PRACTICAL NOTE-BOOK

代数学

数學

森(満)教授

理一甲三　小川秀樹

(TANPOYA)

"CONTENTS"

"CONTENTS"

N201

第一編 Miscellaneous Propositions

第一章 Rational Integral ~~expression~~ function and their most fundamental properties

有理 整 函数 性質

§1. 定義　xニ関スル有理整式トハ次ノ形ニヨツテ決定セラルル式ヲイフ。

$$c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+c_3x^{\alpha_3}+\cdots\cdots+c_{k-1}x^{\alpha_{k-1}}+c_kx^{\alpha_k} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

而シテαハ正整数亦ハ0ニシテ　cハxニ無関係ノモノデアル。(xヲ含マズ)

今(1)ナル式ヲαノ大小ノ順ニ順ツテ整頓スレバ、次ノ形ヲトルヲ得。

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (2)$$

而シテxヲ含ム$c_ix^{\alpha_i}$ヲ一ツノ項ト名ヅケ、xノ指数α_iヲ其ノ項ノ次数degree、c_iヲ其項ノ系数トイフ。又凡テ項ノ中ニテ最モ高キ次数ヲ其ノ式ノ degree ト名ヅク。

従ツテ(2)ナル有理整式ノ degree ハnナリ。($a_0\neq0$)

§2. Synthetic division

割算ニ於テ除数ガ$x-\alpha$ナル形ヲ有スル時ハ之ヲ簡単ニ計算スルコトヲ得。

普通ノ割算ノ形式ニ従ツテ

$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$　ヲ$x-\alpha$ニテ割レバ

次ノ如シ、

商　$a_0x^2+(a_0\alpha+a_1)x+(a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2)$

余　$a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a^3$

此ノ割算ニ於テ商ノ係数及ビ剰余ハ次ノ如シ

a_0, $a_0\alpha+a_1$, $a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2$

$a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3$

三 其ノ係数ノ第一ハ被除数 Leading Coefficient ト同一ナリ。

第二以下ハ次ノ法則ニ従ッテ求メラル

前ニ得タル係数ニαヲ乗ジ被除数ノ next unused coef ヲ加ヘタルモノ是也

之ノ法則ハ被除数ノ次数如何ニ関セズ成立ス、

何トナレバ除数ノxノ係数ハ1 (Unity) ナルヲ以テ商ノ各係数ハ常ニ各 Remainder (剰余) ノ Leading Co. ト同一ナリ。

∴ Remainder ノ Coef. ハ商ノ係数ニαヲカケ被除数ノ New Coef. ヲ加ヘタルモノナリ

次ニ之ノ方法ニヨッテ割算ヲ実行スルニハ次ノ形式ヲナス、

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{x-\alpha}$$

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \alpha \\
 & a_0\alpha & c_1\alpha & & c_{n-2}\alpha & c_{n-1}\alpha & \\
\hline
a_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1} & R & \\
 & \parallel & & & & \parallel & \\
 & a_0\alpha+a_1 & & & & 剰余 &
\end{array}$$

三ノ割算ノ方法ヲ Synthetic Division ト云フ.

例. Example Divide $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$ by $x-2$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -5 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1 & -4 & \end{array}$$

∴ Q $3x^3+x^2-2x-1$　　$R=-4$.

§3. コノ法ノ注意.

(1) Syn. Div. ニ於テ被除数ガ Incomplete ~~va~~ rational integral expression ナル時ハ x ノ missing power ヲ補ヒ, 其係数ヲ0トシテオク.

例ヘバ, $(x^4-1)\div(x-1)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$Q=x^3+x^2+x+1$　　$R=0$

(2) コノ方法ニ於テ $x+\alpha$ ニテ割ル場合ニハ上ノ説明ニ於ケル α ノカハリニ $-\alpha$ ヲオケバヨシ.

(3) $\alpha x-\beta$, ナル二項式) ニテ割ル場合ニハ次ノ如クカク

$\alpha x - \beta = \alpha\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)$

故ニ先ヅ $x - \frac{\beta}{\alpha}$ ニテ割リ其ノ商及ビ剰余ヲ夫々 Q, R トスレバ、

$\alpha x - \beta$ ニテ割リタル商及ビ剰余ハ

$\frac{Q}{\alpha}$, R デアル

Ex. $3x^3 - 11x^2 + 18x - 3$ $\quad 3x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & \frac{2}{3} \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12 & 5 & \end{array}$$

$Q' = 3x^2 - 9x + 12 \quad R = 5$

$Q = x^2 - 3x + 4 \quad R = 5$

§4. The Remainder theorem (剰余定理)

If any rational integral expression in x be devided by $x - \alpha$, the remainder is equal to the Result obtained by putting α in the place of x in the expression.

x ニ関スル n 次ノ Rational Integral Ex. ヲ次ノ式ニテ現ハス。

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2}$
$\cdots\cdots\cdots a_{n-1} x + a_n$

三ヲ $x-\alpha$ ニテ割リタル時其ノ商 $Q(x)$，剰餘 R，トスレバ，
次ノ恒等式成立ス，

$$f(x) \equiv (x-\alpha)\,Q(x) + R,$$

而シテ R ハ $x-\alpha$ ヨリ低キ次数ナリ
∴ x ヲ含マズ，
從ツテ x ニ如何ナル値ヲ與ヘテモ無関係デ
アル，今特別ニ
$x=\alpha$ トスレバ

$$f(\alpha) = (\alpha-\alpha)\,Q(\alpha) + R,$$

而シテ右辺ノ第一項ハ明カニ 0

$$\therefore \quad f(\alpha) = R = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} \cdots\cdots + a_{n-1}\alpha + a_n,$$

Ex. $f(x) = 5x^4 - 12x^3 - 20x^2 - 43x + 6$,
ニ於テ $x=4$ トシタル時ノ値ヲ求ム，
$f(4)$　即チ $x-4$ ニテ割リタル時ノ R，

5	−12	−20	−43	6	4
	20	32	48	20	
5	8	12	5	26,	

$$\therefore f(4) = 26$$

(系) $f(x)$ ガ $x-\alpha$ ニテ割リ切レル時ハ
$R=0$　即チ　$f(\alpha)=0$
從ツテ x ニ関スル Ra. In. Ex. ガ
$x=\alpha$ ノ時 vanish スル（0トナル）時ハ其ノ Expr.

ハ $x-\alpha$ ニテ割リ切レル。

§5. Theorem. ~~A nec ces~~
A necessary and sufficient condition that rational in. ex. of the n^{th} degree in x vanish identically is that all its ~~of~~ coefficients be zero

x ニ関スル n 次ノ有理整式ヲ　x ノ値ノ如何ニ関セズ、

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

然ラバ 係数 ~~[illegible]~~ 0ナルコトハ十分ナル條件ナルコトアキラカナリ。

次ニコノ條件ガ necessary ナルコトヲ証明セン。

今 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n ; \alpha$

ナル値ヲコノ式ニ代入スル時ニ、其ノ値ガ0ニナルモノトスル。

従ッテ

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$

次ニ此ノ式ニ x ノ代リニ α ヲ置ケバ

$$0=a_0(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha-\alpha_n)$$

然ルニ $\alpha-\alpha_1$, $\alpha-\alpha_2$ ‥‥‥等ハ0ナラズ

∴ $a_0=0$

次ニ $a_0=0$ ナル時原式ハ

$$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

即 $n-1$ 次ノ有理整式トナル。

コノ式ニ上ノ論法ヲ繰リカヘセバ

$a_1=0$

コノ方法ヲ續ケレバ

$f(x)$ノ凡テノ系数ガ0トナルコトガワカル。

(例) $(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)+(a-b)(x-a)(x-b)$
$+(b-c)(c-a)(a-b)$

$x=a$トスレバ

$(b-c)(a-b)(a-c)+(b-c)(c-a)(a-b)=0$

$x=b$

$x=c$

而ルニ所設ノ式ハxニ関スル二次式デアル。

其レガxノ三ノ値即チa, b, cニ対シテ0ニナル。

∴所設ノ式ハxノ値ノ如何ニ関セズ0ニナル

§6. 一ツノ有理整式ヲ他ノ有理整式ニテ現ハスコト。

A, Bヲ二ツノ有理整式トシAノ次数ヲBノソレヨリ大トシ　AヲBニテ割リ其ノ商Q　殘Rトスレバ

$A=QB+R$

次ニ　Qノ次数ヲBノ次数ヨリ低クナイトシ、

QヲBニテ割リ商ヲQ_1, R_1

$Q=Q_1B+R$

同様ニ

Q_1ノ次数ガBヨリ低クナイトシ、

Q_1ヲBニテ除シ、商Q_2 余R_2

$Q_1 = Q_2B + R_2$

此處ニ於テ

Q_2ハBヨリ低次ト考ヘレバ！

$$A = QB + R$$
$$= (Q_1B + R_1)B + R$$
$$= \{(Q_2B + R_2)B + R_1\}B + R$$
$$= Q_2B^3 + R_2B^2 + R_1B + R.$$

而シテQ_2，R_2，R_1，R ナル

係数ハイヅレモBヨリ低次ナリ。

一般ニ有理整式Aガ 他ノ有理整式Bヨリ

次数ガ大ナル時、上ノ方法ヲ繰リカヘシテ

$$A = Q_{r-1}B^r + R_{r-1}B^{r-1} + R_{r-2}B^{r-2} + R_{r-3}B^{r-3}$$
$$\cdots\cdots + R_1B + R$$

$R, R_1, \cdots\cdots R_{r-3}, R_{r-2}, R_{r-1}, Q_{r-1}$.

ハ續〻剰余（順ニ於テナリ）及ビ最後ノ商ニ

現ハレ、イヅレモBヨリ低次ナリ。

例ヘバ $A = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 4$.

$B = x^2 + x + 1$

AヲBニ関スル Integ. Express. ノ形ニテ現ハスコト。

但シ係数ノ次数ハ 2 ヨリ小

1	−4	+3	−1	+1	+4		1+1+1
1	+1	+1					1−5+7−3
	−5	+2	−1				
	−5	−5	−5				
		7	+4	+1			
		7	+7	+7			
			−3	−6	+4		
			−3	−3	−3		
				−3	+7	$R=-3x+7$	

1	−5	+7	−3		1+1+1
1	+1	+1			1−6 $x-6.=Q,$
	−6	+6	−3		
	−6	−6	−6		
		12	+3	$R_1=12x+3$	

$$A=x^5-4x^4+3x^3-x+x+4$$
$$=(x-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-3x+7$$

○特別ノ場合

xニ関スル有理整式ヲ $x-\alpha$ ニ関スル同次ノ有理整式ニシテ其ノ係数ハ x ヲ含マヌ(常数)モノトシテアラハスコトガ出来ル。

$$\begin{cases} A=2x^3-x^2+4x-5 \\ B=x-2 \end{cases}$$

2	−1	+4	−5	2
	4	6	20	
2	3	10	15 = R	
	4	14		
2	7	24 = R_1		
	4			
2	11 = R_2			

$$A=2x^3-x^2+4x-5$$
$$=2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15,$$

§7 Symmetrical Expression 對稱式

一ツノRational Expressionニ於テ其ノ中ノ文字ノイヅレノ二ツヲ交換スルモ其ノ値ノ変ラザル時ニハ其ノ有理式ヲ其レ等ノ文字ニ関スルSymmetrical Exp.ト稱ス

例ヘバ $(x+y+z)$ ニ於テ

x ト y, x ト z, y ト z ヲ交換スルモ値ヲ変ゼズ。

∴コノ式ハ x, y, z ニ関スル対稱式ナリ.

$$\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}$$ ニ於テ

a ト b ヲ交換スレバ

$$\frac{ac+cb+ba}{b+a+c}$$ 其値変ゼズ

∴コノ式ハ a, b, ニ関スル対稱式デアル.

同様ニ b ト c ヲ交換スルモ其値変ゼズ

a ト c ヲ交換スル値変ゼズ.

∴ a, b, c ニ関スル対稱式ナリ

○ a, b, c ニ関スル一次ノ ~~対稱式~~ homogeneous 同次 Integral Exp. ハ

$La+Mb+Nc$ デアル.

又 a, b, c ニ関スル二次ノ homogeneous I. Ex. ハ

$La^2+L_1b^2+L_2c^2+Mbc+M_1ca+M_2ab$

但シ L, M, N ハイヅレモ a, b, c ヲ含マザルモノナリ.

而シテ二等ノ式ガ対称式ナル時ハ其々次ノ如ク書クヲ得.

$L(a+b+c)$, $L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$

一次同次対称式, 二次同次対称式.

Example

1. $(a+b+c)^2-(b+c)^2-(c+a)^2-(a+b)^2$ ヲ簡単ニセヨ. 変

コノ式ハ a, b, ノ a, c, ノ b, c, ノ入レカヘテモ値ハ變ラン.

a, b, c ニ関スル対称式デ而モ二次同次式デアル

故ニ次ノ如ク解クヲ得.

$= L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$

a^2 ノ係数比較. $-1=L$

bc ノ 〃 〃, $0=M$.

given expression $= -(a^2+b^2+c^2)$

L, M ヲ定ムルニ a, b, c ニアル特別ナル数ヲアテハメテ決定スルモ可ナリ,

$\begin{cases} a=1 \\ b=c=0 \end{cases}$ $-1=L$ $\begin{cases} a=b=1 \\ c=0 \end{cases}$ $-2=2L+M$

$M=0$

2. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc.$

a, b, c ニ関スル対称式. 三次同次式ナリ.

$b=-c$ トスレバ $-c(c+a)^2+c(a-c)^2+4ac^2$

$= -c^3-2ac^2-a^2c+ca^2-2ac^2+c^2+4ac^2$

$=0$

∴ $\underset{\sim}{b+c}$ ニテ割切レル，
$b=-a$ ナル時モ0トナル
∴ $\underset{\sim}{a+b}$
$c=-a$ ナル時モ0トナル
∴ $\underset{\sim}{c+a}$
∴原式 $=L(b+c)(c+a)(a+b)$
a^2b $1=L$

§8. 一ツノ有理式ニ於テ其ノ内ニ含マレタルイヅレノ二ツノ文字ヲ取リ換ヘテモ、其ノ符号ノミガ変ズル時ハ、コノ有理~~整~~式ヲ其等ノ文字ニ関スル交代式ト

§7. Alternating Expression

$(a-b)(a-c)(b-c)$
a ト b ヲ交代スレバ
$=-(b-a)(b-c)(a-c)$
又 a ト c, b ト c ヲトリカヘテモ符号ノミヲ変ズ
a, b, c ニ関シテ交代式ナリ。

§9. 対称式及ビ交代式ニ関スル法則。 (但シ整)
第一、二ツノ対称式ノ和、積、又ハ商ハ一ツノ対称式ナリ。
第二、対称式ト交代式ノ積ハ交代式トナル。
第三、対称式ヲ交代式ニテ割リタル商又ハ 交代式トナル。
交代式ヲ対称式ニテ 〃 〃 〃
第四、二ツノ交代式ノ積又ハ商ハ対称式トナル。
第五、偶数個ノ交代式ノ積ハ対称式トナル。

第六、奇数~~式~~個ノ交代式ノ積ハ交代式トナル。

§10. 定理. a, b, c 等ニ関スル交代式ニ於テイヅレカ ニツノ文字ヲ等シ(equate スル)ト置ケバ其ノ式ノ値ハ 0 トナル.

$a, b, c \ldots\ldots$ ニ関スル交代式ヲ次ノ如ク表ハス.

$A(a, b, c \ldots\ldots)$

コノ式ニ於テ a ト b トヲ取リ換ヘル時ハ

$A(b, a, c \ldots\ldots)$

$A(a, b, c \ldots\ldots) = -A(b, a, c \ldots\ldots)$

コノ両辺ニ於テ

$a = b$ トスレバ

$A(b, b, c, \ldots) = -A(b, b, c \ldots\ldots)$

$\cancel{2}A(b, b, c, \ldots) = 0$

$A(b, b, c, \ldots) = 0$

Exa 1, $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) \equiv A$

A ハ a, b, c ニ関スル四次ノ交代式ナリ

$(a-b)(a-c)(b-c)$ ナル因数アリ

A ヲコノ因数ニテ割ル商ヲ Q トスレバ、

Q ハ一次ノ対称式デアル.

$A = L(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$.

a^3b, ~~...~~ $1 = L$

$A = (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$.

Exa 2. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

$=(x-y)(x-z)(y-z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$

x^4y ノ係数. $-5=L$ $\qquad x^5-5x^4y+10x^3y^2\cdots$

x^3y^2 ノ係数 $10=\cancel{M}-L+M$

$M=5$

原式 $=5(x-y)(x-z)(y-z)\{xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2\}$

第三篇 Partial Fraction 分数

§1. 二ツ或ハ其レ以上ノ Fraction ヲ一ツノ Fraction ニマトメルコトハ至ツテ容易ナリ。逆ニ一ツノ Fraction ヲ其分数ヨリ低キ次数ノ分母ヲ有スル二ツ以上ノ他ノ分数（之ヲ Partial Fraction トイフ）ノ和ニ decompose 分解スルコトハ左程容易ナラズ。
例ヘバ $\dfrac{2x}{x^2-1}$ ナル分数ヲ分解シテ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$ トスルガ如シ。

一般ニ分数式ニ於テ分子ノ次数ガ分母ノ其レヨリモ低キ時ハ之ヲ Proper Fraction 真分数トイフ。
モシ分数ガ Proper ナラザル時、換言スレバ分子ノ次数ガ分母ノ其レニ等シキカ又ハ其レヨリ大ナル時ハ割算ヲ行ヘバ整式ト真分数（式）トノ和ニ改ムルヲ得。

本篇ニ於テ A, B, P, Q 等ノ文字ハ x ニ関スル ~~有理~~ 整式ヲ現ハスモノトス。

§2. Theo! The ~~sum and~~ sum and the difference of 2 proper fractions $\dfrac{A}{B}$ and $\dfrac{C}{D}$ are themselves proper fractions.

（証） $\dfrac{A}{B} \pm \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD \pm BC}{BD}$

仮定ニヨリ $\dfrac{A}{B}$ ハ Proper ∴ $\dfrac{AD}{BD}$ ハ Proper
同様 $\dfrac{BC}{BD}$ モ Proper

従ッテ $\frac{AD \pm BC}{BD}$

$AD \pm BC$ ハ BD ヨリ 低次.

§3. Theo. 2 Let I and I' denote intergral expression and $\frac{A}{B}$ and $\frac{A'}{B'}$ proper fraction. If $I + \frac{A}{B} = I' + \frac{A'}{B'}$, then $I = I'$ $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$.

假定式ヨリ

$$I - I' = \frac{A'}{B'} - \frac{A}{B}$$

然ルニ $I - I'$ ハ integral expression or zero.

$\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B}$ ハ proper fraction or zero

而ルニ 整式ガ分数式ニ等シキコトハナイ.

$\therefore$ $I - I' = 0$ $\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} = 0$

$\therefore$ $I = I'$ $\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}$,

§4. Theo 3. Let $\frac{A}{PQ}$ denote a proper fraction whose denominator has been separated into 2 factors 因子 ~~terms~~, P & Q are prime to one another. This fraction can be reduced to a sum of 2 proper fractions of the forms, $\frac{B}{P}$ and $\frac{C}{Q}$.

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^{A}}{\underset{P}{(x+1)}\underset{Q}{(x-1)}}$$ $2x$ = 素ナリ 分約数ナし

$$= \frac{1^{B}}{x+1_{P}} + \frac{1^{C}}{x-1_{Q}}$$

コノ定理ノ証明ニ次ノ定理ヲ要ス。

Theo 4. If Q is prime to P, two integral expressions M and N can be found such that $MQ+NP=1$.
(Lemma 補助定理)

P ト Q トニ最大公約数ヲ求ムル方法 (Euclid (B.C. 300)) ヲ適用スレバ何時カハ終リニ Constant c (not zero) ヲ得。
今第三ノ剰余ヲ C トス。然ル時ハ

$$Q = qP + R_1 \longrightarrow R_1 = Q - qP.$$
$$P = q_1R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 = P - q_1R_1$$
$$R_1 = q_2R_2 + \underset{c}{R_3} \longrightarrow c = R_1 - q_2R_2$$

三ツノ式ヨリ次ノ式ヲ導キ得。

$$c = R_1 - q_2R_2 = R_1 - q_2(P - q_1R_1)$$
$$= Q - qP - q_2(P - q_1(Q - qP))$$
$$c = (1+q_1q_2)Q - (q + q_2 + qq_1q_2)P.$$

コノ両辺ヲ c ニテ除スル時ハ

$$\frac{1+q_1q_2}{c}, \quad -\frac{(q+q_2+qq_1q_2)}{c}$$

ハイヅレモ整式ナリ。之ヲ夫々 M, N トスレバ

$$1 = MQ + NP.$$

次ニ本定理ニ返ル,
P, Q ハ公約数ヲ有セザルガ故ニ
之ニ適スル M及ビNナル二ツノ整式ヲ求ムル
ヲ得,

$$A = AMQ + ANP$$

$$\frac{A}{PQ} = \frac{AM}{P} + \frac{AN}{Q} \qquad (1)$$

$\frac{AM}{P}$ 及ビ $\frac{AN}{Q}$ ガイヅレモ Proper fraction
ナル時ハ、コノ定理ハ成立ス,
モシ $\frac{AM}{P}$ 及ビ $\frac{AN}{Q}$ ガ P.F. ナラザル時ハ
之ヲ Integral Expression ト P.F. ノ和
トシテ表ハセバ

$$\left.\begin{aligned} \frac{AM}{P} &= I + \frac{B}{P} \\ \frac{AN}{Q} &= I' + \frac{C}{Q} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\therefore \frac{A}{PQ} = I + \frac{B}{P} + I' + \frac{C}{Q}$$

コノ等式ニ於テ
$\frac{A}{PQ}$, $\frac{B}{P}$, $\frac{C}{Q}$ ハイヅレモ P.F. デアル,

$\therefore\ I + I' = 0$

$\therefore\ \dfrac{A}{PQ} = \dfrac{B}{P} + \dfrac{C}{Q}$

§5. Partial Fractions.

前節ニ於テ $\dfrac{B}{P}$ 及ビ $\dfrac{C}{Q}$ ナル分数ガ存在スル事ヲ証明シタルワリ。之ヲ $\dfrac{A}{PQ}$ ノ Partial Fractions トナヅク。而シテ $\dfrac{A}{PQ}$ ナル形ノ分数ヲ其ノ Partial F. $\dfrac{B}{P}$ 及ビ $\dfrac{C}{Q}$ ニ分解スルニハ前節ノ方法ヲ用フルヲ要セズ。
次ノ例ニ示スガ如ク Method of undetermined coefficients. ヲ用フレバ簡単ニ計算シ得。（比較法）

Exa. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$ ヲ其ノ Partial F. ノ Same ニ分ケル事。

此ノ分数ノ分母ハ互ニ公約数ヲ有セザル二ツノ因数 $x-1$, x^2+x+1 ニ分ケルヲ得。
従ッテ $x-1$ 及ビ x^2+x+1 ヲ分母トスル二ツノ P. F. ニ分ケルヲ得。初メノ分子ハ Constant 後ノ分子ハ次数ハ高クトモ一次デアル。従ッテ次ノ如ク置クヲ得。

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$ （但 a, b, c ハ Const）

ヨリ分母ヲ払ヘバ、

$$2x^2+1 = a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$$
$$= (a+b)x^2+(a+c-b)x+a-c$$

x^2; $a+b=2$ $\quad a=1$
x; $a+c-b=0$ $\quad b=1$
x^0; $a-c=1$ $\quad c=0$

$\therefore$ given Fraction $= \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{x^2+x+1}$

Exa 2, $\dfrac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} = \dfrac{3x^2-2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

$$3x^2-2 = a(x^2+x+1)+(bx+c)(x+1)$$
$$= (a+b)x^2+(a+b+c)x+a+c$$

$a=1$ $\quad b=2$ $\quad c=-3$,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+x+1},$$

§6. Partial F. ニ関スル General Theorem

§4ノ定理ヨリ次ノ結論ヲ導クヿヲ得

I. $\dfrac{A}{P.Q.R}$ ヲ Proper F. トシ其分母ノ因数、

P, Q, R, ガ互ニ公約数ヲ有セズトスレバ次ノ如ク分解シ得

$\dfrac{A}{P.Q.R} = \dfrac{B}{P} + \dfrac{D}{Q} + \dfrac{E}{R}$ (但シ右辺ノ三分数ハProperナリ)

一般ニ分母ガ幾ツカノ因数ニ分ケルコトガ出来テ且ツ之等因数ガイヅレモ公約数ヲ有セザル時ハ上ト同様ニ其ノ因数ト同ジ数ノ Proper Fractions ニ分ケル事ヲ得.

II 次ニ $\frac{A}{P\cdot Q^3}$ ニ於テ P ト Q トハ公約数ヲ有セザルモノトス.
イクツデモヨイ.

$$\frac{A}{P\cdot Q^3}=\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}$$

$\frac{C}{Q^3}$ ニハ第一ノ方法ヲ適用スルコトヲ得ベシ.

分子 C ヲ Q ニ関スル Integral Expression トシテ現ハシ,

$$C = C_1 Q^2 + C_2 Q + C_3$$

トナリタリトス.

但シ C_1, C_2, C_3 ハ Q ヨリ低次ノモノトス
(Ex 1. ノ 14 ノ如シ)

$$\therefore \frac{C}{Q^3} = \cancel{C_1 Q}\ \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}$$

$$\frac{A}{PQ} = \frac{B}{P} + \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}$$

I ト II トヲアハセテ次ノ如ク述ベルコトガ出来ル.
与ヘラレタル Proper Fraction ノ分母ヲ因数ニ分ツ時, 或因数ハ唯一度ノミ含ミ, 或他ノ因数ハ一度ヨリ多ク含マレ此等互ニ公約数ヲ有セザルモノ

トス、然ル時ハ所設ノ分数ハ唯一度ノミ含マレタル因数ニ対シテハ $\frac{B}{P}$ ナル Type ノ分数ガ Correspond シ、又一度以上含マレタル因数 (R-times) ニ対シテハ $\frac{C_1}{\varphi}+\frac{C_2}{\varphi^2}+\frac{C_3}{\varphi^3}+\cdots\cdots+\frac{C_R}{\varphi^R}$ ナルR個ノ分数ノ群ガ対応スル。(但シ $C_1, C_2, C_3 \cdots C_R$ 等ハ φ ヨリ低次。)

§7. 最モ簡単ナ Partial Fraction.

x ニ関スル整式(係数ハ総テ実数トス)ハ

$x-a$, x^2+px+q ナル形ノ因数ニ分解スルコトヲ得,

但 a, p, q ハ実数トス.

而シテ x^2+px+q ハ二ツノ一次因数ニ分解スレバ其ノ係数ハ虚数ヲ含ムモノトス

今与ヘラレタ分数ノ分母ヲ因数ニ分解スルト上ニ述ベタ通リ、$x-a$, x^2+px+q ナル因数ヲ生ズル答デアル。依ッテ次ノ如ク Partial Fraction 四ツニ分類出来ル。

I $x-a$ ナル因数ガ唯一度丈含マルル時ハ $\frac{A}{x-a}$ ナル一分数ガ存在スル。(A ハ Real Constant)

II $x-a$ ナル因数ガ R times 含ンデル時ハ $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_R}{(x-a)^R}$ ナルR個ノ分数ノ群ガ存在スル

但シ A_1, A_2, A_3, 等ハ real constant.

