5

代数學、第二号

微分学、積分学

森(滿)教授

理二甲工 小川秀樹

MARUZEN

Determinant

Differential Calculus

1. Variables and Functions
2. Theory of Limits

Determinants

§1. Def.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ - & - & - & - & - \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

n^2 quantities ヲ上ノ如ク正方形ニ並ベ ⟶ ニ算ヘタ時 row トイヒ.
↓ニ算ヘタ時 column トイフ.
same column ニハ same suffix
此等 n^2 quantities ヨリ n ヅヽトリタル凡テノ積ノ Algebraic Sum ヲ考フ. 但シ之レヅヽトリテ積ヲ作ル時ニハ次ノ二ツノ條件ニ随フモノトス.
第一條件　積ニ於ケル n 個ノ quantities ハ各々ノ rows 及ビ各々ノ column ヨリ一ツヅヽ取ルモノトス.
第二條件　積ノ sign ハ因数ヲアルファベット順ニナラベタ時 suffix ノ natural order ノ inversion ノ number ガ 0 or even ノ時 + sign ヲツケ odd ノ時ニハ − sign ヲツケル.
カク考フル時 (1) ナル sign ヲ n^2 quantities ノ determinants ト名付ケ一式ヲ表ス.
其等ノ quantities ヲ determinant ノ constituents ト名付ケ.
代数和ノ事ヲ determinant ノ expansion ~~トイフ~~ or development ト名付ケ. sign ヲモ含ヒ考ヘタル積ヲ其ノ項ト名付ク.
簡算ノ為ニ

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

此ノ determinant ヲ取ル時其ノスベテノ項ハ次ノ如シ.

$$a_1 b_2 c_3 \qquad a_2 b_3 c_1 \qquad a_3 b_1 c_2$$
$$a_3 b_2 c_1 \qquad a_1 b_3 c_2 \qquad a_2 b_1 c_3.$$

其ノ sign ハ second condition ニヨリテ決定セラル 即チ.

$a_1 b_2 c_3$	no inversion	+
$a_2 b_3 c_1$	2 inversions	+
$a_3 b_1 c_2$	2 inversions	+
$a_2 b_1 c_3$	1 inversions	—

以下ニ従フ.

$$\therefore \Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

even permutation
odd permutation are equall.

§2. n^2 quantities ヲ並ベタ determinant ヲ n^{th} order ノ determinant ト名付ク. 前節ノ例ハ 3^{th} order ノ determinant
一般ニ n^{th} order ノ determinant ニ於テ各項ハ n個ノ因数ヨリ成ル.

determinant ノ left hand top ヲ通過スル対角線ヲ principal diagonal ト名付ケ principal diagonal ニ沿ヒテアル因数ヨリ成リ立ツ項ヲ principal term ト名ヅケル 前節ノ例デハ $a_1 b_2 c_3$;
時トシテ determinant ヲ表ハスニ principal term ヲ以テスルコトアリ.
$(a_1 b_2 c_3)$

其ノ理由ハ文字ヲアルファベット順ニ並ベ其ノsuffixノpermutationヲ施ドコセバスベテノ項ヲ得ルガ故ナリ。

§3. Determinantノ各項ノ因数ハ之ヲアルファベットノorderニ列ベ其ノ符号ヲsuffixノ順ニ於ケル inversionノ数ニヨリテ決定スルコトハ前ニ示セリ。然レドモ各項ノ因数ヲsuffixノ順ニナラベ alp. orderニ於ケル inversionノ数デ符号ヲキメテモヨイ。

第一ノ場合ニ於テ一ツノsuffixガ其ヨリ大ナル r 個ノsuffixノ後ニ来ル時ハ第二ノ場合ニ於テ其ノsuffixノツイタ文字ハ其ヨリモ前ニアルベキ r 個ノ文字ノ後ニ来タル。$[a_1 b_2 c_3 d_4]$ ナルdeterminantニ於テ $a_2 b_4 c_3 d_1$ ニ於テ 1ニ関シテノ inversion 3アリ。3ニ関シテ inversion一ツアリ。之ノ因数ヲsuffixノ順ニ列ベルト $d_1 a_2 c_3 d_4$ 1ナルsuffixノツイタ d ニ関シテハ三ツノinversionガアル 3ナルsuffixノツイタ c ニ関シテ1ツノinversionアリ。コノ両方ノinversionノ数ハequalナリ。

∴ determinantノ各項ノ因数ハsuffixノ順ニナラベ(columnノ順)其ノ符号ハAlphabetノ順(rowノ順)ニ於ケル inversionノ数ニヨリテ定メテモヨイ。

Exa.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

次ニテ. $b\,g\,i\,q$ ハ rowノ順ニ列ブ.

column ノ順序ハ　b g i q　inversion 2ツ.

2 3 1 4.

ニ符号+.　d f k m

4 2 3 1.

5ツ.　−,

§4. Determinant ニ於ケル項ノ数.

Determ. ノ凡テノ項ハ principal term ニ於テ其ノ suffix ニ permutation ヲ行ヘバ得ラルル故. nth order ノ Determ. ノ項ノ数ハ $n!$ 丈アル. 例ヘバ third order ノ determ. ニ於テハ 6 項 fourth order ノ Determ ニ於テハ 24 項アリ.

§5. Determ. ニ於テ row ノカハリニ column, column ノ代リニ row ヲ カイテモ其ノ値ガカハラナイ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

(1) ノ row ト column, column ト row ヲトリカヘルト.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$a_3\ b_1\ c_4\ d_2$

(2)ナルDeterm.ノ各項ノ因数ハcolumnノ順(即チABCノ順)ニナラベ其ノ符号ハrowノ順(suffix)ニ於ケルinversionノ数ニヨリ決定セラルルモノト為スレバ、凡テノ項ハ其ノprincipal term $a_1b_2c_3d_4$ ニ於テ文字ヲfixシテ置テ、suffixニpermutationヲ行ヘバ得ラル。カクノ如キexpansionハ§1ノ方法ト同一ナリ。故ニコレハ一ツノDeterm.ノ他ノ定義ナリ。

系. Determ.ニ関スル命題(定理)ニ於テハrowトcolumnトヲトリカヘ得ル。

§6. Determ.ニ於テ隣接ノ二ツノrow或ハ隣接ノ二ツノcolumnヲ交換スルトキハ其ノ符号ヲ変ズ。

第一ニ 2 consecutive rowsニツイテ証明スベシ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & & & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & & & b_n \\ - & - & - & - & - & - \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_r & h_s & h_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r & k_s & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (1)$$

(1)ヲ与ヘラレタルDeterminantトシ、ソレニ於テhノrowトkノrowトヲトリカヘテ(2)ヲ得。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & & & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & & & b_n \\ - & - & - & - & - & - \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r & k_s & k_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_r & h_s & h_n \\ - & - & - & - & - & - \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$\boxed{a_7\, b_1\, c_3}\, h_4\, k_5\, \boxed{d_2\, e_6}$

$\boxed{a_7\, b_1\, c_3}\, h_5\, k_4\, \boxed{d_2\, e_6}$

pth

(1)ノ一ツノ項 Ah_sk_rB (因数ハrowノ順ニナリタルモノトス).
但シ、Aハh rowヨリ前ニアルrowノelementsノproduct.
BハkノrowヨリノrowノelementsノBハk rowヨリ後ノrowノelementsノ積.
然ルトキハ Ak_rh_sB ナル項 (12)ノrowノ順ニナラベラレテヰル)
之ハ勿論(2)ノ一ツノ項デアル、ヨッテ(1)ノ任意ノ項ガ同時ニ
(2)ノ一ツノ項トナッテヰル、
次ニコノ二ツノ符号ヲ考ヘルニ (1)ノ Ah_rk_sB ト同ジ位置ニアル
(2)ノ項ハ Ak_rh_sB デアル. ∴コノ二ツノ項ハ同符号ナリ.
而シテ $\underline{Ah_sk_rB}$, $\underline{Ah_rk_sB}$ トヲ考ヘレバ
sr 或ハ rs ガ A及ビBニ関シテハ共ノinversionノ数ハ同一
ナリ. 従ッテ Ah_sk_rB ト Ah_rk_sB トノ数ノ差ハ 1 ナリ. ヨッ
テコノ様ニ二項ノ符号ハ反対ノ符号ヲ有ス.
∴(1)ノ凡テノ項ハ同時ニ(2)ノ項ナリ而モ共ノ符号ハ反対ナリ.
次ニ任意ノ二ツノrowヲトリカヘル場合ヲ考フ.
p^{th} rowノ文字ヲ g $(p+t)^{th}$ rowノ文字ヲ j トシ、之ヲトリカヘ
gヲjノ所ニウツスニハ 二ツノconsecutive rowsヲt回(交換)行ヘバ gヲj
ノ所ニモッテコラレル、次ニjヲgノ所ニウツスニハ $t-1$回 consecu. rowsヲ
interchangeスレバヨイ. 即チ. $2t-1$ (奇数)回交換ヲ行フコトトナル.
∴二ツノ任意ノrowヲトリカヘレバ符号ガカハル.

Ex
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

二続テ

§7. 2 rows or 2 columns ガ identically equal ナル determinant ノ値ハ0ナリ.

与ヘラレタ De. ヲ Δ デアラハス. D ニ於テ iden. equal ナルニツノ row 又ハ column ヲ交換スレバ其ノ符号ヲ変ズル故 −Δ トナル.

コレニ一方ヨリ考フレバ交換シタニツノ row 或ハ column ガ全然同一ノモノナルヲ以テ

$$\Delta = -\Delta$$

ナリ. ∴ $2\Delta = 0$ ∴ $\Delta = 0$.

Ex. 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

ノ値ヲ求メルコト.

Δニ於テ x ノカハリニ y ヲオケバ first row ト second row ハ identically equal トナル. ∴ 0 トナル.

∴ $x-y$ ナル因数ヲ有ス. 同様ニ x ノカハリニ z, y ノカハリニ z トオイテ $x-z$ $y-z$ ナル因数ノ存在スルコトヲ知ル.

然ルニ Δ ハ三次デアル.

∴ $\Delta = K(x-y)(x-z)(y-z)$

K is independent to x, y, z.

x^2y ノ係数ヲ比較シテ

$-1 = K$

∴ $\Delta = -(x-y)(x-z)(y-z)$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & yz & x^3 \\ 1 & zx & y^3 \\ 1 & xy & z^3 \end{vmatrix}$

ヲ因数分解スルコト.

x ノカハリニ y ヲオケバ,

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{yz} & \cancel{y^3} \\ \cancel{1} & \cancel{zy} & \cancel{y^3} \\ 1 & y^2 & z^3 \end{vmatrix}.$$

$x-y$ ナル因数アリ.

同様ニ $x-z$, $y-z$ ナル因数ヲ有ス.

コレニ Δ ハ x, y, z ニ関スル交代式ニシテ次数ハ五次デアル.

$\because$ $x \Leftrightarrow y$ $\begin{vmatrix} 1 & xz & y^3 \\ 1 & zy & x^3 \\ 1 & xy & z^3 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $\Delta = (x-y)(x-z)(y-z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$

コレニ於テ L ト M ヲ決定スレバヨイ.

§8. Determinant ノ一 row 或ハ一ツノ column ノ悉クノ element ニ同一ノ数ヲ乗ズルコトハ(除スルコトヲモ含ム) determinant ハ其ノ数デ乗ゼラル

Determ ノ each term ハ各 row 及ビ各 column ヨリ只一ツ宛ノ element ヲトリテ作ルモノナルガ故一ツノ row 或ハ一ツノ column ノ悉クノ element ガ k 倍セラレタル時ハ determinant ノ各項ハ k 倍セラルルコトトナル。

ユヘスベテノ項ノ和デアル Determ ハ k 倍セラルルコトトナル。

Ex.
$$\Delta_1 \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \Delta_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^3 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ証セヨ。$(\Delta = \Delta_2)$

$$\Delta_1 = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{\cancel{abc}}{\cancel{abc}}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

系. Determinant ノ二ツノ row 又ハ column ガ constant factor ニヨツテ異ナル時ハ其ノ値ハ 0 ニ等シ。

$$\begin{vmatrix} ma & na & p \\ mb & nb & q \\ mc & nc & r \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a & a & p \\ b & b & q \\ c & c & r \end{vmatrix}$$

$$= 0,$$

§9. Minor determinants

一ツノdeterminantノアル特別ナルelementヲ通過スルrowトcolumnトヲ消シテ得タルdeterminantヲ其ノΔノ其ノelementニ関スルMinor determinant或ハMinorトイフ。Minor Determ.ハΔ_xニテアラハサル（但シxハ考フル特別ナルelementヲ示スモノトス）而シテ nth orderノdeterminantノMinorハ勿論$(n-1)$th orderナリ。

例ヘバ
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

ニ於テ、
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}$$

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

§10. Development of a determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \end{vmatrix}$$

Δノ中ノ或ルカノ項ハ a_1ヲ含ム、~~其共~~其等ノ項ノ和ヲ a_1A_1 デアラハス

又Δノ内ノ或ルカノ項ハ a_2ヲ含ム。其等ノ項ノ和ヲ a_2A_2 デアラハス

同様ニ ~~A~~ a_3ヲ含ムモノ項ノ和ヲ　a_3A_3 デアラハス

以上ニ準ジテ云カル時ハ

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \cdots + a_nA_n \quad (1)$$

(∵ a_1A_1 ト a_2A_2 ハ重複ナキカラデアル.

次ニΔノ内ノ a_1ヲ含ム項ハ a_1 ト Δ_{a_1} ノ内ノアル項トノ積デアル.

逆ニ Δ_{a_1} ノ内ノ任意ノ項 Ⅰ ト a_1 トノ積ハΔノ内ノ一項デアル.

而シテ Ⅰ ト a_1Ⅰ トハ同符号ヲ有ス. 何トナレバ、両者ニ於テ inversion ノ数ガ等シイ. (∵ a_1ヲ初メニ於ケルノデアルカラ影響ハナイ)

∴ Δノ内ノ a_1ヲ含ム項ノ和ハ $a_1\Delta_{a_1}$ ニテ現ハサル.

Δノ内ノ a_2ヲ含ム項ハ a_2 ト其ノ minor Δ_{a_2} ニ於ケル一項トノ積ナリ.

Δ_{a_2} ノ任意ノ一項ト a_2 トノ積ハΔノ中ノ一ツノ項ナリ.

a_2Ⅰ′ ト Ⅰ′ トハ符号反対デアル. ∵ a_2Ⅰ′ニ於テ 2ガ1ノ前ニ在ルカラ inversion ガ一ツフエル.

Δノ内ノ a_2ヲ含ム項ノ和ハ ~~Δa_2~~ $-a_2\Delta_{a_2}$ ナリ.

同様ニΔノ内ノ　a_3ヲ含ム項ノ和ハ　$+a_3\Delta_{a_3}$ トナル.

2

(∵ 3ガ 1ト2ノ前ニキテ inversion ガ一ツフエルカラ)

同様ニ a_4 ヲ含ム Δ ノ凡テノ項ノ和ハ $-a_4\Delta_{a_4}$ ニテアラハサル、以下之ニ同ジ

$$\therefore\ \Delta = a_1\Delta_{a_1} - a_2\Delta_{a_2} + a_3\Delta_{a_3} - a_4\Delta_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n\Delta_{a_n} \quad \cdots (2)$$

(2)ナル公式ハ nth order ノ deter ヲ (n−1)th order ノ deter ニ導イタモノデアル.

Ex. 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Ex 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\times(-7) - 7\times(-68) + 2\times(-37)$$

$$= -42 + \cdots\cdots -$$

$$= 360.$$

Ex. 3. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \pm 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 4 - \cancel{8} + \cancel{8} - 16 - 6 + \cancel{24} - \cancel{24} - 54 + 27$$

$$= 39 - 76 = -37$$

Δハ又次ノ如ク展開シ得.

$$\Delta = a_1 \Delta_{a_1} - b_1 \Delta_{b_1} + c_1 \Delta_{c_1} - d \Delta_{d_1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} m_1 \Delta_{m_1} \qquad (3)$$

何トナレバ Δニ於テ Row ト Column トヲ交換シテオイテモヨイ.

