{\hbar^2}{4}$ 丈 此ノ一ツノ number デアル。

spin ハ 普通ノ angular momentum ト同様ノモノデアルカラ 之ト同様ナ Vertauschungsrelation

$$S_xS_y - S_yS_x = i\hbar S_z \quad \text{etc}$$

ヲ満足スルトスレバ、S_y^2 ハ number ナル故

$$0 = S_xS_y^2 - S_y^2S_x = (S_xS_y - S_yS_x)S_y + S_y(S_xS_y - S_yS_x)$$

$$S_x = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ \bar{a} & a_2 \end{pmatrix} \text{ナラバ}$$

$$S_z S_x = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2} a_1 & -\frac{\hbar}{2} a \\ \frac{\hbar}{2} \bar{a} & \frac{\hbar}{2} a_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2} a_1 & \frac{\hbar}{2} a \\ -\frac{\hbar}{2} \bar{a} & \frac{\hbar}{2} a_2 \end{pmatrix} = S_x S_z$$

$\therefore \quad a_1 = a_2 = 0.$

1及ビ $S_x\ S_y\ S_z$ ヲ以テ総テノ二行二列ノmatrixヲ表シ得ル。

即チ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \cancel{(\quad)} + (a_1 + a_4)1 + (a_2 + a_3)S_x \cancel{(a_2 - a_3)S_y} + (a_4 - a_1)S_z$

$(+i(a_3 - a_2)S_y$

∴ $S_z S_y + S_y S_z = 0$, etc

∴ $\frac{1}{2} S_y S_z = i\hbar S_x = -\frac{1}{2} S_z S_y$ etc.

今 S_z ヲ diagonal ニスル如キ representation ヲトル。

$$S_z = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \qquad S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} e^{ia} \\ \frac{\hbar}{2} e^{-ia} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{2}{i\hbar} S_z S_x = \frac{2}{i\hbar} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\hbar}{2} e^{ia}\right) \\ \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\hbar}{2} e^{-ia}\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{i\hbar}{2} e^{ia} \\ -\frac{i\hbar}{2} e^{-ia} & 0 \end{pmatrix}$$

e^{ia} ハ任意ニ取レルガ 簡単ノ為 $e^{ia} = 1$ ニトレバ、

$$\frac{2}{\hbar} S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{2}{\hbar} S_y = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{2}{\hbar} S_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

トナル。magnetic moment ハ angular mom. ノ $\frac{-e}{mc}$ 倍ナル故 $\frac{-e}{mc} S_x$ etc トシテ表ハサレル。~~canonical variables~~ inde ノ

一ツノ electron ノ ~~モッテ居ル~~ indep. variables ハ x, y, z, p_x, p_y, p_z, S_x, S_y, S_z デ、ソノ内ニ互ニ commute スルモノノ maximum number ハ 4 デ、例ヘバ x, y, z, S_z デアル。従ッテ electron ノ任意ノ state ハ $(x' y' z' S_z'|$ ノ変数 $(x' y' z' S_z'|)$ トシテ表ハサレル。之ハ

$(x' y' z', -\frac{\hbar}{2}|)$, $(x', y', z', +\frac{\hbar}{2}|)$

ノ二ツニ分ケテ考ヘラレル。従ッテ (x', y', z') ノ two valued function トミルコトガ出来ル。

次ニ electron ニ spin ヲ考ヘルトキハ total angular spinning electron, motion

$$\left\{-\frac{e}{c}\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}\right.$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\cancel{\frac{1}{2m}\left\{p_x\frac{2e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{2e}{c}A_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+p_y\frac{2e}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{2e}{c}A_y\frac{\partial A_y}{\partial y}\right.}$$

$$+\cdots\cdots\Big\}+e\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=\frac{e}{c}\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right\}+e\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$\underbrace{-\frac{e}{c}\left\{\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right\}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\}}_{\parallel\ \frac{dA_x}{dt}}$$

$$\dot{x}=\frac{1}{m}\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)\quad \text{etc}$$

$$m\ddot{x}-\frac{e}{c}\dot{A}_x=$$

$$\cancel{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}=-\dot{x}\frac{\partial V}{\partial t}-\dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial y}-\dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t}=e\frac{\partial V}{\partial x}\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial t}\qquad \dot{y}\left\{\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right\}-\dot{z}\left\{\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

故ニ $I_x\ I_y\ I_z$ トスルナラバ、 ~~故ニ I_x~~

~~之ハ~~ ~~電子ノ~~ ~~momentum~~ ト orbital angular momentum ト spin angular momentum ノ和ト考ヘ ~~m_x ang mo~~ ~~タトヘレバ~~ ネバナラヌ事ニ注意スル。

$$I_x = m_x + s_x \quad \text{etc}$$

之ニ対シテハ矢張リ

$$I_xI_y - I_yI_x = i\hbar I_z$$

ナル関係ガ満足サレ、其 I_x, I_y, I_z ノ eigenvalue ハ half integer ~~ナリ~~ 奇数ナルコトガ云ヘル。

従ッテ n個ノ electron ヨリナル system ニ対シテハ I_x, I_y, I_z ノ eigenvalue ハ ~~整数~~ n ガ偶数カ奇数カニ従ヒテ integer 或ハ ~~半~~ half int. トナル。j モ n ガ偶数カ奇数カニ従ヒ ~~整数ノ~~ int カ half int トナル。

spinning electron ニ対スル Hamiltonian ノ求メ方

次ニ scalar pot ガ V, vector potential ガ A_x, A_y, A_z デアラハサレル如キ electromagnetic field ニ於ケル ~~spinning~~ electron ノ運動ハ classical dynamics ニヨレバ relativity correction neglect シタル Hamiltonian

$$H_0 = \frac{1}{2m}\cancel{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}\{(p_x+\frac{e}{c}A_x)^2+(p_y+\frac{e}{c}A_y)^2+(p_z+\frac{e}{c}A_z)^2\}$$

$$-eV$$

~~此ノ Hamiltonian~~ ト考ヘラレル。

spinning electron ニ於テハ magnetic moment ニヨル energy ノ項、

$$-\frac{e}{mc}\cdot HS = \frac{e}{mc}(H_xS_x+H_yS_y+H_zS_z) = -\frac{e}{mc}\,\mathrm{rot}A\cdot S$$

ヲ加ヘネバナラヌ。但シ H ハ magnetic field ヲ表ス。

従ッテ $H = H_0 - \frac{e}{mc}\,\mathrm{rot}A\cdot S$

$$\frac{4e}{2mc}\, s_x s_y/\hbar^2 \left(p_x A_y - p_y A_x\right) = \frac{e}{2mc}\ldots H_z$$

$A_y p_x$

$+A_x p_y$

$$\frac{2}{mc^2}\frac{1}{2}\frac{i\hbar}{\hbar^2}(-i\hbar)\, s_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

ノdoublet

R ノ場合ニハ $j+\frac{1}{2}$, $j-\frac{1}{2}$ ナル energy level ニ分タレテ居ル

$j+\frac{1}{2}$, $j-\frac{1}{2}$

ナル ~~ax~~ ~~doublet~~ 2つノ間ノ ~~separation~~ energy ノ差ハ orbital motion ト spin トノ間ノ interaction energy ヲ考慮スレバ全ク説明出来ル。~~注意~~

ナル式デアラハサレル。

21式ハ ~~又~~ ヲカキナホスト

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\frac{2S_x}{\hbar}\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)+\frac{2S_y}{\hbar}\left(p_y+\frac{e}{c}A_y\right)+\frac{2S_z}{\hbar}\left(p_z+\frac{e}{c}A_z\right)\right\}^2 - eV$$

Hハ。

$A_x=A_y=A_z=0$ デ従ッテ H ハ

~~従ッテ~~ central field ニ於テハ ~~自由~~ spin ヲ考ヘナイ場合ト同様デアルカラ、 orbital angular momentum m_x, m_y, m_z spin angular momentum $S_x\ S_y\ S_z$ ハ夫レ constant of motion デアル ~~カラ~~ 従ッテ total ang. mom. $I_x = m_x + S_x$ etc モ const of motion デアル。 ~~故~~ stationary state ハ互ニcommuteスル constant of motion ~~w, l, m~~ ノ値 即チ w, l, m, s ~~デ表サレ~~ ノ値ニヨッテ classify サレル。然ルニ s ハ s_z ノ $\frac{1}{\hbar}$ 倍即 $1/2$ or $-\frac{1}{2}$ ノイヅレカノ値ヲトル。従ッテ可能ナ stationary state ノ数ハ spin ヲ ~~w~~ 考ヘナイ場合ノ二倍トナルワケデアル。

~~spin~~ 二ツノ系ノ system ノ j ヲ ~~…~~、m カラ total system ノ j, m ガドウナルカヲ考ヘルト、今ノ場合ハ orbital motion each ノ

spin ノ組ミ合セガ二ツノ spinning electron ト ナツテ居ル ナラバ

$j_1 = l$ $m_1 = m$; $j_2 = \frac{1}{2}$ $m_2 = s$

デアルカラ、 ~~…~~ resultant $j = l+\frac{1}{2}$ or $l-\frac{1}{2}$,

~~resultant $m = m+\frac{1}{2}$ or $m-\frac{1}{2}$.~~

~~従ッテ~~ 二ノ j ハ所謂 inner quantum number トイハレルモノニ相当スル ~~モノデアル~~。 alkali atom ~~ノ場合~~ ノ doublet ヲ qualitative ニ説明シ得ル。併シ之等ノ項ノ数量的関係ハ Dirac ノ relativistic ナ electron ノ理論ヲ待ッテ初メテ得ラレル。

$$j_{(12)} \; (j_1, j_2) = j_1 + j_2 , \ \cdots \sim |j_1 - j_2|$$

$$j_{(123)} = j_{(12)} + j_3 , \ \cdots \ |j_{(12)} - j_3|$$

$$= j_1 + j_2 + j_3 , \ \cdots \ \ j_1 + j_2$$

$$j_1 + j_2 - 1 \ \cdots \ |j_1 + j_2 - j_3|$$

$$\cdots$$

$$|j_1 - j_2| + j_3 \ \cdots \ ||j_1 - j_2| - j_3|$$

$$j_1 = l_1 + \tfrac{1}{2} s_1 , \quad l_1 - \tfrac{1}{2} s_1 \qquad l_{(12)} = l_1 + l_2 \ \cdots |l_1 - l_2|$$

$$j_2 = l_2 + \tfrac{1}{2} s_2 , \quad l_2 - \tfrac{1}{2} s_2 \qquad s_{(12)} = s_1 + s_2 \ 1 \text{ or } 0 .$$

$$j_{(12)} = j_1 + j_2 , \ \cdots |j_1 - j_2| \qquad l_{(12)} + s_{(12)} = l_1 + l_2 + 1 , \ \cdots$$

$$=$$

$$j_1 = l_1 + s_1 , \quad l_1 - s_1 \qquad l_{(12)} = l_1 + l_2 \ \cdots \ |l_1 - l_2|$$

$$j_2 = l_2 + s_2 , \quad l_2 - s_2 \qquad s_{(12)} = 2s, \ 0$$

$$j_{(12)} = j_1 + j_2 , \ \cdots \ |j_1 - j_2| \qquad l_{(12)} + s_{(12)} = l_1 + l_2 + 2s = j_1 + j_2 ,$$