III x^2+px+q ナル因数ガ唯一度含マレタル時ハ
$$\frac{Dx+E}{x^2+px+q}$$ (但 D, E ハ real constant)
ナル因数アリ

IV x^2+px+q ナル因数 R 回アル時ハ
$$\frac{D_1x+E_1}{x^2+px+q}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots\cdots\frac{D_kx+E_R}{(x^2+px+q)^R}$$
ナル因数アリ ($D_1E_1D_2E_2$ 等ハ real constant ナリ)

上ノ如ク I, II, III, IV ナル Type ニテ現ハシタ Partial Fraction ノ事ヲ Simplest Partial Fraction トイフ。

Exa. 1. $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

$$x^2+x-3=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

put $x=1$ $\quad -1=A(-1)(-2)\quad A=-\frac{1}{2}$

put $x=2$ $\quad 3=B(-1)\quad B=-3$

put $x=3$ $\quad 9=C\times 2\quad \therefore C=\frac{9}{2}$

$$原式=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-3}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-3}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}$$

Exa 2. $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3}$

$$x+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

$x=0$　　$1 = A(-1)^3$　　$A=-1$

$x=1$　　$2 = D$　　$D=2$

$$0 = -(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + x-1$$

$$0 = -(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx + 1$$

$x=1$　　$C=-1$

$$0 = -(x-1)^2 + Bx(x-1) - x + 1$$

$$0 = (x-1) + Bx - 1$$

$x=1$　　$B=1$

第三篇 Function

§1. Constants and variables

Constant トハ一ツノ discussion ノ間同ジ数ヲ表ハス（値ノ変ラヌ）symbol ヲ云フ。
Variable トハ一ツノ discussion ニ於テ、異ナル数ヲ表ハス symbol ヲ云フ。
普通ノ数学上ノ式ニハ Constant 及ビ Variable ノ二ツヲ含ム。而シテ前者ヲ現ハスニハ alphabet ノ初メノ方ノ文字 a, b, c 等ヲ用ヒ後者ヲ現ハスニハ終リノ方ノ文字 x, y, z 等ヲ用フ。

§2. Function ノ定義

二ツノ Variables アリテ其ノ中ノ一ツノ値ガ決定セラルル時、他ノ Corresponding value ガ定マル時ニハ、後ノ Variable ヲ初メノ Variable ノ Function ト名付ク。
例ヘバ、正方形ノ面積ハ其ノ正方形ノ辺ノ長サノ Function デアル。
又、円ノ面積ハ其ノ半径ノ Function デアル。
之ヲ式ニ表ハセバ、其ハ次ノ如シ、

$$y = x^2.$$
$$S = \pi r^2.$$

又他ノ例ヲ挙グレバ、x^2+3x-1 ノ値ハ
$x=1$ ノ時ニハ 3　　$x=2$ ノ時ニハ 9.
斯ノ如ク x ニ fixed value ヲ与フル時ハ式

値ガ決定セラル 従ツテ之ノ式ハ x ノ Function

§3. Functional notation

Variable x ノ Function ナルコトヲ表ハスニ
$f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等ノ symbol (記号) ヲ用フ,
例 $f(x) = x^2+3x-1$ トスレバ,

$f(2)=9$

$f(-3)=-1$

$f(a)=a^2+3a-1$

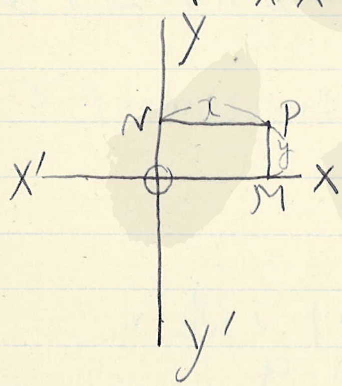
又 $\phi(x)=x^2+5x$ トスレバ

$\phi(3)=24.$

$\phi(y+z)=(y+z)^2+5(y+z)$

§4 System of co-ordinates

互ニ直交スル二直線 XX', YY', ヲトリ其ノ交点ヲ
O トス. XX' 上及ビ YY' 上ニ長サヲトル時ニハ O ヲ



起点トシテ考フ. P ヲ二直線ノ決定スル平面上ノ一点トセヨ. P ヨリ二直線ニ垂線ヲ下ス, P ガ XX' ノ上ニアル時ニハ y ハ+ 下ニアル時ハ−トシ, 又 P ガ YY' ノ右ニアル時ハ x ハ+ 左ニアル時ハ−トス,

然レバ, P 点ガ平面ノイヅコニアツテモ
之ニ二ツノ垂線ガ対応スル。
([illegible])

コノXX′及ビyy′ナル直線ヲCo-ordinate axes 其ノ交点OヲOrigin, XX′ナル直線ヲX-axis, yy′ナル直線ヲy-axisト名ヅク。

PヨリX-axisニ下セシ垂線ノ長サヲP点ノordinateト名ヅク 図ノPM=NO=yナリ。

y-axisニ下セシ垂線ノ長サヲP点ノabscissaト名ヅク。図ノPN=MO=xナリ。

故ニ二ツノ数ガ与ヘラレタル時ハ其ノ第一ヲabscissaトシ、第二ノ数ヲordinateトシテ、一ツノ点(唯一点ニ限ル)Pヲ決定スルコトヲ得、例ヘバ2及ビ−5ナル二数ガ与ヘラレタル時OriginヨリX-axis上ニpositive directionニ2ナル長サヲトリ、y-axis上ニnegative directionニ5丈取リ之ヲ二辺トスル矩形ヲ書キOノ対点ハ即チ二数ニヨツテ決定セラルル一点デアル、之ノ点ハ通例(2, −5)ナルsymbolニテ表ハス、一般ニabscissaガaデordinateガbナル点ハ(a, b)ニテ表ハス。

此ノ方法ニヨツテ点ヲplotスルニハsection paper(方眼紙)ヲ用フルヲ便トシ、其ノ正方形ノ一辺ヲ単位ニトリテabscissa及ビordinateヲ計ルコトトスレバ

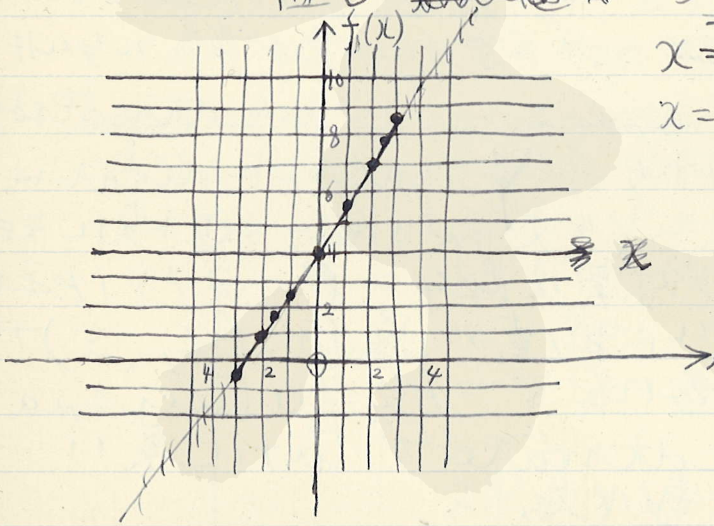
ヲ云。

§5. Graph of a function. (Geometrical Representation
(Graphical 〃 〃)

一ツノ Function ハ Co-ordinate axes ニ関シテ之ヲ現ハスコトヲ得。カク、或 function ヲ現ハス線、之ヲ其ノ Function ノ Graph ト名ヅク。
Function $f(x)$ ノ Graph トハ $\{x, f(x)\}$ ナル co-ordinate ヲ有スル凡テノ点ヲ含ミ、其他ノ点ヲ含マ~~ザル~~ヌ如キ、コレ等ノ点ノ集リ。

Exa. 1 $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$. ノ Graph ヲ求ムルコト。

但シ ~~xxxx~~ $-3 \leq x \leq +3$ トス、

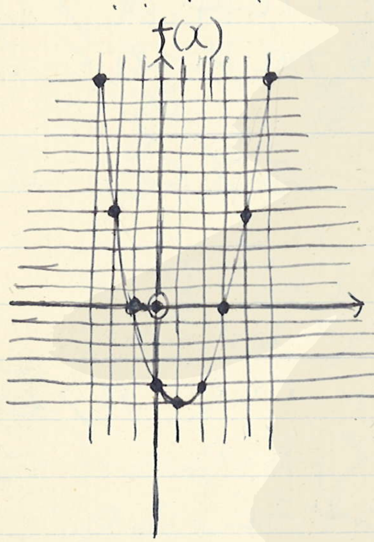


$x = -3$ …… $f(x) = -\frac{1}{2}$
$x = -2$ …… $f(x) = 1$
$-\frac{3}{2}$ …… $\frac{7}{4}$
-1 …… $\frac{5}{2}$
0 …… 4
1 …… $\frac{11}{2}$
2 …… 7
$\frac{5}{2}$ …… $\frac{31}{4}$
3 …… $\frac{17}{2}$,

之等ノ点ヲ記セバ上ノ如シ。

Exa, 2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$, Graph

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) =$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5



抛物線

第四篇 Inequalities

不等式ニ於テ取扱フ数ハ皆実数ナリトス.
二数ノ大小ヲ現ハスニハ $>$ or $<$ ナル記号ヲ用ヒ, (又 $\neq$ ナル記号モ不等ヲ現ハス)
$a>b$ ト $b<a$ ハ同一ノ意味ヲ有ス.
二数ニ於テ $a-b$ ガ正ナル時 $a>b$,
$a-b$ ガ負ナル時 $a<b$,

§1. 不等式ニ関スル基本定理,

I. $a>b$, $b>c$ ナル時ハ $a>c$,

$$\because \begin{array}{r} a-b>0 \\ b-c>0 \\ \hline a-c>0 \end{array}$$

Cor. $a>b$, $b>c$, $c>d$ …… $k>l$ ナル時
$a>l$

sense 向.

II. $a>b$ ナル時ハ $a\pm c>b\pm c$
$\because (a+c)-(b+c)=a-b>0 \quad \therefore a+c>b+c$

III. $a+b>c+d$ ナル時 $a+b-d>c$
$\because (a+b)-d>(c+d)-d \quad \underline{a+b-d>c}$

IV $a>b$ ナル時 $-a<-b$
$\because a-(a+b)>b-(a+b) \quad -b>-a$

V $a_1>b_1$, $a_2>b_2$ ナル時 $a_1+a_2>b_1+b_2$
$\because a_1+a_2-(b_1+b_2)$
$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)>0$

Cor $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $a_3>b_3$, … $a_n>b_n$

$a_1+a_2+a_3 \cdots\cdots a_n > b_1+b_2 \cdots + b_n$

VI (a) $a>b$　$c>0$　ナルトキハ

$ac>bc$　又　$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

$\because ac-bc = c(a-b)>0$

(b) $a>b$　$c<0$

$ac<bc$　又　$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

~~(c)~~

VII $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$,　$bd>0$　ナルトキハ

$ad>bc$

$\because \frac{a}{b}(bd) > \frac{c}{d}(bd)$　by VI

$ad>bc$

VIII $a_1>b_1$　$a_2>b_2$　ナルトキハ

$a_1a_2>b_1b_2$　(a_1, b_1, a_2, b_2 ハ正)

$\because a_1a_2-b_1b_2 = a_1a_2-a_2b_1+a_2b_1-b_1b_2$

$= a_2(a_1-b_1)+b_1(a_2-b_2)>0$

Cor. $a_1>b_1$　$a_2>b_2$　$\cdots\cdots$　$a_n>b_n$ ナルトキ.

$a_1a_2\cdots\cdots a_n > b_1b_2\cdots\cdots b_n$.

IX (a, b スベテ正ナリ)

IX $a>b$, ナルトキハ　$a^n>b^n$

(a, b ハ共ニ正, n ハ正ノ整数)

$\because$ 前定理ノ系ニ於テ.

$a_1=a_2= \cdots\cdots =a_n=a$

$b_1=b_2= \cdots\cdots =b_n=b$　トスレバ.

X. $a>b$ $\quad a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$

(a, b ハ共ニ正、n ハ正整数
且 n乗根ハ正ノ実数ヲトルトス)

∵ 次ノ公式ガ成立スルコトハ容易ニ知ラル.

$$a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}=\frac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+\cdots\cdots a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}}+b^{\frac{n-1}{n}}}$$

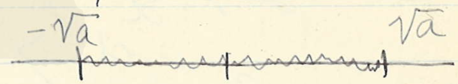
コノ右辺ノ分数ノ分母分子ハ共ニ正ナリ.

Cor. $x^2<a$ $\quad a>0$ ナルトキハ、

$x<\sqrt{a}$,

$-x>-\sqrt{a}$.

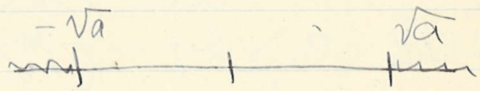
$\therefore -\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$



$x^2>a$ $\quad a>0$

$x>\sqrt{a}$

$-x<-\sqrt{a}$



§2. 不等式ヲ二ツノ種類ニ分ツコトヲ得、即チ

Absolute Inequality &

Conditional Inequality

前者ハ $x^2+2>0$ ノ如ク x ノ如何ナル値ニ対シテモ成立スルモノヲ云ヒ、コレニ対シテ

$(x-2)(x-3)<0$ ノ如キハ x ノ値ガ2ト3ノ間ニアルノミ成立スルモノナレバ前者ト区別シテ

Con. Ineq トス.

(I) 不等式ノ成立ヲ証明スルニ関スル注意

通例ハ両辺ノ差ノ正負ヲ証明スル、

Exa 1. a, b, c ガ共ニ正且違タ等カラズ.

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3)$$

$$b^3+c^3-bc(b+c)+c^3+a^3-ca(c+a)$$
$$+a^3+b^3-ab(a+b).$$
$$=(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2+(a+b)(a-b)^2>0$$

Exa 2. $(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$,

條件ハ Exa 1 ニ同ジ,

$$2abc+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-8abc$$
$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(a^2+c^2-2ac)+c(a^2+b^2$$
$$-2ab)>0$$

Exa 3, $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$

條件ハ Exa 1 ニ同ジ

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}, >0$$

又ハ $a^2+b^2>2ab$

$$b^2+c^2>2bc$$
$$c^2+a^2>2ca$$

(III) 不等式ノ解キ方

不等式ノ中ニ含マレタル未知数ノ函数値ノ範囲ヲ求ムルコトヲ其ノ不等式ヲ解クト稱ス.
不等式ノ未知数ハ方程式ニ於ケルガ如ク通例 x, y, 等ヲ以テ現ハス.

Exa 1. $kx+l > k'x+l'$

$(k-k')x > l'-l$.

(i) $k-k' > 0$

$$x > \frac{l'-l}{k-k'}$$

(ii) $k-k' < 0$

$$x < \frac{l'-l}{k-k'}.$$

Exa 2. $ax^2+bx+c > 0$

$ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ x_1, x_2 トスレバ.

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = P$.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$P = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

I $b^2-4ac > 0$ ナル時,

x_1, x_2 ハ共ニ實数.

∴ ~~A=~~ $P > 0$ ナルタメニハ

(i) $a>0$ ノ時ハ
$x-x_1$, $x-x_2$ ガ同符号,
即チ x ハ x_1 及ビ x_2 ノ中ノ大ナルモノヨリ大,
カ又ハ小ナルモノヨリ小ナラザルベカラズ.
(ii) $a<0$ ノ時ハ
$x-x_1$, 及ビ $x-x_2$ ハ異符号ヲ有セザルベカラズ
従ッテ x ハ x_1 及ビ x_2 ノ間ニアリ.
II. $b^2-4ac=0$
(i) $a>0$
x ノ値ノ如何ニ関セズ $P>0$ トナル
(absolute inequality)
(ii) $a<0$
適スル x ノ値存在セズ.
III $b^2-4ac<0$
(i) $a>0$
x ノ値ノ如何ニ関セズ $P>0$.
(ii) $a<0$
存在セズ.

Exa 3. 分数式ヲ含ム不等式.
$$\frac{2x}{x+1}>3,$$

(i) $x+1>0$ or $x>-1$

$2x>3(x+1)$

$-3>x$

コノ二ツノ條件ヲ共ニ満足スル値存在セズ.

コレハステルコトニス.

(ii) $x+1<0$ or $x<-1$

$2x<-3(x+1)$

$-3<x$ $\qquad -3<x<-1$

Exa 4. 無理式ヲ含ム不等式.

$x>\sqrt{3-2x}$.

$3-2x\geqq 0$ ハ必要カラナリ. 即チ $x\leqq\frac{3}{2}$,

$x \quad \sqrt{3-2x} \quad x>0$.

$0<x\leqq\frac{3}{2}$

両辺ヲ二乗ス.

$x^2>3-2x$

$x^2+2x-3>0$

$(x+3)(x-1)>0$

$\{x-(-3)\}\{x-1\}>0$

$x>1$ or $\cancel{x<-3}$,

$\therefore \frac{3}{2}\geqq x>1$.

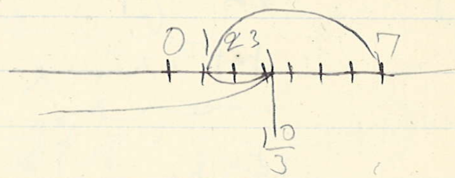
Exa 5. $\left.\begin{array}{l} 2x+3 > 5x-7 \\ x^2-8x+7<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$

(1)ヨリ $x < \frac{10}{3}$.

(2)ヨリ $(x-1)(x-7)<0$

$1<x<7$

$\therefore\ 1<x<\frac{10}{3}$



Exa 6. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 5x-4y>6 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$

$8x+12y=28$

$15x-12y>18$

$23x>46$

$\left.\begin{array}{l} \therefore\ x>2 \\ y=\frac{7-2x}{3} \end{array}\right\}$.

$10x+15y=35$

$10x-8y>12$

$23y<23$

$\left.\begin{array}{l} y<1 \\ x=\frac{7-3y}{2} \end{array}\right\}$

§3. 定理(I). $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ ヲ凡テ~~負~~正トスレバ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n}$ ナル分数ハ n 個ノ分数 $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_n}{b_n}$ ノ中ノ最小ナルモノヨリ小ナラズ、又最大ナルモノヨリ大ナラズ。

証明、n 個ノ分数中最小ナルモノヲ k トスレバ

$$\frac{a_1}{b_1} \geq k \quad \frac{a_2}{b_2} \geq k \quad \ldots, \frac{a_n}{b_n} \geq k.$$

$$a_1 \geq b_1 k \quad a_2 \geq b_2 k \quad \cdots a_n \geq b_n k$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4 \cdots +a_n$$
$$\geq k(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n).$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n} \geq k.$$

次ニ最大ナルモノヲ k' トスレバ、

同様ニシテ

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n} \leq k'.$$

(II) ~~x, t~~ x, p, q ヲ凡テ正ニシ且 p ト q ヲ整数トスル時、$p>q$ ナル時ハ $\dfrac{x^p-1}{p} > \dfrac{x^q-1}{q}$ $(x \neq 1)$

(証) コノ不等式ノ真ナルコトヲ証スルニハ

$$\frac{x^p-1}{p}-\frac{x^q-1}{q}>0$$ ヲ証明スレバヨイ

即チ $$(x-1)\left\{\frac{x^{p-1}+x^{p-2}\cdots+x^q+x^{q-1}\cdots+x+1}{p}-\frac{x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+1}{q}\right\}$$ (1)

$$(x-1)\left\{q(x^{p-1}+x^{p-2}\cdots+x^q+x^{q-1}\cdots+x+1)-p(x^{q-1}+x^{q-2}\cdots\cdots+x+1)\right\}>0$$

$p=q+r$ トオクコトガ出来ル, $(r>0)$

従ッテ上ノ不等式ハ

$$(x-1)\left\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x^q)-r(x^{q-1}+x^{q-2}\cdots x+1)\right\}>0,\quad (2)$$

(i) 先ズ $x>1$　$x^{p-1}+x^{p-2}\cdots+x^q\geq rx^q$

$x^{q-1}+x^{q-2}\cdots+x+1\leq q\,x^{q-1}$

$\therefore (x-1)\{qrx^q-rqx^{q-1}\}$ ガ正ナルヿヲ知レバ、(2)ガ成立ツ、其レデヨイ

$$qrx^{q-1}(x-1)^2>0$$

∴(2)ガ成立、∴(1)ガ成立、

従ッテ初メノ不等式ガ成立スル。

(ii) $x<1$ ナル時.

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x^{q}\leq rx^{q}$$

$$x^{q-1}+x^{q-2}\cdots+x+1\geq qx^{q-1}$$

∴ (2) ノ左辺ノ代リニ

$$(x-1)\{qrx^{q}-rqx^{q-1}\}\leq (2)\text{ ノ左辺},$$

$$\| $$

$$qrx^{q-1}(x-1)^{2}>0.$$

従ッテ (2), (1) ガ成立ス.

(III) x ヲ正トシ, 且 1 ニ等シカラズトス. 然ルトキハ m ガ 0 ト 1 ノ間ニアラザルトキハ, $(m<0 \quad m>1)$

$$mx^{m-1}(x-1)>x^{m}-1>m(x-1)$$

m ガ 0 ト 1 ノ間ニアルトキハ, $(0<m<1)$

$$mx^{m-1}(x-1)<x^{m}-1<m(x-1)$$

(証) 前定理ニヨッテ

$$x^{p}-1\gtrless \frac{p}{q}(x^{q}-1)\qquad \begin{matrix}p>q\\ p<q\end{matrix}\qquad (x>0,\neq 1)$$

今 x ニ代リニ $y^{\frac{1}{q}}$ ヲ入レテ, y ガ正ニシテ1ニ等シカラズトシ, 且 q 乗根ハ正ノ実数ナルモノヲトル. 次ニ $m=\frac{p}{q}$ ナリトスレバ, $p\gtrless q$ ナルニ従ッテ $m\gtrless 1$ ヨッテ

$$x^{p}=(y^{\frac{1}{q}})^{p}=y^{m}\qquad x^{q}=(y^{\frac{1}{q}})^{q}=y,$$

$$\therefore\ y^{m}-1\gtrless m(y-1)$$

依ッテ証明スベキ両ニ等式ノ後半ハ m ガ
正ナル時成立ス，
次ニコノ結果ニ依テ
$y=\frac{1}{z}$ トオキ 従ッテ z ハ正ニシテ一ニ等シカラズ
然ラバ $m \geqq 1$ ナルニ従ッテ，

$$\frac{1}{z^m}-1 \geqq m\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

即チ，$$\frac{1-z^m}{z^m} \geqq m\frac{1-z}{z},$$

$$1-z^m \geqq m z^{m-1}(1-z)$$

$$m z^{m-1}(z-1) \geqq z^m-1 \qquad (m \geqq 1)$$

依ッテ m ガ正ナル時ハ証明スベキ両不等式ノ前半ガ成立スル，
∴ 全体ヲ綜合スレバ
m ガ正ナル時，本定理ガ成立スルコトヲ証シ得
リ．
次ニ m ガ負ナル場合ニ従ハン．

$$m=-n, \quad n>0,$$

証スベキ第一不等式ノ後半

$$x^m-1 > m(x-1)$$

即 $$x^{-n}-1 > (-n)(x-1)$$

ガ成立スル為ニハ，

$$\frac{1}{x^n}-1 > -n(x-1)$$

$$1-x^n > -nx^n(x-1)$$

or $nx^{n+1} - nx^n > x^n - 1$ ガ成立スレバヨイ

即チ，$nx^{n+1} + x^{n+1} - nx^n - x^n > x^{n+1} - 1$

$$x^{n+1}(n+1) - x^n(n+1) > x^{n+1} - 1$$

$$(n+1)x^n(x-1) > x^{n+1} - 1$$

然ルニ $n>0$　$n+1>0$　$n>1$

コノ最後ノ不等式ガ成立スルコトハ既ニ証明セリ.

$$x^{-n} - 1 > (-n)(x-1)$$

or $x^m - 1 > m(x-1)$ ガ成立スルヲ知ル.

次ニ $x^{-n} - 1 > (-n)(x-1)$ ニ於テ

$x = \frac{1}{y}$ トオク，$1 \neq y > 0$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{-n} - 1 > (-n)\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$$y^n - 1 > -n\frac{1-y}{y}$$

$-y^{-n}$ ヲ両辺ニ乗ズ，

$$-1 + y^{-n} < ny^{-n-1}(1-y)$$

$$ny^{-n-1}(y-1) < -y^{-n} + 1,$$

$$-ny^{-n-1}(y-1) > y^{-n} - 1,$$

$$my^{m-1}(y-1) > y^m - 1,$$

故ニ証明スベキ第一不等式ノ前半ハ m ガ負ナル時ニモ成リ立ツ

従テ コノニツヲ綜合スレバ m ガ負ナル時ハ

成立ス。

(IV) xトyトヲ二ツノ不等ナル正數トシ mガ0ト1トノ間ニアラザル件ハ、

$$m x^{m-1}(x-y) > x^m - y^m > m y^{m-1}(x-y)$$

mガ0ト1トノ間ニアル件ハ、

$$m x^{m-1}(x-y) < x^m - y^m < m y^{m-1}(x-y)$$

(証) 前定理ノ第一不等式、

$$m x^{m-1}(x-1) > x^m - 1 > m(x-1)$$

ニ於テ

$x \neq 1$　$x = \frac{y}{z}$ ト置トスレバ、

$$m\left(\frac{y}{z}\right)^{m-1}\left(\frac{y}{z}-1\right) > \left(\frac{y}{z}\right)^m - 1 > m\left(\frac{y}{z}-1\right)$$

z^m ヲカケル、

$$m y^{m-1}(y-z) > y^m - z^m > m z^{m-1}(y-z)$$

即チ第一不等式ガナリタツ、
同様ニ前定理ノ第二不等式ヨリ出発スレバ、
本定理ノ第二不等式ガ成立スルヲ知ル。

(V) n個ノpos. numbersノarithmetic mean（相加平均）ハ其等ノ數ノgeometric mean（相乘平均）ヨリ小ナラズ。
之ヲ式ニテ表ハセバ、

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

(証) コノ定理ハ　$n=2$ ノ時，次ノ如ク証シ得.

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

$$a_1+a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2}$$

$$(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$$

$$(a_1-a_2)^2 \geq 0$$

最後ノ式ハ明カニ成立スル

次ニコノ定理ガ一般ニ n ノ時真ナリト假定スレバ

$n+1$ ノ時ニモ亦真ナルコトヲ証明セン.

コノ定理ガ n ノ時ニ真ナリト假定

即チ $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4\cdots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

∴ $a_1+a_2+a_3+a_4\cdots+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

∴ $a_1+a_2\cdots\cdots+a_n+a_{n+1} \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+a_{n+1}$

∴ $n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+a_{n+1} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}$

ヲ成立スルコトヲ証明スレバヨイ.

$mx^{m-1}(x-y) > x^m-y^m$ ($m>1$　$m<0$)（前定理ニヨル）

$x=\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$　$y=1$　$m=n+1$ トオク.

$$(n+1)\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left\{\left(\frac{a_1\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right\} > \left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n}}-1.$$

or $n\left(\frac{a_1\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n}}+1>(n+1)\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

a_{n+1}ヲ掛ケレバ $n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+a_{n+1}$

$$>(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

然ルニ $n=2$ ノ時ニハ本定理ノ成立スルヲ証明セリ　故ニコノ定理ハnガ如何ナル整数ノ時ニモ成立スルヲ知ル。
コノ証明法ハ之ヲ数学的帰納法
Mathematical Inductionト名ヅク
数学全般ニ通ジテ時々用ヒラルル証明法デアル。

第五篇. Theory of equations
方程式論

§1. $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2$
$+ a_{n-1} x + a_n$.

ニ於テ n ハ正ノ整数、係数 a_0, a_1, a_2, 等ハ x ヲ含マズ。
然ル時 $f(x)$ ナル function ヲ rational integral algebraic function (polynomial) ト名ヅク。
多項式.

function

transcendental fn. $(\sin x, \log x)$

algebraic fn. $\left(\sqrt{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{a} + b,\right)$ 式、中ノ一部又ハ全部ヲ含ム (加、減、乗、除、乗冪、開方)

irrational fn (開方ヲ含ム式)

rational fn (開方ヲ含マヌ式) $\frac{x^2+ax+b}{x^3}$

fractional fn (除法ヲ含ム)

integral fn (除法ヲ含マズ)

右ノ六ツノ演算ヲ含マザル式

polynomial ヲ 0 ニ等シト才キタル方程式
$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2$
$+ a_{n-1} x + a_n = 0$
ヲ n 次ノ代数方程式トナヅケ之ヲ簡単ノ為メ、
$f(x) = 0$ トシテアラハス.
コノ方程式ヲ identity ニ導ク x ノ値ヲ其ノ根トナヅク.
恒等式.