(1)ニ於テ $A_1, A_2, A_3 \ldots$ 等ヲ如ノ element a_1, a_2, a_3 等ノ co-factor ト名ヅク. コノ時ハ $a_1, a_2, a_3 \ldots$ 等ノ co-factor ハ夫々其ノ element ニ関スル minor Δ ト絶対値ガ等シイ.

§11. If each element of any row or column of a deter. be the sum of 2 quantities, the deter. can be expressed as the sum of deter of the same order, each deter. having all the other row or column identical to that of the original Deter.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + A_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 + B_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 + C_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 + D_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + A_1)\Delta_{a_1+A_1} - (b_1 + B_1)\Delta_{b_1+B_1} + (c_1 + C_1)\Delta_{c_1+C_1} - (d_1 + D_1)\Delta_{d_1+D_1}$$

$$= a_1 \Delta_{a_1+A_1} - b_1 \Delta_{b_1+B_1} + c_1 \Delta_{c_1+C_1} - d_1 \Delta_{d_1+D_1} + A_1 \Delta_{a_1+A_1} - B_1 \Delta_{b_1+B_1} + C_1 \Delta_{c_1+C_1} - D_1 \Delta_{d_1+D_1}$$

$=$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cancel{b_4}\,a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ B_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ C_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ D_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

次ニ任意ノ column ガ二数ノ和ナル場合ヲ考フ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+A_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3+B_3 & b_4 \\ c_1 & \cancel{b}c_2 & c_3+C_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3+D_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)^2}{=} \begin{vmatrix} a_3+A_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3+B_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3+C_3 & c_1 & c_2 & c_4 \\ d_3+D_4 & d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} = (-1)^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_3 & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ B_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (-1)^2 \left\{ (-1)^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & A_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & B_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \right.$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & A_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & B_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Examples

(1)
$$\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -2{,}5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2.5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & -3{,}5 & -2{,}5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +2 \begin{vmatrix} -1 & -3.5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 4.5 = 9$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 1-\omega \\ \omega^2 & 0 & 1-\omega & \omega-\omega^2 \\ 1 & 1-\omega & \omega-\omega^2 & \omega^2-1 \end{vmatrix} = (1-\omega) \begin{vmatrix} 0 & 1-\omega \\ 1-\omega & \omega-\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\omega)^3$$

$$= -3\omega + 3\omega^2$$

$$= -3\omega(1-\omega)$$

812. A determinant is not altered in value by adding to all the elements of any column (or row) the same multiples of the corresponding elements of any number of other columns (or rows).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+pa_1+qa_2 \\ b_1 & b_2 & b_3+pb_1+qb_2 \\ c_1 & c_2 & c_3+pc_1+qc_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & pa_1 \\ b_1 & b_2 & pb_1 \\ c_1 & c_2 & pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & qa_2 \\ b_1 & b_2 & qb_2 \\ c_1 & c_2 & qc_2 \end{vmatrix}$$

$$= \quad'' \quad + p\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

コノ定理ハDeter.ノ計算ニ於テ其ノorderヲ小ニスル場合ニ使ハレル。非常ニ重要ナ定理デアル。

(5) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 3 & 5 & 15 \\ 8 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

15
24

$= 15 \begin{vmatrix} -4 & 8 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \underline{360}$

(6) $\begin{vmatrix} 13 & 4 & 1 & 15 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 11 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 16 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & a-b & a-b \\ 1 & a & b-a & 0 \\ 1 & a & 0 & b-a \end{vmatrix}$

$= a(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \end{vmatrix} = K a(a-b)^3$

$= -a(a-b)^3.$

ab^3-ay $K = -1$

Ex 1. $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$ ヲ証セヨ、

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex 2. $\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 4 & 1 & 15 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 11 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 16 & 13 & 3 \end{vmatrix} = 34 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 15 \\ 1 & 9 & 12 & 6 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 16 & 13 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 34 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 15 \\ 0 & 5 & 11 & -9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 12 & 12 & -12 \end{vmatrix} = 34 \begin{vmatrix} 5 & 11 & -9 \\ 1 & 7 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 34 \times 12 \begin{vmatrix} 5 & 11 & -9 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 34 \times 12 \begin{vmatrix} -4 & 2 & -9 \\ -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = K(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

$=$ $K=1$

(9) $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(c-a)(b-c)(M(a^2+b^2+c^2)+N(ab+bc+ca))$

(10) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & -c^2 & (a^2-c^2) \\ 1 & b^2 & (a^2-b^2) & b^2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & -c^2 & a^2-c^2 \\ 1 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 0 & -2c^2 & a^2-b^2-c^2 \\ 0 & a^2-b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -2c^2 & a^2-b^2-c^2 \\ a^2-b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix} = (a^2-b^2-c^2)^2$

Ex 3. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 6 & -13 \\ 7 & -2 & 1 & \cancel{5}\,7 \\ -7 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} -6 & 6 & -13 \\ 7 & 1 & 7 \\ -7 & 5 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -48 & 6 & -55 \\ 0 & 1 & 0 \\ -42 & 5 & -39 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 8 & 6 & 55 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 39 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 8 & 55 \\ 7 & 39 \end{vmatrix} = -6(312 - 385) = \underline{\underline{438}}$$

§13.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & p_1 & p_2 & p_3 \\ b_1 & b_2 & q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ m_1 & m_2 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ n_1 & n_2 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

オ注セン. p's q's l's m's n's ハ如何ナル値デモヨイ.

(11) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ a & c & 0 \\ b & 0 & c \end{vmatrix} = -2(-abc-abc)$

$= 4abc$

(12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = K, abc$

$= abc,$

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - b_1 a_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

附ノ方ハ

即チ、second order ト third order ノ Det ノ積ハ fifth order ノ一ツノ deter トシテアラハシ得.

次ニ二ツノ同ジ order ノ deter ヲ掛ケ合ハセバ共ト同ジ order ノ一ツノ Det トシテアラハシ得. (シカシ order ガチガッテモ同ジニ出来ル, 省リヘハ)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \cdots\cdots$$

次ニ二ツノ third order ノ Δ ヲカケテ一ツノ third order ノ Δ ニスルコトヲ示ス.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

α_2
---- α_1 ヲカケル (4)ヘヨセル.
-- β_2 = β_1 ヲカケル (4)ヘヨセル.
$\gamma_2 \gamma_1$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

Ex. $$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$$

Determinant ノ応用.

~~其~~一. 一次聯立方程式ヲトクコト. 即チ. 消去法 ナリ.

例ヘ. 一次ノ聯立方程式ノ solution ハ Determ.ノ方便ニヨッテ容易ニ之ヲ解キ得. 例ヘバ.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

如ナル三方程式ガ与ヘラレタル時. 次ノ関係ヲ得.

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b_1y & b_1 & c_1 \\ b_2y & b_2 & c_2 \\ b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1z & b_1 & c_1 \\ c_2z & b_2 & c_2 \\ c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$
$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{[d_1 b_2 c_3]}{[a_1 b_2 c_3]}.$$

同様ニ

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$\left(\because \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1y+c_1z & c_1 \\ a_2 & \text{——} & c_2 \\ a_3 & \text{——} & c_3 \end{vmatrix}\right.$ 列ヲ考ヘレバヨイ $\Big)$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & // & \end{vmatrix}}$$

未知数ノ数ガ四ツ以上ノ場合モ全ク同様ナリ.

Ex. 1.
$$x + 2y + 3z = 6$$
$$2x + 4y + z = 7$$
$$3x + 2y + 9z = 14$$

ヨッテ,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}}{//} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{//}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & -10 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -49 & -34 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & -10 \\ -49 & -34 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 49 & 34 \end{vmatrix} = -5 \times 4 = -20$$

$$\therefore x = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -20. \qquad \therefore y = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 14 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -20 \qquad \therefore z = 1.$$

Exer. 22.

$$x+y+z+u=1$$
$$ax+by+cz+du=k$$
$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2u=k^2$$
$$a^3x+b^3y+c^3z+d^3u=k^3.$$

$$\text{denominator} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

$\cancel{x=}$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$x\text{, 分子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & b & c & d \\ k^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

$$= (k-b)(k-c)(k-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$\therefore\ x = \frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

$$y\text{, 分子} = (a-k)(a-c)(a-d)(k-c)(k-d)(c-d)$$

$$y = \frac{(a-k)(k-c)(k-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)}$$

$$z\text{, 分子} = (a-b)(a-k)(a-d)(b-k)(b-d)(k-d)$$

$$z = \frac{(a-k)(b-k)(k-d)}{\cancel{(a-b)}\,(a-c)(b-c)(c-d)} \qquad u = \underline{\qquad\qquad}$$

上ノxニ於テ a ト b トヲ取リカヘルト、

$$\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} = \frac{(a-x)(x-c)(x-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)} = y$$

§15 消去法. Elimination.

未知数ノ数ヨリ、方程式ノ数ガ一ツ丈多イ場合ニハ、与ヘラレタル方程式中ノイヅレカ一ツヲ除キタル方程式ヨリ、未知数ノ値ヲ求メ、其ノ値ヲ先ニ除ケタ方程式ニ入レルト未知数ガ消去セラレル。

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

$$\begin{matrix}0=\\0=\\0=\end{matrix}\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1y & b_1 & c_1 \\ b_2y & b_2 & c_2 \\ b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=0}.$$

$$= 0 \qquad \therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

一般ニ未知数 $n-1$, 方程式ガ n ヶアル場合 即チ,

$$a_1x+b_1y+c_1z+\cdots\cdots+k_1u+l_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+\cdots\cdots+k_2u+l_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx+b_ny+c_nz+\cdots\cdots+k_nu+l_n=0$$

ヨリ. x, y, z, 等ヲ eliminate シタ結果ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 & l_2 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n & l_n \end{vmatrix}=0$$

ナリ.

Ex. 1. $ax^2+bx+c=0$. (1)

$a'x^2+b'x+c'=0$. (2)

ヨリ x ヲ消去スル時

$$0x^3+ax^2+bx+c=0$$
$$ax^3+bx^2+cx+0=0$$
$$0x^3+a'x^2+b'x+c'=0$$
$$a'x^3+b'x^2+c'x+0=0.$$

コレニ依テ,

x^3, x^2, x ヲ別々ノ未知数ノ如ク見ナシ,

三ツヲ消去スレバ.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ex 2. $ax+by+c=0$ (1)

$a'x+b'y+c'=0$. (2)

$xy+d=0$ (3)

ヨリ x, y ヲ消去スルニハ、

$$y = \frac{-d}{x}.$$

(1), (2) ニ代入シ、 $ax - \frac{bd}{x} + c = 0$,

$a'x - \frac{b'd}{x} + c' = 0$.

分母ヲ払ヘバ $ax^2+cx-bd=0$

$a'x^2+c'x-b'd=0$.

$ax^3+cx^2-bdx = 0$

$a'x^3+c'x^2-b'dx = 0$

ヨリ x^3, x^2, x ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 0 & a & c & -bd \\ a & c & -bd & 0 \\ 0 & a' & c' & -b'd \\ a & c' & -b'd & 0 \end{vmatrix} = 0$$

例1, 2ノ如キ消去ノ方法ヲ
Sylvester's method of elimination.

Chapter

Variables and Functions

§1. variables and constants

アル法則ニ従ッテ多クノ或ハ無数ニ多クノ異ナル数値ヲトルquantityハ之ヲvariable変数トナヅケ，通例 x, y, z 等デ以テ示サレル．而シテvariableガトル値ノtotality全体ヲ其ノvariableノdomain or interval 域ト名ヅク．
以下単ニvariableト称スル時ハreal variableヲ指スモノトス．

variablesニ対シテ始終一定ノ値ヲ取ルquantityハ之ヲconstantト名ヅケ通例 a, b, c 等デ以テ示サレル．
real variableガ二ツノvalue a ト b トノ間ノrational(number) & irrational 〃 〃 ノ全テヲトル時ハ其ノvariableハcontinuous連続ナリトイフ．
之ニ反シテvariableガ二ツノ値 a, b 間ノアル値ノミヲ取ル時ハ其ノvariableハdiscontinuous不連続ナリトイフ．
例ヘバ ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$
ニ於テ n ヲ一定数トスル時 r ノトリウル値ハ $1, 2, 3, 4, \cdots, n$.
故ニvariable r ハdiscontinuousデアル．
$\sqrt{x}$ ニ於テハ x ノトリウル値ハ 0 ——— $+\infty$ ノintervalデvariable x ハcontinuousデアル．
カクノ如キ場合其ノintervalヲアラハスニ $(0, +\infty)$ ヲ以テス．
又 $2x^2+x+5$ ニ於テ x ノintervalハ $(-\infty, +\infty)$ ナリ．
(以上通常ハ

$x^2+y^2=9$. ニ於テ、xノ interval ハ次ノ如シ。

$$y^2 = 9-x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9-x^2} \qquad 9-x^2 \geqq 0 \text{ デアレバヨイ。}$$

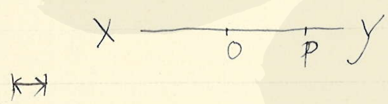
∴ $-3 \leqq x \leqq 3$

xノ interval = (−3, +3)

同様ニ y ナル variable ノ interval モ (−3, +3) ナリ。

§2. Geometrical representation of a variable.
Graphical 〃 〃 〃 〃 .

長サノ単位ヲ定メテオク。直線XY上ニ一点Oヲ origin トシテトル



次ニXY上ニ任意ノ一点Pヲトリ。
distance OP ノ = l (l: number)
PガOノ右ニアル時、点Pト +l トヲ結ビツケル。PガOノ左ノ時ニハ Pト −l トヲ結ビツケル。Origin Oト 0トヲ結ビツケル。カカル時ハ直線~~上ノ~~ XY上ノ任意ノ点ニハ一ツノ数ガ対応シ、異ナル点ニハ異ナル数ガ対応スル。逆ニ each number ニハ只、直線XY上ノ只一点ガ対応スル。カクノ如ク数ト直線上ノ点トノ間ニ one to one correspondency (unique 〃 〃)ガ成立スル。

∴ 直線上ノ点ヲ数ノ代表ト考ヘラレル。ヨッテ variable ノ interval ハ幾何学的ニハ点ノ集マリトシテアラハスコトガ出来ル。
於テ variable ノ interval ガ二ツノ値 a, b, ノ間ニ於テ continuous ナル時ハ其ノ geometrical image ハ ~~直線~~ 線分ニ

テアラムサル。

§3. Function 函数.

interval (a, b) ニ於ル variable x ノ各ノ値ニ対シ他ノ variable y ノ determinate value 確定値. ガ常ニ存在スル時ハ, y ハ interval (a, b) ニ於テ x ノ function ナリトイフ. 一般ニコノ関係ヲアラムスニ,

$y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \phi(x)$ 等ノ記号ヲ用フ.

コノ定義ニ依レバ. variable y ハ variable x ノ値ニ depend スルガ故ニ y ヲ dependent variable トイフ. x ノ方ヲ independent variable (or argument) トイフ.

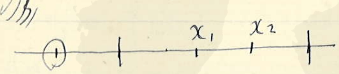
independent variable x ノ一ツノ値ニ対シテ其ノ function y ノ値ハ只一ツナルコトアリ. 例へバ $y = x^2 + a$ ニ於テ x ノ各々ノ値ニ対シテ y ノ値ハ只一ツナリ. カクノ如キ function ハ one valued fn. (一価函数) トイフ. 又. indep variable x ノ一ツノ値ニ対シ其ノ fn y ノ値ガ二ツ以上ナルコトアリ. 例へバ.

