

N221

BOX 43

# PRACTICAL NOTE-BOOK

*Quantenelektrodynamik  
I.*



( 新案登録願 )

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

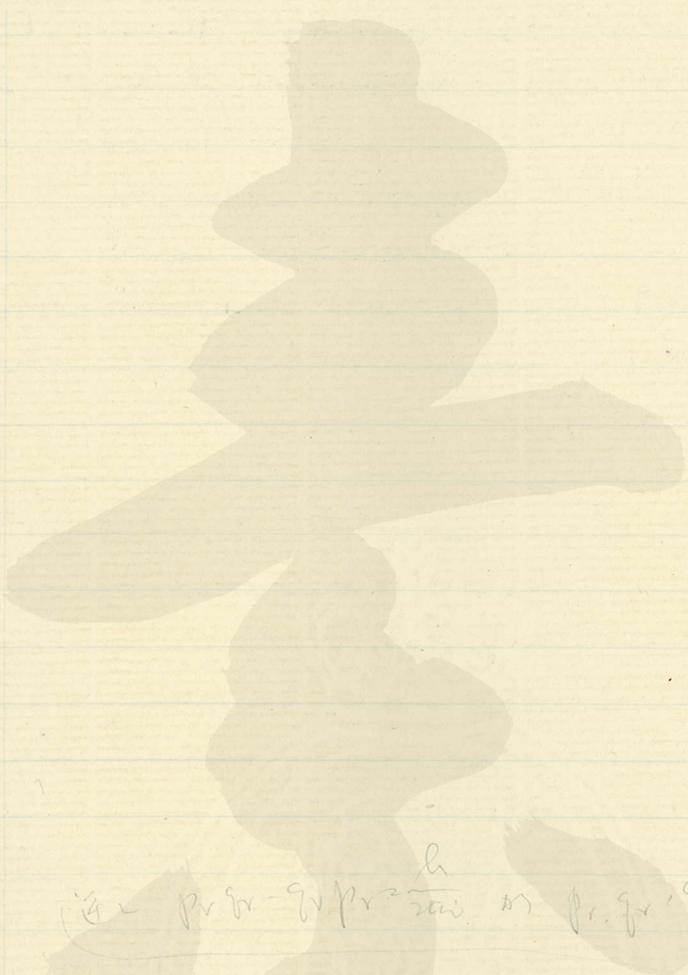
Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak



$(\lambda = p_r \text{ or } q_r) p_r = \frac{\hbar}{2\pi i} \text{ or } p_r, q_r \text{ Eigenwert } (-\infty, \infty)$   
 $p_r f(q_r) - f(q_r) p_r = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial f(q_r)}{\partial q_r}$   
 $q_r$  Eigenwert  $q_r$  \* discrete +  $q_r \dots$   
H7  $f(q_r)$  \* einfach Nullstelle  $r \neq r_0$   
+ Analytische Funktion  $f(q_r) \neq 0, \tau \in \mathbb{R}$   
 $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$

1927年5月21日

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University  
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Zur Quantenmechanik der Gasentartung.

Von P. Jordan, z. Z. in Kopenhagen.

(Eingegangen am 7. Juli 1927.) (Z.S.f. Phys. 44, 5473, 1927)

§1. Quantelung der Schrödingerschen Gleichung. Die Absicht dieser Arbeit ist in der obigen Zusammenfassung bezeichnet worden. Wir wollen anknüpfen an die Betrachtungen in §3 der erstgenannten Diracschen Arbeit<sup>1,2</sup>. Wir nehmen mit Dirac an, daß die dort betrachteten Größen  $\frac{\omega h}{2\pi i} b_r, b_r^*$  kanonisch konjugiert seien, oder anders ausgedrückt, daß