$$= j \ l_1 + l_2 , \qquad l_{(12)} - s_{(12)} \ |l_1 - l_2| + 2s , \ l_1 + l_2 , \ |l_1 - l_2|$$

resultant j ハ

n個ノ ~~spinning~~ electron ヨリ成ル system ニ於テハ $j = \sum_{k=1}^{n} j_k$

デ個々ノ electron ノ ~~j ハ half integer ナル~~，其ノ和ハ即チ = 幾 [illegible] ヲ偶数ニ

ナルトキハ ~~[illegible]~~，奇数ナル時ハ，electron ノ j ハ half integer ナル

故。 resultant j ハ n ガ even, odd ニ従ッテ int. or half int. ト

ナル。

次ニ個々ノ j ヲ l 及ビ s ニ分ケテ考ヘルト，resultant j ハ resultant l ト

ナル

結局 Central field ニ於ケル spinning electron ノ state ハ

n′, l, m, s　or n′, j, l, m デ characterise

サレル。 Coulomb field ノ場合ハ n, l, m, s デ charact-

erise サレル。

† 而シテ system ガ他ノ system カラ ~~ドウシテ~~ ~~inter~~ ヲ影響ヲ受ケナイトキハ Hamiltonian ハ常ニ N個ノ particle ニ関シテ symmetric デアルカラ P_ν ト commute スル。故ニ P_ν ハ absolute constant of motion デアル。従ッテアル瞬間ニ於テ P_ν ノ値ガ ~~決マッテ居~~ P_ν' ナル値ヲトッタトスレバソノ値ハ永久ニ変ラナイ。即 eigenvalue ハ変ラヌ

従ッテ system ノ state ヲ P_ν' eigenstate ニ分類スルコトガ出来ル。~~各~~ ~~class~~ 一ツノ set ニ属スル state ~~set~~ ハ決シテ ~~他ノ~~ 外ノ他ノ set ノ state ヘノ transition ハ決シテナイノデアル。(perturbation theory 参照) 故ニ各 set ハ non-combining set of state デアル。

互ニ commute スル permutation スベテノ函数ノ complete set ヲトレバ system ノ state ノ一ツノ classification ガ出来ル。complete set ノトリ方ニヨッテ classification ハ色々デアラウガ、

§ Permutation Group and Quantum Statistics

前ノ Transformation Group ノ一般理論ニモドッテ.
特ニ finite order ノ Group ヲトルト、之ハ Permutation Group ト equivalent デアリ、又物理的ニモ重要ナノハ '' '' デアル。

N個ノ同種ノ particles カラナル system ニ対スル Hamiltonian H ハ
(個ノ particles)
ソレラニ関シテ symmetric デアルカラ、ソレラノ間ノ任意ノ交換 P_ν ヲ行ッテモ Hamiltonian ハ変ラヌ。

即チ $$P_\nu H P_\nu^{-1} = H \quad \text{or} \quad P_\nu H = H P_\nu$$

即チ $\underbrace{\text{permutation } P_\nu}_{N!\text{個ノ}}$ $\nu = 1, 2, \dots N!$ ハ $\underbrace{\text{constant of motion}}_{\text{凡テ}}$ デアル。

ソレラノ ~~二個ノ内カ~~ ~~各二モ~~ 各 permutation 演算子ノ或ルモノ ~~ヲトレバ~~、ソレラ凡テ linear function ニ reduce 出来ルガ、其ノ linear function ノ中デ他ノ凡テト commute スル物ハナモ限リアル。system ノ stationary state ヲ X ノ eigen~~value~~ state ニ classify スルト X ノ異ナル eigenvalue ニ属スル state ハ

P_μ^{-1} ~~$k \to n$~~ $\quad k \to m \quad l \to n$

P_ν ~~$n \to m$~~ $\quad m \to n$

P_μ n $\quad n \to l \quad m \to k,$

$P_\mu P_\nu P_\mu^{-1} \quad k \to l$

† ~~特~~ symmetric ナモノハ ~~明ニ之ヲ~~ シカナラ(之ト commute スルモノハ) symmetric デ
ナクモノハアリラヌ。

~~因ッテソノ中デ~~ A子ノ classification ニ無関係ナモノハ次ノ ~~particle ニツイテ symmetric ナモノハ次ノ~~
形ナモノデアル。

従テ、P_ν ニ対シ $X = \frac{1}{N!}\sum_{\mu=1}^{N!} P_\mu P_\nu P_\mu^{-1}$ ナルベシ

コレハ A子ノ particles ニ関シテ symmetric デアル。何トナレバ
A子ノ permutation ニ対シテ invariant デアル。

即チ $P_\lambda X P_\lambda^{-1} = \sum_{\mu=1}^{N!} (P_\lambda P_\mu) P_\nu (P_\lambda P_\mu)^{-1}$

$= X.$

何トナレバ A子ノ permutation ト commute スル。

カクテ X ハ permutation group ノ class ノ要素ナル。
ノ independent ナモノハ

コレハ互ニ commute スル ~~complete set~~ ヲ作ル。

ソノ中デ A子ノ ~~classification~~ complete set ニ無関係ナモノハ、A子ノ permutation
ト commute スル如キモノデアル。

A子ノ particle ニ関シ symmetric ナモノハ斯様ナモノデアル。

之ニ ~~反シ~~ X トシテ、任意ノ permutation P_ν ニ対シ

$P_\nu X P_\nu^{-1}$

ハ X ニ於テ ~~~~ ノ particles ノ番号ノ変化ヲ意味スル

X ガ symmetric ノ場合ニハ

$P_\nu X P_\nu^{-1} = X$

or $P_\nu X = X P_\nu$ for any P_ν.

$$P_\kappa P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} P_\kappa^{-1} \cdot P_\kappa$$

$$P \sum_{\kappa=1}^{N!} a_\kappa P_\kappa \cdot \frac{1}{N!}\sum_{\mu=1}^{N!} P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} = \frac{1}{N!}\sum_\nu P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} \sum_{\kappa=1}^{N!} a_\kappa P_\kappa$$

$$= \sum_\nu \sum_\kappa a_\kappa \{P_\kappa P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} P_\kappa^{-1} \sum_{\nu\kappa} P_\nu P_\mu P_\nu^{-1}\} P_\kappa$$

$$= \sum_\kappa a_\kappa \chi_\mu -$$

$$P_\nu \cdot \sum_\mu a_\mu P_\mu - \sum_\mu a_\mu P_\mu \cdot P_\nu = \{\sum_\mu a_\mu (P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} - P_\mu)\} P_\nu = 0$$

$$\sum_\mu a_\mu (P_\nu P_\mu P_\nu^{-1} - P_\mu) = 0.$$

$$\sum_\mu a_\mu \{\chi_\mu - P_\mu\} = \sum_{class} a_\mu 0. \qquad \sum_\mu a_\mu P_\mu = \sum_\mu a_\mu \chi_\mu$$

~~[illegible]~~ P_μ を ($\mu = 1, 2, \cdots N!$) の入る unique ~~definite~~ な

状態は [illegible] ψ が [illegible] anti or sym state は

以上一つで P_ν^{-1} ~~$P_\nu P_\nu^{-1} P_\mu P_\nu$~~ $P_\nu P_\mu P_\nu P_\mu^{-1}$

$$\sum_\mu a_\mu \{P_\nu - P_\mu P_\nu P_\mu^{-1}\} P_\mu = 0,$$

所で

~~[illegible]~~ とすると、perm. P_μ は $\bar{P}_\mu = P_\mu^{-1}$ で[illegible]. or $P_\mu \bar{P}_\mu = 1$

を満足するから、$\sum_{\chi''\tau''}(\chi'\tau'|P_\mu|\chi''\tau'')(\chi''\tau''|\bar{P}_\mu|\chi') = 1$ or

$\sum_{\chi''\tau''} |(\chi'\tau'|P_\mu|\chi''\tau'')|^2 = 1$ $\quad\therefore |(\chi'\tau'|P_\mu|\chi'\tau')| \leq 1$.

此等は $\chi' = \pm 1$ or -1 [illegible]

所で ~~symm. or anti. state に対しては~~ ...... $|(\chi'\tau'|\frac{1}{N!}\sum P_\nu P_\mu P_\nu^{-1}|\chi'\tau')|$

$= 1$. 然し $|(\chi'\tau'|P_\mu|\chi'\tau')| < 1$ ~~[illegible]~~ となる様な perm. が一つでもあれば

$|(\chi'\tau'|\frac{1}{N!}\sum \cdots |\chi'\tau')| < 1$ となる

$\therefore |(\chi'\tau'|P_\mu|\chi'\tau')| = 1$, $\quad (\chi'\tau'|P_\mu|\chi''\tau'') = 0$ for $(\chi'\tau') \neq (\chi''\tau'')$

従って $(\chi'\tau'|P_\mu|\chi'\tau') = \pm 1$ eigen state であり $\quad P_\mu\psi = \psi$ or $\pm\psi$ $\varepsilon(P_\mu)\psi$

かかる state ~~[illegible]~~ に於ては P_μ ~~oper~~

$\therefore \psi = \frac{1}{N!}\sum P_\mu \psi$ or $\frac{1}{N!}\sum P_\mu \varepsilon(P_\mu)\psi$ となり この state は symmetric or anti である。

同種ノ
全テノ particles ノ coordinate momentum, spin ニ関スル symmetric function ハ，如何ナル種類ノ permutation トモ commute スル。
~~カヽルモノトシテハ例ヘバ~~ N! 個ノ permutation ノ合成中カ
カヽルモノハ遂ニ

$$X = \frac{1}{N!}\sum_{\mu\nu=1}^{N!} P_\nu P_\mu P_\nu^{-1}$$

ノ如キモノヲ考ヘル。
~~サテ~~ 然シ。カヽルモノデ互ニ independent ナモノハ permutation group ノ class ノ数丈アル。N! ノ order
他ハソレラノ linear combination デアル。
其ノ内 $P_\mu = E$ トスレバ $X = E$ デ之ハ無意味デアル。
~~他ノモノハ~~ class ノ数ヲ K トシ，E ヲ除イタ P_μ ヲ色々ニ取レバ
出来ル $X_1, X_2, \cdots X_K$ ハ互ニ independent ナモノトナリ
可換デアル。ソシテ其ノ ~~固有~~ eigenvalue ~~中~~ ハ
~~$X'_1 = X'_2 = \cdots = X'_K = 1$~~ 中 even permutation カラ作ラレタ
X ノ eigenvalue ハ 1 デアリ。odd permutation カラ作ラレタ
X 〃 〃 ±1 デアル。