$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ ニ於テ $x = (-3, +3)$ ナル interval ノ任意ノ値ヲ与フル時, y ノ値ハ二ツ出テクル. カクノ如キ fn ハ之ヲ two valued fn ト名ヅク. 一般ニ, many valued fn ヲ考へルコトガ出来ル. 但シ, many valued fn ハ之ヲ数個ノ one valued fn トシテ研究シ得. 例へバ, $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ ハ $y = \sqrt{9-x^2}$ ト $y = -\sqrt{9-x^2}$ トシテ考へ得.

indep variable x ト共ノ fn. y トノ関係ガ一般ノ方程式
$f(x, y) = 0$ ナル形ニテ与ヘラレタル時ハ y ヲ x ノ
implicit function 陰函数トイヒ. $(ax^2+2hxy+by^2+2gx$
$+2fy+c=0, \quad x+y-a=0.)$
之ヲ y ニ関シテ解キタル形即チ $y=\varphi(x)$ ニテ与ヘラレタル時ハ
y ヲ x ノ explicit function 陽函数トイフ.
又 x ト y トガ第三ノ variable ノ方程ニヨッテ結ビツケラレタル
時, 例ヘバ $y = a\sin\theta$, $x = a\cos\theta$. a: constant
ニ於テ, x ト y トハ第三ノ変数 θ ニテ関係シテ居ル.
カクノ如キ場合 y ヲ x ノ parametric fn.
之ノ二式ヨリ θ ヲ eliminate スレバ

$$x^2+y^2=a^2. \quad y=\pm\sqrt{a^2-x^2}. \quad \begin{cases} y_1=\sqrt{a^2-x^2}. \\ y_2=-\sqrt{a^2-x^2}. \end{cases}$$

$y=f(x)$ ヲ x ノ或ル interval ニ於ケル one valued fn トセヨ.
今其ノ interval 中ノ二点, x_1, x_2 $(x_2 > x_1)$ ヲトリ,
例 $f(x_2) > f(x_1)$ ナル時ハ, $f(x)$ ハ其ノ



~~其~~ interval ニ於ケル increasing fn.
之ニ反シ, $f(x_2) < f(x_1)$ $f(x)$ ハ decreasing fn ナリトイフ.
increasing 及ビ decreasing fn ヲ総稱シテ monotone fn. トイフ.
今 $y=f(x)$ ガ或ル interval ニ於テ x ノ monotone fn ナル
時ハ y ノ一ツノ値ニ対シ x ノ只一ツノ値ガ定マル. ∴ x ヲ y ノ fn

ト考ヘ得、カクノ如ク考ヘタル fn ヲモトノ fn ノ $y=f(x)$ ノ inverse fn 逆函数ト称ス.

一ツノ fn ニ於テ independent variable x ノカハリニ $-x$ ヲ持チ来ル時. モトノ fn ト全ク相等シキ時ハ其ノ fn ヲ even fn トイフ.

例ヘバ $y = ax^4 + bx^2 + c$ ノ如キ. x ノ偶数冪ノミヲ含ムモノニ於テハ x ノカハリニ $-x$ ヲオクモ変化セズ 又 $y = \cos x$ ニ於テ. x ノカハリニ $-x$ ヲオクモ変ラナイ.

一般ニ $f(x) = f(-x)$ ナル時 $f(x)$ ハ even fn.

又 x ノカハリニ $-x$ トオク時ハ其ノ符号ノミ異ナル時. 之ヲ odd fn トイフ. ($f(x) = -f(-x)$)

例ヘバ $y = ax^3 + bx$ ニ於テ x ノカハリニ $-x$ ヲオケバ.
$-(ax^3 + bx)$

or $y = \sin x$ ノ如シ.

§4. geometrical representation of a function

$y = f(x)$ ヲ interval (a, b) ニ於ケル x ノ fn トスル. シカトキハ analytical geometry ノ principle ニ従ヒ.

$y = f(x)$ ノ independent variable x ノ一ツノ値及ビ fn ノ之ニ対応スル値ヲ平面上ノ一点 P ノ coordinate ト考ヘ得. カクノ如クシテ得ラルル点ノ集リヲ $y = f(x)$ ナル fn ノ graph トイフ.

即チ $x = a_1, a_2,$ 等ノ値ヲ与ヘタル時. $y = f(x)$ ハ b_1, b_2 等ノ値ヲトリ $y = f(x)$ ハ P_1, P_2 等ノ点ノ群ヲアラハス.

§5. Elementary functions 初等函数.

普通ノ Calculus ニ於テ取扱フ fn ヲ総括シテ elementary fn トナヅク.

(1) $y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots a_{n-1}x + a_n$

$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$: const's

n : pos. integer.

斯ノ type ノ fn ヲ x ノ rational integral fn or polynomial ト名ヅケル 其ノ special case トシテ $n=1$ ノ時ニハ

$y = a_0x + a_1$ 　コノ fn ノ graph ハ勿論直線ナリ.

故ニ一次ノ rational integral fn ヲ linear fn ト名ヅケルコトアリ.

(2) x ニ関スル二ツノ polynomial ノ quotient ヲ x ノ rational fn トナヅク 其ノ general type ハ

$$y = f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots b_{m-1}x + b_m}$$

(3) $f_0(x).y^n + f_1(x).y^{n-1} + f_2(x)y^{n-2} + \cdots f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0$

$f_0(x), f_1(x), \cdots f_{n-1}(x), f_n(x)$: rational integral fns of x

n : pos. integer

コノ方程式ヲ満スル y ヲ x ノ algebraic fn ト名ヅク.

前ノ (1) 及ビ (2) ハ algebraic fn ノ special case ナリ.

即チ コノ方程式ニ於テ $n=1$ トオケバ

$f_0(x).y + f_1(x) = 0$ 　or $y = -\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}$; rational fn of x. (2)

$n=1$; $f_0(x)=1$ トセバ $y+f_1(x)=0$ or $y=-f_1(x)$
: rational integral fn of x. (1)

而シテ代数函数ニ属セザル函数ヲ総称シテ,
Transcendental function 超越函数.

(4) The exponential function. 指数函数
a ヲ pos. const. トシ $y=a^x$
ナル式ニテ表ハサレタル fn ヲ exponential fn ト名ヅク.
exp. fn 中ニテ占要ナルモノハ
a ガ Napierian Logarithm ノ base トナリタル場合ノモノ
即チ, $y=e^x$ $e=2.71828\ldots$
特別ノ場合トシテ $x=0$ ノ時ニハ $y=1$.

(5) The logarithmic function 対数函数
exp. fn ノ inverse fn. 即チ, (i) $\log_a y = x$
$y=\log_a x$ ヲ log fn トナヅク. $x=\log_a y$
コノ base ガ e ノ場合ニハ略シテ $y=\log x$

(6) The Circular function. (trigonometric ,,)
$y=\sin x$, $y=\cos x$ 等

(7) Inverse ○ function (The cyclometric function)
$y=\sin^{-1}x$, $y=\cos^{-1}x$ 等.

Chapter

Theory of limits

§1. Limit of a variable 極限

一ツノ variable x ガ $a_0, a_1, a_2, \dots\dots$ 等ノ値ヲトルモノトシ.
a ヲ一定ノ数トシオク. 今 ε ヲ任意ニ与ヘラレ充分ニ小ナル pos. number トスル時

$$0 < |a - a_n| < \varepsilon$$

ニ適スル如キ a_n ナル値ガ存在スル時ハ variable x ハ a ナル limiting value 極限値ヲ有スルト称シ之ヲ記号ニテ

$$\lim x = a$$

ト書ク.

而シテ x ガ増加シテ a ニ近ヅク時ト減少シテ近ヅク時トアリ.
即チ x ガ a ニ近ヅクニ a ヨリ大ナル値ヨリ減少シテ近ヅク時ト、
a ヨリ小ナル値ヨリ増大シテ a ニ近ヅク時トヲ考ヘ得.
前ノ場合ニ於テハ right hand limit ヲ有ストイヒ、後ノ場合ニテハ left hand limit ヲ有ストイフ.

right hand lim ヲ有スル時ハ

$$\lim x = a+0 \longrightarrow 0 < a_n - a < \varepsilon$$

left hand lim 〃

$$\lim x = a-0 \longrightarrow 0 < a - a_n < \varepsilon$$

variable x ガ ~~positive~~ デ其ノ値ヲマシ、如何ニ大ナル pos. number ヲ考フルモ其レヨリ更ニ大ナル時ハ x ノ極限値ハ $+\infty$ plus infinity 無限大ニナルトイヒ、
同様ニ x ガ其ノ値ヲ減少シ、絶対値ノ如何ニ大ナル negative number ヲ考フルモ其ヨリ更ニ小サクナル時ハ x ノ極限値ハ $-\infty$ デアル

トイフ。
又ヲ
$$\left.\begin{array}{l}\lim x = +\infty \\ \lim x = -\infty\end{array}\right\}$$
トシテアラハス。

§2. Limit of a function

$f(x)$ ヲ x ノ or interval ニ於ケル fn トシ、a ヲ x ノ或ル値トシ、δ ヲ適当ニ選ブ時ハ（δ ノ値ハ ε ノ値ニ従ッテ適当ニトル）
$$0 < |x-a| < \delta$$
ニ適スル、x ノスベテノ値ニ対シ
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
（ε：任意ニ与ヘラレタ如何ニ小ナル plus ノ数デモヨイ）
ガ成立スル時ハ x ガ a ニ限ナク ~~近~~ 近ヅク時 $f(x)$ ハ A ニ converge スル（無限ニ近ヅク）トイフ。
之ヲ次ノ如クアラハス。
$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \left(\text{or } \lim_{x=a} f(x) = A.\right)$$

而シテ x ガ a ニ近ヅク際、a ヨリ大ナル値ヲヘテ a ニ近ヅク場合ニハ A ヲ $f(x)$ ノ right hand limit トイヒ、之ヲ
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$$
トシテアラハス。
又 x ガ a ヨリ小ナル値ヲヘテ a ニ近ヅク場合ニハ A ヲ $f(x)$ ノ left hand limit トイヒ、之ヲ
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$
トシテアラハス。

right hand limit ト left h. l トハ一般ニハ相等シケレドモ．
特別ノ場合ニハ異ナルコトアリ．

(例ヘバ： ~~tan~~ $\lim_{x\to+0} \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ //

$\lim_{x\to-0} \tan^{-1}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$. //

即チ fn ガ continuous ナラザル時ナリ)

例. $f(x)=x^3$ ナル fn ヲトル時

$|x| < \underline{0.01}\ \delta$ ナル時ハ

$|f(x)| < 0.000001$

$|x| < 0.001$ トスレバ，

$|f(x)| < \underbrace{0.000000001}_{\varepsilon}$ . . . .

∴ ε ヲ任意ニ定メタル小ナル positive number トシ，

$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ トスレバ

$|f(x)| < \varepsilon$. トナル.

カクノ如ク. $|x|$ ガ 0 ニ限リナク近ヅク時ハ $|f(x)|$ ~~ノ絶対値ハ~~ ドレ丈デモ 0 ニ近ヅク.

即チ x ガ 0 ニ converge スル時ハ $f(x)$ ハ 0 ニ亦 converge スル.

$$0 < |x-a| < \delta$$

ニ適スル x ノスベテノ値ニ対シ

$f(x) > G$ (G；任意ニ定メタル如何ニ大ナル plus ノ数デモヨイ)

ガ成立スル時ハ, x ガ a ニ converge スル時. $f(x)$ ハ $+\infty$ ニナル

ト稱シ之ヲ次ノ如クアラハス.

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

(例ヘバ $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ 　 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$)

同様ニ, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

xノ極限値ガ$+\infty$トシ, 今Nヲ適當ニ定メル plusノ數トスル時 $x>N$ ナル不等式ニ適スルxノ凡テノ値ニ對シ

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

ナル時ハ xガ$+\infty$ニナル時 $f(x)$ハAニconvergeスルト云ヒ,

之ヲ 　 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

同様, 　 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

同様ニ 　 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 　 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 　 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

§3. 極限値ニ關スル諸定理.

(1) 和ノLimit

二ツノfn.ノ和ノlimitハ各ノfn.ノlimノ和ニ等シ.

二ツノfn.ヲ 　 $f_1(x)$, $f_2(x)$ トシ

且. 　 $\lim\limits_{x\to a+0} f_1(x)=A_1$, 　 $\lim\limits_{x\to a+0} f_2(x)=A_2$

勿論二ツノ fn.ニ於テ x ノ interval ハ同一デアルトスル

定義ニヨリ $|f_1(x)-A_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, $0<x-a<\delta_1$

~~$f(x)$~~

$|f_2(x)-A_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, $0<x-a<\delta_2$.

今 δ_1 及ビ δ_2 中ノ小ナルモノヲ δ トシテオク.

然ルトキハ $|\{f_1(x)+f_2(x)\}-(A_1+A_2)|<\varepsilon$

$0<x-a<\delta$

$\therefore \lim_{x\to a+0}\{f_1(x)+f_2(x)\}=A_1+A_2$

$=\lim_{x\to a+0}f_1(x)+\lim_{x\to a+0}f_2(x)$

二ツノ fn. ノ和ノ lim ハ各 fn. ノ lim. ノ和ニ等シ.

又, $\lim_{x\to a+0}\{f_1(x)-f_2(x)\}=\lim_{x\to a+0}f_1(x)-\lim_{x\to a+0}f_2(x)$.

(2) 積ノ limit

二ツノ fn. ノ積ノ limit ハ each fn. ノ limit ノ積ニ等シ

$\lim_{x\to a+0}f_1(x)=A_1$: $\lim_{x\to a+0}f_2(x)=A_2$ トスル

定義ニヨリ.

$|f_1(x)-A_1|<\varepsilon$ $\quad 0<x-a<\delta_1$

$|f_2(x)-A_2|<\varepsilon$ $\quad 0<x-a<\delta_2$

$\delta_1\ \delta_2$ 中小ナル方ヲ δ トスル

次ニ $|f_1(x)f_2(x)-A_1A_2|=|f_1(x)\{f_2(x)-A_2\}+A_2\{f_1(x)-A_1\}|$

$< |f_1(x)|\varepsilon + |A_2|\varepsilon$

然ルニ　$-\varepsilon < f_1(x) - A_1 < \varepsilon$　(∵ $|f_1(x) - A_1| < \varepsilon$.)

∴　$|f_1(x)| - |A_1| < \varepsilon$.

$< \{|A_1| + \varepsilon\}\varepsilon + |A_2|\varepsilon$

$= \{|A_1| + |A_2|\}\varepsilon + \varepsilon^2$　　$0 < x - a < \delta$.

$< \varepsilon'$　(ε' ハドンナ小ナ数デモヨイ)

∴　$\lim_{x\to a+0} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x\to a+0} A_1 A_2 = \lim_{x\to a+0} f_1(x) \lim_{x\to a+0} f_2(x)$

Cor.　$\lim_{x\to a+0}\{\underset{\text{const.}}{C} f_1(x)\} = C \lim_{x\to a+0} f_1(x)$.

[3] 商ノlimit

二ツノfn ノ商ノlimit ハ 各fn ノLimitノ商ニ等シ。

但シ分母ノlimit ハ 0 ナラズトス.

(2) ト同ジ仮定ノモトニ

$\cancel{\left(\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{A_1}{A_2}\right| < \varepsilon \quad 0 < x - a < \delta\right)}$

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{A_1}{A_2}\right| = \left|\frac{A_2 f_1(x) - A_1 f_2(x)}{A_2 f_2(x)}\right| = \left|\frac{A_2\{f_1(x) - A_1\} - A_1\{f_2(x) - A_2\}}{A_2 f_2(x)}\right|$$

$< \frac{|A_2|\varepsilon + |A_1|\varepsilon}{|A_2|\{|A_2| - \varepsilon\}}$　($|A_2| - \varepsilon < |f_2(x)| < |A_2| + \varepsilon$.