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \frac{1}{2}(b_r + b_r^*) \\ p_r &= \frac{\omega h}{2\pi i}(b_r - b_r^*) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gesetzt werden kann, wo die reellen Größen  $q_r, p_r$  konjugiert sind. Dabei ist  $\omega$  eine (reelle) konstante c-Zahl, die bei Dirac gleich 1 genommen ist; hier wollen wir ihren Wert zunächst noch offen lassen. Wir wollen ferner mit Dirac annehmen, daß  $b_r, b_r^*$  darzustellen sei durch zwei konjugierte Größen  $\Theta_r, N_r$  in der Form

$$b_r = e^{-\frac{2\pi i}{h}\Theta_r} N_r^{\frac{1}{2}}, \quad b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{h}\Theta_r} \quad (2)$$

Nach kürzlich gemachten Feststellungen<sup>3</sup> muß nicht notwendig

$$p_r q_r - q_r p_r = \frac{h}{2\pi i} \quad (3)$$

sein; wir haben deshalb auch eine weitgehende Freiheit in der Wahl der Eigenwerte von  $\Theta_r, N_r$ .

Annahme A. Die Eigenwerte sind

1. Zusammenfassung, 1927, P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 114, 243, 1927
2. Dirac, ebenda 112, 661, 1926
3. P. Jordan, über eine neue Begründung der Q.M. II. Z.S.f. Phys.

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = 1$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad N_r = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq \Theta_r < h. \quad (4)$$

Dann folgt nach II, dass notwendig

$$N_r e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} N_r = e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und dass mit} \quad \omega = 1 \quad (6)$$

auch (3) erfüllt ist. Wir haben hier den von Dirac betrachteten Fall der Bose-Einstein'schen Statistik.

Annahme B. Die Eigenwerte sind

$$N_r = 0, 1; \quad \Theta_r = \pm \frac{h}{4} \quad (7)$$

Setzen wir dann

$$\xi_r = 2N_r - 1; \quad \eta_r = \frac{4}{h} \Theta_r; \quad \zeta_r = i \xi_r \eta_r \quad (8)$$

so können alle aus  $\Theta_r, N_r$  durch Multiplikationen und Additionen herstellbaren Größen  $\beta_r$  in der Form

$$\beta_r = a_0 + a_1 \xi_r + a_2 \eta_r + a_3 \zeta_r \quad (9)$$

mit reellen C-Zahlen  $a_0, \dots, a_3$  gebracht werden.

Die Größen

$$\xi_r, \eta_r, \zeta_r, \quad k_1 = i \xi_r, \quad k_2 = i \eta_r, \quad k_3 = i \zeta_r \quad (10)$$

verhalten sich in ihrer Multiplikation wie Quaternionen.

In (2) haben wir wegen  $0^2=0, 1^2=1$  jetzt einfach  $N_r$  für

$N_r^{\pm}$  zu schreiben:

$$b_r = e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} N_r, \quad b_r^* = N_r e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a-b)^2 = (a+b)(a-b) \\ (a-b)(a+b) = (a+b)(a-b) \\ a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{11} = -a_{22} \\ a_{21} = a_{32} \\ a_{31} = a_{23} \end{array} \right. \quad (2')$$

Für die Exponentialfunktion ergibt sich mit (7), (8), (10):

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2N_r - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Theta_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \Theta_r = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} a_{12} & a_{12}(a_{21} a_{12}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{21} a_{12}) & a_{22}(a_{12} + a_{21}) \end{pmatrix}$$

$\therefore \Theta_r \neq N_r + 1/4 \quad \Theta_r = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{12} a_{21} = 1 \quad N_r \Theta_r = -\Theta_r N_r \quad (2N_r - 1) \Theta_r = \Theta_r (2N_r - 1) \quad \therefore \xi_r \eta_r = -\eta_r \xi_r$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = \cos \frac{\pi}{2} + k_2 \sin \frac{\pi}{2} = k_2, \quad (11)$$

