Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

CERN 準備会 第2回
京大基研. 5月29日, 1958

Field theory
Introductory Talk

① I Unified Theory of Particles
III and Space-Time structure. II. structure of Hilbert space
IV. charge space etc
general relat.

0) non-local, non-linearity, no-space-time

a) Basic Manifold
[巨大距離] gravitation と 4-field から出す. → space-time coord.
parameters 4コを spinor的 basic manifold の中の量として ~~出す~~ 導き出す
→ Proto-Hilbert space の expectation value
→ [中間距離] (8-dim. comp. space)
8-component theory で* ~~4次元の~~ 4つの (−∞, +∞) の parameters を出してくる.
(6次元空間回転群と荷電空間に関係している)
(* 4-component theory では time parameter の他が positive definite になってしまう)

b) Topology [Nakanishi]

② Hilbert space の構造 — indefinite metric
↑ Field theory の background space
[Fukutome]
[Nakanishi]

③ New degrees of Freedom の意味づけ
[Goto] [Hara] [Okabayashi]

④ Extreme or medium High Energy Phenomena
~~.....~~ から何が出てくるか?
nucleon size の問題.

No. 5. 1957. 10. 20,000

Urraum or Basic Manifold

May, 1958 (1)

$x_\mu = x_\mu(\xi_1, \xi_2, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$

two dimensional complex space

$$dx_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j} d\xi_j + \frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\xi}_j} d\tilde{\xi}_j$$

reality condition: $\widetilde{\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j}\right)} = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\xi}_j}$

$$g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_k} d\xi_j d\xi_k + \frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\xi}_j}\frac{\partial x_\nu}{\partial \tilde{\xi}_k} d\tilde{\xi}_j d\tilde{\xi}_k\right)$$

(with reality condition) $= f_{jk}\, d\xi_j d\xi_k + \tilde{f}_{jk}\, d\tilde{\xi}_j d\tilde{\xi}_k$

~~in order for real $g_{\mu\nu}$~~

$$f_{jk} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_k}$$
$$\tilde{f}_{jk} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\xi}_j}\frac{\partial x_\nu}{\partial \tilde{\xi}_k}$$

~~More generally, from a complex tensor in basic space f~~

このようにして $g_{\mu\nu}$ から basic space の fundamental tensor の pair $f_{jk}, \tilde{f}_{jk}$ が得られる。もし $g_{\mu\nu}$ が symmetric、即ち

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

なら

$$f_{kj} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_k}\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_j} = g_{\nu\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_k}\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j}$$
$$= g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_k}\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_j} = f_{jk}$$

で $f_{jk}, \tilde{f}_{jk}$ も symmetric になる。

No. 5. 1957. 10. 20,000

そこで、上記の逆の問題を考えて見る。
ξ_j, ξ_j^* を与えれば、x_μ は之の函数として一つに定まる。しかし一般に逆変換は一義的とは限らない。即ち、$\xi_j(x_\mu)$, $\xi_j^*(x_\mu)$ は一般に多価函数であり得る。

Ex. 逆函数が一価であるような場合、例えば

$$\cancel{x_1 = \xi_1 + i\xi_2} \quad x_1 = (\xi_1 + \xi_1^*)/2 \quad \text{etc.}$$

$$\xi_1 = x_1 + ix_2 \qquad \xi_2 = x_3 + ix_4$$

というような場合は trivial である。

然し、~~逆函数が多価な場合を考えて見る。例えば~~
ξ_j $\cancel{x}$ と ξ_j^* の積は

$$\xi_1\xi_1^*, \quad \xi_1^*\xi_2, \quad \xi_2^*\xi_1, \quad \xi_2^*\xi_2$$

の4つある。これらの linear combination として

$$x_1 = \xi_1^*\xi_2 + \xi_2^*\xi_1$$
$$x_2 = -i(\xi_1^*\xi_2 - \xi_2^*\xi_1)$$
$$x_3 = \xi_1^*\xi_1 - \xi_2^*\xi_2$$
$$x_4 = \xi_1^*\xi_1 + \xi_2^*\xi_2$$