$= \frac{\{|A_1| + |A_2|\}\varepsilon}{|A_2|^2 - |A_2|\varepsilon} < \varepsilon'$　　$0 < x - a < \delta$

∴　$\lim_{x\to a+0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim_{x=a+0} f_2(x)}$

(4) x ニ関スル三ツノ fn $\varphi(x)$, $f(x)$, $\psi(x)$ ニ於テ

$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$ ナル関係アリ. 且

$$\lim_{x\to a+0} \varphi(x) = \lim_{x\to a+0} \psi(x) = A$$

ナル時ハ $\lim_{x\to a+0} f(x)$

仮定ニヨリ $|\varphi(x)-A|<\varepsilon \quad 0<x-a<\delta_1, \quad 0<x-a<\delta.$

$|\psi(x)-A|<\varepsilon \quad 0<x-a<\delta_2,$

$\delta_1\ \delta_2$ 中ノ小ナルモノヲ δ トス.

シカル時ハ $-\varepsilon < \varphi(x)-A \leqq f(x)-A \leqq \psi(x)-A < +\varepsilon.$

$\therefore -\varepsilon < f(x)-A < +\varepsilon.$

$|f(x)-A| < \varepsilon. \quad (0<x-a<\delta)$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A.$$

§4. 前節ノ法則ヲ用ヰテ求ムルコトヲウル Lim ノ中ニテ広ク使用セラルルモノヲ示ス 31

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7182818\ldots\ldots$

(i) x; pos integer ナルニ m ニテアラハス.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}\frac{1}{m^3} + \cdots + m\frac{1}{m^{m-1}} + \frac{1}{m^m}$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots 3.2.1}{m!}\cdot\frac{1}{m^m}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right) \quad (A)$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{m!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (\because 1.2.3 \cdots k > 2^{k-1} \text{ for } k > 2)$$

コレハ $a = \frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$ $\cancel{m}\ n = m-1$ ナル G.P.ナリ.

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} < 3 \text{ for any } m.$$

又 $= \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = 1 + (m+1)\frac{1}{m+1} + \frac{(m+1)m}{2!}\frac{1}{(m+1)^2}$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\frac{1}{(m+1)^3} + \cdots + \frac{(m+1)m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)!}\frac{1}{(m+1)^{m+1}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \cdots + \frac{1}{(m+1)!}$$

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{m+1}\right) \quad (B)$$

AトBトヲ比較スル時ハ第二項以下ニ於テハBノ方ガAヨリ大ナリ.
且Bノ方ハ最後ノ一項丈多イ.

$\therefore \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$

次ニ. $m = 1$ $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2$

$\therefore 2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < 3$ for any $m > 1$

$\therefore \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ハ mガ増スニ従ガッテ増スガ3ヲ
超過セズ. 即チ. 2ト3トノ間ノ一ツノ極限ノ値ヲトル.

$\therefore \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ハ 2ト3トノ間ノ一ツノ極限

値ヲトル、コレヲ e ニテアラハス,

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots$$

コノ式ニヨリ. e ノ値ヲ小数点下幾位ノ所迄計算シウ.

$$\begin{aligned} = {} & 2 \\ & 0.5 \\ & 0.16666666666 \\ & 0.04166666666 \\ & 0.008 \end{aligned}$$

(2) x = pos. number not integer $\equiv m$.

コノ場合ニハ、$n < m < n+1$ ナル関係ヲ有スル

n (pos. integer) ヲ求ナウ.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n+1}.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

而シテ. $\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= e \times 1, = e.$

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\right\} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$\therefore \quad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ (〔4〕ヨリ)

(3) x: neg. number　　$x = -n$ (n: pos. number).

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

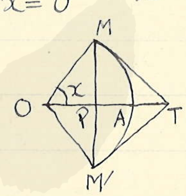
而シテ　$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$$

従ッテ x ガ real interval ニ於テ変化スル時ハ一般ニ

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

〔2〕 $\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x} = 1.$　x: radian　半径 1 トス.



MAM' ヲ arc

area OMPM' < area $O\overset{\frown}{MAM'}O$ < area OMTM'

即チ　OP·MP < OA·arc AM. < OM·MT.

今 MOT = x トスレバ

OP·MP < x < MT

$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x$.

然ルニ $\sin x > 0$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

然ルニ

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1. \qquad \lim_{x=0} \cos x = 1.$$

$$\therefore \quad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$

(i) n : pos. integer

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots\cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \left\{ x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots xa^{n-2} + a^{n-1} \right\}$$

各項ノ lim ノ和ヲトレバ

$$= na^{n-1}$$

(ii) n ; pos. fraction $\quad n = \frac{p}{q}$ (~~e.g.~~ p, q 正整数)

今 $x = z^q \quad a = b^q$ トオク. (即チ $x^{\frac{1}{q}} = z$, $a^{\frac{1}{q}} = b$)

然ル時ハ x ガ a ニ converge スル時ハ z ハ b ニ converge スル.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x-a} = \lim_{z\to b} \frac{z^p - b^p}{z^q - b^q}$$

$$= \lim_{z\to b} \frac{\dfrac{z^p - b^p}{z-b}}{\dfrac{z^q - b^q}{z-b}} = \frac{\displaystyle\lim_{z\to b} \frac{z^p - b^p}{z-b}}{\displaystyle\lim_{z\to b} \frac{z^q - b^q}{z-b}} = \frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}} = \frac{p}{q} b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q} a^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} = n a^{n-1}$$

(iii) n: negative　$n=-m$ ト オケバ. m ハ勿論 pos. ナリ.
従ッテ.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}.$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{a^m-x^m}{a^m x^m (x-a)} = -\lim_{x\to a} \left(\frac{x^m-a^m}{x-a} \cdot \frac{1}{x^m a^m} \right)$$

$$= -\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x-a} \lim_{x\to a} \frac{1}{x^m a^m}$$

$$= -m a^{m-1} \cdot \frac{1}{a^{2m}} = -m a^{-m-1} = n a^{n-1}.$$

§5 Order of infinitesimal. Order of infinity.

無限小ノ階級、無限大ノ階級.

$y_1 = f_1(x)$　　$y_2 = f_2(x)$　ナル x ノ same interval ニ
於ル二ツノ函アリ.

$$\lim_{x\to a} y_1 = \lim_{x\to a} f_1(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} y_2 = \lim_{x\to a} f_2(x) = 0.$$

ナル時ハ y_1 及ビ y_2 ナル二ツノ函ハ Lim ~~⋯~~ $x=a$ ナルトキ,
無限小ニナルトイフ.

二ツノ無限小ニナル ~~要~~ 数ヲ比較スル時ハ次ノ色々ノ場合ガ起ル

(1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = K$ (K; finite not zero.)

コノ場合ニハ $\lim f_1(x)$, $\lim f_2(x)$ トハ same order ノ infinitesimal ナリトス。

例ヘバ $\lim\limits_{x=0} \sin x = 0$ 及ビ $\lim\limits_{x=0} x = 0$

而シテ $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (finite not zero.)

∴ $\lim\limits_{(x=0)} \sin x$ ト $\lim\limits_{(x=0)} x$ トハ same order ノ infinitesimal.

又 $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x) = 0$ 　 $\lim\limits_{x=0} x^2 = 0$.

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x=0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$= \dfrac{1}{2}$. (finite not zero)

∴ 之ノ二ツハ same order ノ infinitesimal ナリ.

(2) $\lim\limits_{x=a} \dfrac{y_1}{y_2} = \infty$ (or $-\infty$)

コノ場合ハ $\lim y_1$ ハ $\lim y_2$ ヨリ order ノ低キ infinitesimal ナリトス。

$\lim\limits_{x=0} x = 0$, 　 $\lim\limits_{x=0} (ax^2 + x^3) = 0$

$$\lim_{x=a} \frac{x}{ax^2+x^3} = \lim_{x=0} \frac{1}{ax+x^2} = \infty.$$

(3) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2} = 0.$

コノ場合 $\lim y_1$ ハ $\lim y_2$ ヨリ higher order ノ infinitesimal ナリトイフ.

(4) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2^n} = k$ (finite not zero)

コノ場合, $\lim y_1$ ハ $\lim y_2$ ニ関シテ nth order ノ infinitesimal ナリトイフ.

$$\lim_{x=0} (1-\cos x) = 0 \qquad \lim_{x=0} x = 0$$

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ (finite not zero)}$$

$\lim x$ ヲ first order ノ infinitesimal トセバ,
$\lim(1-\cos x)$ ハ second order ノ infinitesimal ナリ.

$$\lim_{x=0} (ax^2+x^3)^{\frac{1}{5}} = 0.$$

$$\lim_{x=0} \frac{(ax^2+x^3)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}} = \lim_{x=0}\left(\frac{ax^2+x^3}{x^2}\right)^{\frac{1}{5}} = \lim_{x=0} (\cancel{ax}\ a+x)^{\frac{1}{5}}$$

$= a^{\frac{1}{5}}$ (finite not zero)

∴ $\lim_{x=0} x$ ニ関シテ $\frac{2}{5}$th order ノ infinitesimal ナリ.

Order of infinity.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x=a} y_1 = \infty \\ \lim_{x=a} y_2 = \infty\end{array}\right\} トス.$$

(1) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2} = K$ (finite not zero)

コノ場合ハ $\lim y_1$ ト $\lim y_2$ ハ same order ノ infinity ナリトイフ.

(2) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2} = \infty$ (or $-\infty$)

コノ場合ハ $\lim y_1$ ハ $\lim y_2$ ヨリモ higher order ノ infinity トイフ.

(3) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2} = 0$

コノ場合ハ Ly_1 ハ Ly_2 ヨリ lower order ノ infinity ナリトイフ.

(4) $\lim_{x=a} \frac{y_1}{y_2^n} = K'$ (finite not zero)

Ly_1 ハ Ly_2 ニ関シ nth order ノ infinity ナリトイフ.

Infinite series 無限級数

項数ノ無限ナル級数,

§1. 無限級数ヲアラハスニ $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ヲ以テシ u_1, u_2, u_3 等ヲ其ノ term 又項ト名ヅク.
簡便ノタメニ之ノ級数ヲ $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ or $\sum_1^{\infty} u_n$ or $\sum u_n$ トス
而シテ之ノ級数ノ 1st n terms ノ sum ガ n ガ無限ニナス時ニ
一定ノ有限~~値~~ナル値ヲトル時、其ノ級数ハ convergent ナリトイヒ、
然ラザル場合、即チ不定又ハ無限大トナル時之ヲ divergent トイフ,
（収斂）（発散）

　　弛 馳 去

但シ之ヲ別ツテ convergent 一定有限.
non-convergent { 不定 Oscillating series　$1-1+1-1+1-1\cdots\cdots$
　　　　　　　　{ 無限大 Divergent　〃

Convergent series ノ 1st n terms ノ sum ノ limit ヲ其ノ級数ノ和トイフ.

§2. 定理 無限級数ガ convergent ナルタメニ必要且充分ナル條件ハ $|{}_mR_n|$ ヲ任意ニ定メラレタル如何ニ小ナル正ノ数 ε ヨリモ小ナラシムルコトヲ得ルコトナリ.

$$S = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

ガ convergent デアルトコトハ謂ヒカヘバ一定且有限ナル極限値ヲ有スルトスル。其ノ極限値ヲ S トセバ n ノアル値及ビ之ヨリ大ナル n ノスベテノ値ニ対シテ S ト $S_n(=u_1+u_2+\cdots+u_n)$ ノ差ヲ任意ニトリタル如何ニ小ナル正数 ε ヨリモ小ナラシムルコトヲ得ル. 即チ

$$|S-S_n|<\varepsilon \qquad n\ge p$$

故ニ $|S-S_n|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad n\ge p'$

及ビ m ヲ如何ナル正ノ整数トスルモ,

$|S_{n+m} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n \geq p'$.

∴ コノ二ツノ不等式ヨリ,

∴ $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon \qquad n \geq p'$

コヽニ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n$

$S_{n+m} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+m}$.

従ツテ $S_{n+m} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+m}$

$\equiv {}_mR_n$

ニカヽキハ $|{}_mR_n| < \varepsilon. \qquad n \geq p'$

即チ級数ガ convergent ナレバ

$|{}_mR_n| < \varepsilon \qquad n \geq p'$

ト書キナホセバ $\lim\limits_{n=\infty} {}_mR_n = 0$,

次ニ $|{}_mR_n| < \varepsilon \quad n \geq p'$ ガ成立ツ時ハ級数ハ convergent ナルコトヲ証セン.

コノ條件ガ満足サルヽ時ハ $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon \quad n \geq p'$,

∴ ~~証~~ $|S_{p'+m} - S_{p'}| < \varepsilon$

又ヨヲカキカヘルト $|S_{p'}| - \varepsilon < |S_{p'+m}| < |S_{p'}| + \varepsilon$

$|S_{p'+m}| - |S_{p'}| < \pm\varepsilon$ or

($\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Lim}\ \varphi(x) = A \\ \mathrm{Lim}\ \psi(x) = A \end{array}\right\}\ \mathrm{Lim} f(x) = A$

ヲ Apply スレバ)

$|S_p| - \varepsilon < \cancel{|S_{p'+m}|} < |S_p| + \varepsilon$ トハ

ハεガ0ニ近ヅクニ従ツテ其ノ差ハ小トナリ極限ニ於テハ一致スル。

∴ $S_{p'+m}$ ト $S_{p'}$ トハ同一ノ極限値ニ近ヅク．

即チ級数ノ和ノ和ハ一定且有限ナル極限値ニ近ヅク．

§3 Convergent series ニ於テハ $\lim_{n=\infty} u_n = 0$

何トナレバ $u_n = S_n - S_{n-1}$

$= {}_1R_{n-1}$

前節ノ定理ニヨリ $\lim_{n=\infty} {}_1R_{n-1} = 0$ (∵ $\lim_{n=\infty} {}_mR_n = 0$)

即 $\lim_{n=\infty} u_n = 0$.

コノ逆ハ必ズシモ真ナラズ．

其ノ例ハアトデワカル．

§4. Convergency or divergency ハ其ノ級数ノ項ヲ有限数丈キリステヽモ影響ナシ

§5. 組合セノ法則，Law of Association

convergent series ニ於テ其ノ項ニ組合セノ法則ヲ適用スルモ和ニ影響ナシ．　(組合セノ法則 $a+b+c = a+(b+c)$ 等ヲイフ)

証． $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$

ヲ与ヘラレタル conv. series トス．

コノ series ノ項ニ組合セノ法則ヲ apply シテ得ラレタル級数ノ 1^{st} m terms ノ和ヲ S'_m，マヲ元ノ級数ノ 1^{st} n term ノ和ヲ

S_n トスル時、S'_m ガ少クトモ S_n ノ項ニアル凡テノ項ヲ含ム
ガ如ク m ノ大サヲ決定シ得.

$$(\underbrace{u_1}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u_2}_{\mathrm{II}} + \underbrace{(u_3+u_4)}_{\mathrm{III}} + \underbrace{u_5}_{\mathrm{IV}} + \underbrace{(u_6+u_7+u_8+u_9)}_{\mathrm{V}} + \underbrace{u_{10}}_{\mathrm{VI}} + \cdots$$

従ッテ $S'_m - S_n = {}_pR_n$

然ルニ与ヘラレタル級数ハ convergent ナルヲ以テ第二節ノ定理ニ
ヨリ　$|{}_pR_n| < \varepsilon$.　即チ、$\lim\limits_{n\to\infty} {}_pR_n = 0$.

$$\therefore \lim_{m=\infty} S'_m = \lim_{n=\infty} S_n$$

即チ、組合セノ法則ヲ適シテ得タル級数ノ和ハ元ノ級数ノ
和ニ等シ。

コノ定理ノ逆ハ必ズシモ真ナラズ.

例ヘバ　$\sum\limits^{\infty} b_n = \sum\limits^{\infty}(1-1) = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$
$= 0$　convergent.

次ニコノ括弧ヲ去リ得タル級数ヲ
$\sum\limits^{\infty} a_n$ ~~出~~　$= 1-1+1-1+1-1\cdots\cdots = \begin{cases}1\\0.\end{cases}$
oscillating　~~indeterminate~~.