und wir erhalten endlich

$$\left. \begin{aligned} b_r &= -k_2 N_2 = -i \gamma_r N_r = -i \frac{4}{h} \Theta_r N_r = -\frac{i k_2 + k_2}{2} \\ b_r^* &= N_r k_2 = i N_r \gamma_r = i \frac{4}{h} N_r \Theta_r = -\frac{i k_2 - k_2}{2} \end{aligned} \right\} (2)''$$

und

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \xi_r, \\ p_r &= \frac{wh}{2\pi} \eta_r \end{aligned} \right\} (12)$$

diese Gleichungen zeigen, daß  $q_r, p_r$  wirklich konjugiert werden, wenn wir diesmal

$$\omega = \pi \sum_{r,s} H_{rs} b_r^* b_s b_t^* b_t = \sum_{r,s} H_{rs} b_r^* (b_t^* + b_s) b_t \quad (13)$$

setzen.

Mit Dirac bilden wir nun die Hamiltonfunktion

$$F = \sum_{r,s} b_r^* H_{rs} b_s \quad (14)$$

die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe, wie in der Diracschen Gleichung (11). Für den Fall B erhalten wir aus (14):

$$F = \frac{16}{h^2} \sum_{r,s} H_{rs} \cdot N_r \Theta_r \Theta_s N_s \quad (15)$$

Nur bilden ferner eine Wellengleichung

$$\left\{ F + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi(N_1, N_2, \dots) = 0 \quad (16)$$

Die Bedeutung der Operatoren  $N_r, \Theta_r$  wird dabei nach II bestimmt durch die Matrizen

$$\xi_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\xi_r \eta_r + \eta_r \xi_r = 2a$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textcircled{H} r = \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Also erhalten wir (16) symbolisch in der Form

$$\left\{ \sum_{r,s} H_{rs} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_s + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi = 0. \quad (18)$$

Wir wollen nun andererseits das betrachtete Fermigas beschreiben durch Eigenfunktionen der von Dirac<sup>1</sup> und Heisenberg<sup>2</sup> angegebene Art. Für diese besteht nach Dirac eine Schwingungsgleichung

$$\sum_{s_1, s_2, \dots} H_A(r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots) \varphi(s_1, s_2, \dots) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r_1, r_2, \dots) = 0$$

$$\text{oder } \sum_{m, s_m \neq r_m} \sum H_{r_m s_m} \varphi(r_1, r_2, \dots; r_{m-1}, s_m, r_{m+1}, \dots) \quad (19)$$

$$+ \sum_n H_{r_n r_n} \varphi(r_1, r_2, \dots) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r_1, r_2, \dots) = 0 \quad (20)$$

Dies sind die Gleichungen (14), (15) in § 3 der früher genannten Diracschen Arbeit.<sup>3</sup> Wir haben hier nur den Buchstaben  $\varphi$  anstelle von  $\psi$  bei Dirac gebracht; im übrigen haben alle Zeichen die Dirac erläuterte Bedeutung. Die Funktionen  $\varphi$  sollen antisymmetrisch sein; also sind in  $\varphi(s_1, s_2, \dots)$  alle  $s$  von einander verschieden.

Wir ordnen den Zahlen, deren jede die Werte 1, 2, 3, ... annehmen kann, andere Zahlen  $N_1, N_2, N_3, \dots$  zu, derart, daß  $N_k$  gleich 1 ist, wenn es ein  $s_j = k$  gibt. Dann behaupten

Wir, daß

1. 112,

2. Heisenberg, Zs. f. Phys. **38**, 411 (1926).

$$\pm \varphi(s_1, s_2, \dots) = \psi(N'_1, N'_2, \dots) \quad (21)$$

wird, wo  $\psi$  die durch (16) bestimmte Funktion ist. Dieser Satz ist in der Fermi-Diracschen Gastheorie das Analogon des in §3 der Diracschen Arbeit bewiesenen Satzes der Bose-Einsteinschen Theorie.