∵ system ノ任意ノ state ヲ ψ トスレバ $\psi_S = \sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu \psi$
ナル state ニ於テハ総テノ P_μ ニ対シ $P_\mu \psi_S = \psi_S$。
デアリ。 $\psi_A = \sum_{\nu=1}^{N!} \varepsilon(P_\nu) P_\nu \psi$ ニ対シテハ $P_\mu \psi_A = \varepsilon(P_\mu) \psi_A$ デアル
(但シ $\varepsilon(P_\nu)$ ハ P_ν ガ even, odd ニ従ヒ ±1 トナルモノトス)
前者ノ場合ヲ ~~anti~~ sym. 後ノ場合ヲ antisym. ト名ヅケル。
~~即チ~~ 即チ X ノ eigenvalue ガ 1 ナル場合ハ凡テノ P_μ ニ対シテ state ガ
symmetric ~~デアル~~ デアリ。X ノ値ガ even odd ニ従ヒ ±1 ナル
場合ハ state ハ antisymmetric ~~デアルトイフ~~ デアル。
system ガ之ニ従ッテ symmetric or antisymmetric
state ニアルナラバ。system ハ永久ニ 〃 〃 state
カヽル state ハ一ツノ ψ ニ対シ unique ニ定マッテ居ル

5. □ □ □ □ □

7. ⊡ ⊡ ⊡ ⊡ □ 1 0 2 4 0

5+7−1 ⊡ □ □ ⊡ ⊡ □ ⊡ ⊡ ⊡ ⊡ □ 1, 0, 0,

$$P_B = \frac{(N_i + n_i - 1)!}{\cancel{N}\, n_i!\,(N_i - 1)!}$$

Homogeneous Product ${}_{N_i}H_{n_i}$

$$P_F = \frac{N_i!}{(N_i - n_i)!\, n_i!}$$

${}_{N_i}C_{n_i}$ □ □ □ □ □

$n_i \cdot {}_{N_i}B_{n_i}$

$$P_C = \sum \cancel{\frac{(N_i + n_i - 1)!}{(N_i - 1)!\, n_i!}} \quad N_i^{n_i}$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_i})^{n_i}$$

†

スルコトニナル。

今systemヲ形作ッテ居ル同種ノparticleガ互ニindependentデアル時、即チソレラノ相互ノinteractionガ存在シナイ時ヲ考ヘルトHamiltonianハ各particleノHamiltonianノ和デアラハサレル。

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i$$

今i番目ノparticleノ互ニcommuteスルvariablesノcomplete setヲ q_i トスレバ、$(q_i t/)$ ヲ

$$H_i (q_i t/) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(q_i t/)$$

ヲ満足スル函数ノ一ツトスレバ、

$$(q t/) = (q_1, q_2, \ldots q_N, t/) = (q_1 t/)(q_2 t/) \cdots (q_N t/)$$

ハsystemノ一ツノstateヲアラハス。

~~$(q_i t/) = f_i(q_i t)$ トカクコトスル。 $f_1, f_2, \ldots f$~~

所デHハN個ノparticlesニ関シテsymmetricナル故其等ノpermut. P_ν ニ対シ

$P_\nu(q t/)$ モ又systemノstateヲアラハス。

~~$\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu(q, t/)$ ハsystemノsymmetricナル…~~

linear comb. $\sum_{\nu=1}^{N!} a_\nu P_\nu(q t/)$ ハ又systemノstateデアル。

特ニsystemノstateガsymmetricノ場合ハ $\sum_{\nu=1}^{N!} P_\nu(q t/)$

antisymmetricノ場合ハ $\sum_{\nu=1}^{N!} \epsilon(P_\nu) P_\nu(q t/)$ ナル形トナル。†

$$P_{(12)}\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{(\alpha'/1)(\alpha''/2)\cdots(\alpha^{(N)}/N)\}$$

$$= \sum \varepsilon(P_\nu) P_{(12)} P_\nu\{\;\;''\;\;\} = -\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{\;\;''\;\;\}$$

$$= -\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu P_{(12)}$$

[illegible] $\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{\;''\;\} = -\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu P_{(12)}\{\;\;\;\}$.

[illegible] $\alpha' = \alpha''$ [illegible] $= -\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{\;''\;\}$

$P_{12}\{\;''\;\} = \{\;''\;\}$

[illegible] $\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{\;''\;\} = 0$.

系ノ system ノ stationary state ヲ考ヘル。各 particle ノ stationary state ヲ互ニ commute スル constant of motion ノ maximum number ノ eigenvalues ニヨッテ characterize サレルトスルガ。 $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n : \alpha$. $n = 1, 2, \ldots N$

~~symmetric ナ system ニ於テハ~~ ... rep ヲ α' ~~sym. ナ場合ニモ又~~
~~antisymmetric ナ場合ニモ~~ system ノ state ハ $\psi_m(\alpha')$ rep ヲ (α'/m)

sym ; $\sum P_\nu\{(\alpha'/1)_2(\alpha''/2)_2 \cdots\}$

anti ; $\sum \varepsilon(P_\nu) P_\nu\{(\alpha'/1)(\alpha''/2)\cdots\}$

トナル。故ニ ~~sym~~ system ノ state ハ α's ~~particle~~ ~~α~~ 各 α ノ eigenvalues ヲトル particle ノ数 (各 state ニ在ル particles ノ数) ニヨッテ unique ニ定マル。

sym ノ場合ニハ 各 α ノ eigenvalues ヲトル particles ノ数ニ制限ナキガ; anti sym ノ場合ニハ 二ツノ particles ガ同ジ ~~[illegible]~~ eigenvalues ヲトルコトハ出来ナイ。即チ 二ツノ particles ガ同ジ state ヲトルコトハ出来ナイ。

~~∵ [illegible] $(\alpha'/1)$ $\alpha' = \alpha''$ トスレバ。~~

~~$P_{(12)}\{(\alpha'/1)_2(\alpha''/2)_2 \cdots\}$~~

之ヲ図示スレバ次ノ如シ。例ヘバ state ガ三ツ、particles (ノ数ガ) 二ツノ場合。system ノトリウル state ハ

α' α'' α'''

symmetric

state 1	2
•	•
••	
	••

anti sym.

1	2
•	•

classical

1	2
A	B
B	A
AB	
	AB

$$P_C = \frac{N!}{n_1! \cdots n_l!}$$

N_i 及 n_i 大ナル時ハ Stirling ノ formula

$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

or $\log n! \backsim n(\log n - 1)$

ヲ適用シテ見ルト、

$$\log P_B = \sum_i \{(N_i+n_i-1)\log(N_i+n_i-1) - n_i \log n_i - (N_i-1)\log(N_i-1)\}$$

$$\log P_F = \sum_i \{N_i \log N_i - (N_i-n_i)\log(N_i-n_i) - n_i \log n_i\}$$

$$\log P_C = \cancel{\sum_i} \{N \log N - \sum n_i \log n_i\}$$

多数ノparticlesノ集リニ対スル統計法ハ systemガ symmetric stateニアルカ antisym. stateニアルカニヨリ異ナッテ来ル。ソレニヨッテ classical ナ統計法トハ異ナルモノヲ二ツ得ル。前者ヲ Bose-Einstein 統計法 後者ヲ Fermi-Dirac ノ Statistics ト云フ。

今 N 個ノ particlesノ各々ノトリ得ル indep + stationary state ヲ以テ discrete ナ ~~state~~ energy value ヲ夫々 $E_1, E_2, \cdots E_i, \cdots E_l$ トスレバ ~~$H_1, H_2, \cdots H_l$, 数~~ n_i 個ノ particlesガ H_i ナル state ニアル 数ノ ~~prob.~~ 組合セノ数ハ

~~Bose~~

~~附言~~ 多数ノparticlesノ集リニ対スル統計法ハ systemガ symmetric stateニアルカ antisymmetric stateニアルカニヨリ異ナッテ来ル。ソレニヨッテ classical ナ統計法トハ異ナルモノヲ二ツ得ル。前者ヲ Bose-Einstein 統計法 後者ヲ Fermi-Dirac ノトイフ。

今 N 個ノ indep particlesノ集リニ就テ、各 particleノトリ得ル stationary state ヲ以テ discrete ナ discrete energy value $E_1, E_2, \cdots E_l$ ニ対応スル ~~独~~ indep + state ノ数ヲ $N_1, N_2, \cdots N_l$ トスル。コレ等ノ state ノ各ニ $n_1, n_2, \cdots n_l$ 個ノ particlesガ distribute サレル方ナ ~~prob~~ 組合セノ数ヲ計算シテミル。

$P_{数}$ ω

先 n_i 個ノ particles ガ

E_i ナル energy value ヲ持ツ場合ノ状態ノ数ハ、

$$\prod \frac{N_i!}{N_i^0!\, N_i^1! \cdots N_i^{n_i}!}$$

(但シ N_i^j ハ j 個ノ particles ガ入ツテ居ル state ノ数トスル。)

之レガ

$$P = \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{N_i^0!\, N_i^1! \cdots N_i^{n_i}!}$$

~~ニ附帯条件~~ $\sum_{j=0}^{n_i} N_i^j = N_i$

及ビ $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} j N_i^j = \sum_{i=1}^{l} n_i = N$

ハ不変デアルガ 更ニ ~~total energy~~ system ノ $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} j E_i N_i^j = E$,

ヲ不変 ~~トスレバ~~ トシテ 最モ probable ナ N_i^j or n_i ハ

$$\delta(\log P) = 0 \qquad \delta N_i = 0 \qquad \delta N = 0 \qquad \delta E = 0$$

or $\delta(\log P) + \lambda_i \delta N_i + \alpha \delta N + \beta \delta E = 0$.

ヲ満足セネバナラヌ。N_i^j ガ凡テ非常ニ大ナル数ノ時ニハ

$\log N_i^j! = N_i^j \log N_i^j$ ト近似出来ル。

$$\sum_i \sum_j \delta N_i^j \left(-\log N_i^j + 1 + \lambda_i + \alpha j + \beta j E_i\right) = 0$$

従ツテ $N_i^j = C_i e^{+\alpha j + \beta j E_i}$

従ツテ E_i ナル energy value ヲ持ツ particles ノ数ノ most

$$N = \sum \frac{N_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1}$$

$$E = \sum \frac{N_i E_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{\alpha E_i + \beta} \mp 1\right)}{\frac{N_i}{\left(e^{\alpha E_i + \beta} \mp 1\right)}}$$

電子ノ state ヲ区別シテ考ヘ j 番目ノ state ノ Energy ε_j トスレバ

$$N = \sum \frac{1}{e^{-\alpha \varepsilon_i - \beta} \mp 1} = \sum \frac{e^{\alpha \varepsilon_i + \beta}}{1 \mp e^{\alpha \varepsilon_i + \beta}} = \mp \frac{\partial}{\partial \beta} \sum \log\left(1 \mp e^{\alpha \varepsilon_i}\right.$$

$$E = \mp \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum \log\left(1 \mp e^{\alpha \varepsilon_i + \beta}\right)$$

$$=$$

probable value ハ

$$n_i = \sum_j j N_i^j = \frac{\sum_j j N_i^j}{\sum_j N_i^j} \cdot N_i$$

~~$-\mu j - \nu j E_i =$~~ $+\beta + \alpha E_i = x_i$ トオク

$$n_i = N_i \frac{\sum_j j e^{x_i j}}{\sum_j e^{x_i j}} = N_i \frac{1}{S_i} \frac{dS_i}{dx_i}$$

故ニ $S_i = \sum_j e^{x_i j}$

Bose-Einstein ニテハ 一ツノ state ニ入ル particles ノ数ハ 制限ナシナルカラ

$$S_i = \sum_{j=0}^{\infty} e^{x_i j} = \frac{1}{1-e^{x_i}}$$

$$\therefore n_i = N_i \frac{e^{x_i}}{1-e^{x_i}} = \frac{N_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} - 1}$$

F.-D. ノ場合ニハ 一ツノ ~~par~~ state ニ入ル particles ノ数ハ 0 及ビ 1 丈ケデアルカラ

$$S_i = \sum_{j=0}^{1} e^{x_i j} = 1 + e^{x_i}$$

$$n_i = N_i \frac{e^{x_i}}{1+e^{x_i}} = \frac{N_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} + 1}$$

$$N = \sum n_i = \sum \frac{N_i}{Ae^{E_i/kT} \pm 1}$$

$$E = \sum n_i E_i = \sum \frac{N_i E_i}{Ae^{E_i/kT} \pm 1} =$$

Nヲ fix シテオイテ

~~§ Quantisation of wave equation~~

附記 classical ナ理論ニ於ケル Boltzmann ノ principle ニ従ヘバ system ガ macroscopic state ニ於ケル entropy S ハ、ソノ macroscopic state ニ於ケル microscopic state ノ総数 ~~[illegible]~~ P トノ間ニ

$$S = k \log P$$

ナル関係ガアル。 k: Boltzmann's Const.