Positive series

§6. 級数ノ凡テノ項ガ positive ナルモノヲ positive series ト名ヅケル。
其ノ級数ノ limiting value ハ $+\infty$ 或ハ $+$finite デアル。

§7. Theorem : If a series with positive terms be convergent, it converges to a determinate limit, independent of the arrangement or order of terms.

即チ law of commutation (交換) ヲ適用シ得。

証. $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$ (1)

ヲ posit. conv. series トス。コノ級数ニ於テ項ノ順序ヲ交換シテ作リタル new series ヲ

$$u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + u_{\alpha_3} + \cdots\cdots u_{\alpha_n} + \cdots\cdots \quad (2)$$

トスレバ、今元ノ級数ノ first n terms ヲ

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n$$

(2) ノ 1st m terms ヲ

$$S'_m = u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + u_{\alpha_3} + \cdots\cdots + u_{\alpha_m}$$

而シテ S'_m ノ内ニハ S_n ノ凡テノ項ヲ含ムガゴトク m ヲ決定シ得ラル。
而シテ (1) ナル級数ハ仮定ニヨリ convergent ナリ。∴ 任意ニ定メタル小ナル正数 ε ニ対シテ次ノ不等式ニ適スルガ如ク ~~数~~ μ ヲ決定シ得。

$$0 < S - S_n < \varepsilon \qquad n \geq \mu.$$

次ニ $S'_m - S_n = u_{\beta_{n+1}} + u_{\beta_{n+2}} + \cdots\cdots + u_{\beta_m} < u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots\cdots < \varepsilon$

従ッテ $S - S'_m < \varepsilon$.

∴ $\lim_{m=\infty} S'_m = S$

即チ(2)ナル級数ノ極限値ハ(1)ナル級数ノ極限値ニ等シ．即チ和ニ[illegible]
[illegible]ナイ．

§8. Theorem: Let $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ (1) denote a given positive series, and let $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$ (2) denote a positive series known to be convergent. The series (1) is convergent in any of the cases:

I When each term of (1) is less than the corresponding term of (2)

II When the ratio of each term of (1) to the corresponding term of (2) is less than some finite number K.

III When in (1) the ratio of each term to the immediately preceeding term is less than the corresponding ratio in (2).

証 I. (1)ナル級数ノ 1st n terms ノ sum ヲ S_n, (2)ナル級数ノ和ヲ A: finite。仮定ニヨリ $u_1<a_1$, $u_2<a_2$, $u_3<a_3\cdots$

∴ $S_n<A$

従ッテ(1)ナル級数ハ convergent ナリ.

II. ~~(1)ノeachノ~~ $\frac{u_1}{a_1}<K$, $\frac{u_2}{a_2}<K$ $\frac{u_3}{a_3}<K\cdots\cdots$

∴ $u_1<Ka_1$, $u_2<Ka_2$, $u_3<Ka_3$ $\cdots\cdots$

然ルニ $Ka_1+Ka_2+Ka_3\cdots\cdots$ convergent

∴ I ニヨリ(1)ナル級数ハ convergent ナリ.

III. ~~(1)ニ~~ $\frac{u_2}{u_1}<\frac{a_2}{a_1}$ $\frac{u_3}{u_2}<\frac{a_3}{a_2}$ $\frac{u_4}{u_3}<\frac{a_4}{a_3}$ $\cdots\cdots$

那チ $\frac{u_2}{a_2} < \frac{u_1}{a_1}$　$\frac{u_3}{a_3} < \frac{u_2}{a_2}$　$\frac{u_4}{a_4} < \frac{u_3}{a_3}$

$\frac{u_2}{a_2} < \frac{u_1}{a_1}$　$\frac{u_3}{a_3} < \frac{u_1}{a_1}$,　$\frac{u_4}{a_4} < \frac{u_1}{a_1}$ ......

之ニ $\frac{u_1}{a_1} = K$ トオケバ

$\frac{u_2}{a_2} < K$　$\frac{u_3}{a_3} < K$　$\frac{u_4}{a_4} < K$ ......

∴ II ニヨッテ ~~之~~ (1) ナル級数ハ convergent ナリ.

Ex: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots\cdots$ 1.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot2} + \frac{1}{2\cdot2\cdot2} + \cdots\cdots$ 2.

(2)ハ common ratio $= \frac{1}{2}$ ナル G.P ナリ.

∴ pos. conv. series ナリ.

I. $1=1$　$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$　$\frac{1}{2\cdot3} < \frac{1}{2\cdot2}$　$\frac{1}{2\cdot3\cdot4} < \frac{1}{2\cdot2\cdot2}$

之ハ 2ハ convergent ナルヲ以テ 1. ハ conv ナリ.

II. (1)ノ各ノ項ト(2)ノ之ニ対スル項トノ比ハ

$1,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2\cdot2}{3\cdot4},\ \frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot4\cdot5},\ \cdots\cdots\ \frac{2\cdot2\cdot2\cdots\cdots2}{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots n},$

其等比ハイヅレモ finite ナリ

従ッテ(1)ナル級数ハ convergent ナリ.

III. (1)ニ於テ each term ト其ノ直グ前ノ項トノ比及ビ(2)ノ之ニ対スル比トハ夫々次ノ如シ.

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots$ (1)

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \cdots\cdots$ (2)

二項ノ相隣スル比ハ下ノ方ガ上ノ方ヨリ大ナリ. ∴ (1)ナル級数ハ Convergent ナリ

§9. Theorem: Let $u_1+u_2+u_3 \cdots\cdots$ (1) denote a given positive series, and let $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ (2) denote a positive series known to be divergent. The Series (1) is divergent in any of the cases

I. When each term of (1) is greater than the corresponding term of (2)

II When the ratio of each term of (1) to the corresponding ~~term~~ term of (2) is greater than some finite ~~m~~ number k.

III. When in (I) the ratio of each term to the immediately preceeding term is greater than the corresponding ratio in (2).

証. 前定理ニ同ジ

§10. §8 及ビ §9 ノ定理ヲ適用スルニハ比較セラル可キ基本(標準)ノ級数ヲ必要トス, カクノ如ク比較ノ基準トナル可キ級数ヲ一般ニ auxiliary series ト名ヅク, 公比一ヨリ小ナル幾何級数ノ如キハ屢〻補助ノ級数トシテ用ヰラル, 補助級数中ニテ最モ必要ナルモノハ

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots$$

ナリ. コノ級数ハ $p>1$: convergent
$p\leq 1$: divergent

I: $p > 1$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \cdots\cdots \quad (1)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots\cdots + \frac{1}{15^p}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)'$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots\cdots$$

之ノ最後ノ級数ハ公比 $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ $\because p > 1$

ナル ~~geom~~ g.P.ナリ ∴ convergent 従ッテ与ヘラレタ級数ハ conv ナリ.

II: $p = 1$ ノ場合 given series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

ハ harmonic series

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots\cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots\cdots \text{ad. inf} = \infty$$

∴与ヘラレタル級数ハ divergent.

III: $p<1$. $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$ (1)

ト harmonic series

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ (2)

トノ corresponding term ヲ比較スル時ハ ~~各ノ比ハ~~ (1)ノ each term ハ (2)ノ先項ヨリ大ナリ.

∴ §8ノ(1)ノ場合ニヨッテ divergent ナリ.

(§3ノ逆ノ成立セナイ一ツノ例デアル)

Ex. 1. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$ (1)

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots$ (2)

(2)ハ §10ノII級数ニ於テ $p=2>1$ ノ場合 ∴ convergent ナリ.

次ニ (1)ト(2)トノ項ヲ比較スルニ (1)ノ each term ハ (2)ノ対応スル項ヨリ小ナリ. ∴ §8ノ(1)ノ場合ニヨリ(1)ハ conv. ナリ.

Ex 2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ (1)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ (2) harmonic series

(1)ト(2)トノ対応スル項ノ比ヲトル.

$1,\ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \cdots\cdots\ \frac{n}{2n-1}.$

之等ノ比ハイヅレモ $\frac{1}{2}$ ヨリ大ナリ. ∴ 問題ノ級数ハ div ナリ.

Ex 3. $u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}$ ノ conv. div. ヲ吟味スルコト.

$(\frac{3}{2}+\frac{5}{10}+\frac{7}{30}+\frac{9}{68}+\cdots\cdots$

$$u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}=\frac{n(2+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \qquad \frac{2n+1}{n^2} \qquad \frac{1}{n}$$

然ルニ $\frac{1}{n^2}$ ハ $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\frac{1}{n^2}+\cdots$ ノ nth term ナリ. 然ルニ一般項ノ $\frac{1}{n^2}$ ナル級数ハ conv. ナリ.
然シテ右辺ノ比ハ n ノ凡テノ値ニ対シ finite デ無限大ナル時ハ 2 トナリ. §8 ノ II ニヨリ. 問題ノ級数ハ convergent ナリ.

一般ニ $u_n = \frac{f(n)}{\varphi(n)}$ 但シ $f(n)$, $\varphi(n)$ ハ n ニ関スル integral fn トス.
$f(n)$ ノ次数ヨリ $\varphi(n)$ ノ次数ガ 2 以上超過スル時ハ u_n ナル級数ハ conv. ナリ.
然ラザレバ diver ナリ.

§11. Theorem: The pos. series, $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ is convergent if the ratio of each of its terms to the immediately preceeding term is less than some number r which itself is less than 1.

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots(1)$$
$$u_1+u_1r+u_1r^2+\cdots\cdots(2)$$

(2) ナル級数ハ r ヲ公比トスル等比級数. ∴ convergent.

$$\frac{u_2}{u_1} < \frac{u_1 r}{u_1} \qquad \frac{u_3}{u_2} < \frac{u_1 r^2}{u_1 r} \qquad \frac{u_2}{u_1} < r < \frac{u_1 r}{u_1}$$

∴ (1) ハ conv. §8 (3)

然シテ上ノ比ガ 1 ニ等シキカ或ハ 1 ヨリ大ナル時ハ級数ハ div. ナリ.

$\frac{u_n}{u_{n-1}}$ ナル比ヲ test ratio トナヅケル, コノ級数ガ conv.

or diver ヲ test スルカラデアル.

n ガ ∞ トナル時 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ ナル比ガ一定ノ limit K ニ到着スルトニ K<1. 其ノ級数ハ convergent デ K>1 時ハ diver. K=1 ノ時ハ converg. div ハ不明ナリ.

例. $\frac{3}{5}+\frac{3.5}{5.10}+\frac{3.5.7}{5.10.15}+\cdots\cdots$

ナル級数ハ conv デアルカ?

$$u_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots 2n+1}{5\cdot10\cdot15\cdots\cdots 5n}.$$

従ッテ, $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{2n+1}{5n}=\frac{2+\frac{1}{n}}{5}$ $\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{2}{5}<1$

∴ 与ヘラレタ級数ハ convergent ナリ.

正ノ項ト負ノ項トヲ有スル級数.

§12. 定理 A series which has both positive and negative terms is convergent if the corresponding positive series is convergent.

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ positive, negative ノ term ヲ有スル級数トス.

(1) ノ negative term ノ符号ヲカヘテ得タル級数ヲ

$$u_1'+u_2'+u_3'+\cdots\cdots\cdots(2)$$

$+ n + m = n(m+1)$

トス 然ルトキハ $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+m}|$

$$\leqq u'_{n+1}+u'_{n+2}+\cdots\cdots u'_{n+m}$$

今 n ヲ充分大ニスルトキハ

$$u'_{n+1}+u'_{n+2}+\cdots\cdots+u'_{n+m}<\varepsilon \quad (\because \text{converg})$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+m}|<\varepsilon \quad n\geqq p$$

∴ (2) ガ conver. ナルトキハ (1) モ convergent ナリ.

§13. A series whose terms are alternately positive and negative is convergent if each term is numerically less than the term which preceed it, and if the limit of the nth term is zero.

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-\cdots\cdots(1)$$

$$u_1>u_2>u_3>u_4>\cdots\cdots$$

$$\lim_{n=\infty} u_n=0$$

$$S_{2p}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots+(u_{2p-3}-u_{2p-2})+(u_{2p-1}-u_{2p}) \quad (2)$$

$$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots-(u_{2p-2}-u_{2p-1})-u_{2p}. \quad (2)'$$

S_{2p} ハ p ノ increase スルニ従ヒ其ノ値ヲマス 然レドモ (2)' ニヨッテ其ノ値ハ u_1 ヲ超過セズ ∴ p ガ無限ニナルトキニ S_{2p} ハ一定ノ極限ノ値ニ converg スル筈

$$\lim_{p=\infty} S_{2p}=\alpha, \quad \text{トス}$$

次ニ $S_{2p-1} = u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots-(u_{2p-2}-u_{2p-1})$

$=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots(u_{2p-3}-u_{2p-2})+u_{2p-1}$ (3)

ヨリテ S_{2p-1} ハ p ノ増スニ従ヒ decrease スルコトモ (3) ニヨリテ u_1-u_2 ヨリ小トナルコトナシ。∴ p ガ無限大トナル時ニ一定ノ極限ノ limit ニ converg スル

$\lim_{p=\infty} S_{2p-1}=\beta$. トス。

次ニ $S_{2p}-S_{2p-1}=u_{2p}<\varepsilon \quad p\geq\mu$

∴ $\lim_{p=\infty} S_{2p} = \lim_{p=\infty} S_{2p-1}$.

i.e. $\alpha=\beta$.

ヨリテ一ナル級数ハ convergent ナリ。

§14 Absolutely convergent series, conditionally convergent series.

converg. series ニ於テ其ノ negative term ノ符号ヲカヘテモ尚 converg. ナル時ハ其ノ series ヲ absolutely conv. S. トイフ。例ヘバ

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\cdots$

ハ前節ノ定理ニヨリ convergent ナリ。負数ノ一ノ項ノ符号ヲカヘル時ハ

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$

ハ common ratio $\frac{1}{2}$ ナル g.P ナリ。∴ converg.

∴ 此ノ級数ハ Abs. Conv. S. ナリ

conv. series ニ於テ 一ノ項ノ符号ヲカヘテ得タル級数ノ divergナル時ハ其ノ級数ヲ conditionally conv. S トナヅク. 例ヘバ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

ハ前節ノ定理ニヨリ convergナリ.
コノ Series ノ一ノ項ノ符号ヲカヘテ得タル級数ハ Harmonic S デ divergナリ.
∴ モトノ級数ハ Cond. Conv. S ナリ.

§15 定理 The limiting value of a conditionally convergent series depends upon the order of terms and the series may assume any finite value K by a proper arrangement of terms

交換ノ法則ガ成立セナイ.

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ヲ conditionally convergent series トス.
(1)ナル級数ノ内ノ positive term ノミヲトリ出シテ作リタル級数ヲ

$$u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+u_{\alpha_3}+\cdots\cdots \qquad (2)$$

又(1)ノ negative term ノミヲトリ出シテ其ノ絶対値ヲトリテ作リタル級数ヲ

$$|u_{\beta_1}|+|u_{\beta_2}|+|u_{\beta_3}|+\cdots\cdots \qquad (3)$$

然ルニ(2)及ビ(3)ハ共ニ divergent デアル ∵ (2)及ビ(3)ヲ共ニ convergトスレバ

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\cdots\cdots \quad (4)$$

(ハdivergデアルベキニ) ハ其ノ和ニナルヲ以テconvergentナルベキナリ. シカル(4)ハ假定ニヨリdivergデアル. ∴ (2), (3) ハ共ニconvergトハナリ得ズ.

又, (2), (3) ノ内イヅレカ一ツノミガdivergナルコトモアリ得ズ; (1) ノlim. valueヲ S トシ (2) 及 (3) ノlim. value夫々 t, u トスレバ

$$S = t - u$$

コレニ於テ u ノミガdivergトスレバ $-\infty$ トナリ
t ノミdivergトスレバ $+\infty$ トナル.
假定ニヨリ, S ハfinite, 即チ假定ニ矛盾スル。
∴ (2) ト (3) トハ共ニdivergデアル.