§2. 定理. α ヲ $f(\alpha) = 0$ ノ一根トスレバ polynomial

$f(x)$ ハ $x-\alpha$ ニテ割リ切レル,
polynomial ヲ $f(x)$ ヲ $x-\alpha$ ニテ割リノコリガ x ヲフクマザルニイタラシム迄行ヒ、得タル quotient ヲ Q remainder ヲ R トスレバ,

$$f(x)=(x-\alpha)Q+R$$ ナル identity ヲ得.

然ルニ α ハ $f(x)=0$ ノ根ナルヲ以ステ

$$f(\alpha)=0\times Q_{(x=\alpha)}+R=0 \quad \therefore R=0$$

§3. 定理 polynomial $f(x)$ ガ $x-\alpha$ ニテ割リ切レル時ハ α ハ $f(x)=0$ ノ一ツノ根デアル.

$$f(x)=(x-\alpha)Q$$

從ッテ $f(x)=0$ ナル方程式ハ
$(x-\alpha)Q=0$ トカキウ. コノ形ヨリ α ガ一ツノ根ナルコトハ火ヲ見ルヨリ明カナリ

§4. 定理. n次ノ方程式 $f(x)=0$ ハ n個ノ根ヲ有シ、之ヨリ多クノ根ヲ有セズ.

コノ定理ヲ証明スルニカクノ如キ方程式ハ少クトモ一ツノ根ヲ有スルコトヲ假定ス; (コレハ完全ニ証明サレテ居ル)
今 α_1 ヲ一ツノ根トス.
$f(x)$ ハ $x-\alpha_1$ ニテ割リ切レル,

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$$

$f_1(x)$ ハ $n-1$ 次ノ polynomial デアル
次ニ $f_1(x)=0$ ハ又一ツノ根ヲ有ス, コレヲ α_2 トスレバ,

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)$$

$f_2(x)$ハ $n-2$ 次ノ polynomial
又 $f_2(x)=0$ ハ $n-2$ 次ノ方程式デアル
ヱノ一根ヲ α_3 トス、
カクノ如ク進ムトキハ $f(x)$ ナル polynomial ハ左ノ
如キ因数ニ分解スルコトガ出来ル、

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)\cdots\cdots,$$
$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$$
$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

ヱノ $f(x)$ ハ x ノ代リニ n 個ノ数 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ ノイヅレカ一ツヲ x ノカハリニオケバ vanish スル
即チ $f(x)=0$ ハ n 個ノ根ヲ有ス、
次ニ x ノカハリニ之等ノ n roots ト異ナル値ヲ置イテモイヅレノ因数モ0トナラヌ、即チ方程式ハ満足セシメヌ、従ッテ甘 $f(x)=0$ ハ n 個ヨリ多クノ根ヲ有セヌ、

§5. $f(x)=0$ ノ係数ガ悉ク real ナルトキハ complex
Theo. roots ハ pairs ニナリテアラワル。 (a ト b ハ real)
(complex number トハ $a+bi$ ($i=\sqrt{-1}$)) (複素数)
($a=0$ 　bi 　imaginary number
$b=0$ 　a 　real)

(complex number ニテ一般ノ数ヲ現ハスモノトス)

$f(x)=0$ ガ $a+bi$ ナル根ヲ有スルトスル.

x ノ代リ $= a+bi$ ヲオケバ,

$$f(a+bi) = A + Bi = 0$$

但シ A ハ実数部分ヲ現ハシ B ハ虚数部分ノ係数ヲ現ハス.

(例ヘバ $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

$$f(a+bi) = a_0(a+bi)^3 + a_1(a+bi)^2 + a_2(a+bi) + a_3$$
$$= a_0(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i) + a_1(a^2+2abi-b^2) + a_2(a+bi) + a_3$$
$$= \underline{a_0(a^3-3ab^2) + a_1(a^2-b^2) + a_2a + a_3}$$
$$+ \{a_0(3a^2b-b^3) + 2a_1ab + a_2b\}i \quad)$$

シカシテ実数ト虚数トハ互ニ打消スコト能ハズ.故ニ上ノ関係ガ成立スル為ニハ

$A=0 \quad B=0$ デナケレバナラヌ.

次ニ $f(x)=0$ ノ x ノカハリニ $a-bi$ ヲオケバ

$f(a-bi) = A - Bi$ トナル.

$(\because \ (bi)^1 = bi \quad (bi)^2 = -b^2 \quad (bi)^3 = -b^3i \quad (bi)^4 = b^4$

$(-bi) = -bi \quad (-bi)^2 = -b^2 \quad (-bi)^3 = b^3i \quad (-bi)^4 = b^4$

. . . .

. . . .

偶数冪ノ所ハ実数　奇数ノ所ハ虚数

シカシテ実数ノ所ハカハラズ　虚数ノ所ハ符号ガカハル)

$f(a-bi) = A - Bi = 0$　（AガO BガOナレバナリ）

ゆヘ $a-bi$ ハ $f(x)=0$ ノ一根ナルコトヲ知ル。

他ノ言葉ニテ　$a+bi$ ガ $f(x)=0$ ノ一根ナル時ハ、其ノ conjugate $a-bi$ モ亦其ノ方程式ノ根ナリ。

例ヘバ $x^3-1=0$ ナル三次方程式ヲ考フル時、

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x=1 \qquad x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Cor. 方程式ノ次数ガ奇数ナル時ハ少クトモ一ツノ real root ヲ有ス。

§6. Descartes' rule of signs

polynomial; 或ハ之ヲ 0 = 等シト推キタル方程式ニ置イテニツノ續イタ項ガ同符号ヲ有スル時ハ permanence of sign ガ exist スルト云フ。ニツノ續イタ項ガ反対ノ符号ヲ有スル時ハ variation of sign ガ存在スルト云フ。

連續。

例ヘバ、$x^3-3x^2+5x+1=0$ ノ符号ハ

＋　－　＋　＋ デアル

v　v　p

$f(x)=0$ ナル方程式ノ根ハ其ノ variation of sign ヨリ多クノ positive roots ヲ有セズ。

又 $f(-x)$ ニ於ケル variation ノ数ヨリ多クノ negative roots ヲ有セズ。

今 x ニ関スル polynomial $\varphi(x)$ ノ符号ノミヲ列記シタルモノヲ、

$+ + - - + - + -$ トシ

コノ式ニ $x-\alpha$ $(\alpha>0)$ ヲ掛ケテ variation ノ数ノ増減ヲ考フルニ 符号ダケノカケ算ヲ行ヘバ 次ノ如シ、

$$
\begin{array}{ccccccccc}
+ & + & - & - & + & - & + & - & \\
+ & - & & & & & & & \\
\hline
+ & + & - & - & + & - & + & - & \\
 & - & - & + & + & - & + & - & + \\
\hline
+ & \pm & - & \mp & + & - & + & - & +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
+ & + & - & - & - & \\
+ & - & & & & \\
\hline
+ & + & - & - & - & \\
 & - & - & + & + & + \\
\hline
+ & \pm & - & \mp & \pm & +
\end{array}
$$

コノ積ニ於ケル $\pm$ or $\mp$ ノアル所即チ ambiguity (両意ノ場合) ノ起ル所ハ原式 $\varphi(x)$ ノ permanence ノ存在スル所ニシテ 且 ambiguity ノ前後ニアル二項ノ符号ハ常ニ反対デアル。ハ 積ニ於ケル variation ノ数ハ $\varphi(x)$ ニ於ケル variation ノ数ヨリ減ズルコトナシ。

且、積ニ於テ最後ニ一ツノ variation ヲ増加ス。ゝ、積ニ於ケル variation ハ最モ少キ場合ヲ考フルモ $\varphi(x)$ ニ於ケルヨリ一ツ丈増加スルヲ知ル。

次ニ $f(x)=0$ ナル方程式ニ m variations アリトシ m ヨリ多ク、例ヘバ $m+1$ 丈ノ positive roots アリトスル

今 $m+1$ pos. roots ヲ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m, \alpha_{m+1}$ トス、
然ラバ $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_m)(x-\alpha_{m+1})\varphi(x)$
而シテ $\varphi(x)$ = variation 全クナシトスルモ $m+1$ 個ノ因
数ヲカケルコトニヨッテ少クトモ $m+1$ 丈増加スル。即チ
$f(x)$ ハ少クトモ $m+1$ variations ヲ有スルコトトナル、之
仮定ニ反ス。$f(x)=0$ ニハ m ヨリ多クノ正根ナシ。

$f(x)=0$ (1) ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ヲ置ケバ
$f(-x)=0$ (2) トナリ (2) ノ根ハ(1)ノ根ト符号ニ於テ異ニス。
(∵ α ヲ (1) ノ一根トスレバ $f(\alpha)=0$ (3)、之ニ(2)ニ於テ x ノカハ
リニ $-\alpha$ ヲオケバ $f\{-(-\alpha)\} = f(\alpha) = 0$ ((3)ニヨッテ)
即チ α ガ (1) ノ根トスレバ $-\alpha$ ハ (2) ノ根トナルコト明ラカ。)
$f(x)=0$ ノ x ノ代リニ $-x$ ヲオケバ上ノ証明ニヨッテ其ノ根
ノ符号ニ変化ス、其故 $f(x)=0$ ノ neg. roots ハ
$f(-x)=0$ ノ pos. roots トナル。故ニ $f(-x)=0$ ノ pos roots
ノ数 即チ $f(x)=0$ ノ ~~po~~ neg. roots ノ数ハ $f(-x)$ ノ varia-
tion ノ数ヨリ多カラズ。
例ヘバ $x^3+2x+5=0$ ニ於テハ no variation ヲ以テ
positive roots ナシ。之ニ x ノカハリニ $-x$ ヲオケバ
$x^3+2x-5=0$ One variation. ∴ neg. roots ノ
数ハ一ツヨリ多カラズ。而ルニ §5 ノ Cor. ニヨリテ與ヘラレタ
ル方程式ハ一ツノ実根 一ツノ neg. root ヲ有ス。

例1. $x^4 - x^3 + 7x + 6 = 0$

variation 2,　　pos. roots ハ 2ヨリ ~~少シ~~ 多クナイ,

$x^4 + x^3 - 7x + 6 = 0$　　variation 2, negative roots $\leqq 2$.

例2, $x^{2n} - 1 = 0$　（二項方程式）

pos. roots ハ 1ヅヽヨリ多クナイ 1ナル根アリ。

neg. roots ハ 1ヅヽヨリ多クナイ −1ナル根アリ。

§7. 方程式ノ根ト係数トノ関係。

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ トスレバ、

$$(A)\left\{\begin{array}{l} a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n) \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\ a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots\cdots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_{n-1}\alpha_n. \end{array}\right.$$

トナル

（証明）(A)ナル方則ヲ証明スルニ induction ヲ用フ。

~~$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots\cdots$~~ $a_{n-1}x + a_n = 0$

~~$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 等ヲ其ノ根トス~~

方程式ガ二次ナル時ハ(A)ナル方則ガ成立スルコトハ実際ノ計算ヲ実行スレバワカル。

次ニ(A)ナル法則ガnノ時ニ成立スルモノト仮定スレバ

(n+1)ノ時ニモ成立スルコトヲ証明ス.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \ (=0)$$

但シ $a_1\, a_2$ 等ハ(A)ニ於テ示サレタル値ヲ有スルモノトス。

之ノ両辺ニ $x-\alpha_{n+1}$ ヲカケルト

$$x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} x^2 + a_n x$$
$$-\alpha_{n+1} x^n - a_1 \alpha_{n+1} x^{n-1} - \cdots\cdots - a_{n-2}\alpha_{n+1} x^2$$
$$-a_{n-1}\alpha_{n+1} x$$
$$-a_n \alpha_{n+1}$$

$$= x^{n+1} + (a_1 - \alpha_{n+1}) x^n + (a_2 - a_1 \alpha_{n+1}) x^{n-1} \cdots\cdots$$
$$+ (a_n - a_{n-1}\alpha_{n+1}) x - a_n \alpha_{n+1}$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})$$

然ルニ $a_1 - \alpha_{n+1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1})$

$$a_2 - a_1\alpha_{n+1} = \alpha_1\alpha_2 + \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n + \alpha_1\alpha_{n+1} \cdots \alpha_n\alpha_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_n\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n\alpha_{n+1}$$

即チ因数ノ数ガnノ時ニ上ノ法則ガ成立スル時ハ因数ノ数ガn+1ニナッテモ成立スルコトガ云ヘタ。
然ルニ n=2 即チ因数ノ数ガ2ノ時ニハ掛算ヲ実行シテ法則ノ真ナルコトヲ知リ、ヨッテ因数ノ数ガ任意ノ正ノ整数ノ時真ナルコトヲ知ル.

Ex. 1 $x^3+3x^2-16x-48=0$ ノ二根ノ和ガ0ナルコトヲ知リテコノ方程式ヲトケ. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ヲ三根トス.

假定ニヨリ $\alpha_1+\alpha_2=0$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-3$

$\therefore \alpha_3=-3.$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=48$

$\alpha_1\alpha_2=-16$

$\alpha_1=4 \quad \alpha_2=-4$

Ex 2. $x^3-9x^2+26x-24=0$
ノ三根ガ等差級数ヲナスコトヲ所用ヒテ方程式ヲトケ。三根ヲ $\alpha-\beta,\ \alpha,\ \alpha+\beta.$

$3\cdot\alpha=9$

$\alpha=3$

$\alpha^3-\alpha\beta^2=24$

$-3\beta^2=-3.$

$\beta^2=1$

$\beta=\pm1$

2, 3, 4,

§8. 方程式ノ根ノ Symmetric funtions

前節ニノベタル $a_1=-(\alpha_1+\alpha_2 \cdots\cdots +\alpha_n)$

$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3 \cdots\cdots +\alpha_{n-1}\alpha_n$

等ハイヅレモ方程式ノ根ノ対称式デアル。

コレ等ハ根ノ対称式中ニモ最モ簡単ナモノデアル。

一般ニ根ノ対称式ハソノ方程式ノ系数ニテアラハシウル。

例ヘバ $x^3+ax^2+bx+c=0$ ナル三次方程式ノ

根ヲ α, β, γ トスレバ

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-a$

(2) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b$

(3) $\alpha\beta\gamma=-c$

次ニ (4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ナル根ノ対称式ヲ係数 (a, b, c) ニテ表ハサン.

$(1)^2-(2)\times 2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a^2-2b$ (4)

次ニ $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$

$(1)\times(2)-3\alpha\beta\gamma \quad = -ab+3c$ (5)

次ニ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a^3+2ab+ab-3c$

$= -a^3-3c+3ab.$

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(2)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$= b^2-2ac$

又 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b$

. . . .

. . . .

Examples V.　　　　　　等　備

(1) 方程式 $a_0x^n \pm a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} \cdots \pm a_n$
ニ於テ ($a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 等ガ全テ同符号トス)
今 negative roots ノ数ハ x ノカハリニ $-x$ ヲ入レタ
ルキノ variation ノ数 ~~ニ等シ~~ ヨリ多クナイ
ソレニ $x=-x$ ヲ入レレバ 各項ハ同符号トナリ variation
ハナクナル、故ニ negative root ナシ。

(2) $a_0x^{2n} + a_1x^{2(n-1)} + a_2x^{2(n-2)} \cdots\cdots + a_n$ (a_0 等ハ正)
ナル方程式ニハ variation ハナイ。故ニ正根ハナイ。
又 x ノカハリニ $-x$ ヲ入レテモ 各項正トナリ variation ハ
出来ナイ、故ニ負根モナイ。故ニ complex roots バカ
リデアル。

(3) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$
$1+4\sqrt{-3}$ ナル根ガアルカラ、$1-4\sqrt{-3}$ ナル根モアル。
$\therefore x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = \{x-(1+4\sqrt{-3})\}\{x-(1-4\sqrt{-3})\}(x-\alpha)$
$= \{x^2 - 2x + 49\}(x-\alpha) = 0$

$\therefore \alpha = 4$

(4) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$
$\qquad i \quad -i$
$= (x-i)(x+i)(x-\alpha)(x-\beta)$
$= (x^2+1)\cancel{(x-\alpha)(x-\beta)}$

$(\alpha+\beta) = 4$　　$\alpha+\beta = -4$　　$\alpha\beta = 5$

~~$\alpha = 1 \quad \beta =$~~

$x^2 + 4x + 5 = 0$　　$x = -2 \pm \sqrt{\cancel{5-4}\ 4-5} = \cancel{2 \pm 1 = -3} \text{ or } -1$

$= -2 \pm i$

(5) $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$

$1-2\sqrt{-1},\ 1+2\sqrt{-1},\ \sqrt{3},\ \alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta+1-2\sqrt{-1}+1+2\sqrt{-1}+\sqrt{3}=1$

$\alpha+\beta=-1-\sqrt{3}$

$(1+4)\sqrt{3}\,\alpha\beta=15$

$\sqrt{3}\,\alpha\beta=3$

$\alpha\beta=\sqrt{3}.$

$\alpha=-1-\sqrt{3}-\beta.\quad \beta(-1-\sqrt{3}-\beta)=\sqrt{3}$

$\beta^2+(1+\sqrt{3})\beta+\sqrt{3}=0$

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\pm2}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ or $\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$

(6) $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$

$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha-\beta\sqrt{-1},\ \alpha+2\beta\sqrt{-1},\ \alpha-2\beta\sqrt{-1},$

~~γ.~~

~~$4\alpha+\gamma=4.\quad \gamma=4(1-\alpha)$~~

$(\alpha+\beta)(\alpha+4\beta)\gamma=10.$

$4\alpha=4\quad \alpha=1$

$(\alpha+\beta)(\alpha+4\beta)=10\qquad 1+5\beta+4\beta^2=10$

$4\beta^2+5\beta-9=0$

$\begin{matrix}1 & -1\\ 4 & 9\end{matrix}\qquad \beta=+1$ or $-\dfrac{9}{4}$

(7) $x^4 - 21x^3 + 166x^2 - 546x + 580 = 0$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{-1},\ \alpha+\beta-(\alpha-\beta)\sqrt{-1},$

$3(\alpha+\beta) = 21 \qquad \alpha+\beta = 7. = A$

$\alpha\beta((\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2) = 2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) = 580$

$A = 7 \qquad 2B(A^2 - 2B) = 580$

$4B^2 - 2A^2B + 580 = 0$

$2B^2 - 49B + 290 = 0$

$\begin{matrix} 1 & & 10 \\ 2 & & 29 \end{matrix} \qquad B = 10 \text{ or } 29,$

$\alpha = 2 \text{ or } 5$

$\beta = 5 \text{ or } 2$

(8) $2x^3 + 23x^2 + 80x + 75 = 0$

$\alpha\,\alpha\,\beta$

$2\alpha + \beta = \frac{-23}{2} \qquad \alpha^2 + 2\alpha\beta = 40$

$\beta = \frac{-23-4\alpha}{2} \qquad \alpha(\alpha - 23 - 4\alpha) = 40$

$3\alpha^2 + 23\alpha + 40 = 0$

$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{matrix}$

$\alpha = -5 \text{ or } -\frac{8}{3} \qquad \frac{364}{9} \times \frac{}{64}$

$\beta = \frac{3}{2} \text{ or } \frac{85}{64}.$

9. $9x^4 + 42x^3 + 132x^2 - 84x + 36 = 0$

$2\alpha + 2\beta = \frac{42}{9} \qquad \alpha + \beta = -\frac{7}{3}$

$\alpha^2\beta^2 = 4 \qquad \alpha\beta = \pm 2$

然ルニ x ノ negative roots ノ数ハ二ツ位ナルコトガ variation ノ関係カラワカル。
∴ $\alpha\beta = \pm 2$ ノ中 $\alpha\beta = 2$ ハ両ツ根ヲ全部ノ虚トスルカラトラヌ。

∴ $\alpha+\beta = -\frac{7}{3}$ $\quad \alpha\beta = -2$

$t^2 + \frac{7}{3}t - 2 = 0$

$3t^2 + 7t - 6 = 0$

$t = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \frac{-7\pm 11}{6}$

-3 or $\frac{2}{3}$

10. $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ $\quad a \quad ar \quad ar^2$

$a(1+r+r^2) = -a_1 \quad (1)$

$a^2r + a^2r^2 + a^2r^3 = a_2 \ (2) \quad a^2r(1+r+r^2) = a_2$

$a^3r^3 = -a_3$

$\frac{(2)}{(1)} \quad ar = -\frac{a_2}{a_1} \quad$ ∴ $a^3r^3 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 = -a_3$

11. $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$. $\quad 2\alpha, 3\alpha, \beta,$

$5\alpha + \beta = 9$

$6\alpha^2 + 5\alpha\beta = 14 \quad \alpha(6\alpha+5\beta) = 14$

$\beta = 9 - 5\alpha \quad \alpha(45 - 19\alpha) = 14$

$19\alpha^2 - 45\alpha + 14 = 0 \quad \alpha = \frac{7}{19}$ or 2

$\beta = \frac{136}{19}$ or -1

12. $x^3+ax^2+bx+c=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-a \quad (1)$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b \quad (2)$

$\alpha\beta\gamma=c \quad (3)$

(1)×(2) $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+3\alpha\beta\gamma$

$= -ab$

$3\alpha\beta\gamma=-3c$

$\Sigma\alpha^2\beta=-ab-3c$

13.(1) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma$
$+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma=-a^3$

$3\Sigma\alpha^2\beta=-3ab-9c$

$6\alpha\beta\gamma=-6c$

$\Sigma\alpha^3=-a^3-3ab-15c$

(2) $(\Sigma\alpha\beta)^2=\Sigma\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=b^2$

$2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=ac$

$\Sigma\alpha\beta^2=b^2-ac$

$x^3+px+q=0 \quad \alpha+\beta+\gamma=0 \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$

$\alpha\beta\gamma=-q$

14. $(\beta+\gamma-2\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)=-27\alpha\beta\gamma$

$=+27q$

$\alpha^2\alpha\beta\gamma$ $\alpha\alpha\gamma\beta$ $\alpha\beta\alpha\gamma$ $\alpha\beta\gamma\alpha$ $\alpha\gamma\beta\alpha$ $\beta\alpha\alpha\gamma$ $\beta\alpha\gamma\alpha$ $\alpha\alpha\beta\beta$ $\alpha\beta\alpha\beta$ $\alpha\beta\beta\alpha$ $\beta\beta\alpha\alpha$ $\beta\alpha\beta\alpha$ $\beta\alpha\alpha\beta$ $\alpha\alpha\alpha\beta$ $\alpha\alpha\beta\alpha$ $\alpha\beta\alpha\alpha$ $\beta\alpha\alpha\alpha$

1 1 / 1 2 1 / 1 3 3 1 / 1 4 6 4 1

15. $\sum \alpha^4$

$(\alpha+\beta+\gamma)^4 = \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+4(\alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\beta^3\gamma+\beta^3\alpha+\gamma^3\alpha+\gamma^3\beta)+6(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)$
$+12(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=0$

$\sum\alpha^4=-4\sum\alpha^3\beta-6\sum\alpha^2\beta^2$

$-4\sum\alpha^3\beta=-4\{(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-5\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

$2\alpha\beta\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma$

$2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)$

$-4\sum\alpha^2\beta=8\sum\alpha^2\beta^2$

$\sum\alpha^4=2(\sum\alpha^2\beta^2)=2p^2$

$-A+B+C$
$A-B+C$
$-A^2+2AB-B^2+C^2$
$A+B-C$
$-A^3+A^2B+AB^2+AC^2-B^3+BC^2+AC-2ABC+B^2C-C^2$

$x^3+ax^2+bx+c=0$

$\alpha+\beta+\gamma=-a \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b.$
$\alpha\beta\gamma=-c$

16. $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$

$=-\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)+\left(\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\alpha^2\gamma}+\frac{1}{\beta^2\alpha}+\frac{1}{\beta^2\gamma}+\frac{1}{\gamma^2\alpha}+\frac{1}{\gamma^2\beta}\right)-2\left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)$

$$= -\left(\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\right) + \left(\frac{\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right)$$

$-a^3$ $\qquad a^2$

$$-2\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \quad -a$$

$$= \frac{1}{c^3}\left\{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + c\sum\alpha^2\beta + 2c^2\right\}$$

$$= \frac{1}{c^3}\left\{(\alpha+\beta+\gamma)^3 + (c-3)\sum\alpha^2\beta - 6c + 2c^2\right\}$$

$$= \frac{1}{c^3}\left\{-a^3 - (c-3)(ab+3c) - 6c + 2c^2\right\}$$

$$= \frac{1}{c^3}\left\{-a^3 - abc + 3ab - c^2 - 3c\right\}$$

17. $(\beta+\gamma-3\alpha)(\gamma+\alpha-3\beta)(\alpha+\beta+3\gamma)$

$= -(c+4\alpha)(c+4\beta)(c+4\gamma) =$

$= -(c^3 + 4(\alpha+\beta+\gamma)c^2 + 16(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)c + 64\alpha\beta\gamma)$

$= -(a^3 + 4ac^2 + 16ba - 64a)$

$= 4ac^2 - 16ba + c^3 + 64c$

8.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = a$

$\sum\alpha\beta = b \qquad \sum\alpha\beta\gamma = c \qquad \alpha\beta\gamma\delta = d$

18. $\sum\alpha^2 = a^2 - 2b$

19. $\sum\alpha^2\beta = (\sum\alpha)(\sum\alpha\beta) + 3\cancel{\frac{a}{d}}\ 3c$

$= -ab + 3\cancel{\frac{a}{d}}\,c$

$\cancel{\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta}$

$\cancel{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$

$\Sigma \alpha^2\beta + 3(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$ 34

~~§9~~ (Transformation of Equations)

§9. 與ヘラレタル方程式ノ根ト絶對ノ符號ノ根ヲ有スル方程式ヲ作ルコト。

$f(x)=0$ ヲ與ヘラレタル方程式トシ、其ノ任意ノ一根ヲ α トスレバ、

$f(\alpha)=0$

次ニ與ヘラレタル方程式ノ x ノカハリニ $-x$ ヲオケバ、

$f(-x)=0$　　$-\alpha$ ガコノ方程式ノ根ナルコトヲ証スレバヨイ。コレガ求ムル方程式デアルコトガワカル。

$f(-(-\alpha))=f(\alpha)=0$

§10. 與ヘラレタル方程式ノ根ノ k times ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト、

與ヘラレタル方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0$$

ニ於テ　$x=\dfrac{y}{k}$

$$a_0\frac{y^n}{k^n}+a_1\frac{y^{n-1}}{k^{n-1}}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{y}{k}+a_n=a_0\left(\frac{y}{k}-\alpha_1\right)\left(\frac{y}{k}-\alpha_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{y}{k}-\alpha_n\right)=0$$

~~兩~~ k^n ヲカケル

$$a_0y^n+a_1ky^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}k^{n-1}y+a_nk^n=a_0(y-k\alpha_1)(y-k\alpha_2)\cdots\cdots(y-k\alpha_n)=0$$

コノ後ノ部分ニヨリテ方程式ノ根ガ k 倍セラレルコトヲ見ル。

前ノ部分ニテ方程式ノ根ヲ k 倍スルニハ第一項ヨリ其ノ係

トシ、第二項ニkヲ乗ジ、第三項ニk^2ヲ乗ジ第四項ニk^3ヲ乗ジ、……

§11、與ヘラレタル方程式ノ根ノreciprocalヲ根トスル方程式ヲ作ルコト。

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0. \quad (1)$$

$x=\frac{1}{y}$トオケバ、

$$a_0\frac{1}{y^n}+a_1\frac{1}{y^{n-1}}+a_2\frac{1}{y^{n-2}}\cdots+a_{n-1}\frac{1}{y}+a_n=0$$
$$=a_0\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)=0$$

~~而~~y^nヲカケル

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots\cdots a_1y+a_0=a_0(1-\alpha_1y)(1-\alpha_2y)\cdots\cdots(1-\alpha_ny)=0 \quad (2)$$

後ノ部分ニ依ツテ與ヘラレタル方程式ノ根ノreciprocalヲ根トスルコトヲ知ル。

Reciprocal equationトハxノカハリニ$\frac{1}{x}$トオケモカハラザル方程式ヲイフ。

簡単ナル例ハ $x+\frac{1}{x}=a$ ニオイテxノカハリニ$\frac{1}{x}$トオケバ $\frac{1}{x}+x=a$、∴コレハreciprocal equation

(1)ナル方程式ヲ次ノ如クカク、

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=0 \quad (1)'$$

(2)ヲ次ノ如クカク。

$$x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}=0 \quad (2)'$$

(2)ハ(1)ノxノカハリニ $\frac{1}{x}$ トオキタルモノデアル.
而シテ reciprocal equation ノ定義ニ従ヘバ
(1)ト(2)トハ全ク同一ノ方程式デアル.

$$\therefore \frac{a_1}{a_0}=\frac{a_{n-1}}{a_n},\quad \frac{a_2}{a_0}=\frac{a_{n-2}}{a_n},\quad \cdots\cdots,\quad \frac{a_{n-1}}{a_0}=\frac{a_1}{a_n}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_0}=\frac{a_0}{a_n}$$

コノ最後ノ條件ヨリ
$a_n^2=a_0^2$ 則チ $a_n=\pm a_0$

(i) $a_n=a_0$
コノ場合 reciprocal equation ノ初メカラト終リカラノ coresponding term ノ係數ノ絶對値モ符号モ相等シ.
コレヲ first class ノ reciprocal equation トイフ.