故ニ most probable ナ macroscopic state ニ於テハ entropy S ハ maximum デアル。

コノ式ハ $\delta S = 0$

$$\cancel{\delta}\ \cancel{(}\ \frac{1}{k}\delta S - \beta\,\delta E - \beta\alpha\,\delta N = 0.$$

トナル。

system ガ一定ノ space 内ニ閉込メラレテ居ル場合ニハ volume V = const external force ニヨル work ハ 0 デアルカラ、

$$\cancel{\delta S = T\,\delta E}$$

$$\delta E = T\,\delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{V,S}\delta N.$$

$$\therefore\ \beta = \cancel{kT}\ {}^{1}\!/_{kT}$$

$$\therefore\ n_i = \frac{N_i}{A e^{E_i/kT} \pm 1}$$

但シ $A = e^{\cancel{\beta}\alpha}$

$$\frac{2m_i L^2 \cancel{W_0} W_0'}{h^2} \Delta W_0' = 4\pi \left(\frac{2m_i L^2}{h^2} E_i'\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2m_i}\, L}{h} \Delta E_i'$$

一般にN個の(同種の) particles より成る system の任意の state は
$$H_0 = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2$$
なる observable の eigenstate によって expand される。
~~system が各稜の長さ L なる cube 中に閉ぢ込められて居る場合~~
~~居る~~

故に W_0' なる eigenvalue に対応する state の repr. は
$$\left(\frac{1}{L^3}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\sum_i \frac{i}{\hbar}(p_i r_i)}$$

但し $$W_0' = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2$$

特に system が各稜の長さ L なる cube 中に閉ぢ込められて居れば之の任意の state の repres. は
$$\left(\frac{1}{L^3}\right)^{N/2} e^{\sum_i \frac{i}{\hbar}(p_i r_i)} \quad \text{for } 0 \le x_i, y_i, z_i \le L$$
$$\cancel{p_i^2/\hbar^2 = 1} \quad 0 \quad \text{otherwise}$$
但し $\frac{p_{ix}}{2\pi\hbar} = \frac{l_i}{L}$ etc

によって与へられる。
従って
$$W_0' = \frac{h^2}{2m_i L^2}\sum_i (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2) = \sum_i E_i'$$

~~parti~~ E_i' ~~W_0'~~ の一つの E' の値に対する (l_i, m_i, n_i) の組合せの数は、$l_i^2+m_i^2+n_i^2$ が大きくなれば E_i' と $E_i'+\Delta E_i'$ の間に大体
$$4\pi\left(\frac{2m_iL^2}{h^2}E_i'\right)^2 \frac{\sqrt{2m_i}\,L}{h}\Delta E_i' \quad \text{個}$$
である。
$$= \frac{4\pi m^{\frac{3}{2}} L^3}{h^3} E_i'^2 \Delta E_i'$$

之ノ particles ガ free ノ時ニハ E_i' ハ其々 particle ノ energy ヲ示ス。

particles ガ Bose (or Fermi) ノ統計ニ従フ場合ニハ particles ガ E_i' ト $E_i'+\Delta E_i'$ トノ間ニアル、energy ヲ持ッタ particles ノ数ハ夫々

$$n_i' \Delta E_i' = \frac{\frac{8\pi m^{3/2}}{h^3} L^3 E_i'^{1/2} \Delta E_i'}{A e^{E_i'/kT} \mp 1}$$

但シ A ハ T ト

$$N = \sum \frac{\frac{8\pi m^{3/2}}{h^3} L^3 E_i'^{1/2} \Delta E_i'}{A e^{E_i/kT} \mp 1}$$

$$E = \sum \frac{\frac{8\pi m^{3/2}}{h^3} L^3 E_i'^{1/2} \Delta E_i'}{A e^{E_i/kT} \mp 1}$$

~~ノ関係式~~カラ定マル。

各 particle ニ対スル de Broglie wave ノ振動数ハ

$$h\nu_i' = E_i'$$

デアルカラ、

$$n_i \Delta\nu_i = \frac{\frac{8\pi m^{3/2}}{h} L^3 \nu^2 \Delta\nu}{A e^{h\nu_i/kT} \mp 1}$$

~~space ガ~~ L ガ非常ニ大キイ極限ニ於テハ

$$n\,d\nu = \frac{\frac{8\pi m^{3/2}}{h} L^3 \nu^2 d\nu}{A e^{h\nu/kT} \mp 1}.$$

$$\frac{hc}{L}\cdot l\ ,\ \frac{hc}{L}m,\ \frac{hc}{L}n$$

$\Delta W_0'$: $\left(\frac{hc}{L}\right)^{-3}\cdot W_0'^2\Delta W_0' =$

density　　Volume

Total energy:

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\int\frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}\mp 1}$$

F: $\sum \delta n_i \{ \log(N_i - n_i) - \log n_i - \alpha - \beta E_i \} = 0$

$$\therefore \quad 1 + \frac{N_i - 1}{n_i} = e^{\alpha + \beta E_i}$$

$$\text{or} \quad \frac{N_i}{n_i} - 1 = e^{\alpha + \beta E_i}$$

B: $$n_i = \frac{N_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

F: $$n_i = \frac{N_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1}$$

$$\dot{\rho} = [\rho, H]$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\sum_m \rho_{mm} \log \rho_{mm}\right) = \frac{\partial \rho_{mm}}{\partial}$$

$$\rho(q_r\, p_r)$$

$$\rho_{mn} \log \rho_{mn}$$

$$(q'|H|q'') = H_{q'q''}$$

$$H = H_{q'q''} e^{\cancel{\frac{2\pi i}{h} H_{q'q''}(q'-q'')}}\quad p^{\frac{2\pi i}{h}(q'-q'')p}\ \delta(q$$

$$H(q', \tfrac{\partial}{\partial q'})(q'/) = (q'|H|q'')\,(q''/)$$

$$\|$$

$$\boxed{\sum_{q''}(q'|H|q'')e^{\frac{2\pi i}{h}(q''-q')\frac{h}{2\pi i}p'}}(q''/) = \sum_{q''}(q'|H|q'')(q''/)$$

$$(q'|H|q'') = H_{q'}(q',q'')$$

$$\boxed{\sum_{q''} H(q, q'')e^{\frac{2\pi i}{h}(q''-q)p}}$$

$$= e^{\frac{-2\pi i}{h}(q'-q)p}\ \bar{H}(q, q'')$$

$$\tilde{H}(q'-q'') = \bar{H}(q, q'')$$

多数ノparticles ~~ヨリ成ルsys~~ ノ集リニ対スル統計法ハ systemガsymmetric stateニアルカ、antisym stateニアルカニヨリテ異ナツテ来ル。ソシテ classicalナ統計法トハ違ツタモノニナツテ、前者ガBose-Einsteinノ統計法、後者ガFermi-Diracノモノトナツテ居ル。

各particleノトリウルenergy ~~eigen~~valueヲdiscreteトシ $E_1, E_2 \cdots E_i \cdots E_l$ 各energy valueニ対スル独立ナindep ナstationary stateノ数ヲ夫々 $N_1\, N_2 \cdots N_i \cdots N_l$ トスル。n_i 個ノparticlesガ E_i ナルenergy valueヲトル組合セノ数ハ

Bose symm:
$$P_B^{(i)} = \frac{(N_i+n_i-1)!}{n_i!\,(N_i-1)!}$$

Fermi:
$$P_F^{(i)} = \frac{N_i!}{(N_i-n_i)!\,n_i!}$$

而シテ ~~全~~ $n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots n_l$ 個ノparticlesガ夫々 $E_1, E_2, \cdots E_i, \cdots E_l$ ナルenergyヲ持ツテ居ル ~~prob~~ 様ナ組合セノ数ハ

$$\cancel{W_B = \prod P_B} \quad P_B = \prod_{i=1}^{l} P_B^{(i)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{(N_i+n_i-1)!}{n_i!\,(N_i-1)!}$$

$$P_F = \prod_{i=1}^{l} P_F^{(i)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{(N_i-n_i)!\,n_i!}$$

Systemノtotal Energy $\quad E = \sum_{i=1}^{l} E_i n_i$

全particlesノ総数 $\quad N = \sum_{i=1}^{l} n_i$

Boltzmann: $\delta\{\log P_c\} + \alpha\delta E + \beta\delta N = 0$

$$\delta n_i\{-\log n_i - 1 + \alpha E_i + \beta\} = 0$$

$$n_i = e^{-\alpha E_i + \beta}$$

之は各 energy value に属する state が一つとして
計算したもの。もし N_i 個ある時は $\cancel{e^{\alpha E_i}}$

$$n_i = N_i e^{+\alpha E_i + \beta}$$

故に之等に依れば、 $n_1, n_2, \ldots n_l$ の ~~最も多い値~~ most probable value は

$$\left.\begin{array}{l}\delta(\log P_B) = 0 \\ \text{or } \delta(\log P_F) = 0\end{array}\right\} \quad \delta E = 0 \quad \delta N = 0$$

を論ずるには未定係数を用ひる。従って

$$\delta\{\log(P_B \text{ or } P_F)\} + \alpha_1 \delta E + \alpha_2 \delta N = 0.$$

N_i 及 n_i が大なれば之は

$$\text{Bose}: \sum_i \delta n_i \{\log(N_i + n_i - 1) + 1 \underbrace{+ \alpha_1 E_i + \alpha_2}_{-\log n_i - 1}\} = 0$$

or

$$\text{Fermi}: \sum_i \delta n_i \{-\log n_i + \log(N_i - n_i) + \alpha_1 E_i + \alpha_2\} = 0$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{N_i - 1}{n_i} = e^{-\alpha_1 E_i - \alpha_2} \\ \text{or} \quad \dfrac{N_i}{n_i} - 1 = e^{-\alpha_1 E_i - \alpha_2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} B: & n_i = \dfrac{(N_i - 1)}{e^{-\alpha_1 E_i - \alpha_2} - 1} \\ F: & n_i = \dfrac{N_i}{e^{-\alpha_1 E_i - \alpha_2} + 1}\end{array}\right\}$$

$$\left(C: \quad n_i = \frac{N_i}{e^{-\alpha E_i - \beta}} \right)$$

$$N = \sum \frac{N_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum N_i \log \left(\frac{1}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} \right)$$

$$E = \sum \frac{N_i \varepsilon_i}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum N_i \log \left(\frac{1}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} \right)$$

$$S = k \log P = k \sum_i$$

$$P_n : N_i + n_i - 1 = N_i \left\{ \frac{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1 + 1}{e^{-\alpha E_i - \beta} \mp 1} \right\} - 1 = \frac{N_i}{1 - e^{\alpha E_i + \beta}}$$

$$- \sum \frac{N_i}{1 - e^{\alpha E_i + \beta}} \log \left(1 - e^{\alpha E_i + \beta} \right) - r$$

[illegible]
従ッテ ~~sys~~ total energy

$$E = \sum_{i=1}^{l} E_i n_i$$

$$N = \sum_{i=1}^{l} n_i$$

ガ定ッテ居ル時。

$$n_1\, n_2 \cdots n_l$$

ニ対スル most probable value ハ

$$\left.\begin{array}{l} \delta(\log P_B) = 0 \\ \text{or} \quad \delta(\log P_F) = 0 \end{array}\right\} \quad \delta E = 0 \quad \delta N = 0$$

ヲ満足スル如キモノデアル。

即チ $\delta\{\log(P_B \text{ or } P_F)\} - \alpha\delta N - \beta\delta E = 0$.