今(2)ナル級数ヲ群ニ分チ $G_1, G_2, G_3, \cdots\cdots G_n, \cdots\cdots$
トシ, (3)ナル級数モ亦群ニ分チ $G_1', G_2', G_3', \cdots\cdots G_n', \cdots\cdots$
トシ, シカモ $G_1, G_2 \cdots$ 及ビ $G_1', G_2' \cdots\cdots$ ハ次ノcondition
ニ適スルガ如ク決定スルモノトス

G_1ヲ定ムルニハ $G_1 > K$, $\quad G_1 - u_{g_1} \leqq K$
但シ u_{g_1} ハ G_1 ナル群ノ内ノ最後ノ項トス.

G_1'ヲ定ムルニハ $G_1 - G_1' < K$. $\quad G_1 - (G_1' - u_{g_1}') \geqq K$
但シ u_{g_1}' ハ G_1' 中ノ最後ノ項トス.

次ニ $G_1 - G_1' + G_2 > K \quad G_1 - G_1' + (G_2 - u_{g_2}) \leqq K$.
但シ, u_{g_2} ハ G_2 ナル群ノ内ノ最後ノ項トス

$$G_1 - G_1' + G_2 - G_2' < K, \quad G_1 - G' + G_2 - (G_2' - u_{g_2}') \geqq K$$

但、$u_{g_2'}$ ハ G_2' ノ内ノ最後ノ項トス、

. . . .

. . . .

今 $G_1 - G_1' + G_2 - G_2' + \cdots\cdots + G_n \equiv \Sigma G$,

$G_1 - G_1' + G_2 - G_2' + \cdots\cdots + G_n - G_n' \equiv \Sigma G'$

トスレバ、 $\Sigma G > K$, $\Sigma G' < K$

$\Sigma G - u_{g_n} \leq K$. $\Sigma G' + u_{g_n'} \geq K$.

即チ、 $\Sigma G - u_{g_n} \leq K \leq \Sigma G' + u_{g_n'}$.

然ルニ $\lim\limits_{n\to\infty} u_{g_n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_{g_n'}$

$\therefore \lim\limits_{n=\infty} \Sigma G = \lim\limits_{n=\infty} G' = K$.

∴ condi. conv. series ニ於テ項ノ順序ヲ適当ニ交換スレバ任意ノ finite value ヲ取ラシメルコトヲ得.

Ex. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots\cdots (1)$

$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots$

$1 > S > \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{4\cdot5} - \cdots$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > S > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

or $\frac{5}{6} > S > \frac{7}{12}$.

次ニ S ナル級数ノ order ヲカヘテ

$S' = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6}$

$+ \cdots\cdots - \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}\right) - \frac{1}{2n+2} + \cdots$

コノ級数ハ alternating series. 其ノ絶対値ハ

次第ニ少トナル　$(\because \frac{1}{2n} > \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} > \frac{1}{2n+2}$

$16n^2+16n+3 > 8n^2+6n+8n^2+2n$

$8n+3 > 0$

$\therefore$ converg ナリ. 且 $\frac{4}{3} > S' > \frac{5}{6}$

$\therefore \quad S' > S.$

実際 $S = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$\frac{S}{2} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots$

$\frac{3S}{2} = \left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\cdots\cdots = S'$

即チ　$\frac{3}{2}S = S'.$

Convergence of Power series. 冪級数

§16: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots$ (1)

ナル形ノ級数ヲ power series ト名ヅケル.

a_0, a_1, a_2 等ハ x ニ無関係ナル constant ナリ. 而テ

$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots \quad +|a_{n-1}x^{n-1}|+\cdots$ (2)

ノ conver. ナル時ハ (1) ハ勿論 converg ナリ.

コノ場合ニハ (1) ナル級数ヲ absolutely conv. series ト云フ

$\boxed{\text{定理}}$ If when $x=b$ every term of $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ (1) is numerically less than some finite number c, when $|x|<|b|$ the series (1) is absolutely convergent.

仮定ニヨリ　$|a_nb^n| < c$　for every n

$\therefore$ $|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < c\left|\frac{x}{b}\right|^n$ for every n.

從テ $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots\ldots\ldots$ (2)

ノ each term ハ $c + c\left|\frac{x}{b}\right| + c\left|\frac{x}{b}\right|^2 + \ldots\ldots$ (3)

(3) ノ corresponding term ヨリ小ナリ. 然ルニ (3) ハ $\left|\frac{x}{b}\right|$ ヲ common ratio トスル g. Power. S. ナリ.

$\therefore$ $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$ or $|x| < |b|$ ナル時ニ converg ナリ. 其ノ時ニハ (2) ハ converg デアル, 從ツテ (1) ハ absolutely convergent デアル.

例ヘバ $1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \ldots$

ナル power series ハ $|x| < 1$

$\because$ $x = 1$ トオケバ. $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + \ldots\ldots$

Cor 1. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$

ニ於テ $x = b$ トシタル時 converg ナル時ハ $|x| < |b|$ ハ absolutely converg ナリ.

Cor 2. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$

ニ於テ $x = b$ トシタル時 divergent ナル時ハ $|x| > |b|$ ハ 勿論 divergent トナル.

$\because$ $|x| > |b|$ ノ時 conv トスルト, $x = b$ ノ時 conv トナル.

§17. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots$ (1)

(1) ガ $|x| > \mu$ ナル時ニ diverge シ

$|x| < \mu$ ナル時ニ converge スル時. μ ナル一定數ヲ limit of converg ト名づケル.

$\boxed{\text{定理}}$ If in $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$, the ratio $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

approaches a definite limit μ, then μ is the limit of conv.

$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots$

ハ $\lim\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1$ ナル時ニハ converg デアル.

即チ. $|x|<\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ナル時ニ conver デアル

同様ニ $|x|>\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ナル時ニ diverg デアル

故 $\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\equiv\mu$ トオケバ μ ハ limit of conv ナリ.

Ex.1; $1+\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3\cdot5}{5\cdot10}x^2+\dfrac{3\cdot5\cdot7}{5\cdot10\cdot15}x^3+\cdots\cdots$

ノ limit of conv ヲ求メヨ.

(n+1)th term; $\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdot15\cdots\cdots5n}x^n$

(n+2)th term; $\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(2n+3)}{5\cdot10\cdot15\cdots5n\cdot(5n+5)}$

$\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\left|\dfrac{5n+5}{2n+3}\right|=\dfrac{5}{2}$; limit of conv.

Ex.2; $\cdots\cdots+2^3x^{-3}+2^2x^{-2}+2x^{-1}+1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+\cdots$

ハ x ノ如何ナル値ニ対シテ conv デアルカ?

$1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots$ ハ $\dfrac{x}{3}$ ヲ公比トスル

geom. pow. series ナリ。

而シテ其ノ lim. of conv. ハ

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{3^n}{3^{n+1}}\right| = 3 = M. \quad \cancel{\therefore |x|<3}$$

∴ $|x|<3$ ノ時ニハ conv.

次ニ $2x^{-1}+2^2x^{-2}+2^3x^{-3}+\dots\dots$

ハ $2x^{-1}$ ヲ公比トスル等比級数ナリ。

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{2} = M$$

∴ $|x^{-1}|<\frac{1}{2}$ or $|x|>2$ ノ時 conv.

∴ 与ヘラレタル級数ハ $2<|x|<3$ ナル時 conv ナリ。

Ex 3: $\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{(1+x)^2}+\frac{3x^3}{(1+x)^3}+\dots\dots$

$$\left|\frac{x}{1+x}\right| < \frac{n}{n+1} < 1$$

ハ x ノ如何ナル範囲ニ於テ conv ナリヤ.

$$\lim\left|\frac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}}{\frac{nx^n}{(1+x)^n}}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)x}{n(1+x)}\right| < 1$$

$x>0$　$x<0$

$$\left|\frac{x}{1+x}\right|<1 \qquad |x|<|1+x|$$

§13: The exponential, logarithmic, binomial series.

1; $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ $[=e^x]$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n!}\div\frac{1}{(n+1)!} = n+1$$

∴ $M=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$: limit of convergence

∴ Expo. Series ハ all finite value of x ニ於テ

convergent ナリ.

2; $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$ $[=\log(1+x)]$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \pm\frac{1}{n} \div \left(\mp\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n+1}{n}$$

∴ $\mu = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$;

∴ $|x|>1$ ナル時ハ此ノ series ハ diverg.

$|x|<1$ ナル時ハ convergent.

$x=1$ ノ時ハ alternating series デ絶対値ハ漸減シ、トナル ∴ converg ナリ.

$x=-1$ ノ時ハ $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots\cdots$ トナルカラ diverg ナリ.

$n+2<m<n-1$

3; $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ $[=(1+x)^m]$

正整数ノ時ニハ項ノ数ハ $m+1$ ナリ.

ソノ他、分数又ハ負数ノ時ハ無限項トナル.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \div \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n+1}{m-n}$$

∴ $\mu = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.

∴ $|x|>1$ 時ハ binomial series ハ diverg ナリ.

$|x|<1$ ノ時ハ converg.ナリ.

§9 二ツノ無限級数ノ積ニ関スル定理.

If 2 series $\sum_0^\infty a_i$ and $\sum_0^\infty b_i$ be absolutely convergent and S and T their limits respectively, then the series $\sum_0^\infty c_i = U$ where $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0$ is ~~at~~ also converg and has the limiting value ST.

$$\sum_0^\infty c_i = c_0 + c_1 + \cdots\cdots$$
$$= a_0 b_0$$
$$+ a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$+ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots\cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0.$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_0 b_{n+1}$$

$$S_n T_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots b_n)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$$
$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$$
$$+ (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_1)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots + a_n b_n$$

$$U_{2n} - S_n T_n = \underline{a_{n+1}}(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$
$$+ \underline{a_{n+2}}(b_0 + b_1 + b_2 + \cdot + b_{n-2})$$
$$+ \underline{a_{n+3}}(b_0 + b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-3})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{2n}(b_0)$$

$$+b_{n+1}(a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1})$$
$$+b_{n+2}(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$
$$+b_{2n}(a_0)$$
$$= a_{n+1}T_{n-1}+a_{n+2}T_{n-2}+\cdots\cdots+a_{2n}T_0$$
$$+b_{n+1}S_{n-1}+b_{n+2}S_{n-2}+\cdots\cdots b_{2n}S_0$$

而シテ $|T_m| \leq |b_0|+|b_1|+\cdots\cdots+|b_{n-1}| \equiv h$
$$m \leq n-1$$
$$|S_m| \leq |a_0|+|a_1|+\cdots\cdots+|a_{n-1}| \equiv k.$$
$$m \leq n-1$$

故ニ $|u_{2n}-S_nT_n| \leq |a_{n+1}||T_{n-1}|+|a_{n+2}||T_{n-2}|+\cdots$
$$+|a_{2n}||T_0|+|b_{n+1}||S_{n-2}|+\cdots\cdots$$
$$+|b_{2n}||S_0|$$
$$< |a_{n+1}|h+|a_{n+2}|h\cdots\cdots$$
$$+|a_{2n}|h+|b_{n+1}|k+|b_{n+2}|k+\cdots$$
$$+|b_{2n}|k.$$
$$=\{|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots\cdots+|a_{2n}|\}h$$
$$+\{|b_{n+1}|+|b_{n+2}|+\cdots\cdots+|b_{2n}|\}k$$

然ルニ假定ニヨリ
$\sum_0^\infty a_i$ 及ビ $\sum_0^\infty b_i$ ハ共ニ absolutely conv. ナリ

ヨリテ
$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{j=n}|a_{n+j}| < \varepsilon \\ \sum_{j=1}^{j=n}|b_{n+j}| < \varepsilon\end{array}\right\} n \geq p$$

$$\therefore\ |U_{2n} - S_n T_n| < (h+k)\varepsilon \qquad n \geq p.$$

hおよびkハ勝手ナルヲ以テ

$$|U_{2n} - S_n T_n| < \varepsilon' \qquad n \geq p.$$

$$\therefore\ \lim_{n=\infty} |U_{2n} - S_n T_n| = 0.$$

$$\underset{n=\infty}{L}\, u_{2n} = \underset{n=\infty}{L}(S_n T_n)$$
$$= L S_n\, L T_n$$
$$U = S \cdot T$$

§20 Binomial Series ; Exponential S. ; Logarithmic S.

mガ正ノ整数ナル時ハ、

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots (1)$$

ハfinite series ニシテ　其ノsumハ $(1+x)^m$ ニテアラハサル。

コヽニテ、mガ正ノ整数ナラザル場合ニハ、(1)ナル級ハ

$|x| < 1$ 　ノ時 conv. ナルコトモ証セリ。

コノ場合(1)ナル無限級数ハ conv. ニシテ、其ノ和ハ $(1+x)^m$

ニテアラハサルヽコトヲ証セン。

(1)ナル級数ハ之ヲ mノ fn トモ考ヘラル。

之ヲ $\phi(m)$ ニテアラハス。即チ

$$\phi(m) \equiv 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots (2)$$

従ッテ

$$\phi(n) \equiv 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots (3)$$

$$\phi(m+n) \equiv 1 + \frac{m+n}{1!}x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}x^2 + \frac{\qquad}{3!} \cdots (4)$$

簡便ノ為ニ　$\phi(m) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots\cdots$

$$\phi(n) = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \cdots$$
$$\phi(m+n) = 1 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + (m+n)_3 x^3 + \cdots$$

次ニ $\phi(m+n) = \phi(m)\,\phi(n)$

ナルコトヲ証スベシ。

$\phi(m)$ 及ビ $\phi(n)$ ガ $|x|<1$ ノ時ハ absolutely conv. デアル、従ッテ

兩者ノ無限級數ノ掛算ノ法則ヲ適用シ得。

即。
$$\phi(m)\,\phi(n) = 1 + (m_1+n_1)x + (m_2 + m_1 n_1 + n_2)x^2 + \cdots + (m_r + m_{r-1} n_1 + \cdots + m_1 n_{r-1} + n_r)x^r \cdots$$

(然ルニ $m_r + m_{r-1} n_1 + \cdots + m_1 n_{r-1} + n_r = (m+n)_r$)

ナル故、
$$= 1 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots + (m+n)_r x^r + \cdots$$
$$= \phi(m+n)$$

コノ方法ヲ今一度クリカヘセバ
$$\phi(m)\,\phi(n)\,\phi(p) = \phi(m+n)\,\phi(p) = \phi(m+n+p)$$

一般ニ $\phi(m)\,\phi(n) \cdots \phi(t) = \phi(m+n+\cdots+t)$

次ニ Binomial series ニ於テ $|x|<1$ ノ時ハ m ノ値如何ニ関セズ $(1+x)^m$ ニテ其ノ和ヲアラハスコトヲ得ルコトヲ証明セン。

先
$$\left.\begin{aligned}\phi(0) &= 1.\\ \phi(1) &= 1+x.\end{aligned}\right\}$$

I　m: pos. integer
$$\phi(m) = \phi(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{m\ \text{terms}}) = \underbrace{\phi(1)\,\phi(1)\cdots\phi(1)}_{m\ \text{factor}}$$
$$= (\phi(1))^m = (1+x)^m.$$

II. m: pos. fraction $= \frac{p}{q}$ say

$$\left[\phi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \underbrace{\phi\left(\frac{p}{q}\right)\phi\left(\frac{p}{q}\right)\cdots\cdots\phi\left(\frac{p}{q}\right)}_{q \text{ factors}} = \phi\Big(\underbrace{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\cdots+\frac{p}{q}}_{q \text{ terms}}\Big)$$

$$= \phi(p) = (1+x)^p$$

$$\therefore \phi\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}}.$$

$$\phi(m) = (1+x)^m$$

III. m: nega. number $= -s$

$$\phi(-s)\phi(s) = \phi(-s+s) = \phi(0) = 1.$$

$$\therefore \phi(-s) = \frac{1}{\phi(s)} = \frac{1}{(1+x)^s} = (1+x)^{-s}.$$

$$\phi(m) = (1+x)^m.$$

系. $(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \cdots$

$|x| < |a|.$

$$\because (a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = a^m\left(1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{x^2}{a^2}+\cdots\right.$$

$$= a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \cdots\cdots$$

Exponential S.