(ii) $a_n=-a_0$
コノ場合 reciprocal equation ノ初メカラト終リカラノ coresponding term ノ係數ノ絶對値ハ等シク符号ハ反ス.
コレヲ second class ノ 〃 〃 〃 トイフ.
而シテ 2nd class ノ場合ニ於テハ方程式ノ次數ガ偶數ナル時ハ眞中ノ項ヲ欠ク.
($\because$ $a_0x^{2k}-a_1x^{2k-1}-a_2x^{2k-2}\cdots$

Reciprocal equation ニ於テ α_1 ガ一根ナル時ハ
(α_1) $\frac{1}{\alpha_1}$ モ一根デアル。ナントナレバ $\frac{1}{\alpha_1}$ ハ ~~tra~~
Transform シタ方程式ノ根ニシテ其ノ Transform
シタ方程式ハモトノ方程式ト全ク同一ノモノデアル
カラデアル。ヨッテ reciprocal equation ニ於テハ
$(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1})$ $(\alpha_2, \frac{1}{\alpha_2})$ ノ如ク根ガ対ニナッテ含マレテ
居ル。

(i) ノ場合ニ於テハ次数ガ奇数ナル時ハ其ノ左辺ハ $x+1$ ニ
テワリキレル 即チ $x=-1$ ナル根アリ。
(∵ $a_0 x^{2k+1} \pm a_1 x^{2k} + \cdots \pm a_1 x + a_0 = 0$
$a_0(x^{2k+1}+1) - a_1 x(x^{2k-1}+1) + \cdots = 0$
左辺ハ $x+1$ デワレル。)
而シテ $x+1$ ニテ割ッタ結果ハ次数ガ偶数ニナッテ
然モ第一ノ場合ノマヽデアル。
(∵ $a_0(x^{2k} \cdots +) - a_1 x(x^{2k-2} \cdots +1)$

(ii) ノ場合ニ於テ次数奇数ナル時ハ左辺ハ $x-1$ ニテ割切レル
∴ $x=1$ ナル根アリ。
(∵ $a_0 x^{2k+1} \cdots a_0 = 0$)
而シテ $x-1$ ニテワリシ結果ハ次数偶数トナリ而モ
第一ノ場合ニナル
次ニ (ii) ノ場合ニ於テ次数ガ偶数ナル時ハ左辺ハ x^2-1
ニテワリキレル ∴ $x=\pm 1$ ナル根アリ。而シテ

x^2-1 ニテ割リタ結果ハ次数偶数ノ第一ノ場合ニ帰着スル。

(∵ $a_0x^{2k}-a_1x^{2k-1}+\cdots+a_1x-a_0=0$

従ッテ Reciprocal Equation ハイヅレノ場合モ次数偶数ノ第一ノ場合ニ帰スルコトヲ得、従ッテ之ノ場合ノ解法ヲ知レバ十分デアル。

1^{st} class $\begin{cases} \text{even} & \\ \text{odd} & x+1 \end{cases}$

2^{st} class $\begin{cases} \text{even} & x^2-1 \\ \text{odd} & x-1 \end{cases}$

Reciprocal Equation ノ解法.

1^{st} class デ even degree ノ逆数方程式ハ其ノ degree ヲ半減スルヲ得。

(∵ $a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ ヲ考ヘラレル方程式トス,

x^k 乗デ全体ヲワル、

$$a_0\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+a_1\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)\cdots\cdots=0 \quad (1)$$

次ニ $x+\frac{1}{x}=X$ トオク.

然ルトキハ $x^2+\frac{1}{x^2}=X^2-2$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=X^3-3X$$

$x^4+\frac{1}{x^4}=X^4-$

. . . .

一般ニ $x^p+\frac{1}{x^p}=\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-2}+\frac{1}{x^{p-2}}\right)$

此等ノ値ヲ(1)ニ代入スレバ、Xニ関シテ片次ノ式

即チ、方程式全ノ次数ガ半減サレタコトニナル。

カクノ如ク方程式ノ次数ヲ半減シテ大キナXノ値ヲ求メ

次ニ $x+\frac{1}{x}=X$ ニ代入シテ小サナxノ値ヲ求メレバヨイ。

例ヘバ、$x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1=0$

x+1デワル　　$x=-1$

$(x^5+1)+3x(x^3+1)-2x^2(x+1)=0$

$x^4-x^3+x^2-x+1$

$+3x^3-3x^2+3x$

$-2x^2$

$x^4+2x^3-4x+2x+1=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$

$X^2-2X-6=0$

$X=-1\pm\sqrt{7}$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{7}$　　$x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{7}$

$x^2-(-1+\sqrt{7})x+1=0$　　x^2

$x=\frac{(-1+\sqrt{7})\pm\sqrt{(-1-\sqrt{7})^2-4}}{2}$

§12. 与ヘラレタル方程式ノ根ヲ constant amount 一定量丈減ズルコト。

(根 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ ヲ $\alpha-h, \beta-h, \gamma-h \cdots$ トスルコト。)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

(1)ノ根ヲ h 丈 diminish スルニハ $x = y+h$ トオケバヨイ。

$$a_0(y+h)^n + a_1(y+h)^{n-1} + \cdots a_{n-1}(y+h) + a_n = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

(2)ガ求ムル方程式ナリ。何トナレバ、(1)ノ一根ヲ α トスレバ、

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0 \qquad (3)$$

ナル関係成立ス。

次ニ(2)ニ於テ y ノカハリニ $\alpha-h$ トオケバ、

$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$ トナル。

コレハ(3)ナル関係ニヨリテ 0 トナル。

∴ $\alpha-h$ ハ y ノ一根ナリ。

次ニ(2)ノ左辺ノ(　)ヲ解キ y ノ降冪ノ順ニ排列スレバ、次ノ形トナル

$$A_0y^n + A_1y^{n-1} \cdots A_{n-1}y + A_n = 0 \qquad (4)$$

(4)ニ於テ $x-h$ トオケバ、

$$A_0(x-h)^n + A_1(x-h)^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x-h) + A_n = 0 \qquad (5)$$

(5)ハ(1)ト全ク同一ノ方程式デアル。
(∵ (1.) $x=y+h$

コノ関係ハ Transformed equation (4) ノ係数ヲ決定スル簡単ナル方法ヲ與ヘル。
即チ(1)ノ左辺ヲ $x-h$ ニテ割リタル時ノ残リガ A_n デアル。
次ニ ~~其ヲ~~ $x-h$ ~~ニ~~テ割リタル残リガ A_{n-1} デアル。
順次カクノ如ク進メバ $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots A_2, A_1, A_0$ ヲ得。

Example. $x^4+3x^3-5x^2+7x+3=0$ ノ根ヲ 2丈 diminish スル。

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 3 & -5 & 7 & 3 & 2 \\
 & 2 & 10 & 10 & 34 & \\
\hline
 & 5 & 5 & 17 & 37=A_4 & \\
 & 2 & 14 & 38 & & \\
\hline
 & 7 & 19 & 55=A_3 & & \\
 & 2 & 18 & & & \\
\hline
 & 9 & 37=A_2 & & & \\
 & 2 & & & & \\
\hline
 & 11=A_1 & & & &
\end{array}
$$

required eqn. ; $x^4+11x^3+37x^2+55x+37=0$

○根ヲhヲ丈 diminish スルカハリニ h丈 increase スルニハ x ノカハリニ $y-h$ ヲオケバヨイ。

(20) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma,$

$\alpha + \beta + \gamma = +p$

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = q$

$\alpha\beta\gamma = r.$

$$\left(\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}\right) = q + \frac{q}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= q\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

$$\left(\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{\gamma(\alpha\beta\gamma+1)^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta(\alpha\beta\gamma+1)^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha(\alpha\beta\gamma+1)^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta\gamma+1)^2}{\alpha\beta\gamma} = \frac{p(r+1)^2}{r} = \frac{p(r+1)^2}{r}$$

$$\left(\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{(\alpha\beta\gamma+1)^3}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{(r+1)^3}{r}$$

$$x^3 - q\left(1 + \frac{1}{r}\right)x^2 + \frac{p(r+1)^2}{r}x - \frac{(r+1)^3}{r} = 0$$

$$rx^3 - q(r+1)x^2 + p(r+1)^2 x - (r+1)^3 = 0$$

(21) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}=$

$$=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)-2\alpha}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)-2\beta}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)-2\gamma}$$

$$=\frac{\alpha}{p-2\alpha}+\frac{\beta}{p-2\beta}+\frac{\gamma}{p-2\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)p^2-4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)p+12\alpha\beta\gamma}{(p-2\alpha)(p-2\beta)(p-2\gamma)}$$

$$=\frac{p^3-4qp+12r}{p^3+4qp-8r}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}\right)+$$

$$=\frac{\alpha\beta(p-2\gamma)}{p^3+4qp-8r}$$

20. $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}$

$\alpha\beta\gamma+1 = \gamma+1$ ニテ割ル.

$$x^3 - \frac{p}{r+1}x^2 + \frac{q}{(r+1)^2}x - \frac{r}{(r+1)^3} = 0$$

(コノ方程式ノ根ハ $\frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma+1}, \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma+1}, \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma+1}$ ナリ)

$$-\frac{r}{(r+1)^3}x^3 + \frac{q}{(r+1)^2}x^2 - \frac{p}{r+1}x + 1 = 0$$

$$rx^3 + q(r+1)x^2 - p(r+1)^2x + (r+1)^3 = 0$$

$x = \frac{r+1}{y}$ ヲ原式ニ代入

21. $y = \frac{x}{p-2x}$ $\quad (2y+1)x = py \quad x = \frac{py}{2y+1}$

$$\left(\frac{py}{2y+1}\right)^3 - p\left(\frac{py}{2y+1}\right)^2 + q\left(\frac{py}{2y+1}\right) - r = 0$$

$$p^3y^3 - p^3y^2(2y+1) + qpy(2y+1)^2 - r(2y+1)^3 = 0$$

$$(p^3 - 2p^2 + 2pq - 8r)y^3 - (p^2 + 4pq - 4r)y^2 + (pq - 2r)y - r = 0$$

23,

§13. 三次方程式ノ第二項ヲ remove スルコト.

三次方程式ノ一般ノ形ハ次ノ如クアラハス.

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0 \qquad (1)$$

$$\left(x^3-x^2+2x+5=0 \;\dots\; x^3+3\left(-\tfrac{1}{3}\right)x^2+3\left(\tfrac{2}{3}\right)x+5=0\right)$$

コノ方程式ノ三根ノ和ハ $-\frac{3b_1}{b_0}$, ∴ each root ヲ $\frac{b_1}{b_0}$ 丈 大ニセバ, 第二項 即チ x^2 ノ項ハ ナクナル。

即チ $x=y-\frac{b_1}{b_0}$ $\quad b_0\left(y-\frac{b_1}{b_0}\right)^3+3b_1\left(y-\frac{b_1}{b_0}\right)^2+3b_2\left(y-\frac{b_1}{b_0}\right)+b_3=0$

コヲ y ノ descending power ニ従ッテ排列スレバ

$$b_0y^3+\left(\frac{3b_1^2}{b_0}-\frac{6b_1^2}{b_0}+3b_2\right)y+\left(-\frac{b_1^3}{b_0^2}+\frac{3b_1^3}{b_0^2}-\frac{3b_1b_2}{b_0}+b_3\right)$$

or $b_0y^3+\frac{3}{b_0}(b_0b_2-b_1^2)y+\frac{1}{b_0^2}(b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3)=0$

今 $b_0b_2-b_1^2\equiv H \qquad b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3\equiv G$

$$b_0y^3+\frac{3H}{b_0}y+\frac{1}{b_0^2}G=0$$

or

$$y^3+\frac{3H}{b_0^2}y+\frac{1}{b_0^3}G=0$$

コノ方程式ノ根ヲ b_0 倍スレバ 即チ, $y=\frac{z}{b_0}$

$$z^3+3Hz+G=0 \qquad (2)$$

($z=b_0y \quad y=x+\frac{b_1}{b_0} \quad z=b_0x+b_1$
即チ (2) ニ於ケル z ト (1) ノ x トハ コノ関係ガアル)

而シテコノ方程式ヲ解キテ z ノ値ヲ得タリトセバ,

$(x+a)(x-b)(x-c)$

$-(a+b+c)x^2$

$x+\frac{b_1}{b_0}$

$b_1 \quad b_1 \quad b_1$

$-3b_1$

$x+\frac{b_1}{b_0}$

$\frac{b_1}{b_0}$

$Z = a_0x + a_1$ ニヨツテ x 値ヲ求メ得 即チ(1)ナル方程式ヲ解キ得ルコトトナル。故ニ後ニ示ス三次方程式ノ解ハ(2)ナル方程式ヲ解クコトトスル。

§14. 四次方程式ノ第二項ヲremoveスルコト。

四次方程式ノ一般ノ形ハ $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$ (1)

トシテアラハス、

コノ方程式ノ四ツノ根ノ和ハ $\frac{-4a_1}{a_0}$ ナリ。∴ each root ヲ $\frac{x_1}{x_0}$ 丈増セバ第二項ハナクナル筈デアル。

$x = y - \frac{a_1}{a_0}$

$$a_0\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right)^4 + 4a_1\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right)^3 + 6a_2\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + 4a_3\left(y - \frac{a_1}{a_0}\right) + a_4 = 0$$

y ノ降冪ノ順ニ並ベレバ、

$$a_0y^4 + \frac{6}{a_0}Hy^2 + \frac{4}{a_0^2}Gy + \frac{1}{a_0^3}(a_0^3a_4 + 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4) = 0$$

$$H \equiv a_0a_2 - a_1^2 \quad G \equiv a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3,$$

次ニ $I \equiv a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$ トスレバ、

$$a_0^3a_4 + 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4$$
$$= a_0^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2) - 3(a_0^2a_2^2 - 2a_0a_1^3a_2 + a_1^4)$$
$$= a_0^2I - 3H^2$$

ニノ値ヲ代入スレバ、

$$\cancel{b_0}\, y^4 + \frac{6}{b_0^2} H y^2 + \frac{4}{b_0^3} G y + \frac{1}{b_0^4}(b_0^2 I - 3H^2) = 0$$

之ニ 根ヲ b_0 倍スレバ、

$$\cancel{y^4}\; Z^4 + 6H y^2 + 4GZ + (b_0^2 I - 3H^2) = 0 \quad \cdots (2)$$

$$Z = b_0 y \qquad y = x + \frac{b_1}{b_0}$$

$$\therefore Z = b_0 x + b_1,$$

即チ(1)ナル四次方程式ハ 常ニ(2)ナル方程式ニ導クコトヲ得、而シテ x ト Z トハ $Z = b_0 x + b_1$ ナル関係ニヨッテ結ビツケラレルガ故ニ(1)ナル四次方程式ヲ解クコトハ結局(2)ヲ解ケバヨイコトトナル 故ニ後ニ四次方程式ノ solutionヲ取扱フ場合ニハ (2)ヲ以ッテスル。

Example. (1) $x^3 + 3x^2 + 4x - 10 = 0$ ニ於テ H ト G ヲ計算スル、

$b_0 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{4}{3} \quad b_3 = -10,$

$$H = b_0 b_2 - b_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$G = b_0^2 b_3 - 3 b_0 b_1 b_2 + 2 b_1^3 = -12,$$

(2) $2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0$ 　 $G\ H\ I$ ヲ計算

$b_0 = 2 \quad b_1 = -4 \quad b_2 = -\frac{1}{3} \quad b_3 = \frac{1}{4} \quad b_4 = -12,$

24. (a) $3x^3+4x^2-5x+16=0$

$\cancel{x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}=0}$

$x=\frac{y}{3}$ トオケバ、

$y^3+4x^2-15x+144=0$

(b) $10x^4-6x^2+7x-\frac{1}{10}=0$

$x=\frac{y}{10}$ トオケバ、

$\frac{y^4}{1000}-\frac{6}{100}y^2+\frac{7}{10}y-\frac{1}{10}=0$

$y^4-60y^2+700y-100=0$

25. (a) $x=\frac{1}{y}$ トオケバ、

$2y^4+5y^3-20y^2-13=0$

(b)

26. (a) $x^6+a_1x^5+a_2x^4-a_2x^2-a_1x-1=0$

$(x+1)(x-1)$ ヲ除リ去レバ (即チ $x=\pm1$ ナル根ヲ除ケバ)

ナレバ、$\{x^4+a_1x^3+(a_2+1)x^2+a_1x+1\}=0$

(b)

27. (a) $(1+x)^4=a(1+x^4)$

$1+4x+6x^2+4x^3+x^4-ax^4-a=0$

98. $ax^5+(b-ac)x^4-bc\,x^3-bx^2-(a-bc)x+ac=0$

$x-c$ デワル

$$\begin{array}{cccccc|c}
a & b-ac & -bc & -b & -(a-bc) & +ac & c \\
 & ac & bc & 0 & -bc & -ac & \\
\hline
a & b & 0 & -b & -a & 0 &
\end{array}$$

原式 $=(x-c)(ax^4+bx^3-bx-a)=0$

第二項 1, $(x+1)(x-1)$デワル,

$$\begin{array}{ccccc|c}
a & b & 0 & -b & -a & -1 \\
 & -a & +a-b & -a+b & +a & \\
\hline
a & -a+b & +a-b & -a & 0 & \\
 & a & b & a & & 1 \\
\hline
a & b & a & 0 & &
\end{array}$$

29.(a) $x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$

$x=y+4$ とおけば

1	-5	$+7$	-17	$+11$		4
	4	-4	12	-20		
1	-1	3	-5	-9		
	4	12	60			4
1	3	15	-55			
	4	28		4		
1	7	43				
	4		4			
1	11					

$y^4+11y^3+43y^2-55y-9=0$

(b) $x^5-3x^4-x^2+4=0$

$x=y-1$

30. (a) $x^3-3x^2+4x-4=0$

$b_0=1 \quad b_1=-1 \quad b_2=\frac{4}{3} \quad b_3=-4$

$G \equiv b_0^2 b_3 - 3b_0 b_1 b_2 + 2b_1^3 = -4+4-1=-1$

$H \equiv b_0 b_2$

§15 三次方程式ノ根ノ差ノ平方ヲ根トスル方程式

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0 \cdots\cdots (1)$$

(1)ノ第二項ヲ remove スレバ

$$y^3+\frac{3H}{b_0^2}y+\frac{G}{b_0^3}=0 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$y=x+\frac{b_1}{b_0}$$

(2)ノ roots ヲ α, β, γ トス.

$$z=(\alpha-\beta)^2,\ (\alpha-\gamma)^2,\ (\beta-\gamma)^2 \qquad (3)$$

ヲ作ル. 然ルトキハ(3)ハ (2)ナル方程式ノ根ノ差ノ平方ナルト同時ニ, (1)ナル方程式ノ根ノ差ノ平方デアル. ∴(2)ナル方程式ノ根ノ差ノ平方ヲ根トスル方程式ト (1)ナル方程式ノ根ノ差ノ平方ヲ根トスル方程式ハ同一ノモノデアル. 即チ其ノ方程式ハ

$$\{z-(\alpha-\beta)^2\}\{z-(\alpha-\gamma)^2\}\{z-(\beta-\gamma)^2\}=0 \cdots (4)$$

此ノ方程式ノ z ノ係数ヲ計算スル. 次ノ如クス.

$$z=(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\gamma^2-\frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma}$$

然ルニ

$$\left.\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma=0\\&\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{3H}{b_0^2}\\&\alpha\beta\gamma=-\frac{G}{b_0^3}\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore z=-\frac{6H}{b_0^2}-\gamma^2+\frac{2G}{b_0^3\gamma}=-\frac{6H}{b_0^2}-y^2+\frac{2G}{b_0^3y}$$

$$zy=-\frac{6H}{b_0^2}y-y^3+\frac{2G}{b_0^3}$$

$$y^3+\left(z+\frac{6H}{b_0^2}\right)y-\frac{2G}{b_0^3}=0$$

$$y^3+\frac{3H}{b_0^2}y+\frac{G}{b_0^3}=0 \qquad (2)$$

引算スル

$$\left(Z+\frac{3H}{b_0^2}\right)y-\frac{3G}{b_0^3}=0$$

$$y=\frac{3G}{b_0^3\left(Z+\frac{3H}{b_0^2}\right)}=\frac{3G}{b_0(b_0^2Z+3H)}$$

即チ y ト Z トノ簡単ナル関係ヲ得タ。
コノ y ノ値ヲ(2)ニ代入スレバ Z ニ関スル方程式(4)ヲ得。

$$\frac{27G^{2}}{\cancel{b_0^3}(b_0^2Z+3H)^3}+\frac{9H\cancel{G}}{\cancel{b_0^3}(b_0^2Z+3H)}+\frac{\cancel{G}}{\cancel{b_0^3}}=0$$

$$27G^2+9H(b_0^2Z+3H)^2+\cancel{G}(b_0^2Z+3H)^3=0$$

ヨッテ Z ノ降冪ニ整頓

$$b_0^6Z^3+9b_0^4HZ^2+27b_0^2H^2Z+27H^3$$
$$+9b_0^4HZ^2+54b_0^2H^2Z+81H^3$$
$$+27G^2=0$$

$$b_0^6Z^3+18b_0^4HZ^2+81b_0^2H^2Z+27(G^2+4H^3)=0$$

or $$Z^3+18\frac{H}{b_0^2}Z^2+81\frac{H^2}{b_0^4}Z+27\frac{G^2+4H^3}{b_0^6}=0 \quad (5)$$

コノ方程式ノ根ハ $(\alpha-\beta)^2, (\alpha-\gamma)^2, (\beta-\gamma)^2$ ナリ

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2=-\frac{27}{b_0^6}(G^2+4H^3)\equiv D$$

D ハ (1) ナル三次方程式ノ discriminant 判別式ト ナヅケ其ノ根ノ性質ヲ論ズルニ必要ナル function デアル。

(1) 又ハ (2) ノ根ノ差ノ平方ヲ根トスル方程式ヲ作レバ其レニ就テ原式ノ判別式ヲ作リ、根ノ性質ヲ考フ。

§16. 三次方程式ノ根ノ吟味

三次方程式ヲ(1)、

$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$ (1) トハ

ソノ方程式ノ eqn. of squared differences ハ

$$z^3+\frac{18H}{b_0^2}z^2+\frac{81H^2}{b_0^4}z+\frac{27}{b_0^6}(G^2+4H^3)=0 \quad (5)$$

(5)ノタスケヲカリテ(1)ナル方程式ノ根ヲ吟味スル。(5)ノ絶対項(常数項)ハ其ノ三ツノ根ノ積ノ符号ヲカヘタモノデアル。ヨッテ(1)ノ根ガ悉ク実数ナル時ハ(5)ノ根ハ悉ク plus デアル。(5)ノ根ニ minus ノモノガアリトスレバ(1)ニ二ツノ complex root ガ存スルヲ示ス。又(5)ノ根ガ悉ク plus ノ時ハ(1)ニハ complex roots ナシ、何トナレバ(1)ニ二ツノ conjugate complex root $a+bi$ $a-bi$ アリトスレバ(5)ノ絶対項ハ plus トナリ従ッテ其ノ一根ハ minus トナル。

I. Real roots $G^2+4H^3<0$ ノ時

ソノ時ニハ(1)ノ根ハ悉ク実根トナル。コレガ minus ニナル為ニハ H ガ minus デナケレバナラヌ。

且 $|G^2|<|4H^3|$ デナケレバナラヌ。

ソノ時(5)ナル方程式ノ符号ハ

$+ \quad - \quad + \quad -$ トナル。

デカルトノ法則ニヨリ (5) ハ minus ノ根ナシ、
而シテ其等ノ根ガ悉ク実数ナルヲ以テ三根共ニ plus デ
アル。ヨツテ (1) ノ方程式ノ根ハ実数デアル。

(II) Complex roots　$G^2+4H^3>0$ ノ時
コノ時ニハ絶対項 ((5) ノ) ノ plus ナルヲ以テ (5) ノ一根ハ minus
デアル、故ニ (1) ニハ (2) ツノ complex roots アリ。

(III) Two equal roots　$G^2+4H^3=0$ ノ時
コノ時ニハ絶対項ハ 0 トナリ、
$z=0$ ナル根~~ナル~~ヲ有ス、
即チ二ツノ等根ヲ有ス。

(IV) Three equal roots　$G=0,\ H=0$.
$z^3=0$ トナル
$\alpha=\beta=\gamma$ トナリ、
(1) ニハ 3ツノ等根アリ、

Example. $x^3+3x^2-3x-1=0$ ノ equ. of squared differences ヲ作ル。

$b_0=1$　　$H=b_0b_2-b_1^2=-1-1=-2$
$b_1=1$　　$G=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3$
$b_2=-1$　　$=-1+3+2=4.$
$b_3=-1$

∴ required equ.; $z^3-36z^2+324z-432=0$
$G^2+4H^3<0$　∴ 与ヘラレタ方程式ノ根ハ実数、

Example 2. $x^3+x^2-x-1=0$

$$b_0 = 1 \quad b_1 = \frac{1}{3} \quad b_2 = -\frac{1}{3} \quad b_3 = -1$$

$$H = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{9}$$

$$G = -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = -\frac{16}{27}$$

$$\therefore Z^3 - 8Z^2 + 16Z = 0$$

$Z = 0$ ヲ除イテモトノ方程式ハ二ツノ等根ヲ有ス.

{ ~~[illegible]~~

{Location of the roots of an equation.}

§17. Definition of Limits 限界. 範囲.

方程式ノplusノ根ノ upper limit (上限) (or superior limit) トハ plusノ根ノ中ノ greatest ナルモノヨリ大ナル正数ヲ云ヒ, plusノ根ノ lower limit (下限) (or inferior limit) トハ plusノ根ノ中最小ノモノヨリ小ナル正数ヲイフ。

負ニツイテモ同様.

方程式ノ根ノ limit ニ関シテ次ノ定理アリ.

Theorem. If the numerical value of each negative coefficient is divided by the sum of all the positive coefficient which precede it, the greatest of the fractions thus formed increased by one, is an upper limit of the positive roots of $f(x) = 0$.