~~N_i 及ビ n_i ノ大ナル~~ N_i 及ビ ガ非常ニ大デ、従ッテ ~~大ナル N_i~~, n_i モ大ナル 所ガ存在スル場合ニ N_i ノ大ナル所ガ存在シ ~~N_i 及ビ n_i ノ小ナル~~ 所デ

Stirling ノ式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

$$\text{or} \quad \log n! = n \log n$$

ヲ使ッテ出テ来ル誤差ハ小サイカラ、

$$\log P_B = \sum_i \{(N_i + n_i - 1)\log(N_i + n_i - 1) - n_i \log n_i - (N_i - 1)\log(N_i - 1)\}$$

$$\log P_F = \sum_i \{N_i \log N_i - (N_i - n_i)\log(N_i - n_i) - n_i \log n_i\}$$

ト書イテ見ルト

従ッテ B: $\sum_i \delta n_i \{\log(N_i + n_i - 1) - \log n_i - \alpha - \beta E_i\} = 0$

F:

~~次ニ system ガイブ~~ ニノ場合 更ニ他ノ α's ト commute スル observables

$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m$ ガ ~~値~~ $\rho_1' \rho_2' \cdots \rho_m'$ ナル値ヲトル

probab ハ α's ガ α's ナル値ヲトル state 中デ

ρ's ガ ρ's ノ値ヲトル ~~state~~ indep. state ノ数ニ比例スル。

コレヲ次ノ場合ニ用ヒルノデアル。Total number ~~N~~ N ト

~~量子統計論~~ system ヲ構成スル particles ノ total energy E ガ

ワカツテヰル ~~場合~~ トスル ~~統計~~

次ニ各 particles ノトリウル energy value ヲ discrete

トシ $E_1, E_2 \cdots E_l$ 各ノ energy value ニ

属スル indep. ナ stationary state ノ数ヲ夫々 $N_1 N_2 \cdots N_l$

トスルト。~~E_i ナル energy~~ $n_1 n_2 \cdots n_l$ n_i 個ノ particles ガ夫々 $E_1 \cdots E_l$ E_i ナル

energy value ヲトル ~~確率~~ probab ハ、カヽル條件ヲ満足スル

indep. state ノ数ニ比例スル。

所謂 n_i 個ノ particles ガ E_i ナル energy ヲトル state ノ数ハ

$$\text{Bose}: \quad P_B^{(i)} = \frac{(N_i + n_i - 1)!}{n_i!\,(N_i - 1)!}$$

$$\text{Fermi}: \quad P_F^{(i)} = \frac{N_i!}{(N_i - n_i)!\, n_i!}$$

従ツテ $n_1 n_2 \cdots n_l$ 個ノ particles ガ夫々 $E_1 E_2 \cdots E_l$ ナル energy ヲトル prob ハ

$$P_B = \prod_{i=1}^{l} P_B^{(i)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{(N_i + n_i - 1)!}{n_i!\,(N_i - 1)!}$$

$$P_F = \prod_{i=1}^{l} P_F^{(i)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{(N_i - n_i)!\, n_i!}$$

従テ system ガ state $\Phi_{j'}$ ニアル probab. ヲ $w_{j'}$ トスレバ、
~~コレガ~~ 気体ノ

$$\bar{A} = \sum_j w'_{j'} (\phi_j A \psi_{j'})$$

~~トナル~~ 従ッテ

$$\sum_i \bar{a}_{ki} w_i a_{ij'} = w_{j'} \delta_{k'j'}$$

デナケレバナラヌ。

~~両辺ニ $\sum_k a_{lk'}$ ヲ operate スレバ。~~

$$\cancel{a_{lki}} \quad w_l a_{lj} = w_j' a_{lj}$$

~~∴ w~~

之ガ ψ' ノトリ方如何ニカヽハラズ成立スルタメニハ

$$w_i = \text{const} \quad (\text{independent of } i)$$

デナケレバナラヌ。

即チ system ガ ~~sta~~ 互ニ orthogonal ナ各々ノ state ニアル probability ハ equal デナケレバナラヌ。

~~従ニ~~

次ニ system ニ関シ ~~全体~~ 不完全ナ知識ヲ有スル場合ノ統計ヲ考ヘテ見ヨウ。例ヘバ ~~相~~ $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_m$ ナル observables ノ値ガ測定ノ結果 $\alpha_1'\,\alpha_2' \ldots \alpha_m'$ ナルコトヲ知ッテヰルトスレバ、~~相互ニ variable ニナル~~

$$\alpha_i \psi = \alpha_i' \psi \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ヲ満足スル様ナ state 中カラ互ニ orthogonal ナ complete set ヲトリ出セバ、~~system~~ 各々ニアル probab ハ上ノ同様ニ推論スルニ equal デナケレバナラヌ。

† ~~実際ニ於テ用ヒラレテヰル~~ 平均値ヲ計算スル方法 (Neumann, Göttinger Nach. 1927, S.245)

一般的ナ場合ノ、統計理論ニ於ケル如キ

~~普通ノ場合ニ於ケル~~ 従ッテ其ノ場合夫々ヲ考察シテ見ル。

~~統計力学ノ particle~~ 一般ニ多クノ粒子ヨリ成ル 複雑ナ system ノ state ヲ決定スルニハ多クノ測定ガ必要デアル。故ニ ~~any~~ 複雑ナ system ノ state ハハッキリトワカッテヰナイ場合ガ多イ。

~~斯ル場合ニハ其ノ~~ 斯ル場合 system ガ $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_i$ ナル state ニアル prob ガ夫々 $P_1, P_2, \dots P_i, \dots$ ナルトスル。

$\phi_i P_i \psi$

モット簡単ナ system ニ就テモ state ヲ決定スルニ必要ナ 凡テノ observables ノ値ヲ知ッテハヰナイ場合ガ多イ。カヽル場合ニハ system ノ任意ノ observable ノ平均値トシテハ、各 state ニ於ケル夫々ノ observables ノ平均値ヲ更ニ平均シタモノヲトラネバナラヌ。†

system ガ各 state ニアル relative prob ニヨッテ

(ニ関スル全テノ量ノ統計ニ於テ重要ナル)

今 system ノ任意ノ orthogonal, complete fundamental state ノ set $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_i \dots$ ニアル probab. $w_1, w_2, \dots w_i \dots$ トスレバ、任意ノ observable A ニ於ケル平均値 $\bar{\bar{A}}$ ハ

$$\bar{A} = \sum_i w_i (\phi_i A \psi_i), \quad \sum_i w_i = 1$$

所デ、今 ψ's ヲ他ノ orthogonal fundamental state ψ''s ニヨッテ expand シ

$$\psi_i = \sum_j a_{ij} \psi'_j$$

トスレバ

$$\bar{A} = \sum_{i,k',j'} w_i a_{ij'} \bar{a}_{ik'} (\phi'_{k'} A \psi'_{j'})$$

$$= \sum_{i,k',j'} (\bar{a}_{k'i} w_i a_{ij'}) (\phi'_{k'} A \psi'_{j'})$$

但シ $\sum_i \bar{a}_{k'i} a_{ij'} = \delta_{k'j'}$. or $\cancel{\sum_i a_{k'i} \bar{a}_{ij'} = \delta_{k'j'}}$

直 Ni

Ni ノ value ヲ知ツテモ　ρ ハドンナニナルカ分カランカ.

$$\boxed{a_t(\alpha') = a_0(\alpha') + t\,\dot{a}_\tau(\alpha')}$$

$$= a_0(\alpha') + \frac{t}{i\hbar}\sum_{\alpha''}(\alpha'|H|\alpha'')\,a_\tau(\alpha'')$$

$$|a_t(\alpha')|^2 = |a_0(\alpha')|^2 + \frac{t}{i\hbar}$$

$$i\hbar\, \dot{a}(\alpha') = \sum_{\alpha''} (\alpha'|H'|\alpha'')\, a(\alpha'')$$

$$i\hbar\, a(\alpha',t) = \int_0^t (\alpha'|H'|\alpha_0)\, \cancel{a(\alpha_0)}\, dt$$

$$= \int_0^t (\alpha'|H'|\alpha_0)\, dt$$

~~a(α'~~

$$i\hbar\, a(\alpha',t) =$$

time t の間に a's のかわり方が小さければ

$$i\hbar\, a(\alpha',t) = \int_0^t (\alpha'|H'|\alpha_0'')\, dt \cdot a(\alpha'',0)$$

$$=$$

$$\hbar^2 |a(\alpha',t)|^2 = \left|\int_0^t (\alpha'|H'|\alpha_0)\, dt\right|^2$$

$$\frac{|a(\alpha',t)|^2}{t} = \frac{1}{\hbar^2}\, \frac{\left|\int_0^t (\alpha'|H'|\alpha_0)\, dt\right|^2}{t}.$$

象限　象限

限

効用　累

故ニ一辺ノ長サガ L ノ（完全ニ反射スル壁ヲ持ツ）cube 中ニ在ル radiation ヲ
故ニ Light Quanta ノ集リト考ヘルト，momentum ハ $p_x = \frac{h}{\lambda_x}$ etc デアルカラ
radiation ノ波長ト light quanta ノ momentum トハ

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{hl}{L} \qquad p_y = \frac{hm}{L} \qquad p_z = \frac{hn}{L}$$

ナル関係ニアル故，

$$w_0' = h\nu = |p|c$$

$$\therefore\ n(w_0')\Delta w_0' = 4\pi\left(\frac{L}{hc}\right)^3 w_0'^2\,\Delta w_0' \Big/ Ae^{w_0'/kT} \mp 1.$$

$L^3 = V$ ガ非常ニ大キイ場合ニハ

$$\text{or}\quad n(\nu)\,d\nu = \frac{4\pi V\cdot\nu^2\,d\nu}{c^3} \Big/ Ae^{h\nu/kT} \mp 1$$