Wir wollen diejenige Funktion von  $N'_1, N'_2, \dots$ , die mit  $\pm \varphi(s_1, s_2, \dots)$  übereinstimmt - von der wir also beweisen wollen, daß sie  $\psi(N'_1, N'_2, \dots)$  ist - , zunächst mit  $\varphi(N'_1, N'_2, \dots)$  bezeichnen. Das Glied  $\pm H_{r_m s_m} \varphi(r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, s_m, r_{m+1}, \dots)$  in (20) wird dann wie bei Dirac gleich

$$H_{rs} \varphi(N'_1, N'_2, \dots, N'_r - 1, N'_s + 1, \dots) \quad (22)$$

wenn wir kurz  $r, s$  statt  $r_m, s_m$  schreiben. Dabei ist notwendig  $N'_r = 1, N'_s = 0$ . Die Summation  $\sum_m \sum_{s_m \neq r_m}$  bedeutet also: wir sollen den Ausdruck (22) bei festem  $r$  summieren über alle diejenigen von  $r$  verschiedenen Werte von  $s$ , bei denen gerade  $N'_s = 0$  ist. Diese Summe soll noch summiert werden über alle Werte von  $r$ , bei denen gerade  $N'_r = 1$  ist. Wir sehen nun, daß diese Summe symbolisch geschrieben werden kann als

$$\sum_{r \neq s} H_{rs} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_s \varphi(N'_1, N'_2, \dots) \quad (23)$$

Ferner sieht man, daß die Summe  $\pm \sum H_{r_m r_m} \varphi(r_1, r_2, \dots)$  in (20) auszudrücken ist als

$$\sum_r H_{rr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r \varphi(N'_1, N'_2, \dots) = \sum_r H_{rr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_r \varphi(N'_1, N'_2, \dots) \quad (24)$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Diese Feststellungen erweisen aber bereits die Äquivalenz der Gleichungen (18) und (20) bzw. die Übereinstimmung der Funktionen  $\varphi(N')$  und  $\psi(N')$ . Denn (18) kann auch in der Form

$$\left\{ \sum_{rs} H_{rs} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_s + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi = 0 \quad (25)$$

geschrieben werden.

§2. Dichteschwankungen des idealen Gases. Wir wollen unsere Methode anwenden zu einer Untersuchung der Schwankungseigenschaften des Pauli-Fermischen Gases. Der Einfachheit halber wollen wir ein eindimensionales Gas betrachten und den Gasatomen überdies die Ruhmasse Null zuschreiben. Wenn wir endlich noch die „Lichtgeschwindigkeit“ gleich 1 wählen, so haben wir ein System, welches sich von der früher bezüglich ihrer Schwingungseigenschaften untersuchten schwingenden Saite<sup>1</sup> nur durch die Gültigkeit der Paulischen statt der Bosechen Statistik unterscheidet. Wir wollen hier sowohl für das Boseche als auch für das Paulische System die Schwankungen berechnen, indem wir einen Weg einschlagen, der von dem damals benutzten etwas verschieden ist. Die damalige Methode, die natürlich im Bosechen Falle mit der jetzt zu gebrauchenden mathematisch äquivalent ist, gestattet nämlich keine unmittelbare Übertragung auf den Paulischen Fall.

Nach (2), §2 ist in beiden Fällen

1. Born, Heisenberg und Jordan, ZS. 35, 557, 1925

$$N(0, a) = \frac{2}{l} \int_0^a \sum_{r=1}^{\infty} b_r^* \sin \frac{r\pi}{l} x \cdot \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin \frac{s\pi}{l} x \, dx$$

for  $b_r^* b_s = 0$  for  $r \neq s$   
 $b_r^* b_r = |b_r|^2 \neq 0$

$$N_r \quad b_r^* b_r = N_r \quad (1)$$

Wir stellen nun die Auslenkung  $u(x, t)$  der Saite mit der Länge  $l$  dar als

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (2)$$

Wir stellen nun die Dampfung  $N$  also ( $l, x$  sind  $C$ -Zahlen)