(証) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}-a_4x^{n-4}+\cdots$

$\cdots\cdots+a_n=0$

此ヘ与ヘラレタル方程式トシ、x ノ $n-2$ 乗, x ノ $n-4$ 乗ノ係数ヲ negative トス。

$$x^m=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)+1$$

トカキ得。今 $f(x)$ ノ plus ノ項ヲコノ公式ニヨッテカキカヘレバ次ノ如シ

$$\begin{aligned}
f(x)=\ & a_0(x-1)x^{n-1}+a_0(x-1)x^{n-2}+a_0(x-1)x^{n-3}+\cdots\cdots+a_0\\
& +a_1(x-1)x^{n-2}+a_1(x-1)x^{n-3}+\cdots\cdots a_1\\
& -a_2\,x^{n-2}\\
& +a_3(x-1)x^{n-3}+\cdots\cdots a_3\\
& -a_4x^{n-4}\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

カクノ如クカキ直シタ式ニ於テ plus ノ項ノミノ column (縦ノ列) ニ於テハ $x-1>0$ or $x>1$ ノ時ハ其ノ和ハ plus トナル。

例ヘバ first column 及ビ第三ノ column ノ如シ、次ニ second column ニ於ル係数ニハ $-a_2$ ナル negative ノ係数ヲ含ムガ故ニ $a_0(x-1)+a_1(x-1)-a_2>0$ ナル時ハ plus ニナル。即チ $x>\frac{a_2}{a_0+a_1}+1$ ナル時ハ second column ハ plus ニナル。

同様ニ第四 column ニ於テハ $a_0(x-1)+a_1(x-1)+a_3(x-1)-a_4>0$

x	正根ノ最大ナルモノ	アル正ノ値
$f(x)$	0	plus

即チ x ガ $> \dfrac{a_4}{a_0+a_1+a_3}+1$ ナル時ハ plus ニナル。

之ト同様ノ事ハ negative 係数ヲ有スル外ノ column ニ関シテモ成立ス。従ッテカクノ如クシテ得ラルル値ノ中ノ最大ナルモノ、或ハ其レヨリ大ナル値ヲ x ニ與フル時ハ、polynomial $f(x)$ ハ plus トナル。故ニ上ニ得タル式ノ中ニテ最大ナルモノガ positive root ノ upper limit トナル。例ヘバ $x^5+8x^4-14x^3-53x^2+56x-18=0$

$$\frac{14}{1+8}+1=\frac{23}{9}$$

$$\frac{53}{1+8}+1=\frac{62}{9}$$

$$\frac{18}{1+8+56}+1=\frac{83}{65}$$

コノ中 greatest ハ $\frac{62}{9}$ デアル。ハ方程式ノ positive root ノ upper limit デアル。

○正ノ根ノ lower limit ヲ求ムルニハ、與ヘラレタル方程式ニ於テ $x=\frac{1}{y}$ トオキ、カクノ如クシテ得タル方程式ノ upper limit ヲ上ノ定理ニヨッテ求メ、次ニ其ノ逆数ヲトレバ、其ノ逆数ガ plus ノ根ノ下限トナル。

○負ノ根ノ limit.

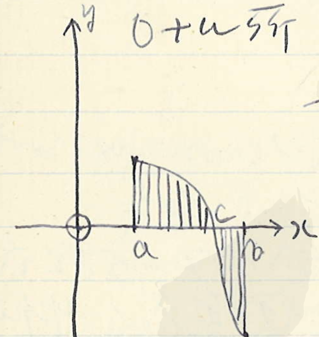
x ノ代リニ $-y$ ($x=-y$) トオケバ與ヘラレタ方程式ノ negative root ハ positive トナルコトヲ以テ上ト同様

plus ノ根ノ upper 及ビ lower limit ヲ求ムレバ可、シカシテ符号ヲカヘテオケバヨイ。

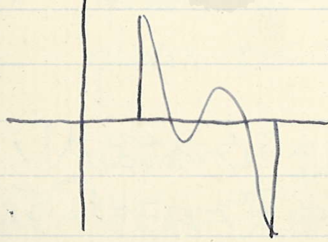
§18. $f(x)$ ノ符号ノ変化.

定理 二ツノ実数 a, b $(a<b)$ ヲ $f(x)$ ノ x ノ代リニオキカヘル時 $f(x)$ ガ反対ノ符号ヲ取ルル時ハ $f(x)=0$ ノ奇数個ノ根ガ a ト b トノ間ニ存在シ、又 $f(x)$ ガ同符号ナル時ハ $f(x)=0$ ノ根ハ a, b 間ニ一ツモナイカ、偶数個存在スルカデアル。

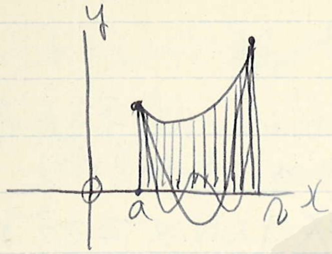
※ $f(x)$ ハ x ト共ニ continuously ニ変化ス.
（x ヲ僅カ丈カヘレバ $f(x)$ モ僅カ丈カハルト云フ意味）
シカシテ $f(x)$ ガ $f(a)$ ヨリ $f(b)$ ニ至ル間ニ其ノ符号ヲ変化スル故ニ（$f(a)$ ヲ正, $f(b)$ ヲ負トス）$f(x)$ ハ一度以上 0 ナル所即チ x 軸ヲ横ラザルベカラズ。



其ノ横ギル点ハ、$f(x)$ ヲ 0 ナラシムル点デアル。之ヲ c トスレバ c ハ $f(x)=0$ ノ一根デアル。又 x 軸ヲ横ギルニ一度トハ限ラズ三度デモ五度デモ、、、、
コレ等ノ x 軸ヲ横ギル所ニ於テハ $f(x)$ ノ値ヲ 0 ナラシム。即チ $f(x)=0$ ニハ a ト b トノ間ニ奇数個丈ノ根アリ。



次ニ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ同符号ノ時ハ $f(a)$ ヨリ $f(b)$ ニ至ル間ニ一度モ x 軸ト交ハラザルコトアリ.



コノ場合 a ト b トノ間ニ $f(x)=0$ ノ根ナシ。次ニ $f(a)$ ヨリ $f(b)$ ニ至ル間ニ x 軸ヲ横ギルナラバ偶数度通過セザルベカラズ。即チ a ト b トノ間ニ $f(x)=0$ ノ根ハ偶数個丈存在ス。

例ヘバ $x^4+4x^3-x^2-16x-11=0$

コノ方程式ハ Decartes ノ方法ニヨリ one positive root ヨリ多クノ positive root ヲ有セズ。negative ハ三ツヨリ多カラズ。

$f(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-11$ トオク。

$f(0)=-11$
$f(1)=-23$ } +ニ
$f(2)=+1$ } コノ間ニ一ツ根アリ。

即チ 1 ト 2 ノ間ニ方程式ノ根ガ一ツアル。

$f(-1)=1$ } 0 ト -1 ノ間ニ 1 又ハ 3 ツアル。
$f(-2)=1$ } ~~偶数個又ハ0。~~ 0 又ハ 2 アル。
$f(-2.7)=-0.6$
$f(-3)=1$ } 0 又ハ 2 アル。
$f(-4)$

カクノ如クシテアタヘラレタル方程式ノ根ハ (1 ト 2)(0 ト -1)(-2, -2.7)(-2.7, -3) ノ間ニ存在スル。根ヲ二ツノ数ノ間ニサシハサム事ヲ称シテ方程式ノ根ヲ separate スルト称ス。根ヲ separate スルコトハ後ニノブル Horner ノ method ニヨリテ根ノ近似値

ヲ求ムル時ニ要用デアル。

Approximation to the roots of numerical equation.

例ヘバ方程式ノ根ガ integer カ或ハ fraction ナル時ハ之ヲ commensurable root 尽数 ト云フ。之ニ対シテ無限小数(循環小数ヲ除ク)ナル時ハ之ヲ incommensurable root トナヅク。

定理，x^n ノ係数ガ ~~1~~ 1 ニシテ、其ノ他ノ係数ガ悉ク integer ナル時ハ fractional root ヲ有セズ。

(証) $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n$: integer$)$

コノ方程式ハ fractional root $\frac{p}{q}$ ヲ有スルトセバ

$$\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0$$

q^{n-1} ヲカケル。

$$\frac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0$$

他ノ項ハ皆整数デアルガ $\frac{p^n}{q}$ ノ項ハ分数デアル。分数ト整数ノ和ハ決シテ 0 ニナラヌ。之ニ依リ方程式ニハ fractional root ハナイ。

○ $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

(a_1 等ハ integer)

コノ方程式ハ上ノ定理ニヨリ fractional root ヲ有セザルコトヲ知ル。故ニ commensurable root アリ

トスレバ ~~整~~ integral root デアラネバナラヌ。必モ a_n ノ約数デナケレバナラヌ。従ッテ a_n ノ因数(約数)ヲ test スレバ与ヘラレタル方程式ノ integral root ヲ求メルコトガ出来ル。次ニ x^n ノ係数ガ unity デナイ時ニハ方程式ヲ x^n ノ係数 a_0 ニテ割リ次ニ根ヲ a_0 倍スレバ x^n ノ係数ガ unity ニシテ其ノ他ノ係数ガ integer ナル方程式ニ reduce スルコトガ出来ル、従ッテ前ノ如ク test 出来ル。

例ヘバ　$x^3-7x-6=0$　ノ common root ヲ求メルコト。

6ノ約数ハ　±1, ±2, ±3, ±6.

之等ノ約数ヲシラベテ −1ガ根ナルコトヲ知ル。

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ & -1 & 1 & +6 & \\ \hline & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$x^2-x-6=0$$

$\therefore x=3$ or -2.

$$2x^3-x^2-x-3=0$$

$$x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0$$

~~xヲ~~ xノ二倍ノ値ヲ根トス、

$$x^3-x^2-2x-12=0$$

∴ 12ノ約数ヲシラベ $x=3$ ガ根

従ッテ所要ノ方程式ノ根ハ $\frac{3}{2}$, 他ノ二ツハ common デナイ。

§20. Horner's method

此ノ方法ハ方程式ノ根ノ中 incommensurable ノモノヲ求ムル一ツノ方法デアルガ commensurable ノモノヲモ求メルコトガ出来ル。Horner ノ method ニ於テ根ノ 1st significant figure (有効数字) ハ第十八節ノ方法ニ由リテ知ルコトヲ要ス。次ニハ根ヲアル amount (額) 丈 diminish スル transformation ヲ順ニ行フノデアル。
例ヘバ 2.24004 …… ナル根ヲ求ムルニハ初メノ 2 ハ §18 ノ方法デ求メル。~~次~~ 次=2 0.2 0.04 0.00004 丈 diminish スル transformation ヲスル。

Example 1.

$$f(x)=x^3-x-9=0$$

$$f(2)=8-2-9<0 \qquad f(3)=27-3-9>0 \quad \ldots\ldots$$ 2ト3ノ間根ガ一ツ.

$\underline{|2.2400}$

```
1      0       -1        -9
       2        4         6
       2        3    |   -3
       2        8    |
       4       11    |
       2
       6
       0.2      1.24      2.448
       6.2     12.24  |  -0.552
       0.2      1.28  |
       6.4     13.52
       0.2
       6.6
       0.04     0.2656    0.551424
       6.64    13.7856 |  -0.000576
        .04      .2672 |
       6.68    14.0528
        .04
       6.72
```

(説明)十八節ノ定理ニ因リ方程式ノ根ノ first significant figure ガ2ナルコトヲ知リ得タル時ハ根ヲ2丈 diminish スル時ハ

$$x^3+6x^2+11x-3=0 \qquad (1)$$

トナル。コノ方程式ノ根ハ 0.…… デアル。故ニ x^2 及ビ x^3 ハ其ノ他ノ項ニ比較シテ小イ。故ニ x^2 及ビ x^3 ノ項ヲ切リ捨テ、

$$11x-3=0 \qquad x=\frac{3}{11}=0.2\ldots\ldots$$

i.e. (1)ナル方程式ハ 0.2… ヲ根トス。從ッテ(1)ノ根ヲ 0.2丈 diminish スル其ノ結果

$$x^3+6.6x^2+13.52x-0.552=0 \qquad (2)$$

トナル。(2)ハ 0.0…… ヲ根トス。前ト同様 x^2, x^3 ノ項ヲ切リ捨テ $13.52x-0.552=0$

$$x=\frac{0.552}{13.52}=0.04\ldots$$

即チ(2)ハ 0.04… ヲ根トス。

4 次ニ(2)ノ根ヲ 0.04丈 diminish スル時ハ transform ノ結果ハ $x^3+6.72x^2+14.0528x-0.000576=0$ (3)

トナル。コノ方程式ハ 0.00… ヲ根トス、前ト同様 x^2, x^3 ノ項ヲ切リ捨テルト $14.0528x-0.000576=0$

$$x=\frac{0.000576}{14.0528}=0.00004\ldots$$

即チ(3)ハ 0.00004… ヲ根トス。更ニ(3)ノ根ヲ 0.00004丈 diminish スルトイフ風ニ進ンデ行ク。從ッテ given equation ノ根ハ approximately $=2.24004$

トナル。

(注意) I. 方程式 (1) (2) (3) ニ於テ x^2 及ビ x^3 ノ項ハ其ノ他ノ項ニ比較シテ小ナリトシ、之ヲ切捨タリ。其結果 x ニ関スル一次方程式ヲ得ルガ其ニツノ項ハ反対ノ符号ヲ有ス、若シニツノ項ガ同符号ヲ有スル時ハ方程式ヲ (1'), (2'), (3') ニ transform シタ根ハ一トナル。即チ元ノ方程式ノ最後ノ数字ガ大ニ失シタルコトヲ示ス。例ヘバ上ノ例ニ於テ根ノ少数第一位ノ2ヲ diminish スルカハリニ 3 ヲ diminish シタリトセバ

1	6	11	−3	0.3
	0.3	1.89	3.867	
	6.3	12.89	.867	
	0.3	1.98		
	6.6	14.87		
	0.3			
	6.9			

$$x^3+6.9x^2+14.87x+0.867=0 \qquad (2)'$$

(2) ノ代リニ (2)' ヲ得、従ッテ

$14.87x+0.867=0$ 　故ニ $x = -\frac{.867}{14.87} = -0.056$

トナル、即チ 0.3 diminish シタコトノ大ニ失シタ。
又反対ニ 0.2 ノ代リニ 0.1 ヲトリタル場合ニモ其ノ Mistake ハ next step ニアラハレテ来ル。

1	6	11	−3	0.1
	0.1	0.61	1.161	
	6.1	11.61	−1.839	
	0.1	0.62		
	6.2	12.23		
	0.1			
	6.3			

$$x^3+6.13x^2+12.23x-1.839=0 \qquad (2)''$$

$$12.23x-1.839=0 \qquad x=\frac{1.839}{12.23}=0.15\ldots$$

即チ 小数第一位ノ誤ジガ少ニ大ナル。

II. 上ノ example ハ equation ノ positive root ヲ求メタノデアル, negative root ヲ求メル場合ハ E.T.ノ方程式ノ根ノ符合ヲ変ジテ然ル後上ノ方法ヲ適用スレバヨイ。

○次ニハ Horner ノ方法ニ依ッテ commensurable root ヲ求メル例ヲ示ス。

$$f(x)=x^3-\cancel{\ } 46.6x^2-44.6x-142.8=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(40)<0 \\ f(50)>0 \end{array}\right\} \quad 40 — 50$$

1	−46.6	−44.6	−142.8	147.6
	40	−264	−12344	
	−6.6	−308.6	−12486.8	
	40	1336		
	33.4	1027.4		
	40			
	73.4			

~~$f_1(x)=x^3+73.4x^2$~~ $+1$

7	562.8	11131.4
80.4	1590.2	−1355.4
7	611.8	
87.4	2202.0	
7		
94.4		
0.6	57	1355.4
95	2259	0

given equation ノ根ヲ 40 diminish シタル方程式ハ

$f_1(x) = x^3 + 73.4x^2 + 1027.4x - 12486.6 = 0$

ナリ。此ノ方程式ハ第一位ノ数字ヲ求メントスル者デアル。

∴ x^3 及ビ x^2 ハ切捨テ来ス。再ビ十八節ノ方法ニテ根ヲハサム二ツノ整数ヲ求ムルヲ要ス。

$f_1(7) < 0$
$f_1(8) > 0$

故ニ根ヲ 7 丈 diminish スル。

結果ノ方程式ヲ

$f_2(x) = x^3 + 94.4x^2 + 2202x - 13.554 = 0$

此ノ方程式ハ少数点以下ノ数ヲ根トス。

∴ x^3, x^2 ヲ neglect シ略近数 0.6 ヲ得。

次ニ $f_2(x)$ ガ $x - 0.6$ デワリキレル。

∴ $f_2(x)$ ハ 0.6 ナル positive root ヲ有ス。故ニ

$f(x) = 0$ ノ commensurable root ガ 47.6 ナルコトヲ知ル。

(33) (a) $x^3-3x-4=0$

positive root ハ一ケ以上ナシ。

$x=1 \quad f(x)=-6$
$x=2 \quad f(x)=-2$
$x=3 \quad f(x)=14$ } コノ間ニアリ。

$\boxed{2.195}$

1	0	−3	−4
	2	4	2
	2	1	−2
	2	8	
	4	9	
	2		
	6		
	0.1	0.61	0.961
	6.1	9.61	−1.039
	0.1	0.62	
	6.2	10.23	
	0.1		
	6.3		
	0.09	.5751	0.972459
	6.39	10.8051	−0.066541
	0.09	0.5832	
	6.48	11.3883	
	0.09		
	6.57		
	0.005	0.032875	0.057105875
	6.575	11.421175	−0.009435125
	0.005	0.0329	
	6.580	11.388275	
	0.005		

x^3+6x^2+9x-2
$x=0.1 \quad x<0$
$x=0.2 \quad x>0$

0.0008 . . . .

(b) $x^4-2x^3+21x-23=0$

$x=1 \quad f(x)=-3,$
$x=2 \quad f(x)=19,$) $1, 3,$

(d) $x^3-6x^2+9x-3=0$

$x=0 \quad f(x)=-3$

$x=1 \quad f(x)=+1$

$x=2 \quad f(x)=-1$

$x=3 \quad f(x)=-3$

$x=4 \quad f(x)=+1$

$f(x)=x^3-3x^2+1=0$

$f(0)= \quad +$

$f(0.1)=$

$f(0.2)=$

$f(0.6)=\frac{216}{1000}-\frac{108}{100}+1>0$

$f(0.7)=\frac{343}{1000}-\frac{147}{100}+1<0$

$f(1)=$

1.652

1	−6	+9	−3
	1	−5	4
	−5	4	1
	1	−4	
	−4	0	
	1		
	−3		
	0.6	−1.44	−0.864
	−2.4	−1.44	0.136
	0.6	−1.08	
	−1.8	−2.52	
	0.6		
	−1.2		
	0.05	−0.0575	−0.128875
	−1.15	−2.5775	0.007125
	0.05	−0.0555	
	−1.1	−2.6325	
	0.05		
	−1.05		
	0.002	0.002096	−0.005260808
	−1.048	−2.630404	0.001864192

§21、三次方程式及ビ四次方程式ノ解法、

三次方程式ノ一般ノ形ハ

$$\cancel{b_0x^3}\quad b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0 \quad (1)$$

コノ方程式ノ second term ヲ remove スレバ

$$z^3+3Hz+G=0 \quad (2)$$

$$H=b_0b_2-b_1^2$$

$$G=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3$$

$$x=\frac{z-b_1}{b_0}$$

(∵ $\frac{b_1}{b_0}$ increase $b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$

$y^3+\frac{3H}{b_0^2}y+\frac{G}{b_0^3}=0$

b_0^3 multiply $z^3+3Hz+G=0$.)

今(2)ヲ解ク為ニ $z=u+v$ トオク、

之ヲ(2)ニ substitute スレバ、

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+3H(u+v)+G=0.$$

$$u^3+v^3+3(uv+H)(u+v)+G=0.$$

之ニ $z=u+v$ ノ第二ノ條件トシテ、$uv+H=0$ ヲ與ヘル、

(コレハ許サレル。$z=u+v$ デ z ヲ与ヘテモ u ガ定レバ v ガ定ル。u, v ヲ定メル為ニモ一ツ條件ヲ與ヘル)

$u^3+v^3+G=0$ トナル、

從ッテ $u^3-\frac{H^3}{u^3}+G=0$ (∵ $v=-\frac{H}{u}$)

$$u^6+Gu^3-H^3=0$$

之ハ u^3 ニ関スル二次方程式.

$\therefore u^3 = -\frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}$　　($u^3 = -\frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}$ ヲトレバ,

従ッテ,

$$v^3 = -G - u^3 = -G + \frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3} = -\frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}.$$

$v^3 = -\frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}$ トナル丈ノ同ジコト)

$$\begin{cases} u^3 = -\frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3} \\ v^3 = -\frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3} \end{cases}$$

従ッテ $z = u+v = \sqrt[3]{-\frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}} + \sqrt[3]{-\frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}$, (3)

之ニヨッテ z ノ値ヲ計算スルコトヲ得, 従ッテ x ノ値ヲ得.

此ノ公式ヲ Cardan's formula トイフ。

而シテ一ツノ数ノ立方根ハ三ツノ値ヲ持ツ. 従ッテ z ヲ計算スル時, u 及ビ v ノ値トシテ各三ヅツ出テクル. コレヲ combine スレバ 9ツノ値ガ出テクル. 而ルニ Cubic ニハ 3 roots ヨリ存在セザルカラ其ノ中ノ 6ツハイラヌモノデアル。

$\therefore$ $uv+H=0$ ヨリ $v = -\frac{H}{u}$

従ッテ $z = u - \frac{H}{u}$　(vヲトッテモ同ジ)

Zノ式ニ代入スレバ vヲ消去スルコトニ Zノ値
トシテハ三ツ丈デテ来ル.

例.1. $x^3+6x-20=0$

$$H=2 \quad G=-20.$$

$$Z=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

$$=2.732\ldots+(-0.732\ldots)$$

$$=2. = x \quad (\because x=\frac{2-b_1}{b_0}=\frac{2-0}{1}.)$$

$$\begin{cases} 2.732\ldots\ldots \\ 2.732\ldots\ldots\omega \\ 2.732\ldots\ldots\omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.732\ldots\ldots \\ -0.732\ldots\ldots\omega \\ -0.732\ldots\ldots\omega^2 \end{cases}$$

($\because uv=-H$ (real)
$\therefore$ ωノ入リ方ヲ斯様ニトレバ左ノ三ツ)

$$\therefore Z=(2.732\ldots)\omega+(-0.732\ldots)\omega^2,$$
$$\text{or } (2.732\ldots)\omega^2+(-0.732\ldots)\omega,$$

シカシ実際ハ一ツワカレバ原式ガ二次ニ出来ルカラ、アトノ二ツガワカル。

例2. $x^3-15x-4=0$

$$H=-5 \quad G=-4.$$

$$Z=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$$

コゝニ於テcomplex numberノ立方根ヲ算スルコトゝナル。所デcomplex numberノ立方根ノ求メ方ガナイ。普通ノ開立デ出来ナイ。三角ノ公式カラ出ス方法、De Moivre's theoremヲ用ヒネバナラヌ。

コノ方程式ノ判別式ハ、

$$\frac{G^2}{4}+H^3=121<0$$

デアルカラ、根ハ実数デアラネバナラヌ。
立方ニ開ク方法ガナイカラ、色々試ミテアテハマル様ニトラネバナラヌ。

$$x=2+i+2-i=4$$

(Complex number) 複素数

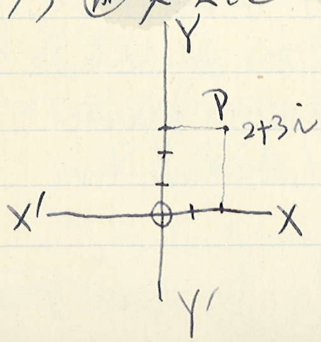
我々ノ考ヘルNumber Systemノ最初ノモノハ0及ビ正ノ整数デアル。然ルニコノsystemノ範囲ニ於テ$3x-2=0$ナル方程式ヲトクコトハ不能デアル。ココニ於テsystemヲ拡張スルノ必要アリ。即チ分数ヲsystemノ中ヘ入レテシマフ。然ラバ上ノ方程式ハ其ノsystemノ中ニ於テ解クコトガ出来ル。然レドモ$x+\frac{2}{3}=0$ナル方程式ハコノsystemデハsolutionハ不能デアル。其處デnegative numberヲ導キ入レル必要アリ。コノsystemニ於テハ$ax+b=0$（aトbトハ整数、分数、トスル）ナル方程式ノsolution

ヲ有ス。次ニ $x^2=5$ ナル方程式ヲ以テ solution ヲ有セシムル為メニハ、更ニ数ノ範囲ヲ拡張スルコトヲ要ス。
(∵ $x=\frac{\alpha}{\beta}$ トスレバ、(α, βハ整数) ∴ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=5$ ∴ $\alpha^2=5\beta^2$,
$\alpha=5\alpha'$、$25\alpha'^2=\beta^2$,)

即チ irrational number ヲ導イテ来ル。カクノ如ク system ヲ拡張スル時ハ、上ノ方程式ハ solution ヲ有スルコトヽナル。
更ニ $x^2+3=0$　$x^2-5x+10=0$ ナル方程式ハカクノ如キ数ノ範囲ニテハ solution ヲ有セズ、コレニ於テ数ノ範囲ヲ更ニ拡張シ $a+bi$ ナル所謂 complex number ヲ導イテ来ル。aトbトハ実数デアッテ $i=\sqrt{-1}$、シカシテ $a=0$ ナル場合 imaginary (虚数) トイフ。

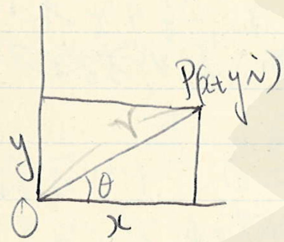
Complex number ヲ図デ現ハスコト

実数ヲ直線上ノ点ニテアラハスコトハスデニ前ニ述ベタ。complex number ヲ $x+yi$ ニテ現スト コノモノハ二ツノ実数、xトyニ depend スルシカシテ之ヲ平面上ノ一点トシテアラハスコトガ出来ル。
今直交スル二直線 XOX', YOY' ヲ取リ $2+3i$ ナル



Complex number ヲ現ハスニハ X軸ニOヨリ右ニ2丈トリ、ソコヨリ上ニY軸ニ3丈トル。Pナル点ヲ以テ其ノ数ヲアラハス。
一般ニ $x+yi$ ナル数ハ其ノ co-ordinates

ガ x, y ナル点ニテ現ハサル。而シテ XOX' ナル直線ヲ real axis, YOY' ヲ imaginary axis ト名ヅク。
次ニ complex number ヲ他ノ方法ニテアラハス方ガ便ナル事アリ。



$x+yi$ ヲアラハス点 P ト Origine トヲ結ブ線分 OP ヲ r デアラハシ コノ線分ト real axis トナス角ヲ θ デアラハス時ハ $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$
$r^2 = x^2+y^2$ シタガッテ $x+yi$ ナル complex number ハ

$$x+yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

トシテ表ハシ得。コノ形ヲ complex number ノ polar form ト名ヅク。θ ヲ argument or amplitude
r ヲ modulus or absolute value ト名ヅク。

○二ツノ complex number ガ equal デアルコトハ次ノ如ク約束スル。real part 同志並ニ imaginary part ノ係数同志共ニ等シトヲ意味ス。