コノ場合ハ Light Quanta ノ N ハ変リ得ル故，
$\delta N = 0$ ナル條件ハ無イ．從テ $\beta = 0$ or $A = 1$
トナルベキ。
從ッテ単位体積内ニ於ケル $(\nu, \nu + d\nu)$ ノ範囲ノ
freq. ヲ有スル light Quanta ノ数ハ polarization ヲ考慮スルト state ノ数ハ2倍トナルカラ

$$n(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} \mp 1}$$

從ッテ energy 密度ハ

$$\varepsilon(\nu)\,d\nu = h\nu\, n(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3}\,\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} \mp 1}.$$

− ノ方トシタモノハ Planck ノ Radiation ノ式デアル。
∴ Light Quanta ハ Bose ノ統計ヲ満足スル particles デアル。

所デ Electron ニ對シテハ Pauli ノ Exclusion Principle
ガアテハマル。即チ二ツ以上ノ Electron ガ同ジ state ニ
入ラヌ訳ナリ。antisymmetric ナ state ニ對シテハ 2 ツ以上
ハ勿論ト満足サレテ居ルガ、sym. ノ場合ハソウデナイ。
ニハ Electron ノ集リニ對シテハ Fermi ノ統計ヲ應用セ
ネバナラヌ。結晶金属中ノ電子ニ對シ Fermi ノ統計ヲ apply
スルコトニヨリ 電気傳導(金属ノ) ~~理論~~ 其ノ他ノ多クノ問題ヲ
解クコト(金属ノ) ガ出来ル。

又 Band spectra ノ Intensity ノ alternation ヨリ見レバ
H原子ノ Proton ハ矢張リ ~~antis~~ Fermi ノ統計ニ従フ。

ソレカラ electron 及ビ proton ヨリナル system 例ヘバ
種々ノ atom ノ nucleus ヲ一ツノモノト見テ、ソレガ
~~集リニ對スル統計ヲ如何ナル統計ニ従フカト云フニ~~
~~一ツノ system ヲ構成スル particles ノ数ガ偶数ノ時ニハ~~
二ツノ system ノ Permutation ニハ ~~偶数~~(全system) ノ particles (数丈) ノ permu
ヲ ~~偶数回~~ 行ッテ得ラレルカラ、particles ノ数ガ偶数ノ
時ニハ state ハ變ラナイ。即チ state ハ symm. デ Bose ノ
統計ニ従フ。奇数ノ時ハ state ノ符號ガカハル。
即チ state ハ antisym. デ Fermi ノ統計ニ従フ。
實際 α-particle ヲ 2個ノ electron ト 4個ノ proton
ヨリナルト見レバ、Bose ノ統計ニ従フト云フ事實ト
一致スル。但シ Nitrogen ノ nucleus ハ 14個ノ ~~ele~~ proton
ト 7個ノ electron ヨリナルガ之ハヤハリ Bose ノ統計ニ従フ。

一般ニ 一ツノ dynamical system ガ perturbation ヲ受ケル場合 system ノ Hamiltonian ヲ H_0, perturbation ~~energy~~ ノ Hamil ~~H_0 デ表ハサレル system ニ H' ナル~~ ~~表ハサレル系~~ ヲ H' トスレバ. 然ルニ ノ場合ノ Hamiltonian ハ

全体ノ $$H = H_0 + H'$$

~~全体ノ~~ 全系ノ Hamiltonian トナル訳デアル。

以上述ベタ所ハ nucleus ノ構造ニ関スル明瞭ナ知識ヲモ
有タヌ故、之等ノ方カラ ~~考察~~ 考察（結果ノ信頼）ガ導ツテヰル
~~中半断~~ 途中ヲ脱シ得ヌコトハ当然デアル。
~~之ヲ要スルニ~~ 最近ノ Neutron ノ発見ニモ関係シテ考ヘラレ
ルコトハ、~~ele~~ ele 核内 electron ガ個体トシテ存在スル
カ否カモ疑問デアリ
ガ之等ノ ~~諸点ノ~~ 研究方面 possible case ~~トシテハ~~ ニ個々ニ検索
サレルベク、詳細ハ省クコトニスル。

§ Perturbation Theory

吾々ハ互ニ interact シテヰル dynamical system
ノ集リヲ一ツノ system ト考ヘレバ之ニ対スル
Hamiltonian ハ

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i + \sum_{i<j} H_{ij}$$

但シ H_i ハ N個ノ system 中ノ i番目ノモノノ Hamiltonian
H_{ij} ハ i番目ノ system ト j番目ノ system トノ interaction
ノ energy ヲ表ハシテヰル。

$\sum_{i=1}^{N} H_i = H_0$　$\sum_{i<j} H_{ij} = H'$　トオケバ

$$H = H_0 + H'$$

ト書ケル。

サテ　而シテ interaction ガ無カツタナラバ system ノ state（変化）ハ
ニツ perturbation

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = H_0 \psi_0$$

ノ solution ヲ考ヘテミル。
interaction ガ無イ場合ニハ ψ_0 ハモトノ system ノ state ヲアラハシテヰル。之ガ一定ノ time ニ於ケル system ノ state ノ Schrödinger ノ representation ガ ψ_0 ノソレト一致スルトシテモ、次ノ瞬間ニハモハヤ ~~相違~~ 互ニ違ッテ来ル。

今 interaction ノ無イトキノ場合ノ stationary state 即チ

$$W_0'\psi(\alpha') = H_0\psi(\alpha')$$

ヲ満足スル $\psi(\alpha')$ ニヨッテ system ノ 任意ノ state ヲ expand シ

$$\psi = \sum_{\alpha'} a(\alpha')\psi(\alpha')$$

トスル。但シ commute スル observables ノ complete set α's ノ eigen ヲ簡単ニ α' ト書イタモノトスル。
ψ, $\psi(\alpha')$ ガ共ニ normalize サレテヰレバ

$$\sum_{\alpha'}|a(\alpha')|^2 = 1$$

コレヲ ψ ノ満足スベキ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (H_0+H')\psi$$

ニ入レルト

$$i\hbar\sum_{\alpha'}\left\{\dot a(\alpha')\psi(\alpha') + a(\alpha')\frac{\partial\psi(\alpha')}{\partial t}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha'}\left\{a(\alpha')H_0\psi(\alpha') + a(\alpha')H'\psi(\alpha')\right\}$$

† トセニ於テ $|\bar{a}(\alpha')|^2$ ハ system ガ $\psi(\alpha')$ ナル state ニアル probability ヲ表ハスコトガ出来ル、之ノ式ハ

† 随テ H' ナル perturbation ガ作用シテ居ル~~場合ニ~~ヲ考ヘテ system ガ色々ナ state $\psi(\alpha')$ ニアル probability ガ time ト共ニ如何ニ変ハツテ行クカト云フ事ガ出来ル。

† 而シテ equation ガ linear デアルカラ、t=0 ニ於テ $a_0(\alpha') = a_0^{(1)}(\alpha')$ ナル様ナ solution ヲ $a^{(1)}(\alpha')$、$a_0(\alpha') = a_0^{(2)}(\alpha')$ ナル様ナ solution ヲ $a^{(2)}(\alpha')$ トスレバ、initial cond. $a(\alpha') = c_1 a_0^{(1)}(\alpha') + c_2 a_0^{(2)}(\alpha')$ ナル様ナ solution ハ $c_1 a^{(1)}(\alpha') + c_2 a^{(2)}(\alpha')$ デ表ハサレル。
従ツテ総テノ initial condition ニ対スル solution ハ ~~t=0 ニ於テ~~

$$a(\alpha') = \cancel{\delta(\alpha', a_0)}\ \delta_{\alpha'\alpha_0}$$

特別ナル initial condition ニ対スル solution ノ superposition トシテ表ハサレル。

$$i\hbar \sum_{\alpha'} \dot{a}(\alpha')\psi(\alpha') = \sum_{\alpha'} a(\alpha') H' \psi(\alpha')$$

$H'\psi(\alpha')$ ヲ H_0 ノ eigenstate デ expand スレバ

$$H'\psi(\alpha') = \sum_{\alpha''} \psi(\alpha'')(\alpha''|H'|\alpha')$$

トセヨ。

従ッテ

$$\sum_{\alpha'} \Big\{ i\hbar\, \dot{a}(\alpha') - \sum_{\alpha''} (\alpha'|H'|\alpha'') a(\alpha'') \Big\} \psi(\alpha') = 0$$

故ニ。

左辺ガ0トナルタメニハ、各ψノ係数ハ各々0トナラナケレバナラヌ。

$$i\hbar\, \dot{a}(\alpha') = \sum_{\alpha''} (\alpha'|H'|\alpha'') a(\alpha'') \quad ト$$

コノ聯立一階微分方程式~~ナルガ故ニ、与ヘラレタ initial~~

initial condition ヲ与ヘレバ

(~~之ハ線形微分方程式~~) ノ解ハ unique ニ定マル故 従ッテ

ψ ガ unique ニ定マッテ来ルノデアル

今 ~~initial condition トシテ~~ t=0 ニ於テ

$\cancel{a(\alpha') = \delta(\alpha', \alpha_0)}$

~~即チ system ハ time 0 ニ於テ~~ ψ(α₀) ナル ~~state ニアッタ~~

~~トスレバ~~、time t ニ於テハ

$\cancel{\dot{a}(\alpha')}$

コノ場合ハ system ハ t=0 ニ於テ $\psi(\alpha_0)$ ナル state ニ一致シテ居ッタノデアル。

time t ノ後ニ状態ヲ見テ α' ヲ ~~見出~~ 見出スプロバビリティヲ求メルナラバ. ~~[illegible]~~ 上式ノ右辺ニ ~~initial~~ $t=0$ ニ於テノ値ヲ入レテ積分シ

$$i\hbar\, a_t(\alpha') = \int_0^t (\alpha'|H'|\alpha^0)\, dt$$

トシテヨイ近似ヲ得ルワケデアル。

又は、

$$\hbar^2 |a_t(\alpha')|^2 = \left| \int_0^t (\alpha'|H'|\alpha^0)\, d\tau \right|^2$$

system の state の満足すべき

物理的法則は皆 因子 linear operator $L = 0$

~~$L=0$~~ or $L\psi = 0$ for any state

なる形で与へられ得る。

従って ψ_1, ψ_2 が共に system の state ならば $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$

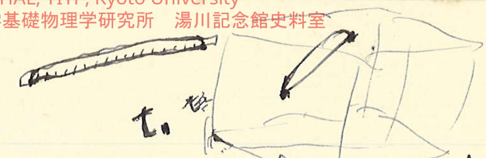
も亦 system の state である。

Relativity theory ノ最後ノ目的ハ 四次元的世界ヲ ~~world ヲ統一シ~~, eindeutige Beschreibung ニアル。之ハ (アル一人ノ observer ニトッテ) 将来ニ対スル確実ナ予知ヲ許ス意味デハナイ。~~将来ノ~~ 次ニ 量子論ニトッテハ 将来ニ対スル予知ハ ~~[illegible]~~ 不確定的統計的ナモノデアル。~~又過去ニ於テモ~~ ~~将来~~ ~~過去ノ~~ ~~次ニ~~ 将来ノ結果ノ種々ノ結果ヨリ 経験ハ 以テ出来事ガ確定的ニ定マルカ eindeutige ニ定マルカ ハ 過去ニ ~~[illegible]~~。World ノ state ノ変化 即チ world ノ state ガ time 及 space coordinate ノ関数トシテノ representation ~~[illegible]~~ ソレトイフ以外ニ 別ニ 変化ニ 違ヒガアルモノデアラウカ。