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots = e^x. \qquad (1)$$

ヲ証セン.

(1)ハxノ凡テノ有限ノ値ニ對シ conv.ナルコトヲ証セリ

今 $x=1$ トオキタル時ノ値ヲ e 字ニテアラハス

即チ, $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots = 2.71828.$

二次ニ(1)ヲxノf_nト考へ

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \quad (2)$$

$$f(y) = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\cdots \quad (3)$$

(2)ト(3)トニ二ツノ無限級数ノ掛算ノ法則ヲapplyスレバ

$$f(x)\cdot f(y) = 1 + \left(\frac{x}{1!} + \frac{y}{1!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!}\frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots$$

$$= f(x+y)$$

コノ方法ヲrepeatスレバ

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z) = f(x+y)\,f\,z = f(x+y+z)$$

3ツヨリ大ナル場合モ同様ナリ.

次ニ $f(0) = 1,$
$f(1) = e,$

I x: pos. int.

$$f(x) = (f(1))^x = e^x$$

II x: pos. frac. $= \frac{p}{q}$

$$\cancel{f(x) =} f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{(f(1))^p} = e^{\frac{p}{q}}$$

$$f(x) = e^x$$

III x: neg. number $= -s$

$$f(-s)\,f(s) = f(0) = 1.$$

$$\therefore f(-s) = \frac{1}{f(s)} = \frac{1}{e^s} = e^{-s}.$$

$f(x)=e^x$

此 exponential s. ハ x ガ正ノ整数、分数、負数ノ仲共ノ何レハ

e^x ヲ与ヘラレテ得。

Logarithmic S.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$e^{-x}=$

a ヲ任意ノ正数トスルトキハ

$$a=e^{\log_e a}$$

$\log_e a=\log_e a$

$a=e^{\log_e a}$

従ツテ $a^x=e^{x\log a}$

上ノ expon. S. ニ於テ x ノカハリニ $x\log a$ ヲオケバ

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{x^2(\log a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log a)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$L\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(\log a)^n}{n!}\times\frac{n+1!}{(\log a)^{n+1}}=L\left|\frac{n+1}{\log a}\right|=\infty$$

次ニ $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots=\log(1+x)$ ヲ証セン,

x ニ関スル函数ニ於テ a ノカハリニ $1+x$, x ノカハリニ y トオケバ

$$(1+x)^y=1+\frac{y\log(1+x)}{1!}+\frac{y^2\{\log(1+x)\}^2}{2!}+\frac{y^3\{\log(1+x)\}^3}{3!}+\cdots\cdots \quad (1)$$

$|x|<1$ ノトキハ $(1+x)^y$ ハ二項定理ニヨリ.

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{2!}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)及ビ(2)ニ於ケル y ノ coefficient ヲ equate スレバ

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots\cdots=\log(1+x)$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}.$$

or $m - mx = n + nx$

$$\boxed{x = \frac{m-n}{m+n}} < 1$$

$$\log \frac{m}{n} = 2\left(\frac{m-n}{m+n} + \frac{(m-n)^3}{3(m+n)^3} + \cdots\cdots\right)$$

Computation of Natural logarithms. (Napierian logarithms)

loga series $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \cdots$ (1)

(1)ニ於テ x ノカハリニ $-x$ トオク,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \cdots \quad (2)$$

(1)−(2) ~~log(1+x) − log~~

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right)$$

コノ式ニ於テ $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ トオク. ($n + nx = n+1 - nx - x$, $x = \frac{1}{2n+1}$)

or $x = \frac{1}{2n+1}$

$$\log\frac{n+1}{n} = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right) \quad (3)$$

(3)ニ於テ ~~書~~ $n=1$ トスレバ,

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\cdots\right) = 0,6918$$

$n=2$ トオケバ ($\log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2$ ヨリ)

$$\log 3 = \log 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \cdots\right) = 1,0986$$

$n=3$ トオケバ

$$\log 4 = \log 3 + 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \cdots\right) = 1,$$

or $\log 4 = 2\log 2$ ヨリ

$$\log 5 = \log 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right)$$

カクノ如クシテ n ガ任意ノ正ノ整数ナル log ヲ計算シ得.

Computation of common logarithm.

Natural logarithm ノ表ヨリ common log ノ表ヲ作ルニハ次ノ関係式ヲ利用ス.

$\log_e n = \log_e a^x.$

$n = a^x.$

$$\log_a n = \boxed{\frac{\log_e n}{\log_e a}} = x. \quad x = \log_a n$$

コノ式ニ依テ $\log_e n$, $\log_e a$ ハ已ニ知ラル、從ツテ任意ノ數 a ヲ底トスル n ノ對數ガワカル、特ニ $a=10$ トシタモノガ common log ナリ、

∴ n 數ノ常用對數ヲ得ルニハ n ノ自然對數ニ $\frac{1}{\log_e 10}$ ヲ乘ジテ得.

$$\frac{1}{\log_e 10} = 0.43429 \cdots\cdots$$

一般ニ $\frac{1}{\log_e a}$ ヲ modulus ト名ヅケル, common log ノ時ノ

mod ハ $\frac{1}{\log_e 10}$.

$$\log_{10} 2 = 0.6918 \times 0.4342 = 0.301031$$

Continuity of Function

Def. $y=f(x)$ ニ於テ x ノ interval ヲ (α,β) トシ、a ヲ (α,β) ノ内ノ一ツノ値トス。今 ε ヲ任意ニトリタルトキ如何ニ小サナル plus ノ数ト スルモ $\delta(>0)$ ヲ適当ニ定メ得ルトキハ

$$|\sigma| \leqq \delta \quad ニ適スル\ \sigma\ ノ凡テノ値ニ於テ$$

$$|f(a+\sigma)-f(a)|<\varepsilon$$

ガ成立スルトキハ $f(x)$ ナル function ハ $x=a$ ニ於テ continuous ナリ ト称ス。換言スレバ

$$\lim x = a\pm 0$$

ニ於テ $f(x)$ ノ極限値ガ $f(a)$ ニ等シキトキハ $f(x)$ ナル function ハ $x=a$ ニ於テ continuous ナリトイフ。

之ヲ式ニテアラハセバ

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\lim_{x=a\pm0} f(x) = f(a)}$$

而シテ上ノ定理ニアテハマラナイ点ヲ point of discontinuity トナヅク。

其ノ場合ヲ細別スレバ次ノ如シ。

(1) right hand limit ト left h.l. トガ等シカラザルトキ。即チ。

$$\lim_{x=a+0} f(x) \neq \lim_{x=a-0} f(x)$$

例ヘバ $f(x)=\dfrac{ae^{\frac{1}{x}}+b}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ ニ於テ

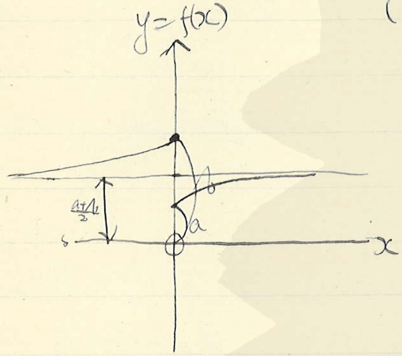
$$\lim_{x=+0} f(x) = \lim \frac{ae^{\frac{1}{x}}+b}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim \frac{a+be^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = a.$$

$$\lim_{x=-0} f(x) = \lim \frac{ae^{\frac{1}{x}}+b}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x=-x_1} \frac{ae^{-\frac{1}{x_1}}+b}{e^{-\frac{1}{x_1}}+1} = b$$

∴ 与ヘラレタル函数ハ $x=0$ ~~即チ Origin~~ ニ於テ discontinuous

（図ヲ示セバ左ノ如シ．

$x=\pm\infty$ ノ中ハ fn ノ値ハ $\frac{a+b}{2}$.



〔II〕 $\lim_{x=a+0} f(x)$ 及ビ $\lim_{x=a-0} f(x)$ ノ内ドチラカ一ツガ $+\infty$ 又ハ $-\infty$ ニナル場合．

例ヘバ $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ ニ於テ $x-a=h>0$ トオケバ，

$f(a+h)=e^{\frac{1}{h}}\ (>G)$ ハ h ヲ充分小ニスレバ如何ニモ大ナル

数 G ハ如何程大ニテモ可シ

∴ $\lim_{h=+0} f(a+h)=\infty$

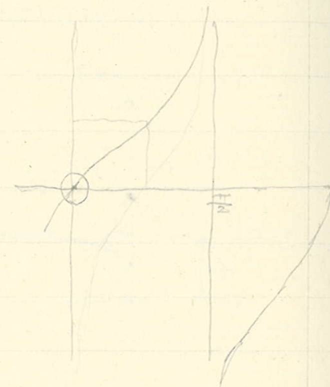
次ニ $h<0$ $h=-h_1$ トセバ $h_1>0$.

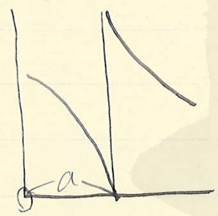
從ッテ $e^{\frac{1}{h}}=e^{-\frac{1}{h_1}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{h_1}}}<\frac{1}{G}$

即チ $f(a-h)<\frac{1}{G}$.

∴ $\lim_{h=-0} f(a+h)=0$.

∴ 両側ノ Limit ガ一ツハ $+\infty$ 他ハ 0 トナル．從ッテ $x=a$ ニ於テ discontinuous ナリ．





$f(x)=\tan x$ ニ於テモ.

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty.$$

$x=\frac{\pi}{2}$ ニ於テ discontinuous ナリ.

[III] $\lim_{x=a+0} f(x)$ 及ビ $\lim_{x=a-0} f(x)$ ノ内少クトモ一ツガ極限値ヲ有セザル場合, 即チ後ノ場合ニハ其ノ点ニ於テ fn ハ discont ナリトイフ.

例ヘバ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

コノ fn ハ $x=0$ ナル点ニ於テ一定ノ極限値ヲ有セズ.

故ニ其ノ点ニ於テ discont ナリ.

$$\cancel{\lim_{x=a+0} f(x)=f(a)\ ;\ \text{funct}}$$

∵ $0<\frac{1}{(2n+1)\pi}<\frac{1}{2n\pi}<\varepsilon$ ニ適スルガ如キ, n ナル正整数ヲ見出スコトヲ得ル. 従ッテ

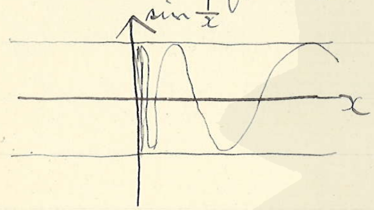
$$\frac{1}{2(n+1)\pi}\le x\le\frac{1}{2n\pi}$$

ナルガ如ク x ヲ変化セシムル時ハ $\sin\frac{1}{x}$ ハ

$\sin 2(n+1)\pi$ $\cancel{\sin\frac{1}{x}}$ $\sin 2n\pi$ ノ間ニ於テ

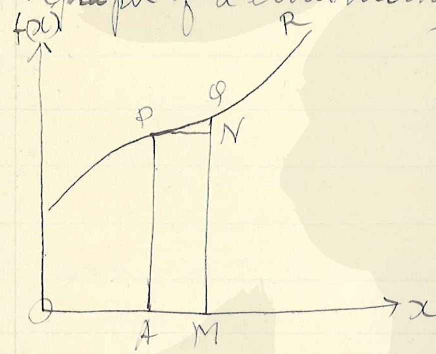
~~ナルガ如ク~~ 変化シ, 其ノ間ニ於テハ sin fn ノ一ツノ period ヲ完全ニ経過ス. 故ニ $\sin\frac{1}{x}$ ナル fn ハ x ガ連続的ニ 0 ニ向フ時ハ $+1$ ト -1 トノ間ノ凡テノ値ヲ週期的ニトル. 故ニ一定ノ極限値ヲ有セズ.

∴ 与ヘラレタル fn. $x=0$ ニテハ discont.



interval (α, β) ニ於ケル fn. ヲ $y=f(x)$ ガ其ノ interval ノ内ノイヅレノ点ニ於テモ continuous ナル時ハ fn. ハ其ノ interval (α, β) ニ於テ continuous ナリトイフ。

§2. Graph of a continuous fn.



PQR ハ continuous fn $y=f(x)$ ノ graph

$OA = a$, 從ッテ $AP = f(a)$

$AM = \delta$, $MQ = f(a+\delta)$

從ッテ $QN = |MQ - AP|$

$= |f(a+\delta) - f(a)| < \varepsilon$.

但シ $|\delta| \leq \delta$

∴ $\overline{PQ} < \overline{PN} + \overline{NQ}$

$< \delta + \varepsilon$

~~∴ PN~~

∴ $\overline{PQ}$ ナル distance ハ δ 即チ AM ヲ小ニスルニ從ッテイクラデモ小ニ出来ル. 之ニ從ッテ考ヘレバ Q 点ハ点 P ニ極メテ接近シテ居ルト考ヘラレル。

∴ continuous fn ノ graph ハ其ノ interval ニ於テ一ツノ curved line ヲアラハシテ居ル.

conti. fnノ一二ノ例.

1. $f(x) = Ax + B$,　　A, B: const

$$|f(x+\sigma) - f(x)| = |A(x+\sigma) + B - Ax - B| = |A\sigma| < \varepsilon$$

$$|\sigma| < \frac{\varepsilon}{|A|} \equiv \delta$$

(εヲ任意ニ定ムルモ、δハ任意デハナクεニ従ッテ必然ニ定マル)

∴与ヘラレタfnハxノ凡テノ有限ノ値ニ対シテハcont.

2. $f(x) = \sin x$

$$|f(x+\sigma) - f(x)| = |\sin(x+\sigma) - \sin x| = \left|2\sin\frac{\sigma}{2}\cos\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)\right|$$

$$\cancel{\leqq} < 2 \times \frac{|\sigma|}{2}\left|\cos\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)\right|$$

$$\leqq |\sigma| < \varepsilon$$

($\delta = \varepsilon$ ニトレバヨイ.)

∴与ヘラレタfnハxノ凡テノ有限ノ値ニ対シテcont.

§3. 二ツノcont. fnノsum, product, quotient:

1. 和ノ場合.

$f_1(x), f_2(x)$ヲ　$x = a$ ニ於テcontナリトスレバ, 定義ニヨリ

$$\lim_{x=a\pm 0} f_1(x) = f_1(a) \qquad \lim_{x=a\pm 0} f_2(x) = f_2(a)$$

従ッテ $$\lim_{x=a\pm 0}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \lim_{x=a\pm 0} f_1(x) + \lim_{x=a\pm 0} f_2(x)$$

$$= f_1(a) + f_2(a)$$

∴二ツノcont. fnノ和ハ又一ツノcont fnデアル.

2、積ノ場合.

$$\lim_{x=a\pm 0}\{f_1(x)\cdot f_2(x)\} = \lim_{x=a\pm 0} f_1(x) \lim f_2(x)$$
$$= f_1(a)\, f_2(a)$$

cont

こゝニ二ツノ fu ノ積ハ又一ツノ cont fu ナリ.

3、 $$\lim_{x=a\pm 0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \frac{f_1(a)}{f_2(a)}$$

故ニ二ツノ cont. fu ノ商ハ又一ツノ cont fu ナリ.
但シ考フル所ノ点ニ於テハ分母ハ0ナラズトス.