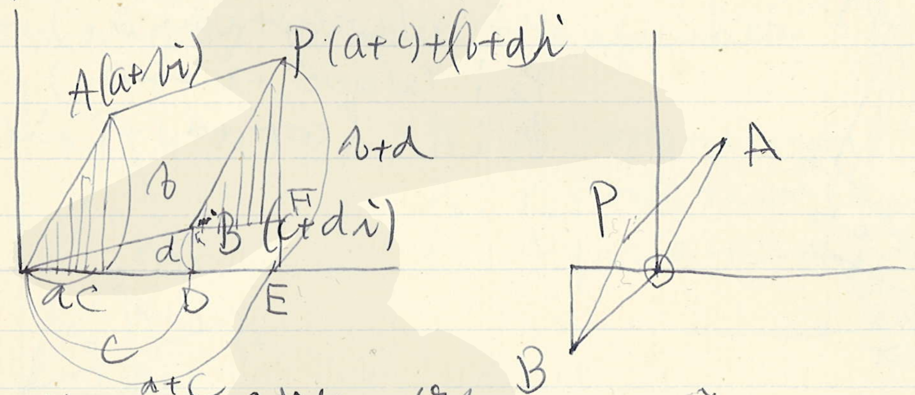
○complex number ノ加法、減法、
之ハ数ハ全テ従来取扱ヒ来ル数ト同ジク代数ノ三ツノ方則ニ従フモノトス。即チ交換、組合、配分ノ三方則。Law of commutation (commutative law)
Law of association (associative 〃)
Law of distribution (distributive 〃)
ニ従フモノトス。

1. $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\times b = b\times a \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a+b+c = a+(b+c) \\ a\times b\times c = a\times(b\times c) \end{cases}$ 3. $a(b+c) = ab+ac$

二ツノcomplex number $a+bi$, $c+di$ ノ和及ビ差ハ次ノ如ク書キ得。

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

∴ complex numberヲ加ヘル時ニハ real partト imaginary partトヲ別々ニ加ヘレバ良イ。引算ノ時モ同ジ。コレヲ図ニアラハス時ハ次ノ如クナル。



差ヲ作ル時ニハ減数ノ符号ヲ変ヘテ加ヘレバヨイ。コレヲ次図スルト上ノ如シ。

○complex numberノカケ算

$a+bi$ ト $c+di$ トヲカケ合ハスニハ i ハ代数ノ三ツノ法則ニ従フガ故ニ次ノ如ク計算スル。

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

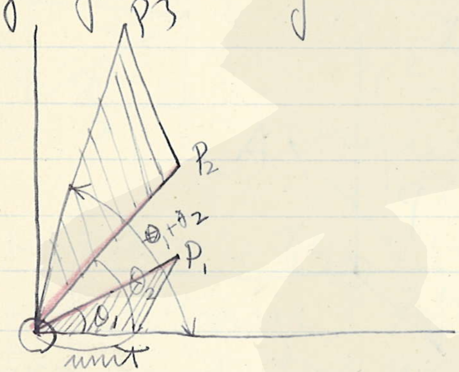
勿論其ノ積ハcomplexデアル。polar formニテ掛合ス場合ニハ次ノ如クナル。

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)i\}$$

$= r_1 r_1 \{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

即チニツノcomplex numberノ積ハ其ノmodulusノ積ヲmodulusトシ其ノargumentノ和ヲargumentトスルcomplex numberデアル。
之ニ從ッテニツノcomplex numberノ乘法ヲgraphicallyニ示スコトガ出来ル。



P_1 ; $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$
P_2 ; $r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
P_3 ; $r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

○conjugate complex number
$a+bi$, $a-bi$ ノ如ク imaginary partノ符号ノミ異ナルニツノcomplex numberヲ互ニconjugateナリト稱ス。而シテ其ノsum及ビproductハreal numberデアル。

○complex numberノ除法
ニツノcomplex numberノ商ハ次ノ如クシテ得。

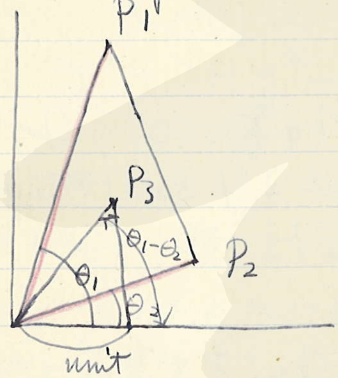
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{(ad-bc)}{c^2+d^2}i$$

即チ一ツノcomplex numberデアル。之ヲpolar form

デカイハ次ノ如シ、

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

即チ商ノmodulasハ被除数ノmodulasヲ除数ノmodulasデワッタモノデ、argumentハ被除数ノargumentヨリ除数ノargumentヲ減ジタモノナリ。コノ事ヨリ商ナルcomplex numberヲgraphicallyニP3ハ、記号。



P_1 : $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

P_2 : $r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

P_3 : $\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

○三次方程式ヲ均用ニ其ノ判別式 $\frac{G^2}{4}+H^3$ ガ minusノ場合ニハ complex numberノ立方根ヲ求ムルコトヲ要ス。其ハ三角法ノ手段ヲ借リテ求メラルルコトヲ要ス。

$$-\frac{G}{2}=r\cos\theta,\quad \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}=ir\sin\theta$$

然ルトキハ

$$u^3=r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad (r=\sqrt{-H^3})\qquad \cos\theta=\frac{G}{2\sqrt{-H^3}}$$

$$v^3=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

従ッテ $u=\sqrt{-H}\left(\cos\frac{2n\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{2n\pi+\theta}{3}\right)$

$$v = \sqrt{-H}\left(\cos\frac{2n\pi+\theta}{3} - i\sin\frac{2n\pi+\theta}{3}\right)$$

(n ハ 0, 1, 2, 等ノ三ツノ値ヲトルコトトス)

(u 共軛ノ場合ハ省略)

依テ $z = u+v = 2\sqrt{-H}\cos\frac{2n\pi+\theta}{3}$

$n = 0, 1, 2,$

カクノ如ク判別式ガ負ノ場合ヲ三次方程式ノ irreducible case ト名ヅケル。

(D) 四次方程式ノ解法

四次方程式ノ一般ノ形ハ

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \quad (1)$$

(1)ノ第二項ヲ Transformation ニヨリ取リ去ル。

$$z^4+6Hz^2+4Gz+a_0^2I-3H^2=0 \quad (2)$$

$$H = a_0a_2-a_1^2,$$
$$G = a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$$
$$I = a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$$
$$x = \frac{z-a_1}{a_0}, \quad z = a_0x+a_1,$$

(2)ヲトクタメニ $z = \sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}$ トオク。

u, v, w ヲ求ムレバ z ヲ得、従ッテ x ヲ得。之ノ両辺ヲ自乗シ、$z^2-(u+v+w) = 2\sqrt{uv}+2\sqrt{uw}+2\sqrt{vw}$,

再ビ両辺ヲ平方シテ其ヲ簡単ニスル。

$$z^4-2z^2(u+v+w)+(u+v+w)^2$$
$$= 4(uv+uw+vw)+8\sqrt{uvw}\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\right)$$

即. $z^4 - 2z^2(u+v+w) - 8z\sqrt{uvw} + (u+v+w)^2 - 4(uv+uw+vw) = 0$

此ノ方程式ノ係数ト(2)ノ係数トヲ比較シテ

$$-(u+v+w) = 3H$$

$$uv+uv+vw = 3H^2 - \frac{a_0^2 I}{4},$$

$$-uvw = -\frac{G^2}{4}, \quad -\frac{G}{2}$$

而シテ $-(u+v+w)$, $uv+uw+vw$, $-uvw$

ハ u, v, w ヲ三根トセル三次方程式ノ係数ナリ,

故ニ $y^3 + 3Hy^2 + \left(3H^2 - \frac{a_0^2 I}{4}\right)y - \frac{G^2}{4} = 0$

ナル三次方程式ヲトケバ其ノ三根ハ u ト v ト w ヲ与ヘル

ヨッテ z ノ値, 従ッテ x ノ値ヲ得. 而シテ u, v, w, ノ値

ヲ得タル後 z ノ値ヲ求ムル中其ノ平方根ヲ要ス, 之カラハ z ノ

値ハ見掛上八ツ出テクル 其ノ内四ツハ適合セナイモノデ

アル筈デアル

(∵ $z = \sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w} = \sqrt{u}+\sqrt{v} - \frac{G}{2\sqrt{u}\sqrt{v}}$,

u, v ノ組合セハ四ツデアル)

以上ノ外、四次方程式ヲ解ク方法ハ色々アルガ、イヅレモ

結局ハ三次方程式ヲ解クコトニ帰着スル

34, (a) $3x^3-6x^2-2=0$

$b_0=3 \quad b_1=-2 \quad b_2=0 \quad b_3=-2$

$H=b_0b_2-b_1^2=-4$

$G=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3=-18-16=-34$

$z=u+v=\sqrt[3]{-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}+\sqrt[3]{-\frac{G}{2}-\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}$ $\quad (uv=-H=4$

$=\sqrt[3]{17+\sqrt{225}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{225}}$

$=\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{2}$ $\quad z=\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{2}$

or $\sqrt[3]{32}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2$

$\sqrt[3]{32}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ -64 \\ \hline 225 \end{array}$$

$x=\dfrac{z-b_1}{b_0}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{2}+2}{3} \\[2ex] \dfrac{\sqrt[3]{32}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2+2}{3} \\[2ex] \dfrac{\sqrt[3]{32}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega+2}{3} \end{array}\right\}$$

(b) $x^3-3\sqrt[3]{2}\,x-2=0$

$H=\sqrt[3]{2}\,x \quad G=-2$

$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}+\sqrt[3]{-\frac{G}{2}-\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}$ $\quad uv=\sqrt[3]{2}$

$=\sqrt[3]{1+\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-1}}$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{1+i}+\sqrt[3]{1-i} \\ \sqrt[3]{1+i}\,\omega+\sqrt[3]{1-i}\,\omega^2 \\ \sqrt[3]{1+i}\,\omega^2+\sqrt[3]{1-i}\,\omega \end{array}\right.$$

(35)(a) $x^4 - 12x - 5 = 0$ $\quad b_0 = 1\ b_1 = 0\ b_2 = 0\ b_3 = 3\ b_4 = -5$

$$y^3 + 3Hy^2 + \left(3H^2 - \frac{b_0^2 I}{4}\right)y - \frac{G^2}{4} = 0$$

$$H = b_0 b_2 - b_1^2 = 0$$

$$G = b_0^2 b_3 - 3b_0 b_1 b_2 + 2b_1^3 = -3$$

$$I = b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2 = -5$$

$$y^3 + \frac{5}{4}y - \frac{9}{4} = 0$$

$$H = \frac{5}{12} \qquad G = -\frac{9}{4}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4} + H^3}} + \sqrt[3]{-\frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4} + H^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{8} + \sqrt{\frac{81}{64} + \frac{125}{12^3}}} + \sqrt{\frac{9}{8} - \sqrt{\frac{81}{64} + \frac{125}{12^3}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{8} + \sqrt{\frac{289}{218}}} +$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{8} + \frac{17}{6\sqrt{6}}} +$$

$$= \sqrt[3]{\frac{81 + 34\sqrt{6}}{72}} + \sqrt[3]{\frac{81 - 34\sqrt{6}}{72}}$$

$$81 \times 27 = 567,\ 162,\ 2187$$
$$125$$
$$4 \mid 2312$$
$$2 \mid 578$$
$$289$$

$$81 \times 27 = 567,\ 162,\ 2187$$
$$125$$
$$4 \mid 2312$$
$$2 \mid 578$$
$$289$$

$3 =$

$u=1 \quad v=\frac{-1+2\sqrt{-2}}{2} \quad w=\frac{-1-2\sqrt{-2}}{2}$

$\sqrt{u}=\pm 1$

$\sqrt{v}=\pm\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{w}=\pm\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\left(\sqrt{uvw}=-\frac{G}{2}=\frac{3}{2}\right.$

$\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}=\frac{3}{2}$.

$z_1=1+\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

$z_2=1-\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$

$z_3=-1-\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1-2i$

$z_4=-1+\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1+2i$

(3) $x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0$

$b_0=1 \quad b_1=-3 \quad b_2=\frac{49}{6} \quad b_3=\frac{39}{2} \quad b_4=40$

$y^3+3Hy^2+\left(3H^2-\frac{b_0^2 I}{4}\right)y-\frac{G^2}{4}=0$

$H=-\frac{5}{6} \quad G=0 \quad I=\frac{73}{12}$.

$y^3-\frac{5}{2}y^2+\frac{27}{48}y=0$

$y=0$ or $y^2-\frac{5}{2}y+\frac{9}{16}y=0$

$y=\frac{20\pm\sqrt{400-144}}{16}=\frac{36}{16}$ or $\frac{4}{16}$

$z=\pm\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$

$z=2$ or -2 or 1 or -1

$x = \frac{2-n_1}{20}$

$x = 5$ or 4 or 2 or 1.

Chapter 6. Permutation and Combination

§1. Def. (permutation) 相異ナレル n個ノモノヨリ r個ヅツノ組ヲトリテ、其組ノ順序ニナラベタル配置ヲ n個ノモノヨリr個ヅツトリタル permutation トナヅク.

例ヘバ 四ツノ異ナレルモノヲ代表スルニ a, b, c, d ナル文字ヲ以テシ、コノ中ヨリ二ツヅツトリタル permutations ハ

ab, ac, ad, bc, bd, cd,
ba, ca, da, cb, db, dc.

デアル. 其ノ数ハ12デアル.

又 四ツノ異ナレルモノヨリ三ツヅツトリタル permutations ハ,

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

其ノ数ハ24ナリ. 一般ニ n個ノ異ナルモノヨリ r ヅツトリタル permutation ノ数ヲアラハスニ ${}_nP_r$ ヲ以テス. 此ノ例ニテハ ${}_4P_2=12$ ${}_4P_3=24$.

§2. n個ノ異ナリタルモノヲ r ヅツトリタル permutation ノ number ${}_nP_r$ ハ勿論 n ト r ノ function デアル。 n ト r ガキマレバ ${}_nP_r$ ハ定マル。 n個ノ異ナルモノヨリ一ツヅツトリタル permutation ノ数ハ ${}_nP_1=n$ デアル. 次ニ n個ノ異ナルモノヲアラハスニ $\underbrace{a, b, c, d \ldots l}_{n}$ トシ、コノ中ヨリ r ヅツトリタル permu-

tation ノ中ニテ a ガハイッテヰルモノハ a ヲ除キタル b, c, d
・・・ l ナル n−1 個ノモノヨリ r−1 ヅツトツタ permuta-
tion ニハイッタ a ヲツケタラ得ラレル。而シテ其ノ数ハ
$_{n-1}P_{r-1}$ デアル同様 b, c, d, ・・・ l ガハイッテヰル permut-
ations ノ数ハイヅレモ $_{n-1}P_{r-1}$ 丈アル。従ッテ全体ニテハ
$n \times {}_{n-1}P_{r-1}$。 ∴ $_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$.
此ノ公式ハ n 及ビ r ノ全テノ値ニ対シテ成立スル。(勿論 $n \geq r$)
(但 n, r ハ正ノ整数) ∴ 次ノ一ツヅキノ等式ガ得ラレル,

$$_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$$
$$_{n-1}P_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}P_{r-2}$$
$$_{n-2}P_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}P_{r-3},$$
$$_{n-r+2}P_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}P_1$$
$$_{n-r+1}P_1 = (n-r+1).$$

之ヲ皆カケルト,

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+2)(n-r+1)$$

之ニ依テ n ト r ガ与ヘラレバ $_nP_r$ ヲ計算シ得,

Ex. 1. $_6P_3 = \cancel{6\times}\,6\cdot5\cdot4 = 120.$

Ex. 2. $_5P_4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2. = 120.$

Ex. 3. $_nP_3 = 10 \times {}_nP_2.$

$$n(n-1)(n-2) = 10\,n(n-1)$$
$$n = 12.$$

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

此ノ公式ニ於テ $r = n$ ノ場合

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

トナル。即チ一カラ儘n迄連続セル整数ノ連乗積トナル
コレヲ簡便ノタメ $n!$ or $\underline{|n}$ デアラハス。
"factorial n"
コノ記号ヲ用フレバ $_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r+1)(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

§3. n個ノモノガ悉クハ異ナリ居ラザル場合ニ於テ n個ノモノヲ悉クトリタル permutation.

n個ノ内ニテ a ガ n_1個丈、b ガ n_2個丈アリトシ、nノ内ヨリn丈トリタル permutations ノ数ヲ P ニテアラハス。Pノ内ノ一ツヲトリ其ノ内ニアル n_1個ノ同一ノモノニカヘルニ異ナルモノヲ以テセバ、其ノ一ツヨリ $n_1!$ 個ノ permutations ヲ得。

(例 a a a, b b, c, d, ヲ $a_1a_2a_3$ b b c d トナセバ
$a_1a_3a_2$ ノ , ,
$a_2a_1a_3$, ,
. . . .
等、3! ヲ得。)

ノ全体ニテハ $P\times n_1!$ ヲ得。次ニ $P\times n_1!$ ノ一ツヲトリ n_2個ノ同一ノモノニカヘルニ異ナルモノヲ以テセバ、其ノ一ツヨリ $n_2!$ ノ permutation ヲ得。全体ニテハ $P\times n_1!\times n_2!$ ノ permutation ヲ得。コノ方法ヲ続行スレバ n個ノモノ

悉ク異リタルモノトナリ結局n個ノ異ナリタルモノノn個ヅヽトリタル permutation ヲ得.

$$P \times n_1! \times n_2! \times \cdots = n!$$

$$\therefore P = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \cdots} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots}$$

combination $= \frac{11!}{2!2!2!}$

然レバ algebra ナル七ツノ文字ヲ七ツトモトリタル permutations ノ数ハ $P = \frac{7!}{2!}$

Ex. 12345 ナル数字ヲアラユル順序ニナラベテ出来ル数ハ何通アル、又其ノ内デ 23000 ヨリ大ナル数ハ幾通出来ルカ、

$${}_5P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

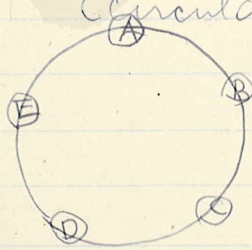
$${}_4P_4 = 24 \quad {}_3P_3 = 6. \quad {}_4P_4 + {}_3P_3 = 30.$$

1|2345　21|345

$$120 - 30 = 90$$

$$4 \times {}_4P_4 - {}_3P_3 = 90.$$

Ex 2. 5人ガ Table ノマハリニ~~構~~並ブ仕方幾通アルカ。
(Circular Permutation).



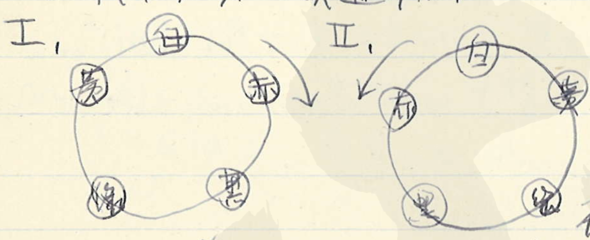
此ノ図ニ於テAトBノ間ヲ切断シテ一直線ニナラベタリト考ヘレバ
AEDCB ナル permutation ヲ得.
次ニBトCノ間ヲ切離シテ一直線ニナラベタリ

ト言フナラバ　BAEDC　ナルperm ヲ得.
次ニCトDノ間, DトEノ間, EトAノ間ヲ切断セバ, 夫々,
次ノperm ヲ得.

CBAED
DCBAE
EDCBA

即チtableノマハリニ並ビタル一ツノ並ビ方ヨリ互ヒノ直線上ニオケル並方ガ得ラレル. 而シテA,B,C,D,E,ヲ直線上ニナラベル仕方ハfactorial 5. 即チ5!. 其ヲ5デワレバ, circular permutationヲ得. 一般ニn人ノ時ハ $n!/n$.

Ex 3. 5ツノ異ナル色ノ玉ヲ糸ニテツナギ珠数様ノモノヲ作ルトキノ仕方ハ幾通リカ.



此ノ場合ハ問題2ト同ジク circular permutationナレドモ, 其並ビ方ハ $\frac{5!}{5}$ ナリ. 而シテ第一図ヲNoteニ向ヒテ眺ムルトキト第二図ヲNoteノ裏ヨリ見ル時トハ同一ノナラビ方デアル故ニ 更ニ2デワル　即. $\frac{5!}{2\times5}$.

§4. Combinations n個ノ互ニ異ナルモノヲr個ヅヽ順序ニ拘ラズ、(順序ヲ考ヘズニ)取リ出ス群ノ数ヲn個ノモノヲrヅヽトリ出スcombinationsト名ヅケル。

例ヘバ a b c ナル三ツノ文字ヲ2ツヅヽ取リ出ス組合ハ ab ac bc ノ三ツデアル。(ab ト ba トハ異ナル順序ニアルヲ以テ異ナル順列デアルガ、組合ノ方カラ云ヘバ同一ノモノデアル)

而シテ n個ノモノヲrヅヽトリ出ス組合ノ数ヲ表ハスニ ${}_nC_r$ ナル記号ヲ用フ。例 combination ${}_3C_2 = 3$.

§5. ${}_nC_r$ ノ計算. n個ノモノヲrヅヽトリ出スcombinationノ数ヲ ${}_nC_r$ ニテ現ハス時 其ノ中ノ一ツヲトリ出ス時ハ其ノ中ニハr個ノ文字ヲ含ム. 此等ノr個ノ文字ヲ更ニ順序ニナラベル時ハ factorial r! permutationsヲ得, 其ノ他ノcombinationsヨリモ亦 factorial r丈ノpermutationヲ生ズル故ニ全体デハ, $r! \times {}_nC_r$ ~~丈~~丈ノpermutationsガ出来ル. 之ハ n個ノモノヲrヅヽトリ出スpermutationsノ数ニ等シカラザルベカラズ.

$$\therefore \quad r! \times {}_nC_r = {}_nP_r$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=$$

Ex 1. $$_{20}C_{17} = \frac{20.19.18.\cdots 6.5.4.}{17!}$$

$$= \frac{20.19.18}{3!} = 20.19.3.$$

$$_{15}C_6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6!} = \frac{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot\cancel{12}\cdot 11\cdot\cancel{10}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}$$

$$= 5\cdot 7\cdot 13\cdot 11.$$

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1)$$

コノ式ニ於テ $n = r$ ナルトキハ
左辺 $= {}_nC_n = 1$
右辺 $= \dfrac{n!}{n!\,0!} = \dfrac{1}{0!}$

此ノ場合ニ於テモ(1)ガ成立スル様ニ $0! = 1$ ト約束スル。
Ex 1. $_nC_4 = 210$ ヨリ n ヲ求メヨ。
Ex 2. $_nP_r = 272$　$_nC_r = 136$ ヨリ n ト r トヲ求メヨ。
Ex 1. $$_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 210$$

$(n^2-3n)(n^2-3n+2) - 5040 = 0$　14

$n^2-3n+1 = N$

$N^2 = 5041$

$N = \pm 71$

210
24
840
420
5040

$\boxed{5041}$

7 1
50|41
49
141
141

Ex2. ${}_nP_r = 272$

${}_nC_r = 136$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = 272 \qquad n(n-1) = 272$$

$$n^2 - n + 272 = 0$$

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = 136$$

$r = 2.$

系 ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{n!}{n!(n-r)!}$

Cor! ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

n個ノ異リタルモノヨリr個トル中ハ、n−r個丈ノコル、即チ r個ヅヽトレバ之ニ対応シテ n−r個ノ組ガ出来ル。ハ n個ノ異ナルモノヨリ rヅヽトリタル combinations ハ n個ノ異ナルモノヨリ (n−r)ヅヽトリタル combinations ニ等シ。

a b c d e

abc ……… de

abd ……… ce

此ノ公式ハ ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ヲ用ヒテ直チニ証明出来ル。即チ左辺ハ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 右辺ハ $\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 故ニ相等シ

Cor 2. ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$

$$左辺 = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

$$= {}_{n+1}C_r$$

§6. ${}_{m+n}C_r = {}_mC_r + {}_mC_{r-1}\cdot{}_nC_1 + {}_mC_{r-2}\cdot{}_nC_2 + \cdots\cdots$
$+ {}_mC_{r-k}\cdot{}_nC_k + \cdots\cdots {}_nC_r$

(証) m+n個ノモノヨリ r ヅヽトル combination ノ数ヲ考フルニ三ツノ如ク分類ス。

第一、m+n個ノモノヲ二ツノ群 m個ト n個トニ ワケル。r ヅヽトルノニ第一群バカリカラ取ラレル combination ノ数ハ

${}_mC_r$ (即チ左辺ノ第一項ニ相当ス)

第二、r ヅヽトルニ第一群ヨリ r−1 ホトリ第二群ヨリ 1 ホトレバ、總計 r ヅヽトリタルモノヲ得。其ノ combination ノ数ハ

${}_mC_{r-1}\cdot{}_nC_1$ (即チ第二項ニ相当ス)

第三、. . . . .

. . . .

カクノ如ク進ミテ第二群ヨリ r ヅヽトリタル combination ノ数ハ ${}_nC_r$ トナリ (即チ等式ノ左辺ノ末項ニ相当ス)

次ノ等式ハ成立スル、

§7. $${}_{m+n}C_r = {}_mC_r + {}_mC_{r-1}\cdot{}_nC_1 + {}_mC_{r-2}\cdot{}_nC_2 + \cdots + {}_mC_{r-k}\,{}_nC_k + \cdots + {}_nC_r.$$

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \equiv n_r$$ (nハ

(nガ正ノ整数ノ時ハ、

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$ ダガ

nガ分数ナラ、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_r$$

コノ記号ヲ用フレバ上ノ等式ハ次ノ如ク表ハサレル、

$$(m+n)_r = m_r + {}_rC_1\, m_{r-1}\, n_1 + {}_rC_2\, m_{r-2}\, n_2 + \cdots + n_r,$$

$$(\because \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-r+1)}{r!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!}$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-r+2)}{(r-1)!}\cdot\frac{n}{1} + \frac{m(m-1)\cdots(m-r+3)}{(r-2)!}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

コノ等式ハmトnトガ正ノ整数デm+nガrヨリ大カ等シイトイフ仮定ノ下ニ成立ス、次ニコヲ拡張シテmトnトガ如何ナル数値ナルモコノ等式ガ成立スルコトヲ証明スベシ。コノ定理(Vandermonde's theorem)トナヅク、

$$(m+n)_r = m_r + {}_rC_1 m_{r-1} n_1 + {}_rC_2 m_{r-2} n_2 + \cdots\cdots + n_r. \quad \begin{pmatrix} m, n \text{ pos integer} \\ \text{and } m+n \geq r \end{pmatrix}$$

コノ等式ハ m n ニ関シテ r次デアル，
(∵ ax^2+bx+c , px^2+qx+r ニ於テ $x=\alpha, x=\beta, x=\gamma$ナル
中ニノ
∵ m及n＝r+1ノ異ナル値ヲ与ヘテ両辺ノ等シイコトヲ知レバ
明イ，
nヲrヨリ大ナル一ツノ正整数値 r+1ノ如キモノヲ指定シテ於ク，
次ニ m ＝ 1, 2, 3, 4, ……, r, r+1, ナルr+1通リノ値ヲ与ヘル時ハ初メノ條件 (m, n pos integer m+n≥r) ニ適スルガ故ニ，且此ハスベキ式ガr次デアルガ故ニmノ如何ナル値ニ対シテモ成立ツ，∵ mハ如何ナル数デモヨイ，
次ニ m ニ任意ノ値ヲ指定シテ於ク，n ＝ r+1 以上ノ正ノ整数値ヲ r+1通リ与ヘル時ハ上ノ等式ハ成立スル，∵ nノ如何ナル値ニ対シテモ成リ立ツ筈デアル，結局 m ト n トノ値ノ如何ニ関セズコノ等式ノ成立スルヲ知ル，

§8. Homogeneous products 同次積，重複組
n個ノ相異ナルモノヲ幾度モ繰返シテトル場合ニrヅツトリタル combination ヲn個ノモノヨリrヅツトリタル Homogeneous products ト云ヒマス，例ヘバ a, b, c ナル三ツノ文字ヨリ二ツヅツトリタル同次積ハ ab, ac, bc, aa, bb, cc, ノ六ツデアル，而シテ之ヲ云ヒ表スニ $_nH_r$ ナル記号ヲ

困ッ、上ノ例デハ、$_3H_2 = 6$.
$_nH_r$ヲ計算スル公式ヲ求メテ見ル。
n個ノモノヨリrヅツトリタル同次積(H)ノ一ツニハr個ノ文字ヲ含ム、故ニ全体ノ文字ノ数ハ $_nH_r \times r$ ナリ而シテイヅレノ文字モ同数ヅツ存在スルガ故ニアル特別ナル文字例ヘバaハ $\frac{_nH_r \times r}{n}$ 丈存在スル。コノaノ数ヲ今一ツノ方法デ勘定シテ見ル。n個ノモノヨリrヅツトリタル同次積ノ内ニテ少クトモaヲ一ツ以上含ムモノヲ書キaニテ割レバ、n個ノモノヨリr-1ヅツトリタル同次積ヲ得、而シテ其ノ内ニアルaノ数ハ前ト同様ニ $\frac{_nH_{r-1} \times (r-1)}{n}$

故ニ全体ノaノ数ハ $\frac{_nH_{r-1} \times (r-1)}{n} + {}_nH_{r-1}$

$$\therefore \quad \frac{_nH_r \times r}{n} = \frac{n+r-1}{n}\,{}_nH_{r-1}$$

or $_nH_r = \frac{n+r-1}{r}\,{}_nH_{r-1}$.