をとると

$$x_4^2 - x_3^2 = 4\xi_1^*\xi_1\xi_2^*\xi_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 4(\xi_1^*\xi_2\xi_2^*\xi_1)$$

であるから

$$x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

が成立する。
即ち この x_μ によって張られる manifold は 3次元となる。~~それは~~ 4次元 ~~(Minkowski)~~ 空間内の light cone ~~になっている~~ と Minkowski 考えてもよい。
この場合、$\xi_j \to \xi_j' = e^{i\alpha}\xi_j$
なる変換を行っても

$$x_\mu' = x_\mu$$

であるから、ξ_j は x_μ の無限に大きな多価函数

No. 5. 1957. 10. 20,000

となる.

ex. 3.　ex. 2. でわかるように、上の4つの積は linearly independent ではないが、代数的な関係があって完全に独立ではない。即ち

$$\eta_{11} = \tilde{\xi}_1 \xi_1 ,\quad \eta_{12} = \tilde{\xi}_1 \xi_2 ,\quad \eta_{21} = \tilde{\xi}_2 \xi_1 ,\quad \eta_{22} = \tilde{\xi}_2 \xi_2$$

と書くと、

$$\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} = 0 ,\quad \tilde{\eta}_{12} = \eta_{21}$$

である.

$$\left(\eta_{11} = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \quad \eta_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + i x_2) \quad \eta_{21} = \frac{1}{2}(x_1 - i x_2) \quad \eta_{22} = \frac{1}{2}(x_4 - x_3) \right)$$

そこで x_μ が4次元 manifold を張るためには、

(i) $\xi_1^2 , \xi_1\xi_2 , \xi_2^2 ; \tilde{\xi}_1^2 , \tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2 , \tilde{\xi}_2^2$ をも一しょに考えるか、

(ii) (ξ_1 , ξ_2) の他にもう一組 (η_1 , η_2) を考え、この二組の双一次形として x_μ を作るか、

(iii) ~~(ξ_1 , ξ_2)~~ 一つの複素二次元 (ξ_1 , ξ_2) space の一点と、これと複素共役な space の一点 $(-\tilde{\eta}_1 , \tilde{\eta}_2)$ との双一次形として x_μ を作るか、

このうちで [illegible]

(iii)

$$x_1 = \tilde{\eta}_1 \xi_2 + \tilde{\eta}_2 \xi_1$$
$$x_2 = -i(\tilde{\eta}_1 \xi_2 - \tilde{\eta}_2 \xi_1)$$
$$x_3 = \tilde{\eta}_1 \xi_1 - \tilde{\eta}_2 \xi_2$$
$$x_4 = \tilde{\eta}_1 \xi_1 + \tilde{\eta}_2 \xi_2$$

$$\zeta_{11} = \tilde{\eta}_1 \xi_1 \quad \zeta_{12} = \tilde{\eta}_1 \xi_2$$
$$\zeta_{21} = \tilde{\eta}_2 \xi_1 \quad \zeta_{22} = \tilde{\eta}_2 \xi_2$$

$$\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}\zeta_{21} = 0 \qquad \tilde{\zeta}_{12} = \zeta_{21}$$

で、やはり $x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ が成立するが、x_1 , x_2 , x_3 , x_4 は real でなくなる

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

ここで(iii)に従って

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \zeta_{12} + \zeta_{21} + \zeta'_{12} + \zeta'_{21} \\ x_2 &= -i(\zeta_{12} - \zeta_{21}) \mp i(\zeta'_{12} - \zeta'_{21}) \\ x_3 &= \zeta_{11} - \zeta_{22} + \zeta'_{11} - \zeta'_{22} \\ x_4 &= \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta'_{11} + \zeta'_{22} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_{11} &= \tilde{\xi}_1 \eta_1, & \zeta'_{12} &= \tilde{\xi}_1 \eta_2 \\ \zeta'_{21} &= \tilde{\xi}_2 \eta_1, & \zeta'_{22} &= \tilde{\xi}_2 \eta_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_{11} &= \tilde{\zeta}_{11}, & \zeta'_{12} &= \tilde{\zeta}_{21} \\ \zeta'_{21} &= \tilde{\zeta}_{12}, & \zeta'_{22} &= \tilde{\zeta}_{22} \end{aligned}\right\}$$