~~world ノ cov 変化ヲ~~ 量子論ニヨリ ~~[illegible]~~ 同時ニ observer ノ側ニ 知覚ノ結果 ハ 観測ニヨリ 統計的ナモノデアル。即チ 如何ナル出来事ガ 起ルカ 分ラナイ。

~~之ト反対ニ~~ 過去ノ出来事ハ 既ニ 確定的ニ知ラレテ居ルカ ドウカ。之ノ確定的ナ記録ヲ 有シテイテ world ノ state ~~[illegible]~~ トナッテイルノデアラウカ。ソレモ不可能デアル。

~~過去ノ state~~ ヲ 区別スル所以ハ Objekt ト Subjekt トノ 相互作用ヲ 除イテ 考ヘラレナイ。Subjekt ト 相互作用スル Objekt ト ノ 分離シテ 説明ノ 意義ガアル。



t_1

Relativityノ問題ハ、例ヘバ左ノ様ナ問題ニ還元サレル。
二ツノ粒子ガ存在スル時ニ。其ノ一ガ t_1 ニ於テ x_1, y_1, z_1
ナル点ニ於ケル状態(coincidence)ヲ起シ、又 ~~t_2~~ 時刻ニ t_2（即チ observer ガ見テ）
~~他ノ~~(此ノ場合 t_1 ト異ナル) $x_2\,y_2\,z_2$ ニ於テ coincidence ヲ起ス。

次ニ他ノ observer ガ見レバ、T_1 ニ於テ X_1, Y_1, Z_1
ナル点ニ於テ ... T_2 時刻ニ $X_2\,Y_2\,Z_2$ ...
~~... ニナル。 R_{12} ト r_{12} トノ 関係~~
此ノ場合 ~~R_{12}~~ 二ツノ時間 coincide スルトスルト
(t_1, x_1, y_1, z_1) ト (T_1, X_1, Y_1, Z_1) ガ
$(t_2\,x_2\,y_2\,z_2)$ ト $(T_2\,X_2\,Y_2\,Z_2)$ トハ同ジ。
Weltpunkt ヲ表ハス事ニナルノデアル。今 $t_1 = t_2$
ニ於テ x_1, y_1, z_1 ; $x_2\,y_2\,z_2$ ニ於テ coincidence
ガ起コッタトスレバ 第一ノ observer ニトッテハ 距離ハ
$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \cdots}$ デアル。
又 $X_2\,Y_2\,Z_2$ ハ其レゾレ ... 第二ノ observer
ニトッテハ r_{12} ナル量ハ $(T_1 \cdots)$ 及 $(T_2 \cdots)$ ニ
関係シタ量トナリ、一般ニ R_{12} トハ一致シナイ。
(例ヘバ $X_1 = X_1 - VT_1$ etc

coincidence ヲ起ス二ツノ粒子ノ間ニ存在スルモノハ
reaction ヲ伝ヘル velocity ニ関係シテヰル。

Various Sort of Uncertainty of a Single Observation in the Quantum Theory

Operatorノ一般ニ就テ論ズ　Observableノ関係
及ビTransformationノ関係.

systemノ或時刻 time t ニ於ケル
任意ノstateハ systemノ互ニcommuteスル dynamical variables q_i ノ maximum numberノ function トシテ
アラハスコトガ出来ル。即チ probability amplitude or Transformation Function
ニヨッテ stateヲアラハシ得ル。

stateノ時間的変化ハ probability amplitudeノ時間的変化ニ ~~stat~~ probability amplitudeハ
~~time~~ t 及ビ q_i ニツイテアラハサレル。

Transformation Function

$$(q_1' q_2' \cdots q_n', t_1) \rightleftarrows (Q_1' Q_2' \cdots Q_m', t_2)$$

$$\phi_{q'} \psi_{Q'} = (q_1' \cdots t / Q_1' \cdots t)$$

$$(q_1' q_2' \cdots q_n') \rightleftarrows (Q_1' Q_2' \cdots Q_m')$$

Relat.

$$S_1(q_1', q_2', \cdots q_n', t') \rightleftarrows S_2(Q_1' Q_2' \cdots Q_m', T')$$

$$\downarrow$$

$$(q_1', q_2', \cdots q_{n+1}') \rightleftarrows (Q_1' Q_2' \cdots Q_{n+1}')$$

$$L S_1 = 0,$$

$$\sum (Q_1' Q_2' \cdots Q_m' T' | L | Q_1'' Q_2'' \cdots Q_m'' T'') (Q_1'' Q_2'' \cdots T'' / S_1) = 0.$$

ソノ State ニ於テアル observation ヲ行ッタ結果ハ一般ニ一定デハナイ。何回モ繰返セバ色々ナ結果ガ得ラレル。ドノ結果ガ得ラレルカヲ予測スルコトハ不可能デアルガ、ソノ内ノ各々ノ結果ノ得ラレル relative probability ハ理論的ニ 決定サレル。

状態ト云フ概念ヲ新シイ意味ニ於テ使フ意味ニ於テ用ヒラレル。即チ reine Fall ト gemischte Zustand ヲ区別シテ居ル。Quantenmechanisch ナ Interferenz [illegible]ス。

ガ残ヘル。~~[illegible]~~ ハ state ヲアラハス set of
number ヲ用ヒルコトガ出来ル。~~ソノ内~~ ソノ間ニ set of number
ノ一部分ヲ知レバ他ガ決マル。~~場合ガアル~~。即チ linear relation
独立ナ state ノ間ノ
~~ガアレバ一部分ヲ知レバ他ハ~~ 決メラレルカラデアル。
ヲ知レバ残リノ部分ハ一意的ニ
ヨリテ linearly independent ナ state
ノ set ヲトリ出シテ対応スル number ノ set ヲ知レバヨイ。
カクテ set ノ mächtigkeit ハ如何トナルカ。

任意ノ φ, ψ ニ対シ

ノ中デ $|\varphi_n \psi_n|$: finite 同士ノ場合ニ於テ ソノ二ノ数
ガ finite ノ
場合 $|\varphi\psi| \leq C$ (C : 任意 正数) ナル state ト real
number ノ set モ亦 ~~finite ($\leq C$)~~ 絶対値ガ C 以下ノ
数ノミヨリナル。

~~従ッテ ノ set state ノ set~~ ノ state ノ set 中ニ於テ ~~何ツカガ~~ 互ニ
linearly ~~inde~~ dependent ナモノニ対応スル number ノ
set モ亦 linearly dependent デアル。~~従ッテ~~
~~number ノ set state ヲ define スル~~

次ニ
~~任意ノ~~ 一ツノ C ニ対シテ $|\varphi\psi| \leq C$ ナル如キ凡テノ state
ヲトルナラバ、他ノ任意ノ state ハソノ中ノ一ツトドレカヲ対応サ
得ナイ。 φψ ノ finite ナ シカシ凡テノ state トノ φψ ノ finite ナ
~~積ガ 0 ナル~~ 内積 0 ナル state (ヨリ 一ツノ state ガソノ
state 附近 ~~減~~ スルトシテモ) ト ~~凡テノ state ト~~ φψ ノ finite ナ
積ハ 0 デナケレバナラヌ。逆ニカヽル state
ハ $|\varphi\psi| = 0$ ナル state 丈デアル。
~~カヽル state~~ 従ッテ斯ク $|\varphi\psi| = 0$ ナル state ヲ 0 state
~~ト名付ケ~~ スレバ 何等矛盾ヲ生ジナイ 加ヘテ
カヽル state ニ対シテハ ~~set number set~~ 凡テノ set ノ number ガ
0 デアル如キ number set ガ対応スル。
又 linear dependence ノ関係モ保存サレル。
state ト number ノ set トノ間ニ one-one correspondence

状態ノ集合ト数集合ノ集合トノ間ニ
~~状態ノ state ノ set ト set of number ノ set トノ間ニ~~
次ノ如キ対応ヲ行ハシメルコトガ出来ル。
或ル~~集合ト状態~~ 状態(係数) 状態ト~~ナス~~ヲ従属セシメルモノニ
一ツノ結果数ヲ対応サス~~コトガ出来ル~~。トスル。コノ数ヲ
二ツノ状態ノ~~状態~~積ト名ヅケル。ソレデ或ル一ツノ
状態 ψ ニ対シ任意ノ状態 ψ' ヲ従属セシメテ得ル数ヲ
~~x(ψ) トスル~~ $x(\psi, \psi')$ トスレバ、~~ψ, ψ~~ 一ツノ状態
ψ ニ対シ number ノ set $x(\psi, \psi')$ ガ対応スルコトニナル。

$$\psi \rightarrow x(\psi, \psi') = \varphi\psi$$

2ノ対応ガ之ニ依テ
~~2ノ number set~~ 所デ ~~積~~ ニ対シテ成立スル 計算ノ法則ハ
ハ当然 number ノ set 積ノ法則ト element ニツイテモ
成立セネバナラヌ。如何ナル対応モ 2ノ対応ニ要スル法則ヲ
行ヘラル。

所デ $|\varphi_2\psi_1| \leq |\varphi_2||\psi_1|$
ナル故、$|\psi_1|, |\psi_2|$ ガ共ニ finite ナラバ $(\varphi_2\psi_1)$
モ亦 finite。~~故~~ $\boxed{\cancel{\varphi_2\psi_1}}$

	ψ_1	ψ_2	...
φ_1	$\varphi_1\psi_1$	$\varphi_1\psi_2$	...
φ_2	$\varphi_2\psi_1$	$\varphi_2\psi_2$	...
⋮	⋮	⋮	⋮

a

$$\int c(p)\,\psi(p)\,dp$$

ψ-symbol, integral ガ許サレル、、

$$\lim_{\Sigma\to\int}\left|\psi' - \Sigma\, c(p)\,\psi(p)\right| = 0$$

Untergrenz

$$\lim_{\Sigma\to\int}\left|\psi' - \Sigma \quad \cdots \right| = 0$$

Obergrenz

ψ′ ガ … ノ integral トナル條件考ヘテ

$$\varphi\psi'\ldots\left|\varphi'\psi' - \psi'\,\Sigma\, c(p)\,\psi(p) - \Sigma\, c(p)\,\psi' + \Sigma\Sigma\,\bar{c}c\,\varphi(p)\,\psi(p)\right|$$

$\varphi(p)\psi(p) = 1$ トシテモヨイ

~~$\psi' - \Sigma\, c(p)$~~

$\varphi\psi \leq C$ ナル條件ノ state ニ於テ $\varphi\psi(p) = b(p)$ ナル Zahl ヲ対応サセル時、~~ソノ Zahlenmenge~~

$$\int c(p)\,b(p)\,dp = a(\varphi)$$

ナル integral ガ φ ニ依ラズ φ ニ関シテ存在スルトキハ a(φ) ナル Zahlenmenge ニ對應スル state ガ ψ′ ノ state ノ integral デアル。

~~state~~ ⇄ Zahlenmenge

アラハスコトガ出来ル。

同様ニシテ ~~一ツノ~~ (state ノ間ノ) 総合関係ヲ ~~アラハス symbol~~ ハ zahlenmenge ノ間ノ総合関係ニヨツテアラハ ~~サセ~~ スコトガ出来ル。

一般ニ zahlenmenge ハ ソノ全体ヲ与ヘズトモソノ ~~代表的ナ関ニ~~ 一部ヲ知レバソノ全体ヲ知ルコトガ出来ル。

然ルニ orthogonal normalized ~~state ノ sequence~~ of state ~~ノ mächtig~~ ノ menge ノ mächtigkeit ハ enumerable

何トナレバ 絶対値ノ finite ナ state ハ ~~ソノ~~ sequence of state ニヨツテ linearly ニ

表ハサレル: $|\psi - \sum_n a_n\psi_n| = |\psi| - \sum_n |a_n|^2 \neq 0$ ナラバ $|\psi| \neq 0$

$a_n = \varphi_n\psi$ ニ

$\varphi_n(\psi - \sum_n a_n\psi_n) = 0$ ナレバ 故ニ $|\psi|^{-1}\psi$ ハ ニノ sequence ノ中ニ入ル ~~$|\psi| = 1$.~~ 矛盾。 ~~ニハナラヌ~~

シタガツテ $|\psi - \sum_n a_n\psi_n| = 0$.