コノ等式ハn及ビrノ凡テノ値ニ対シテ成立ス、従ッテ次ノ一ツヾキノ等式ヲ得

$$_nH_r = \frac{n+r-1}{r}\,{}_nH_{r-1},$$
$$_nH_{r-1} = \frac{n+r-2}{r-1}\,{}_nH_{r-2},$$
$$_nH_{r-2} = \frac{n+r-3}{r-2}\,{}_nH_{r-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$_nH_2 = \frac{n+1}{2}\,{}_nH_1$$
$$_nH_1 = \frac{n}{1}.$$

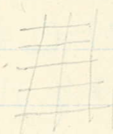
之等 組ニカケレバ,

$$_nH_r = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots\cdots(n+1)n}{r!}$$

$$= {}_{n+r-1}C_r,$$

$$\left(\because\ {}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\right)$$

1, 五本ノ平行線ト八本ノ平行線トガ交ハリテ生ズベキ平行四辺形ノ数ヲ求メヨ,



$_5C_2 \times {}_8C_2 =$

2, 拾冊ノ英書七冊ノ和書アリ. 英5冊 和3冊 取出シテ之ヲ本棚ニナラベル方法幾通アリヤ.

$_{10}C_5 \times {}_7C_3 \times {}_8P_8$

3, 京都,神戸,(両駅ヲ含ム)間ニハ幾通リノ切符ヲ必要トスルカ,(普通切符丈)

$_{14}P_2$

4, 教師3人ト生徒10人ト一列ニ並ベル方法幾通リアルカ, 但シ,教師三人ハ隣リ同志トス,

$_{11}P_{11} \times {}_3P_3$,

Examples.

(1) ${}_nC_5 = {}_nC_{10}$

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$$(r)+(n-r)=n$$

$$(5)+(10)=n$$

(2) ${}_{100}C_{98} = {}_{100}C_2$

(3) ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

$${}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1} = {}_{n+r-2}C_r + {}_{n+r-2}C_{r-1}$$

$$= \frac{(n+r-2)!}{r!(n-2)!} + \frac{(n+r-2)!}{(r-1)!(n-1)!}$$

$$= (n+r-2)!\,\frac{n-1+r}{r!(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

n^2-n-2

(4) $m = {}_nC_2 \quad {}_mC_2 = 3 \times {}_{n+1}C_4$

$${}_mC_2 = {}_{\frac{n(n-1)}{2}}C_2 = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)-2}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$$

$$= 3 \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}$$

(5) ${}_nC_r = {}_nC_{r+1}$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{(r+1)!}$$

${}_nC_r : {}_nC_{r-1} = 5 : 4$,

$r+1 = n-r$,

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}} = \frac{5}{4} \qquad r = \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{(r-1)!\, n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!\, n(n-1)\cdots(n-r+2)} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{5}{4}$$

$$= \frac{2n+2-n+1}{n-1} = \frac{5}{4}$$

$(r+2)^2 = \frac{5}{4}$

$r^2+4r+4-\frac{5}{4}=0$

$4n+12 = 5n-5$

$4r^2+16r+11=0$

$\boxed{n=17}$

$$\cancel{r^2 = \frac{-8\pm\sqrt{64-44}}{4}} = -2\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad r = 8.$$

11×4

(6) $\cancel{(2n)! = \{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}2^n n!}$

$\cancel{(n+1)(n+2)\cdots2n = \{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}2^n}$

$\cancel{(n+2)(n+4)\cdots2n = 1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)2^n}$

(6) $2n! = \{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}2^n n!$

$\{2\cdot4\cdot6\cdots2n\}2n! = 2n!\,2^n n!$

$\{2\cdot4\cdot6\cdots2n\} = 2^n n!$

$2^n n!$

$$= \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}$$

(7)

$$\frac{{}_{4n}C_{2n}}{{}_{2n}C_{n}} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(4n-1)}{\{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)\}^2}$$

$$\frac{{}_{4n}C_{2n}}{{}_{2n}C_{n}} = \frac{n!\,4n\cdot(4n-1)\cdots\cdots(2n+1)}{2n!\,2n\cdot(2n-1)\cdots\cdots(n+1)}$$

$$= \frac{2^n(4n-1)\cdots(2n+1)}{\{2n(2n-1)\cdots(n+1)\}}$$

$$= \frac{\quad}{(2n)\cdot(2n-1)\cdots(n+1)}$$

~~n ; 偶~~

$$= \frac{(4n-1)\cdots(2n+1)\,n!}{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)\,n!}$$

$$2^n$$

$$\frac{2n(2n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots}{\quad}$$

2^n

${}_8C_3 \times {}_7C_3 +$

(8) △○△○△○ ${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36$

b a c e d i

(9) ${}_3C_2$ 8, 7, 3, $({}_8C_3 \times {}_{10}C_3) + ({}_9C_3 \times {}_9C_3)$ ×3

$+ ({}_{10}C_3 \times {}_8C_3) + ({}_{11}C_3 \times {}_7C_3) + 7({}_8C_3 \times {}_7C_3)$

(10) a 2a ×3 na

${}_{2a}C_a \cdot {}_{3a}C_a \cdot {}_{4a}C_a$ ${}_{na}C_a$

$= \frac{a!}{a!} \times \frac{2a \cdots a+1}{a!} \times \frac{\quad}{a!} \cdots$

$\cdots \frac{na \cdots \{(n-1)a+1\}}{a!}$

$= \frac{(na)!}{(a!)^n}$

(11) ...... p

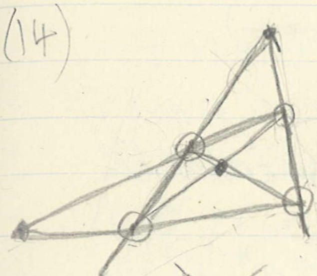
${}_nC_2 - {}_pC_2 + 1$

(n−p) $= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} + 1 = \frac{n^2-n-p^2+p+2}{2}$

(12) ${}_nC_3 - {}_pC_3$

(13) ${}_nC_3 - {}_pC_3 + 1$,

(14)



$$\boxed{\frac{{}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2}{2}}$$

$n=2,\ 1\times 0.$

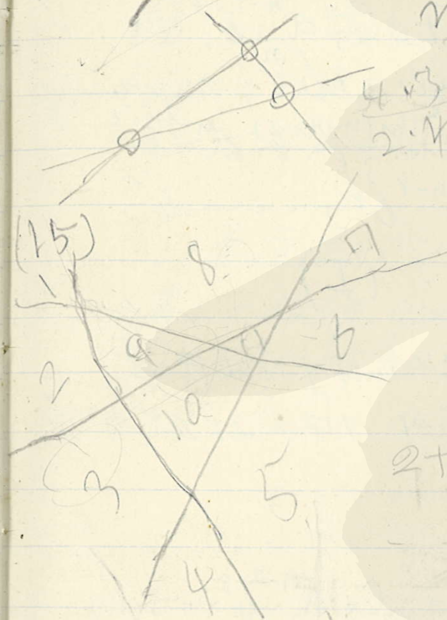
$n=3,\ \ 0$

$n=4\ \ \frac{6\times 1}{2}=3$

4×3

$2\cdot n=5$

(15)



$2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ $\quad 2+2+3\cdots$

$=\frac{n^2+n+2}{2},$ $\quad 1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$

$2+2+4+6\cdots = 2+2(1+2+3+\cdots(n-1)) = 2+(n-1)n$

$2+4+8\cdots = \frac{2(2^n-1)}{2-1}$

$2+2+4+8\cdots =$

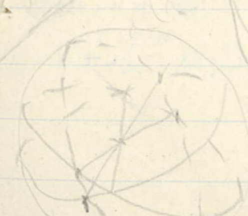
(16)

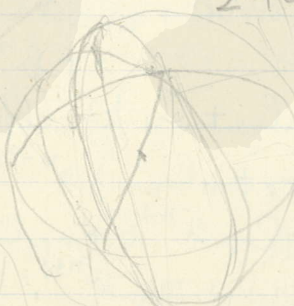
$2+2+4+8+\cdots$

$2+2^1+2^2+2^3+\cdots\ 2^{n-1}$

$= 2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$= 2^n$





1 ; 2

2 ; 4, $2+2\times1$

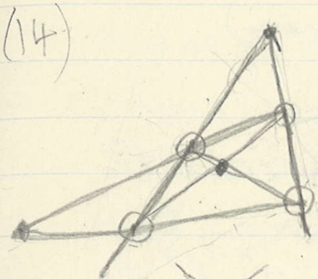
3 ; 8, $2+2\times1+2\times2$

4 ;

$2+2(1+2+\cdots+(n-1))$

$= 2+n(n-1)$

(14)



$$\boxed{\frac{{}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2}{2}}$$

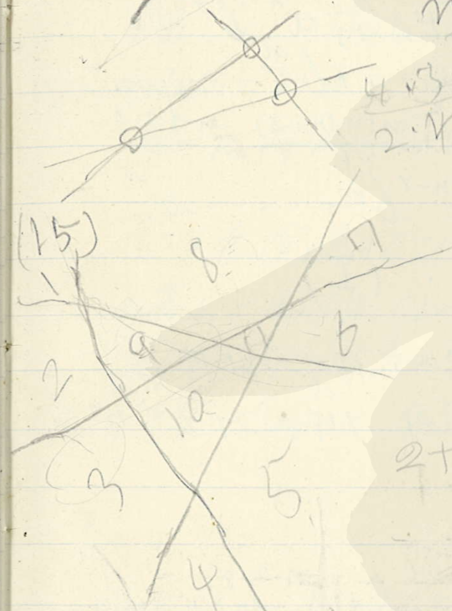
$n=2,\quad 1\times 0$

$n=3:\quad 0$

$n=4\quad \frac{6\times 1}{2}=3$

$n=5$

(15)



$$2+\frac{(n-1)(n+2)}{2} \qquad 2+2+3 \cdots$$

$$1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2+n+2}{2}, \quad =\frac{n^2+n+2}{2}$$

$$2+2+4+6 = 2+2(1+2+3+\cdots(n-1)) = 2+(n-1)n$$

$$2+4+8 \quad = \frac{2(2^n-1)}{2-1}$$

$$2+2+4+8 \cdots =$$

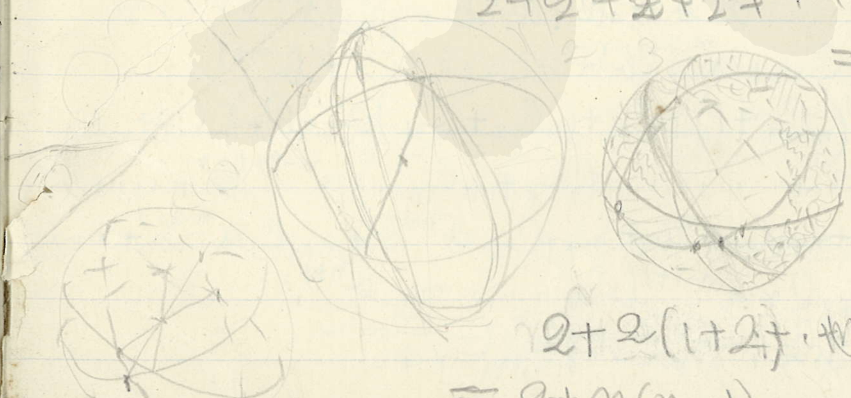
(16)

$$2+2+4+8+\cdots$$

$$2+2^1+2^2+2^3+\cdots\quad 2^{n-1}$$

$$=2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=2^n$$



1 ; 2

2 ; 4, 2+2×1

3 ; 8, 2+2×1 +2×2

4 ;

$$2+2(1+2+\cdots+(n-1))$$

$$=2+n(n-1)$$

Chapter 7. The binomial theorem
(The multinomial theorem)

§1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + {}_2C_1\, ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + {}_3C_1\, a^2b + {}_3C_2\, ab^2 + b^3.$

一般ニ、

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1\, a^{n-1}b + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + {}_nC_3\, a^{n-3}b^3 \cdots\cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + b^n$$

n: pos. integ.

$$= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} a^{n-r} b^r + \cdots\cdots b^n.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\mathrm{I})$$

(I)ナル公式ヲ証明スルタメニ帰納法ヲ用キル。即チnノ時(I)ナル公式ガ成立スルモノト仮定シタル時、$n+1$ ノ時ニモ公式ガ成立スルコトヲ証明スレバヨイ。

(I)ノ両辺ニ $a+b$ ヲカケルト、

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + {}_nC_1\, a^n b + {}_nC_2\, a^{n-1} b^2 + {}_nC_3\, a^{n-2} b^3 \cdots\cdots + {}_nC_r\, a^{n-r+1} b^r + \cdots\cdots ab^n$$

$$a^n b + {}_nC_1\, a^{n-1} b^2 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^3 \cdots\cdots + {}_nC_{r-1}\, a^{n-r+1} b^r + \cdots\cdots + b^{n+1}.$$

$$= a^{n+1} + ({}_nC_1 + 1)\, a^n b + ({}_nC_2 + {}_nC_1)\, a^{n-1} b^2 + ({}_nC_3 + {}_nC_2)\, a^{n-2} b^3 + \cdots\cdots ({}_nC_r + {}_nC_{r-1})\, a^{n-r+1} b^r + \cdots\cdots + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + {}_{n+1}C_1\, a^n b + {}_{n+1}C_2\, a^{n-1} b^2 + {}_{n+1}C_3\, a^{n-2} b^3 + \cdots\cdots + {}_{n+1}C_r\, a^{n-r+1} b^r + \cdots\cdots b^{n+1}.$$

$(\because\ {}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r.$

即チ n ガ $n+1$ ニナツタ時モ同ジ公式ガ成立スルコトヲ知ル。シカルニ $n=3$ ノ時ハ実際ノ計算ニヨツテ公式ガ成立スルコトヲ知レリ。∴ $n=4$　$n=5$ ・・・・・・一般ニ n ガ任意ノ pos. integer ノ時ニ成立スル。コノ公式(I)ヲ二項定理(or 二項公式)トイフ。
左辺ヨリ右辺ニ導ビクコトヲ expand 展開スルト名ヅケ展開シテ得タル式ヲ expansion 展開式ト名ヅケル。

(I)ノ展開式ニ於ル $(r+1)^{th}$ term 即チ ${}_nC_r a^{n-r}b^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$ ヲ其ノ一般項, general term ト名ヅケル。
(I)ニ於テ b ノ代ハリニ $-b$ ヲオケバ

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + (-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r \cdots\cdots (-1)^n b^n \quad \cdots\cdots (\mathrm{II})$$

(I)及ビ(II)ニ於テ項ノ数ハイヅレモ $n+1$ デアル。

Ex 1. $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

2. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^5 = \underbrace{\frac{1}{2^5}x^5}_{(\frac{1}{2}x)^5} - 5\left(\frac{1}{2}x\right)^4\left(\frac{1}{3}y\right) + 10\left(\frac{1}{2}x\right)^3\left(\frac{1}{3}y\right)^2 - 10\left(\frac{1}{2}x\right)^2\left(\frac{1}{3}y^3\right) + 5\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}y\right)^4 - \left(\frac{1}{3}y\right)^5$

$= \frac{x^5}{32} - \frac{5x^4y}{48} + \frac{5x^3y^2}{36} - \frac{5x^2y^3}{54} + \frac{5xy^4}{162} - \frac{y^5}{243}$

Pascal's triangle

(I)ナル公式ニ於テ $a=1$　$b=x$ トオケバ、

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(n-r)!}$$
$$+ \cdots\cdots + x^n \cdots\cdots \text{(III)}$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^r\frac{n(n\cdots}{r!}$$
$$\cdots + (-1)^n x^n$$

二項定理トシテハ(I)ナル公式ヨリ寧ロ(III)ナル公式ノ方ガ使ハレルコトガ多イ。

Binomial expansion ニ於テ初メカラ数ヘテ $r+1$ 番ノ項ト終リカラ数ヘテ $r+1$ 番目ノ項トハ其ノ係数相等シ。即チ初メカラ数ヘテ $r+1$ 番目ノ項ハ(I)ニヨッテ

$${}_nC_r a^{n-r} b^r$$ ニシテ、

終リカラ数ヘテ $r+1$ 番目ハ初メカラ数ヘレバ $n-r+1$ トナルノデアルカラ初メカラ $n-r+1$ 番目ノ項ハ、

$${}_nC_{n-r} a^r b^{n-r}$$ ナリ。

故ニ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-\overline{r-1}+1)}{(r-1)!}x^{r-1} + \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-\overline{r-1}+1)(n-r+1)}{r!}x^r \cdots + x^n$$

r th term　　　　r+1 th term

コノ展開式ニ於テ最大項ヲ求メン。r番目ノ項ニ $\frac{n-r+1}{r}x$ ヲ乗ズルトキ r+1番目ヲ得。而シテ

$$\frac{n-r+1}{r}x = \left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$$

コレハrガincreaseスレバdecreaseス。

從ッテr番目ノ項ガgreatestナルタメニハ

$$\frac{n-r+1}{r}x < 1$$

$$\frac{n-\overline{r-1}+1}{r-1}x > 1$$

デナケレバナラヌ。之ヨリ

$$\frac{(n+1)x}{1+x} < r.$$

$$\frac{(n+1)x}{1+x} + 1 > r.$$

$$\frac{(n+1)x}{1+x} < r < \frac{(n+1)x}{1+x} + 1$$

コノ最後ノ不等式ノ決定スルrヲ求ムレバ展開式ノr番目ノ項ガ最大トナル。

Ex. $(1+x)^{20}$ ノ展開式ノ最大項。

$$x=\frac{1}{4}$$

$$\frac{(n+1)x}{1+x}=\frac{21\times\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{21}{5}$$

$$\frac{21}{5}<r<\frac{21}{5}+1 \quad \therefore r=5$$

即チ5番目ノ項ガ最大ナリ。

$\frac{n-r+1}{r}x=1$ ナル場合ニハ r th term ト $r+1$ th term ハ
等シクナル。シカモ共ニ二ツガ他ノ項ヨリ大ナリ。
例ヘバ $(1+x)^{10}$ ノ展開式ニ於ケル最大項。

$$x=\frac{5}{6} \qquad \frac{(n+1)x}{1+x}=\frac{11\times\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}}=5$$

コノ場合ニハ五番目ノ項ト六番目ノ項ト等シ。

§4. Multinomial theorem.

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots+l)^n$$

ノ展開式ニ於ケル一般項ヲ求メン。

$$(a+b+c+\cdots\cdots+l)^n=\{a+(b+c+\cdots+l)\}^n$$

ノ展開式ニ於ケル一般項ハ

$$\boxed{\frac{n!}{p!(n-p)!}a^p}(b+c+\cdots+l)^{n-p}, \quad \cdots\cdots (n-p+1)^{\text{th}} \text{ term}$$

$$(b+c+d+\cdots+k+l)^{n-p}$$
$$=\{b+(c+d+\cdots+k+l)\}^{n-p}$$
ノ展開ニ於ケル一般項ハ

$$\boxed{\frac{(n-p)!}{q!\,(n-p-q)!}\,b^q}\,(c+d+\cdots\cdots+k+l)^{n-p-q}、$$

$$(c+d+\cdots\cdots+k+l)^{n-p-q}$$
$$=\{c+(d+\cdots\cdots+k+l)\}^{n-p-q}$$
ノ展開式ニ於ケル一般項ハ

$$\boxed{\frac{(n-p-q)!}{r!\,(n-p-q-r)!}\,c^r}\,(d+e+\cdots+k+l)^{n-p-q-r}$$

、 、 、 、 、 、 、 、 、

、 、 、 、 、 、 、 、 、 、 、

最後ハ、

$(k+l)^{n-p-q-r-\cdots\cdots-u}$ ノ展開式ニ於ケル一般項、

$$\frac{(n-p-q-r-\cdots\cdots-u)!}{v!\,(n-p-q-r\cdots\cdots-u-v)!}\,k^v\,l^{n-p-q-r-\cdots\cdots-u-v}$$ トナル，

$\therefore (a+b+c+d+\cdots\cdots+k+l)^n$

ノ展開式ニ於ケル一般項ハ

$$\frac{n!}{p!\,\cancel{(n-p)!}}\times\frac{\cancel{(n-p)!}}{q!\,\cancel{(n-p-q)!}}\times\frac{\cancel{(n-p-q)!}}{r!\,\cancel{(n-p-q-r)!}}\times\cdots\cdots\times\frac{\cancel{(n-p-q-r\cdots-u)!}}{v!\,(n-p-q-r\cdots-u-v)!}$$

$$\times a^p b^q c^r \cdots\cdots k^v l^{n-p-q-r-\cdots\cdots-u-v}.$$

トナル，

$$n-p-q-r-\cdots-u-v=w \text{ say,}$$

$$[p+q+r+\cdots+u+v+w=n]$$

上ノ式ハ

$$=\frac{n!}{p!q!r!\cdots v!w!}a^p b^q c^r \cdots k^v l^w.$$

$$[p+q+r+\cdots+v+w=n]$$

General term

Ex 1. $(a+b+c)^3$ ノ展開式ニ於ル a, b, c abc ノ係数.

$a^1b^1c^1$.

$$\frac{3!}{1!1!1!}=6.$$

Ex 2. $(a+b+c+d)^5$ ニ於ル. a^2b^3 ノ係数.

$$\frac{5!}{2!3!0!0!}=10.$$

§5. §4ノ特別ノ場合トシテ

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m)^n$$

ノ展開式ニ於ル一般項ハ

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots v!w!}a^p(bx)^q(cx^2)^r\cdots\cdots(lx^m)^w$$

$$(p+q+r+\cdots+v+w=n)$$

$$=\frac{n!}{p!q!r!\cdots w!}a^p b^q c^r \cdots l^w x^{q+2r+\cdots\cdots+mw}$$

コノ公式ニヨツテ

$$\cancel{(a+x}\ (a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots+lx^m)^n$$

ノ展開式ニ於ケルxノ任意ノ冪ノ係数ヲ計算シ得.

例ヘバ x^α ノ係数ヲ求メントセバ

$$\left.\begin{aligned} p+q+r+\cdots\cdots+w&=n \\ q+2r+\cdots\cdots+mw&=\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{不定方程式}$$

ニヨツテ決定セラル.

$p, q, r, \cdots\cdots, w,$ ノ値ヲ定メ、其等ノ組(set)ニ応ジテ出テクル係数ヲ合計スレバヨイ. (p, q, r 等ハ pos. integer or 0.)

Exa. $(1+x+x^2)^3$ ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ係数ヲ求メヨ.

$$\frac{3!}{p!\,q!\,r!}\ \boxed{1^p, 1^q, 1^r}\ x^{q+2r}$$

$$\left.\begin{aligned} p+q+r&=3, \\ q+2r&=4. \end{aligned}\right\}$$

$q=0$ トオケバ　$p=1$　$r=2$,

$q=2$ トオケバ　$p=0$　$r=1$.

$$\therefore\ \frac{3!}{1!\,0!\,2!}+\frac{3!}{0!\,3!\,2!}=6 /\!/$$

Exa. $(1+2x-3x^2)^5$ ノ展開式ニ於ケル x^7 ノ係数.

$$\frac{5!}{p!\,q!\,r!}\ 1^p\,2^q(-3)^r\,x^{q+2r}$$

$$\left.\begin{aligned} p+q+r&=5 \\ q+2r&=7 \end{aligned}\right\}$$

$q=1$;　$p=1$　$r=3$

$q=3$;　$p=0$　$r=2$

$$\frac{5!}{1!\,1!\,3!}\,2\,(-3)^3+\frac{5!}{0!\,3!\,2!}\,2^3(-3)^2$$

$$=40\times(-27)+80\times 9=40\times 9=-360 \;//$$

Exa 3. $(1+\cancel{2}x+x^2)^8$ の展開式における x^5 の係数.

$$\frac{8!}{p!\,q!\,r!}x^5$$

$$\left.\begin{aligned} p+q+r&=8. \\ q+2r&=5. \end{aligned}\right\}$$

$q=1$;　$r=2$　$p=5$

$q=3$;　$r=1$　$p=4$

$q=5$;　$r=0$　$p=3$

$$\frac{8!}{5!\,1!\,2!}^{168}+\frac{8!}{4!\,3!\,1!}^{280}+\frac{8!}{3!\,5!\,0!}^{56}=504 \;//$$

6 7 8
42
5
5×7×8

Chapter 8. Probability

公算；たしからしさ；蓋然率.

§1. 定義 一ツノ event 事象ノ起ル回数ヲ a トシ、起ラザル回数ヲ b デアラハシ且其ノ起ルト起ラザルトハ我々ノ判断ニ従ヘバ全ク公平不偏ナルモノトス、然ル時其ノ event ノ起ル probability ハ $\frac{a}{a+b}$ ナル分数ニテアラハシ、起ラザル probability ヲ $\frac{b}{a+b}$ ナル分数デアラハス.

今一ツノ骰子(賽)(die)ヲ転シテ 1 ガ出ル probability ハ $\frac{1}{6}$ デアル. 之ヲ実験ニ徴スルニ賽ヲ百回転ス時ハ 1 ノ出ル場合ノ数ハ 14–21 回デアリ、転ス回数ヲ増シテ六百回ニ及ボス時ハ 1 ノ出ル回数ハ 97, 8 回カラ 102, 3 回デアル、更ニ回数ヲ増シ 6000 回転ガス時ハ 1 ノ出ル数ハ殆ンド 1000 回ニ近イ. 即チ、実験ノ回転ヲ多クスルニ従ヒ $\frac{1}{6}$ ニ近ヅク. ∴ 実験ノ回数 n ヲ非常ニ大ナル数トシ n 回ノ実験中 1 ガ r 回出ル場合ニハ、之ノ次ニ 1 回実験ヲ施ス時 1 ガ出ルデアラウトイフ信用ノ程ハ $\frac{r}{n}$ ナル分数デアラハシ得ル、之ノ分数ヲ 1 ノ出ル probability ト称ス。
後ノ分ノ定義ハ probability ノ実験的定義ト称シテモヨイ。

§2. 一ツノ event ガ確カニ起ル時ハ其ノ probability ハ 1 ニシテ、確カニ fail 起ラナイ時ハ其ノ起ル probability ハ 0 ナリ. 其ノ他ノ場合ニ於テハ happening ノ probability ハ pos. proper fraction ナリ.

(註) event ノ起ル場合ノ数 a ノ
起ラザル場合 b

其ノ event ノ起ル probability ハ定義ニヨリ $\frac{a}{a+b}$.

コレニテ、若シ event ガ起ル時ニハ、$b=0$

∴ $\frac{a}{a+b} = 1$ キツト

又 event ガ起ラナイ場合ハ $a=0$

∴ $\frac{a}{a+b} = 0$

其ノ他ノ場合ニ於テハ $0<a<a+b$.