即ち $\underline{\zeta' = \zeta^*}$

$$\zeta = \left(\qquad \right)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \tilde{y}_1 \\ x_2 &= y_2 + \tilde{y}_2 \\ x_3 &= y_3 + \tilde{y}_3 \\ x_4 &= y_4 + \tilde{y}_4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y_4^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ \tilde{y}_4^2 &= \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 + \tilde{y}_3^2 \end{aligned}\right\}$$

No. 5. 1957. 10. 20,000

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \psi^* = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$$

$$x_1 = \psi^* \alpha_1 \psi$$
$$x_2 = \psi^* \alpha_2 \psi$$
$$x_3 = \psi^* \alpha_3 \psi$$
$$x_4 = \psi^* \alpha_4 \psi$$

$$\alpha_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right) = \rho_1 \sigma_1 \qquad \alpha_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -i \\ & & +i & \\ \hline & -i & & \\ +i & & & \end{array}\right) = +\rho_1 \sigma_2$$

$$\alpha_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right) = \rho_1 \sigma_3 \qquad \alpha_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right) = \rho_1$$

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

ex, 4,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \psi^* \alpha_1 \psi \quad \pm i \psi^* \alpha_5 \alpha_1 \psi \\ x_2 &= \psi^* \alpha_2 \psi \quad \pm i \psi^* \alpha_5 \alpha_2 \psi \\ x_3 &= \psi^* \alpha_3 \psi \quad \pm i \psi^* \alpha_5 \alpha_3 \psi \end{aligned}\right\}$$

$$x_4 = \psi^* \alpha_4 \psi \quad \pm \psi^* \alpha_5 \alpha_4 \psi$$

$$\alpha = \rho_1 \sigma \qquad \alpha_4 = 1, \qquad \alpha_5 = \rho_2$$

or

$$\boxed{\begin{aligned} x_\mu &= i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \\ \bar{\psi} &= \psi^* \gamma_4 \end{aligned}}$$

x

$$dx_\mu = i \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu d\psi + i\, d\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$$

$$= (i \gamma_5 \gamma_\mu)_{jk} \bar{\psi}_j d\psi_k$$

$$+ (i \gamma_5 \gamma_\mu)_{jk} d\bar{\psi}_j \cdot \psi_k$$

$$g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu} \{ (i \gamma_5 \gamma_\mu)_{jk} \bar{\psi}_j d\psi_k + (i \gamma_5 \gamma_\mu)_{jk} d\bar{\psi}_j \psi_k \}$$

$$\times \{ (i \gamma_5 \gamma_\nu)_{lm} \bar{\psi}_l d\psi_m + (i \gamma_5 \gamma_\nu)_{lm} d\bar{\psi}_l \cdot \psi_m \}$$

$$= f_{km} d\psi_k d\psi_m + h_{jm} d\bar{\psi}_j d\psi_m$$

$$+ \bar{h}_{jm} d\bar{\psi}_j d\psi_m + \bar{f}_{jk} d\bar{\psi}_j d\bar{\psi}_k$$

$$f_{lm} = g_{\mu\nu} (i \gamma_5 \gamma_\mu)_{jk} \bar{\psi}_j (i \gamma_5 \gamma_\nu)_{km} \bar{\psi}_k$$

etc.

No. 5. 1957. 10. 20,000

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

Ex. 5. $\xi_1 \cdots \xi_8$: ~~8-complex~~
8-dimensional complex space

~~$x_\mu =$~~

$$x_1 = \xi^* \overbrace{\rho_1 \sigma_1}^{\tau_1} \xi$$
$$x_2 = \xi^* \overbrace{\rho_1 \sigma_2}^{\tau_2} \xi$$
$$x_3 = \xi^* \rho_1 \sigma_3 \xi$$
$$x_4 = \xi^* \tau_3 \xi$$