故ニ 絶対値ノ finite ナ任意ノ state ψ ~~a_n ニヨツテ~~ ハ sequence of number $\varphi_n\psi$ ニヨツテアラハサレル。

~~然ニ~~ orthogonal normalized state ノ complete set ノ number ガ enumerable デアル 條件ハ ~~ハ~~ every-where dense ナ state ノ sequence ガ存在スルコトデアル。

シナイデアル。カクシテ multiplication ハ無制限ニ行ヒ得ラレルガ
ソノ順序ヲ交換スルト一般ニ結果ハ異ナル。~~而~~ 之レハ
symbol ノ ~~ト~~ analytic function ハ一般ニ之ヲ ~~交換~~ 可換ナ
結合関係ヲ有スル symbol デアル。
但シコノ場合ニハ state ~~ニ関スル limit~~ ノ sequence ノ limit
ヲ如何ニシテ定メルカヲ考ヘネバナラヌ。
而シテ state ノ multiplication ニ~~対スル~~ 一般的ナ性質カラシテ

$$|\varphi_2\psi_1|^2 \leq \varphi_1\psi_1\cdot\varphi_2\psi_2$$ ナルコトヲ考ヘラレル。

従ッテ $\varphi_1\psi_1=0$ ナラバ ~~任意ノ~~ $\varphi_2\varphi_2$ ガ finite ナ
任意ノ φ_2 ニ対シ $\varphi_2\psi_1=0$ トナル。 $\varphi_1\psi_1$ ガ 0 ニ converge
スル時、任意ノ φ_2 ニ対シ $\varphi_2\psi_1$ ハ 0 ニ converge スル。
故ニ $(\varphi_2-\varphi_1)(\psi_2-\psi_1)$ ガ 0 ニ converge スルナラバ $\psi_2-\psi_1$ ト任意ノ state
トノ積ハ 0 トナル。ソコデ任意ノ state トノ積ガ 0 トナル
如キ state ヲ 0 ト考ヘルナラバ $\varphi_2 0=0$ $0\psi_1=0$ for any
ψ_1, φ_2 ~~or $\varphi_2\psi_1$~~
即チ $\varphi\cdot\psi=|\psi|$ トスルナラバ ~~$\psi_1, \psi_2 \ldots$ ナル sequence ニ於テ~~
~~而~~ $|\psi_1-\psi|, |\psi_2-\psi|, \ldots$ ナル sequence ガ 0 ニ
converge スル場合ハ ~~而~~ $\psi_1, \psi_2 \ldots$ ナル sequence ノ limit ハ ψ ト
ナル。

注

一般ニ一ツノ state ハ 凡テノ ~~任意ノ~~ state トノ積ニヨッテ一義的ニ
定マルト仮定スルナラバ、一ツノ state ハ Zahlenmenge ニヨッテ
凡テノ state ノ ~~...~~ Mächtigkeit ヲ持ツ menge ナル

ここで Distr. 及 Assoc. Law が成立スル。
従ッテ分ルヤウニ一ツノ state ト constant factor ノミヲ異ニスル二ツノ
state ハ物理的ニ於テ測定結果ハ常ニ同様デアル。次ニ
他ノ state ト zusammensetzen シテ出来タル結果ハ一般ニ異ナル。
此ノ両者ハ全ク同一デナイ。之ヲ equivalent state ト名ヅケ
概念ニ於テモ区別スル。
product ノ順序 ~~ヲ変ヘ~~ ヲ変ヘルト complex conjugate number
ヲ得ルトスルコトハ ~~及 以下ノ product ガ~~ ヲ symbolically ニ
アラハスナラバ ~~表ハスナラバ~~ 一ツノ state ~~ヲ~~ ニ対シ 二ツノ conjugate ナ symbol
~~ヲ用ヰ~~ 例ヘバ ψ, φ ヲ用ヰ.
(ψ_1, ψ_2) ~~ヲ表シ~~ ノ代リニ $\varphi_2\psi_1$, (ψ_2, ψ_1) ~~ヲ表シ~~ ノ代リニ $\varphi_1\psi_2$
トカクナラバ ~~$\varphi_1\psi_1$~~ (ψ_1, ψ_1) 即チ $\varphi_1\psi_1$ ハ real
positive デアル筈。
尚掛算ノ distr. ~~assoc~~, ass. law ガ成立スル。
之ニヨッテ state 及 number ノ間ノ種々ナル対応関係ガ
成立セシメラレタノデアル。
state ト state ノ間ノモット一般的ナ対応関係ヲ考ヘラレル。
即チ任意ノ state ニ対シテ ~~他ノ~~ 一ツノ state ヲ対応サセルコトガ出来ル。
カヽル一ツノ対応関係ヲ一ツノ symbol ~~記号~~ デアラハスナラバ、コノ symbol ニ対シ
テ addition, multiplication ヲ定義スルコトガ出来ル。
addition トシテハ 任意ノ state ニ 対応 ~~スル~~ 対応スル state ノ addition
ヲ 対応セシメルモノヲイフ。又 multiplication トシテハ
任意ノ state ニ 対応スル state ニ ~~対応スル~~ state ヲ対応セシム
第一 ~~第二~~ 第一ノ ~~symbol~~ ニ対シテ 対応関係
第二ノ対応関係ニ依テ対応スル

大体ノ方針トシテハ Dirac ノ遣リ方ニ ~~Neumann~~ ノ limit デノ integral ヲ許スル数学ヲ Neumann ノ遣リ方デ補ッタモノトスレバヨイ。但シ Hilbert ~~Raum~~ Space ノ考ヘハナルベク入レナイ。即チ幾何学的ナ概念ヲ出来ル丈取入レズ、代数的ナ概念ト物理的ナ概念ノ間ノ直接ノ結ビツキヲ示スコト。

先 state ニ ~~関スル計算規則トシテハ~~ ト state ノ Zusammensetzung ノ ~~法則~~ 仕方トシテハ

i) ソノ結果ガ又一ツノ state トナリ、~~Kom~~ 二ツノ state ニ関シテ symmetrical デアリ、三ツノ state ノ場合ハ Zusammensetzung ノ順序ニ関係シナイ。 (Commutative Law. Associative L.)
従ッテ之ハ 普通ノ場合ノ ~~state~~ Addition ~~トスルコト~~ ニ相当スルモノト言ヘル。

ii) ソノ結果ガ ~~数~~ 一ツノ number トナル場合。之ハ一般ニ complex number デアル。~~従ッテ~~ コノ場合ニハ二ツノ state ニ関シテ symmetrical ト考ヘルワケニハイカナイ。二ツ入レカヘレバ conjugate complex number ガ得ラレルト考ヘル方ガ natural デアル。

之ハ Vector Analysis ニ於ケル scalar product ニ相当シテヰル。

i) ~~数式~~ ヲ symbolical ニ

$\psi_1+\psi_2$ ~~等~~ $\qquad \psi_1+\psi_2=\psi_2+\psi_1$ etc

ii) ヲ (ψ_1,ψ_2) トスルナラバ $(\psi_1,\psi_2)=(\psi_2,\psi_1)$ etc

トナル。特ニ (ψ_1,ψ_1) ハ real 又ニ positive or zero ト仮定スル。

state ト number トノ product ハ又一ツ state ヲ表ハス

State
Observation
Transformation

State ヲ決定スルモノハ Observation
ヲ Transformation ニヨッテモ State ノ性質ハ変ラヌ。
~~Observ~~ Transformation ハ Observation ノ相対性ノ
(例ヘバ観測器械ノ reference axis ヲ rotate サセルトカトニナ運動
ノ又ハソノ apparatus ヲ)
大キクテナラシメルコトニヨッテ ~~Tran~~ state ノ性質ガ ~~失~~ 根本的ニ変化
ナラヌ。

Expansion Theorem ノ証明. 平均値ノ性質カラ云フト。

$$\psi = \int_{a_1}^{a_2} \psi_a \, da \qquad \alpha\psi = \int_{a_1}^{a_2} a\,\psi_a \, da$$

$$(\alpha - a_0)\psi = \int_{a_1}^{a_2} (a - a_0)\psi_a \, da \qquad \phi(\alpha - a_0)\psi = \int_{a_1}^{a_2} \phi_{a'} \int_{a_1}^{a_2} (a - a_0)\psi_a \, da$$

$$= \int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2} \phi_{a'}(a - a_0)\psi_a \, da' da = \int_{a_1}^{a_2} \phi_a (a - a_0) \, da$$

$$\cancel{= a_2 - a_1}$$

~~$\phi(\alpha - a_0)\psi = 0$ ナラバ $(\alpha - a_0)\psi = 0$.~~

~~$(\alpha - a_0)\psi$ ヲ小ニスル~~ $\psi_1 \psi_2 \cdots$ ナル sequence
ガ存在シ $\lim_{n \to \infty} (\alpha - a_0)\psi_n = 0$ ナル場合 ~~ニ限リ~~
limiting state ヲ

~~supposed state ニ於ケル平均値ハ 各々ノ state ノ平均値ノ範囲~~
~~ニアル。~~

量子力学試験問題

昭和八年一月廿三日午後一時

1. 量子力學ニ於ケル観測(Observation)トハドウイフ性質ノモノデアルカ。

ハ素朴ナ認識論ニ於テ

経験的ナ事実~~カラ~~ドウイフモノデナケレバナラヌ~~コト~~カヲ明カニシテモヨシ。

又量子力學ノ一般的形式ニ對スル物理的ナ意味ヅケカラシテ観測ノ性質ヲ明カニシテモヨイ。

2. 量子力学ノ一般ニ物理的ナ理論ノ将来ニ對スル~~影響~~貢献, 或ヒハ量子力学ノ意義ニ對スル感想。

(又量子力学ヲドウイフ方面ニ応用シテ行キタイカノ希望