従ッテ $\frac{a}{a+b}$ ハ pos. proper. fraction ナリ.

次ニ定義ニ従ッテ解クコトヲ得ル example ヲ示ス.

1. A, B, C, ... ナル n 個ノ ball ヲ一ツノ袋ニ入レテ、
其ヨリ一ツノ球ヲトリ出ス時、トリ出サレタル球ガ A ナル
コトノ ~~prob~~ probability ヲ求ム.

$\frac{1}{n}$ (n ガ $a+b$ ニ相当シ、1 ガ a ニ相当スル)

又同ジ状態デ二ツノ球ヲトリ出ス時、其ノ二ツノ球ガ A 及ビ B ナルコトノ probability

コノ場合ニハ二ツヅツトリ出スカタ total number of cases
ハ $_nC_2$ ニシテ、A ト B ガ出ル場合ハタダ一ツナリ.

∴ $\frac{1}{_nC_2} = \frac{2}{n(n-1)}$

2. 三ツノ赤イ球ガ、
四ツノ黒白
五ツノ黒
ヲ一ツノ袋ニ入レ、其レヨリ一ツノ球ヲトリダス時赤球ナルベキ
probability ヲ求ム。total number of case ハ 12 ナリ。
赤球ノ出ル場合ノ数ハ 3。

∴ $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

白同様白ガ出ル probability ハ $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,
黒ガ出ル $\frac{5}{12}$ ナリ。

3. n個ノ球ヲ一ツノ袋ニ入レテ其レヨリ、幾ツカノ球ヲトリ出ス時
偶数個ノ球ノ出ル probability ヲ求ム。
球ガ一ツ出ル場合ノ数ハ $_nC_1$
〃 二ツ 〃 〃 $_nC_2$
〃 三ツ 〃 〃 $_nC_3$
…
〃 n個 〃 〃 $_nC_n$
∴トリ出ス球ノ数ニ何等ノ制限ヲモ附セザル時ニハ、
total number of cases ハ
$_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$ (a+b = 相当),
球ガ偶数個出ラル場合ノ総数ハ
$_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots$

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots\cdots + {}_nC_n x^n$$

$x=1$ トオケバ、

$$2^n = 1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots\cdots + {}_nC_n$$

$$\therefore {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n - 1.$$

上ノ式デ $x=-1$ トオケバ、

$$0 = 1 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 - \cdots\cdots$$

上式トカヘアハセレバ、

$$2^n = 2 + 2{}_nC_2 + 2{}_nC_4 \cdots\cdots$$

$$\therefore {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots\cdots = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1$$

∴求ムル probability ハ $\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, ナリ

奇数個ノ球ノ出ル probability ハ

$$1 - \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} = \frac{2^n-1-2^{n-1}+1}{2^n-1}$$
$$= \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \quad 大$$

§3. Exclusive events

イクツカノ events ノ内 イヅレカ一ツガ起ルコト ト
其ノ他ノ events ガ起ルコトト両立スル能ハザル時ハ
之等ノ events ハ互ニ exclusive ナリトイフ. (排反)
一口ニイヘバ同時ニ存在スルヲ許サザル events ヲイフ.

例ヘバ、賽ヲ投ズル時ニ1ガ出ルコトト其ノ他ノ数ガ出ルコトハ互ニ exclusive デアル。

exclusive events ニ関シテハ次ノ addition theorem 加法定理成立ス。

Theo. n個ノ exclusive events ノ起ル probability ヲ夫々 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ トセバ之等ノn個ノ内何レカ一ツノ event ノ起ル probability ハ

$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$$

ナリ。

次ニ簡単ノ為ニ三ツノ event ノ場合ヲトル。

三ツノ events ノ happening ノ probability 夫々 p_1, p_2, p_3 トシ之等ノ分数ヲ通分シタルモノヲ夫々

$$\frac{a_1}{d} \quad \frac{a_2}{d} \quad \frac{a_3}{d}$$

トスル時ハ、d個ノ場合ノ内ニテ之等三ツノ events ノ起ル場合ノ数ハ夫々、

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3,$$

デアル、而シテ之等3ツノ events ハ同時ニ起ルヲ許サレヌガ故ニ其ノ内何レカ一ツガ起ル場合ハ、$a_1+a_2+a_3$ デアル。

∴何レカ一ツノ起ル probability ハ

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{d} = \frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d}+\frac{a_3}{d} = p_1+p_2+p_3$$

例ヘバ、20枚ノ札アリ、1カラ20迄ノ数ヲ書キ入レタリ。其ノ内ヨリ、1枚ノ札ヲトリ出ストキ其ノ番号ガ3又ハ7ノ倍数ナル時ノ ~~pro~~ chance ヲ求ム。

Total number of cases ハ 20。

3ノ倍数デアル番号ハ 6枚アル。

∴ 3ノ倍数ノデル chance ハ $\frac{6}{20}$

7ノ倍数ノ番号ハ 2枚デアル。

∴ 7ノ倍数ノデル chance ハ $\frac{2}{20}$

デアル。1カラ20迄ノ数デ3ノ倍数デ同時ニ7ノ倍数ナル数ハナイ。

従ッテ exclusive デアル。

∴ 求ムル probability $= \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{2}{5}$

Ex. 2ツノ賽ヲ転ガシテ出テクル目ノ和ガ8ヲ越エザル probability ヲ求ム。

2 —— 8 —— 12

$_6C_1 \times {}_6C_1 - 2 + 2 + 2\times 2 = 28$,

$\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$,

Examples,

1, (i) $(a^2-b^2)^{12}$ $\quad \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$

コレニハ, $n=12$ $\quad r=4$ $\quad a$ ガ a^2 $\quad b$ ガ $-b^2$,

$\therefore \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{16}b^8 = 495a^{16}b^8$,

(ii) $(3x^{\frac{1}{2}}-4y^{\frac{1}{2}})^9$,

$n=9$ $\quad r=4$ $\quad a=3x^{\frac{1}{2}}$ $\quad b=-4y^{\frac{1}{2}}$,

$\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(3x^{\frac{1}{2}})^5(-4y^{\frac{1}{2}})^4 = 126\times 3^5\times 4^4\times x^{\frac{5}{2}}y^2$,

2, $(a+x)^{2n}$ $\quad$ middle term ハ $n+1$ 番ナリ,

$\therefore r=n$ $\quad n$ ガ $2n$, $\quad a=a$ $\quad b=x$,

$\dfrac{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)}{n!}a^n x^n$,

3, $(a+x)^9$ $\quad$ 5番目ト6番目,

$r=4$ $\quad n=9$ $\quad$ or $\quad r=5$ $\quad n=9$,

$\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}a^5x^4 + \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a^4x^5$

$= 126a^5x^4 + 126a^4x^5$

4,

4. $\underset{\overset{\|}{A+B}}{(x+a)^n} = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 + \cdots {}_nC_r x^{n-r} a^r + \cdots + a^n$,

$A = x^n + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 + {}_nC_4 x^{n-4} a^4 \cdots$

$B = {}_nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_3 x^{n-3} a^3 + {}_nC_5 x^{n-5} a^5 \cdots$

$A - B = x^n - {}_nC_1 x^{n-1} a + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 - \cdots$

$= (x-a)^n$.

$A^2 - B^2 = (x^2 - a^2)^n$

5. $\left(x^2 + \frac{c^3}{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5}(x^3 + c^3)^5$

次式ヲ展開シ其ノ中ニツイテ x^6 ノ係数ヲ求メヨ,

$n = 5 \quad r = 6 - 2 - 1 = 3$,

5 4 3 2 1 0

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} c^9 = 10 c^9$,

6. $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots = (a+x)^n$

$(t_0 + t_1 i + t_2 i^2 + \cdots)(t_0 - t_1 i \cdots) = (a+ix)^n (a-ix)^n$

$t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 \cdots$

(7) $(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 \cdots$
$+(-1)^n x^n,$

$(1-x)^n = \{(1+x)-2x\}^n,$

(8) $\frac{{}_nC_1}{1} + 2\frac{{}_nC_2}{{}_nC_1} + 3\frac{{}_nC_3}{{}_nC_2} + \cdots\cdots + n\frac{{}_nC_n}{{}_nC_{n-1}},$

$n + (n-1) + (n-2) + \cdots\cdots (n-n+1),$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

(9) $1 + 2{}_nC_1 + 3{}_nC_2 + \cdots\cdots + (n+1){}_nC_n,$
$= 1 + 2n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{4n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + (n+1)$

$= \frac{n+1+1}{2}(1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n)$

$= \frac{n+2}{2}2^n$

$= 2^{n-1}(n+2),$

13	2	3
3	8	17
11	11	11
1	1	1
2	4	6
	3	6
		4

(10) (i) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} n C_n = 0,$
$= \frac{n+1}{2}(C_1 - C_2 + C_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}C_n)$
$= \frac{n+1}{2}({}_nC_1 - {}_nC_2 + {}_nC_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_n)$
$= \frac{n+1}{2}$

(10) (i) $C_r = {}_nC_r$,

(i) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \cdots - + (-1)^{n-1} nC_n$

$(-1)^{n-1} nC_0 + (-1)^{n-2}(n-1)C_1 + \cdots + C_{n-1}$

nが偶数ならば、

$= \frac{\pm n}{2}(C_0 - C_1 + C_2 - \cdots + C_n)$

$= 0$,

n 奇数、

$= \frac{n}{2}(C_0 - C_1 + C_2 - \cdots - C_n)$

$= 0$,

(ii) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots nC_n$

$nC_0 + (n-1)C_1 + \cdots C_{n-1}$

$\frac{n}{2}(C_0 + C_1 + C_2 \cdots + C_n) = \frac{n}{2} 2^n = 2^{n-1} n$,

(iii) $1 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \cdots + \frac{C_n}{n+1}$

$\frac{1}{n+1}(1 + C_1 + C_2 + \cdots C_n)$ 2^n

$(1 + C_2 + C_2 + \cdots C_{n-1})$ 2^{n-1}

$\frac{1}{n-1}(1 + C_2 \cdots C_{n-2})$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}(1 + C_1 + C_2)$

$\frac{1}{2}(1 + C_1)$

二ノ出テクル場合ハ一度、三ノ出ル場合ハ二度デアル、
此ノ二ツノ二ツハ exclusive、四ガ出ル場合ハ三度、
、、、、、、、

§4. dependent events
independent events
一ツノ event ガ起ルコトガ他ノ event ノ起ルコトニ関係ヲ及ボス時ハコノ二ツノ events ハ dependent events ナリトシ、関係ヲ及ボサザル時ハ independent events トイフ。
independent events ニ関シテハ他ノ定理ニヨツテ共ノ probability ヲ計算スル。
定理 二ツノ independent events ガ共ニ起ル probability ハ各ノ events ガ起ル probability ノ積ニ等シ。
第一ノ event ノ起ル場合ノ数ヲ a 起ラザル場合ノ数ヲ b.
第二ノ event ノ起ル 〃 〃 a' 起ラザル 〃 〃 b'.
然ル時ハ $a+b$ ナル場合ノ各場合ハ第二ノ events ノ $a'+b'$ ナル場合ノ各場合ト結ビツケルコトガ出来ル。故ニ凡テノ場合ノ数ハ
$(a+b)(a'+b')$ ナリ (之ハ二ツノ賽ヲ投ゲル場合ノ如シ)
其ノ内ニテ二ツノ event ガ共ニ起ル場合ノ数ハ
aa' ナリ
∴ 求ムル probability ハ $\dfrac{aa'}{(a+b)(a'+b')} = \dfrac{a}{a+b} \times \dfrac{a'}{(a'+b')}$

同様ニ first event ノ起リ second event ノ起ラナイ probability ハ $\frac{ab'}{(a+b)(a'+b')}$ first event ガ起ラズシテ second event ノ起ル probability ハ $\frac{ba'}{(a+b)(a'+b')}$.

first second 共ニ起ラヌ probability ハ $\frac{bb'}{〃}$ ナリ.

Ex. 一ツノ賽ヲ二度転ガストキ第一回ニ ⚀ ガ出ル probability ヲ求ム.

第一回ニ ⚀ ガ出ルコトノ probability ハ $\frac{1}{6}$. 第二ノ場合ニ ⚀ ノ出ナイ probability ハ $\frac{5}{6}$. 而シテ第一回ニ ⚀ ガ出ル出ナイハ, 第二回ニ ⚀ ガ出ル出ナイニ無関係ナリ, 即チ independent ナリ.

∴求ムル probability ハ $\frac{5}{36}$ ナリ.

Ex. 三ツノ白イ球ト四ツノ黒球ト五ツノ赤イ球ヲ一ツノ袋ニ入レ, 一ツヅツ二度玉ヲトリダス中二ツトモ赤イ球ナルベキ probability ヲ求ム. 但シ始メニトリダシタ球ハ二回目ヲトリダス前ニ袋ノ中ヘカヘスモノトス.

第一回ニ赤球ヲ出ス chance ハ $\frac{5}{12}$.

第二回ニ於テ赤球ヲトリダス chance モ $\frac{5}{12}$.

∴求ムル probability ハ $\left(\frac{5}{12}\right)^2$

$a+b$

$a+b \rightarrow a$

$a'+b' \rightarrow a'$

二ツノ dependent events ノ起ル probability ハ first event ガ起リタル時ニ於テ first event ノ起ル probability ニ second event ノ起ル probability ヲカケタルモノナリ。コノ定理モ independent ノ時ト同様ニ証スルコトヲ得。
即チ a' ヲ first event ノ起リタル時 second event ノ起ル number of ways ノ数、b' ヲ first event ノ起リタル時 second event ノ起ラザル回数ト云フトスレバ、共ニ起ル number of ways ハ $a \cdot a'$ ニテアラハサル。
∴ 二ツノ events ノ起ル probability ハ $\dfrac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$

其ノ他ノ二ツノ場合モ同様ナリ。
例．先ノ球ノ問題ニ於テ最初ニトリダシタ球ヲモトニカヘサナイトスレバ、二ツノ赤イ球ノ出ル chance 如何。
第一回ニ赤ガ出ル probability ハ $\frac{5}{12}$
第二回ニ赤ガ出ル probability ハ $\frac{4}{11}$．
∴ 求ムル probability ハ $\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$

例 tramp カラ四枚ノカードヲトリダス時其ノ四枚ガクラブ、ダイヤ、ハート、スペードナルベキ probability ヲ求ム。
但シ、一旦トリ出セバ、モトヘカヘサズ。
first draw ニ於テドレカ一ツガ出テヨイ、probability 1.
club ガ出タトスル。
第二回ニハ club 以外ノモノノ何レカガ出ル probability ハ $\frac{39}{51}$.

三回目ニ於テハ残ル二種類ノ内ノイヅレガ出テモヨイ。其ノ probability ハ $\frac{26}{50}$。
四回目ニ於テハ残ル一種類トナリ、之ヲトリダス probability ハ $\frac{13}{49}$ ナリ。
而シテ之等ノ drawings ハ dependent events デアルカラ、
求ムル probability ハ $\frac{39 \times 26 \times 13}{51 \times 50 \times 49}$ 大体 $\frac{1}{10}$

トナル。

(iii) $1+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,

$1+\frac{n}{2!}+\frac{n(n-1)}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n!}{n+1!}$

$n+1$ ヲ乗ズレバ,

$\left\{1+(n+1)+\frac{n+1\cdot n}{2!}+\frac{n+1\cdot n\cdot n-1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n+1!}{n+1!}\right\}-1$,

$=2^{n+1}-1$,

(iv) $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2=\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}$

$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n$

$(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2\cdots\cdots+C_1x^{n-1}+C_0x^n$

相乗ノ n 乗ノ項ノ係数 $=C_n^2+C_{n-1}^2+\cdots\cdots+C_1^2+C_0^2$,

之ニ相応スル $n+1$ 番目ノ項ハ $=\frac{2n!}{n!n!}$

(v) $\frac{C_0}{2}+\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}\cdots\cdots+\frac{C_n}{n+2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{4\cdot 2}\cdots\cdots+\frac{1}{n+2}$

$(n+2)(n+1)$ ヲ乗ズレバ

$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left\{1+n+\frac{(n+2)(n+1)}{2!}+\frac{2(n+2)(n+1)n}{3!}+\cdots n(n+2)\right\}$

$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left\{{}_{n+2}C_2+\cdots\cdots+(n+1)\,{}_{n+2}C_{n+2}\right\}$

$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left\{2^{n+1}(n+2)-2^{n+2}+1\right\}$

$=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left\{2^{n+1}n+1\right\}$

${}_{n+2}C_0+{}_{n+2}C_1$

(11) $(a-b-c)^7 \qquad a^2b^3c^2$

$p = 2 \qquad n = 7$

$q = 3$

$r = 2$

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!} a^2(-b)^3(-c)^2 = -\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot2\cdot3\cdot2} = 210a^2b^3c^2$$

(12) $(2+x-x^2)^5$

$$\left.\begin{array}{l} p+q+r=5 \\ q+2r=8 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{lll} q=0 & r=4 & p=1 \\ q=2 & r=3 & p=0 \\ q=4 & r=2 & \end{array}$$

$$\frac{5!}{4!} 2^1 1^0 (-1)^4 + \frac{5!}{2!\,3!} 1^2 (-1)^3$$

$= +10 - 10 = 0$

(13) $\{x^2+(a+b)x+ab\}^n = (x+a)^n(x+b)^n$

$$= \{x^n + {}_nC_{n-1}x^{n-1}a + \cdots + {}_nC_{n-1}x a^{n-1} + a^n\}$$
$$\{x^n + {}_nC_1 x^{n-1}b + \cdots + {}_nC_{n-1}b^{n-1}x + b^n\}$$

x^n 級ノ係数ハ $\quad a^n + {}_nC_{n-1}a^{n-1}b + \cdots$

(14) $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1} = (5\sqrt{2})^{2n+1} + (2n+1)(5\sqrt{2})^{2n}\cdot 7 + \frac{(2n+1)2n}{2!}(5\sqrt{2})^{2n-1}7^2$

$\cdots\cdots + 7^{2n+1} = I + F.$

$(5\sqrt{2}-7)^{2n+1} = (5\sqrt{2})^{2n+1} - (2n+1)(5\sqrt{2})^{2n}7 - \cdots$

$\cdots\cdots - 7^{2n+1} = F'.$

引算スル

$= 2(2n+1)(5\sqrt{2})^{2n}\cdot 7 + \cdots + 2\cdot 7^{2n+1}$

$= I+F-F'.$

左辺ハ正整数. 偶数.

∴ $2m = I+F-F'.$

$\underbrace{2m-I}_{\text{整数カ0.}} = \underbrace{F-F'}_{\text{小数 - 小数}} = 0.$

小数カ0.

∴ $F = F'.$

∴ $F'(I+F) = F(I+F)$

$(50-49)^{2n+1} = F(I+F).$

$p+q+r=2$

$q+2r=$ $\dfrac{n!}{p!q!r!}x^{q+2r}$ $\dfrac{\cancel{1+x+x^2}}{\cancel{1+x+x^2}}$ $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$,

$q=1$ $r=0$ $p=1$

$=$

$(1+x+x^2)^2=1-$

(15) $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^n$

x^r : x^{mn-r}

$\dfrac{n!}{p!q!s!\cdots}x^{q+2s+\cdots}$: $\dfrac{n!}{p'!q'!s'!\cdots}x^{q'+2s'+\cdots}$

$$\left.\begin{aligned} p+q+s+\cdots\cdots &= n \\ q+2s+3t+\cdots\cdots &= r, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p'+q'+s'+\cdots\cdots &= n, \\ q'+2s'+3t'+\cdots\cdots &= mn-r \end{aligned}\right\}$$

$(1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots+x^m)^n$

$\cancel{=\dfrac{1}{x^{mn}}(x'^m+x'^{m-1}+\cdots\cdots+x'^2+x'+1)^n}$ 但シ $\cancel{x'=\dfrac{1}{x}}$,

$=x^{mn}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^m+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{m-1}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{x}+1\right)^n$,

以上ノ式ニ於テハ、
　x^r 乗ノ係数ハ、
下ノ式ニ於テハ、
　$\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$ 乗ノ係数ニ等シ、
即チ、 x^{mn-r} ノ係数ナリ、

x^{mn}

(1) $1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{{}_4C_2}{16} = \frac{4\cdot 3}{16 \times 2} = \frac{3}{8}$,

A B C D

$\frac{1}{16}\ \frac{4}{16}\ \frac{6}{16}\ \frac{4}{16}\ \frac{1}{16}$

(2) (1) five : 4 H,

$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$,

(3) $\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{5\cdot 4/2 \times 3}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{1}{4}$

(4) $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

(5) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{19}{15} = \frac{19}{30}$,

(6) W B W B B W B W

$1 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}$,

$$= \frac{4}{35} + \frac{4}{21} = 4\left(\frac{8}{3\times7\times5}\right)$$

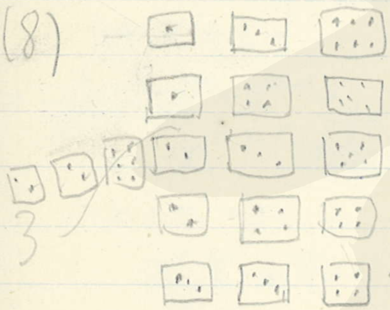
$$= \frac{32}{105}$$

$\frac{21 \cdot 5}{105}$

(7) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

$$\left(\frac{4}{10}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$$

(8)



6 6 6 3 3

18. ——— 3

$$\frac{6\times6}{6\times6\times6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{10}{6\times6\times6} =$$

8.

$$(x+x^2+x^3+\cdots x^6)^3$$

x^{10} 係数

$$x^3\left(\frac{x^6-1}{x-1}\right)^3 = x^3\left(\frac{x^6-1}{x-1}\right)^3$$

$$= x^3\left(\frac{x^{18}-3x^{12}+3x^6-1}{(x-1)^3}\right)$$

$x^{18}-3x^{12}+3x^6-1$

§5. one trial ニ於ル event ノ probability ヲ p ト與ヘテ,
n trials ニ於テ丁度一回, 二回, 三回 ……… n回起ル
probability ヲ求ムルコト.

one trial ニ於テ event ノ起ル probability ガ p ナル故其起ラナイ probability ハ $1-p$ (.$=q$ トシテオク) デアル,

n trials ノ内ニテイヅレカ一回丈起リ其ノ他ノ $n-1$ 回丈ハ起ラナイ probability ハ

$$npq^{n-1} \text{ トナル}$$

(∵

I	II	III	IV	⋯	
h	f	f	f	⋯	$pqqq \cdots = pq^{n-1}$,
f	h	f	f	⋯	$qpqq \cdots = pq^{n-1}$.
⋮					⋮

$$= npq^{n-1}.$$

又 n trials 中イヅレカ二回起リ, 残リ $n-2$ 回丈 fail スル probability $\dfrac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$ トナル.

一般ニ n trials 中 r 回起リ, 残リ $n-r$ 回起ラナイ probability ハ $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} p^r q^{n-r}$.

one trial ニ起ル可キ event ノ起ル probability p ヲ
與ヘテ n trials 中少クトモ r 回起ル probability ヲ求ムルコト。
n 回トモ起ル時、只一回起ラザル時、二回起ラザル時

$$p^n \qquad np^{n-1}q \qquad \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2$$

、 ― ― ― ― ― ・ n-r 回起ラザル時ハイヅレモ
r回以上起ルモノナリ。∴ 求ムル probability ハ之等ノ合計
ニテアラハサル。

$$\therefore\quad p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(r+1)}{(n-r)!}p^r q^{n-r}$$

トナル。

Example. 一ツノ賽ヲ五回投ゲル時 1 ガ三回デル
probability ノ此ノ場合 $p=\frac{1}{6}$　$q=\frac{5}{6}$,　$n=5$

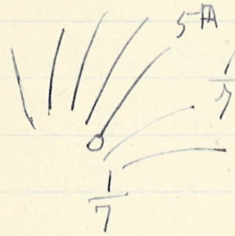
$$\therefore\ 求ムル\ probability = \frac{n(n-1)}{2!}p^3q^2 = \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5^2}{6^2} \fallingdotseq \frac{1}{10}.$$

此ノ時、少クトモ3回一ノデル probability ヲ求ムルニハ、

$$\frac{1}{6^5} + 5\frac{1}{6^4}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5^2}{6^2} \ //$$

§6. Expectation (probable value).

一ツノ event ノ happening ノ probability ヲ p トシ、
其ノ event ノ happen スル場合ニ m 円ヲ受ケトルモノトスル
時、pm 円ヲ expectation ト稱ス。



$\frac{1}{7} \times 5 = \frac{5}{7}$円.

Ex. 一ツノ袋ニ三ツノ白イ球トハツノ黒イ球トガ入ッテイル、其ノ中ヨリ一ツノ球ヲトリ出ス時黒イ球ガ出テ来タラ1円、白イ球ガ出タラ3円貰ヘルコトヲ約スル時、其ノ中ヨリ一ツノ球ヲトリ出ス人ノ expectation ヲ求ム。

白イ球ヲトリ出ス probability ハ $\frac{3}{11}$。

$$3 \times \frac{3}{11} = \frac{9}{11}(円)$$

黒イ球ヲトリ出ス probability ハ $\frac{8}{11}$

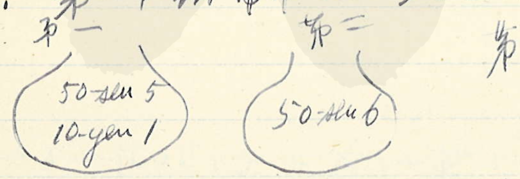
$$1 \times \frac{8}{11} = \frac{8}{11}(円)$$

此ノ二ツノ event ハ exclusive デアル。

求ムル expectation = $\frac{17}{11}$(円) ナリ。

人間ニ関係スル時ハ上ノ如ク expectation ト言フ言ヲ用ヒ、物ニ関係スル時ニハ expectation ノ代リニ probable value ヲ用フ。

Ex. 第一ノ財布中ニ 50 sen 5. 10 yen 1.



第一ノ purse カラ 2ツトツテ第二ヘ入レ、次ニ第二カラ二ツトリ出シテ第一ヘ戻ス、コノ時第一、第二ノ財布ノ probable value ヲ問フ.

第一ノ財布ヨリ五十銭二ツ出ル chance ハ

$$\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{\frac{5\cdot4}{2}}{\frac{6\cdot5}{2}} = \frac{2}{3}.$$

第二ノ財布ヨリ五十銭ヲ二ツトリ出ス chance ハ

1 ナリ.

故ニ第一カラ二ツ五十銭ガ第二ヘウツリ更ニ五十銭ガ第一ニカヘル chance ハ

$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ナリ.

五十銭ガ一ツ丈第一ヨリ第二ニウツル chance ハ

$$\frac{{}_5C_1}{{}_6C_2} = \frac{5}{\frac{6\cdot5}{2}} = \frac{1}{3}.$$

此ノ時第二ニハ50銭7個

ソレ故第二ヨリ第一ヘ50銭一ツ丈モドル probability ハ

$$\frac{{}_7C_1}{{}_8C_2} = \frac{1}{4}$$

故ニ五十銭ガ一ツ丈第一ヨリ第二ニウツリ、更ニ第二ヨリ第一ニウツル probability ハ

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ナリ.

此等ノ場合ニ於テ十円ハ常ニ第一ノ方ニモドルノデアル.

従ッテ十円ガ第一ニアル probability ハ

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

十円ガ第一ニノヨルchanceガ $\frac{3}{4}$ ナレバ、他ノ五十銭ガ五
ツ第一ニノヨルchanceモ $\frac{3}{4}$。

∴第一ノ probable value ハ

$1250 \times \frac{3}{4}$, ≒ ~~[illegible]~~

∴第二ノ probable value ハ

$1550 - 1250 \times \frac{3}{4}$,

$$\frac{{}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

$n=1$

$n=2$

$n=3$

$n=4$ $\qquad \frac{6 \times 1}{2} = 3$