この場合、一般に $y_\alpha = \xi^* \Gamma_\alpha \xi$ とおくと $\alpha = 1, \cdots 64$

$$\xi' = U\xi \qquad \xi'^* = \xi^* U^*$$

なる linear transformation に対して

$$y'_\alpha = C_{\alpha\beta}\, y_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, \cdots 64$$

なる linear transf. を定める。~~(定義)~~

~~定 $C_{\alpha\beta} =$~~

(∵
$$y'_\alpha = \xi^* U^* \Gamma_\alpha U \xi$$
$$U^* \Gamma_\alpha U = C_{\alpha\beta} \Gamma_\beta$$
$$y'_\alpha = C_{\alpha\beta}\, y_\beta$$

を定めれば、定まる

y_μ は $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ だけから、自分自身の間で linear に transform される場合、即ち

$$C_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{for} \begin{cases} \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \beta = 5, 6, \cdots 64 \end{cases}$$

で、且つ 逆変換 C^{-1} も同様な性質、即ち

$$(C^{-1})_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{for} \begin{cases} \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \beta = 5, 6 \cdots 64 \end{cases}$$

を持ち†, 更に $C_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ が Lorentz 変換の係数になっている場合を [illegible]

† C, D が共に上の性質を持つなら CD も同じ性質を持つ。

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

例えばこのような 8 次元の場合には

$\Gamma_1 = \gamma_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2$, $\Gamma_3 = \gamma_3$,

4: $\Gamma_4 = \gamma_4$,

2: $\Gamma_5 = \gamma_5$, $\Gamma_6 = 1$

20: $\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$ $\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$

5: $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$

1

32.

---

3 $\Gamma_5 = \gamma_5$; $\Gamma_6 = \gamma_6$ $\Gamma_7 = 1$

50 ($\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$ $\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$

$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15$

6 $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6$

1

64 algebraic に独立なもの [illegible] 個.

6 次元 回転群 → 4 次元 回転群 を含む

4 次元 vector and pseudo-vector ~~$\xi^* \gamma_\mu \xi$~~

(i) $\bar{\xi}\gamma_\mu \xi$ $\bar{\xi} = \xi^* \gamma_4$

(ii) $\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu \xi$ pseudo-vector

(iii) $\bar{\xi}\gamma_6\gamma_\mu \xi$ vector

(iv) $\bar{\xi}\gamma_5\gamma_6\gamma_\mu \xi$ ps. vector

No. 5. 1957. 10. 20,000

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

つまり 8次元の complex space ξ_j (及びそれに ~~dual~~ conjugate な space $\tilde{\xi}_j$) を basic manifold にとると、

$$x_\mu = \bar{\xi} \gamma_6 \gamma_\mu \xi$$

なる4つの量は、ξ-space の linear transf. に対して、vector として変換し、且つ x_μ ~~の~~ は いずれも $(-\infty, +\infty)$ のすべての値をとりうる. つまり Minkowski space を cover する ~~parameter~~ coordinate parameter と identify できる.

~~[illegible]~~ そして ξ の linear 変換の中には、x_μ を変えないようなものが含まれる. 例えば

$$\xi' = U\xi \quad \xi'^* = \xi^* U^*$$

なる ~~contact~~ transf. を考えて [illegible] とすると

$$U = \gamma_5 \text{ なら } U^* = U^{-1} = \gamma_5$$

$$x'_\mu = \xi^* U^* \gamma_4 \gamma_6 \gamma_\mu U \xi = -\xi^* \gamma_4 \gamma_6 \gamma_\mu \xi = -x_\mu$$

で、これは ~~普通~~ の意味で space-time reflection である.

例えば $U = \gamma_6$ とおくと、

$U = \gamma_5 \gamma_6$: $x'_\mu = x_\mu \rightarrow x'_\mu = -x_\mu$

もう一つの interpretation は space-time reflection の operator は

$$\gamma_{1234} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

と考えることである. すると

$$\bar{\xi} \gamma_5 \gamma_\mu \xi \qquad \bar{\xi} \gamma_6 \gamma_\mu \xi$$

が共に space-time reflection に対して

$$x'_\mu = \xi^* \gamma_{1234} \gamma_4 \binom{\gamma_5}{\gamma_6} \gamma_\mu \gamma_{1234} \xi = +x_\mu$$

~~となる~~ で pseudo-vector になってしまう.