(23) $\dfrac{\sqrt{a^2-(x+h)^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{h} = \dfrac{a^2-(x+h)^2-a^2+x^2}{h\left(\sqrt{a^2-(x+h)^2}+\sqrt{a^2-x^2}\right)}$

$= \dfrac{-2hx-h^2}{h(\qquad)} = \dfrac{-2x-h}{(\qquad)}$

$\lim\limits_{h=0} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$

(24) $\mathrm{L}\,\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\,\mathrm{L}\,\dfrac{a^h-1}{h} = a^x \underset{y=\infty}{\mathrm{L}} \dfrac{1}{y\log_a\left(\frac{1}{y}+1\right)}$

$a^h-1=\dfrac{1}{y} \qquad a^h=\dfrac{1}{y}+1 \qquad h=\log_a\left(\dfrac{1}{y}+1\right),$

$h\to 0 \qquad y\to\infty$

$= a^x\,\dfrac{1}{\log_a\left(\frac{1}{y}+1\right)^y}$

$= a^x\,\dfrac{1}{\log_a e},$

$= \dfrac{a^x}{\log_a e}.$

$= a^x\log a.$

(25) $\mathrm{L}\,\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \mathrm{L}\,\dfrac{\log_a\frac{x+h}{x}}{h}$

$= \dfrac{1}{x}\,\mathrm{L}\,\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$

$= \dfrac{1}{x}\log_a e,$

$\tan + \tan$
$1 - \tan \tan$

(20) $f(x) = \sec x$

$$\frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos(x+h) \cos x} = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$\lim_{h=0} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

(21) $f(x) = \operatorname{cosec} x$

$$\frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h} = \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$\lim_{h=0} = -\cos x \frac{1}{\sin^2 x}$$

(22) $f(x) = x^n$,

$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{x=x+h} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$

$$\lim_{x=x+h} = n x^{n-1}$$

c034-088挟込

(19) $f(x) = \cot x$.

$$\frac{\left(\frac{\cot x + \cot h}{1 - \cot x \cot h}\right) - \cot x}{h} = \frac{-2\cot x + \cot h(1-\cot x^2)}{h(1-\cot x \cot h)}$$

$$= \frac{-2\cot x}{h(1-\cot x \cot h)} - \frac{\cot h\,(1-\cot x^2)}{h\;(1-\cot x \cot h)}$$

$$\lim_{h=0} = \frac{-2\cot x}{h(1-\cot x)} - \frac{(1+\cot x)}{}$$

$$=$$

$$\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h} = \frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

(16) $f(x) = \sin x$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$\lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \underline{\cos x}$$

(17) $f(x) = \cos x$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$\lim_{h=0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \underline{-\sin x}$$

(18) $f(x) = \tan x$

$$\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{\tan x + \tan h - \tan x + \tan^2 x \tan h}{(1 - \tan x \tan h)h}$$

$$= \frac{\tan h}{h} \frac{(1 + \tan^2 x)}{(1 - \tan x \tan h)}$$

$$\lim_{h=0} = \underline{\sec^2 x}$$

$= \log 3$

$$= \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}$$

$$-\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$$

(9) $$\lim_{x=a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x=a}\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}(x-a)}$$

$$= \lim_{x=a}\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a)-0}{\frac{1}{2}(x-a)}$$

$$= 1$$

(10) $$\lim_{x=\infty} x\sin\frac{a}{x} = \lim_{x=\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{a}{x}}\cdot a = a$$

(11) $$\lim_{x=0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x=0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

(12) $$\lim_{x=\infty}\frac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x=\infty}\frac{a+be^{-2x}}{1+e^{-2x}} = a.$$

(13) $$\lim_{x=-\infty}\frac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x=-\infty}\frac{ae^{2x}+b}{e^{2x}+1} = b.$$

(14) $$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^{x}$$

$$= e^{x}$$

(15) $$\lim_{x=1}\left\{\log(x^{\frac{3}{2}}-1)-\log(x^{\frac{1}{2}}-1)\right\}$$

$$= \lim_{x=1}\left\{\log\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right\} = \lim_{x=1}\left\{\log(x+x^{\frac{1}{2}}+1)\right\}$$

(4) $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

$= \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+1}{2} = \dfrac{1}{2}$,

(5) $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$

$= \dfrac{1}{6} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{2n+1}{n} = \dfrac{1}{3}$,

(6) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \lim\limits_{x=0} \dfrac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$

$= \lim\limits_{x=0} \dfrac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

(7) $\lim\limits_{x=\infty} (\sqrt{a+x}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{a+x-x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{a}{\sqrt{a+x}+\sqrt{x}} = 0$.

(8) $\lim\limits_{x=\infty} (\sqrt{1+x+x^2}-x) = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x}$

$= \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+1} = \dfrac{1}{2}$,

(9) $\lim\limits_{x=a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim\limits_{x=a} \dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a\,(\sin x+\sin a)}$

$= \lim$

Examples I.

(1) $\lim_{x=0} \frac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}$

$$\frac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5} = \frac{x(3+x)}{2-x+4x^2}$$

$$\lim_{x=0} \frac{x(3+x)}{2-x+4x^2} = \frac{0}{2} = 0,$$

(2) $\lim_{x=\infty} \frac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^2}+4}{\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x}},$

$$= \frac{4}{-0} = -\infty.$$

(3) $\lim_{n=\infty} x^n$, where $|x|<1$. n: pos. int.

$$\frac{\lim_{n=\infty} x^n - \lim_{n=\infty} 1}{\lim_{n=\infty}(x-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1}$$

$$\frac{\lim_{n=\infty} x^n - 1}{x-1} = n$$

$$\lim_{n=\infty} x^n = nx-n+1.$$

13. $F(u) = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} = y,$

$$\log\frac{1+u}{1-u} = 2y$$

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2y},$$

$$1+u = e^{2y} - e^{2y}u$$

$$u = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

(10) $y = \frac{x-3}{2x+5}$ $\quad 2xy + 5y - x + 3 = 0$

$x = \frac{3+5y}{1-2y},$

(11) $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ $\quad ycx - ay - ax - b = 0$

$x = \frac{ay+b}{cy-a},$

$x = \varphi(y) = \frac{ay+b}{cy-a}$

$\therefore \varphi(x) = \frac{a(x)+b}{c(x)-a},$

(12) $f(x) = \log_e(x + \sqrt{x^2+1}) = y,$

$e^y = x + \sqrt{x^2+1},$

$(e^y - x)^2 = x^2 + 1$

$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1.$

$2xe^y = e^{2y} - 1,$

$x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y}$

$= \frac{2}{2\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{y(y-1)(y-2)}{6} \cdots\right)}$

(4) $\phi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\phi(\sin x) = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$

$= 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$\phi(\cos x) = 2\cos x\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin 2x$

(5) $f(x) = \log_a x$

$f(x) - f(y) = \log_a x - \log_a y$

$= \log_a \frac{x}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f(x) + f(y) = \log_a x + \log_a y$

$= \log_a xy = f(xy)$

(6) $\varphi(x) = a^x \qquad \varphi(y)\varphi(z) = a^y a^z = a^{y+z} = \varphi(y+z)$

(7) $F(x,y) = axy + by + cx + k = 0$

$y = \frac{-cx-k}{ax+b}.$

(8) $xe^{-\frac{y}{4}} = a \qquad e^{-\frac{y}{4}} = \frac{a}{x}$

$\log_e \frac{a}{x} = -\frac{y}{4} \qquad y = -4\log_e \frac{a}{x}$

(9) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y - \alpha = 0.$

$\sin^{-1}y = \alpha - \sin^{-1}x = \sin(\alpha - \sin^{-1}x)$

$= \sin\alpha\cos(\sin^{-1}x)$

x

$-x\cos\alpha = \sin\alpha \pm \sqrt{1-x^2}$

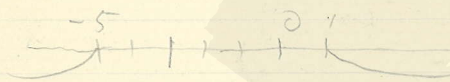
(1) (i) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}=\sqrt{(x-1)(x+5)}$

$x\geqq 1$ & $x\geqq -5$

又ハ $x\leqq 1$ $x\leqq -5$

ナルニ $\sqrt{\ }$ ノ中ハ正又ハ0トナル

∴ $x\geqq 1$ 又ハ $x\leqq -5$



(ii) $f(x)=\tan x$ x が任意ノ実数ノ中或ス $-\infty<x<\infty$

(iii) $f(x)=\sin^{-1}x$ $-1\leqq x\leqq 1$.

(iv) $f(x)=\tan^{-1}x$ x が任意ノ実数ノ中或ス $-\infty\leqq x\leqq\infty$

(v) $f(x)=\sec^{-1}x$ $x\geqq 1$ or $x\leqq -1$

(2) $F(x)=3-\sqrt{x}$ $f(y)=y^2+4$

$F[f(y)]=3-\sqrt{y^2+4}$

$f[Fx]=(3-\sqrt{x})^2+4=x-6\sqrt{x}+13$.

$f[f(y)]=(y^2+4)^2+4=y^4+8y^2+20$

$F[F(x)]=3-\sqrt{3-\sqrt{x}}$.

(3) $y=f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

$$z=f(y)=f[f(x)]=\frac{1+y}{1-y}=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\frac{2}{1-x}}{\frac{-2x}{1-x}}$$

$$=\frac{-1}{x}$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\ [=0]$$

ガニツノ x, y ニ関スル一次式ノ因数ニ分解セラルル為ニハ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$ ナルベキコトヲ証セヨ,

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')=0$$

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$$

$$a(x+By+C)(x+B'y+C')=0,$$

$$ax^2+a(B+B')xy+aBB'y^2$$
$$+a(C+C')x+a(BC'+B'C)y$$
$$+aCC'=0,$$

$$\begin{cases} (B+B') = 2\dfrac{h}{a} \\ BB' = \dfrac{b}{a} \\ (C+C') = 2\dfrac{g}{a} \\ (BC'+B'C) = 2\dfrac{f}{a} \\ CC' = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

$$B=\frac{h\pm\sqrt{h^2-b^2}}{a}$$
$$B'=\frac{\mp}{\ ''\ }$$
$$C=\frac{g\pm\sqrt{g^2-c^2}}{a}$$
$$C'=\frac{\mp}{a},$$

x ニツイテトケバ,

$$x=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

根号ノ中ガ完全平方ナルベキ條件ヲ求ムレバヨイ,

$$(h^2+ab)y^2+2(gh-af)$$
$$+(g^2-ac)$$

$$(gh-af)^2-(h^2+ab)(g^2-ac)$$
$$=0,$$

$$-2afgh+a^2f^2$$
$$-g^2ab+ach^2+a^2bc$$
$$=0$$

$$-2fgh+af^2-g^2b+h^2c+abc$$
$$=0.$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc+hfh$$

$$(h\pm\sqrt{h^2-b^2})(g\mp\sqrt{g^2-c^2})+(h-\sqrt{h^2-b^2})(g\pm\sqrt{g^2-c^2})$$

$$\frac{h}{a}\pm\sqrt{\frac{h}{a}}\qquad \frac{h\pm\sqrt{h^2-b^2}}{a}$$

$$2(gh-\sqrt{h^2-b^2}\sqrt{g^2-c^2})=2af.$$

$$(k+10)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (2+k) & 3 & 4 \\ 1 & 2 & (3+k) & 4 \\ 1 & 2 & 3 & (4+k) \end{vmatrix} = 0$$

$$(k+10)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$$

$k^3 = 0$

$k = -10$

$$(1+k)x + 2y + 3z = 4$$
$$x + (2+k)y + 3z = 4$$
$$x + 2y + (3+k)z = 4$$
$$x + 2y + 3z = 4+k.$$

$$\begin{vmatrix} 1+k & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2+k & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3+k & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -(4+k) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2k & -3k & k(5+k) \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \\ 1 & 2 & 3 & -(4+k) \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\begin{vmatrix} -2k & -3k & k(5+k) \\ k & 0 & k \\ 0 & k & k \end{vmatrix} = 0$$

$$-k^3\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5+k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-k^3\begin{vmatrix} -2 & -3 & 8+k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$+k^3(-2-8-k) = -k^3(k+10) = 0$$

故に $k=0$ or $k=-10$.

27. $a_1x+b_1y+c_1z=a_2x+b_2y+c_2z=a_3x+b_3y+c_3z$
$=k$ トオクベ

共通ノ分~~母~~ $=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

xノ分子 $=\begin{vmatrix} k & b_1 & c_1 \\ k & b_2 & c_2 \\ k & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y; $\begin{vmatrix} a_1 & k & c_1 \\ a_2 & k & c_2 \\ a_3 & k & c_3 \end{vmatrix}$

28. $a_1x+b_1y+c_1z=a_2$ ' '
$=k$ トオケバ,
コレヨリ. x, y, zヲ消去スレバ,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -k \\ a_2 & b_2 & c_2 & -k \\ a_3 & b_3 & c_3 & -k \\ a_4 & b_4 & c_4 & -k \end{vmatrix}=0$

$k\neq 0$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 15 & 2 & 29 & 14 \\ 16 & 3 & 19 & 17 \\ 33 & 8 & 39 & 38 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 25 & 6 \\ 7 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 8 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 10 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 10 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= +2 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times -3 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) \\ 0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 \\ -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2\gamma^2 & q \\ -2 & 0 & 2\gamma^2 & q & 0 \end{vmatrix} = 0$$

-1.5

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) \\ 0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 \\ 0 & 0 & -(\cancel{4}\gamma^2-3p) & -1.5\,q/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2\gamma^2 & q \\ -2 & 0 & 2\gamma^2 & q & 0 \end{vmatrix}$$

26. $\alpha + 2\beta = 0 \qquad \alpha = -2\beta,$

$2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2 = -3p$

$\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 = -q.$

$$-3\beta^2 - \gamma^2 + 3p = 0$$
$$-2\beta^3 + 2\gamma^2\beta + q = 0$$
$$-3\beta^3 - (\gamma^2 - 3p)\beta = 0$$

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & -3\beta^2 & 0 & -(\gamma^2-3p) & = 0 \\
0 & -3\beta^3 & 0 & -(\gamma^2-3p)\beta & 0 & = 0 \\
-3\beta^4 & 0 & -(\gamma^2-3p)\beta^2 & 0 & 0 & = 0 \\
0 & -2\beta^3 & 0 & +2\gamma^2\beta & +q & = 0, \\
-2\beta^4 & 0 & +2\gamma^2\beta^2 & +q\beta & 0 & = 0,
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) \\
0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 \\
-3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 2\gamma^2 & q \\
-2 & 0 & 2\gamma^2 & q & 0
\end{vmatrix} = 0$$

$$-3\begin{vmatrix}
0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) \\
-3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 \\
-2 & 0 & 2\gamma^2 & q \\
0 & 2\gamma^2 & q & 0
\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}
0 & -3 & 0 & -(\gamma^2-3p) \\
-3 & 0 & -(\gamma^2-3p) & 0 \\
0 & -(\gamma^2-3p) & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 2\gamma^2 & q
\end{vmatrix}$$

13. $\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} d^2 & -ad & -bd & -cd \\ a^2 & ad & -ac & ab \\ b^2 & bc & bd & -ab \\ c^2 & -bc & ac & cd \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ c & -a & b \\ b & -c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & c & a \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -a^2 \end{vmatrix}$

25. $al + cm + bn = 0$
$cl + bm + an = 0$
$bl + am + cn = 0$,

$\begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix} = 0$

0

23. $x+y+z=0$

$ax+by+cz=0$

$bcx+cay+abz=(a-b)(a-c)(b-c)$

分母 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & -c(b-a) & -b(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -c & -b \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a),$

x ノ分子

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ (a-b)(a-c)(b-c) & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(c-b)$

$x = b-c,$

y

24. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

$lx+my+nz=p$

$bx-ay=0$

$cx-az=0$

分母 $\begin{vmatrix} l & m & n \\ b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} b & -a \\ c & 0 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} l & m \\ b & -a \end{vmatrix} = a(cn+al+bm)$

x ノ分子. $\begin{vmatrix} p & m & n \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = a^2p.$

$\therefore x = \frac{ap}{cn+al+bm},$