No. 5. 1957. 10. 20,000

そこで新らしい space-time reflection の operator を

$$U = i\gamma_5\gamma_6\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

で定義すると、

$$\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu\xi \quad , \quad \bar{\xi}\gamma_6\gamma_\mu\xi$$

がいれかはつて共に符号をかえる。

space-reflection は そこで

$$U = \cancel{i}\gamma_6\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

とすると　$x_\mu = \bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu\xi$ に対しては

$$(\cancel{i}\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_6)(\gamma_4\gamma_5\gamma_1)\cancel{i}\gamma_6\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = -(\gamma_4\gamma_5\gamma_1)$$

$-\quad -\quad -\quad +$

$$(\;\cdot\;)(\gamma_4\gamma_5\gamma_2)(\;\cdot\;) \qquad +(\gamma_4\gamma_5\gamma_2)$$

$-\quad +\quad -\quad +$

$$(\gamma_4\gamma_5\gamma_4) \qquad +(\gamma_4\gamma_5\gamma_4)$$

$-\quad -\quad -\quad -$

$$x_1' = -x_1 \qquad x_2' = x_2 \quad \text{etc}$$

time-reversal は

$$U = \cancel{i}\gamma_5\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$(\gamma_4\gamma_5\gamma_1) \qquad +$$

$+\quad +\quad -\quad -$

$$(\gamma_4\gamma_5\gamma_4) \qquad -$$

$+\quad -\quad -\quad -$

$$x_1' = x_1 \quad \text{etc} \qquad x_4' = -x_4$$

となる。
[illegible] 　$x_\mu = \bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu\xi$
に対しては　γ_5 と γ_6 を入れかえねばならぬ。

いずれにしても

$$x_\mu = \bar{\xi}\gamma_\mu\xi = \xi^*\gamma_4\gamma_\mu\xi$$

は $U = i\gamma_5\gamma_6\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

に対して

$\mu=1$: $\gamma_4\gamma_i$:	+	+	−	+	+	~~+~~ −
2:	+	+	+	−	+	~~+~~ −
3:	+	+	+	+	−	~~+~~ −
4: real	+	+	+	+	+	+

即ち pseudo-vector

同様にして

$$x_\mu = \bar{\xi}\gamma_5\gamma_6\gamma_\mu\xi$$

も pseudo-vector

space-reflection は $\gamma_5\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ etc
time-reversal は $\gamma_6\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ~~etc~~
ととりておくと,

$x_\mu = \bar{\xi}\gamma_6\gamma_\mu\xi$ が普通の polar vector. （第1種

pseudo-vector
$y_\mu = \bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu\xi$ 　2種
$z_\mu = \bar{\xi}\gamma_\mu\xi$ 　3種
$u_\mu = \bar{\xi}\gamma_5\gamma_6\gamma_\mu\xi$ 　4種

Proto-Hilbert space における expectation value というような形で Minkowski space の coordinate parameters が出てくる。（中野理論と似ている）
Urraum (or Urfeld) の点（あるいは状態）は自分で、それにともなって ordinary space の点が出てくる。

No. 5. 1957. 10. 20,000

Urfeldのいろいろな状態に対する，~~他のfield (matter field)の状態分布を与える.~~ 粒子数の分布のamplitudeがclassical field or one-particle Schrödinger函数のようなものになる.

$$\psi_{\pm}(\xi, \xi^*)$$

で，ξ, ξ^*が既に状態的な意味をもつ，これを第1量子化の段階と考えると，第2量子化では，それψの色々な状態における他の粒子数の(状態)分布のamplitude

$$\Psi(\psi(\xi, \xi^*))$$

を問題にすることになる.

この立場を徹底すれば一つの方向としては，ψとξを同時に扱い，~~それから~~それが統一された一体であり，そこから素粒子と時空が分離される，とする考え方がある.
この考えは，[illegible]にやや似ている.