$$\frac{2}{l} \int_0^l u^* u \, dx = \sum_{r=1}^{\infty} N_r \quad (3)$$

gleich der Gesamtzahl der Teilchen auf der Saite; folglich werden wir

$$N(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} u^* u \, dx \quad (4)$$

deuten als Teilchenzahl innerhalb der Strecke  $(x_1, x_2)$ . Die Anzahl  $N(0, a)$  werden wir kurz mit  $N$  bezeichnen; und wir erhalten

$$\Delta = N(0, a) - N(0, a) = N - N$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^a \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} b_r^* b_s \sin \frac{r\pi}{l} x \sin \frac{s\pi}{l} x \, dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{l} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} b_r^* b_s K_{rs} = \frac{1}{l} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} b_s b_r^* K_{rs}$$

$$K_{rs} = \frac{\sin(r-s)\frac{\pi}{l} a}{(r-s)\frac{\pi}{l}} - \frac{\sin(r+s)\frac{\pi}{l} a}{(r+s)\frac{\pi}{l}} \quad (6)$$

$$= \frac{\sin(\omega_r - \omega_s) a}{\omega_r - \omega_s} - \frac{\sin(\omega_r + \omega_s) a}{\omega_r + \omega_s}$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Weiter ergibt sich

$$\Delta^2 = \frac{1}{l^2} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} \sum_{\substack{p,\sigma=1 \\ p \neq \sigma}}^{\infty} b_r^* b_s b_p b_\sigma^* K_{rs} K_{p\sigma} \quad (7)$$

und der Mittelwert wird

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{l^2} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{\infty} \left\{ \overline{b_r^* b_s^L b_r^*} + \overline{b_r^* b_s b_r b_s^*} \right\} K_{rs}^2 \quad (8)$$

Bei großer Saitenlänge  $l$  kann man die Summe durch Integrale ersetzen:  $\overline{\Delta^2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega_r d\omega_s \left\{ \overline{b_r^* b_s^L b_r^*} + \overline{b_r^* b_s b_r b_s^*} \right\} K_{rs}^2 \quad (9)$

Hierauf haben wir, indem wir auch  $a$  als groß annehmen, die Formel  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} f(\omega) d\omega = \pi f(0)$  für  $\Omega, \Omega' > 0$  (10)

anzuwenden. Es ergibt sich

$$\overline{\Delta^2} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega_r \cdot \overline{b_r^* b_r^2 b_r^*} \quad (11)$$

Zur Auswertung dieser Formel dienen

a) im Bosonischen Falle die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} b_r &= e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} N_r^{\frac{1}{2}} = (1+N_r)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \\ b_r^* &= N_r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} (1+N_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

b) im Paulischen Falle die Beziehungen

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$$b_r = e^{-\frac{v\alpha_i}{h} \Theta_r} N_r^{\frac{1}{2}} = (1 - N_r)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{v\alpha_i}{h} \Theta_r},$$

$$b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{v\alpha_i}{h} \Theta_r} = e^{\frac{v\alpha_i}{h} \Theta_r} (1 - N_r)^{\frac{1}{2}},$$

die aus § 1 dieser Arbeit folgen: man hat nur zu beachten, daß  $N_r^2 = N_r$ ,  $(1 - N_r)^2 = 1 - N_r$ , oder

$$N_r^{\frac{1}{2}} = N_r, \quad (1 - N_r)^{\frac{1}{2}} = 1 - N_r \quad (14)$$

ist. Legt man weniger Wert auf die Hervorhebung der Analogie zu (12), so kann man statt (13) auch schreiben:

$$b_r = -i \frac{4}{h} \Theta_r N_r = -i \frac{4}{h} (1 - N_r) \Theta_r,$$

$$b_r^* = i \frac{4}{h} \Theta_r N_r = i \frac{4}{h} \Theta_r (1 - N_r); \quad \Theta_r^2 = \frac{h^2}{16} \quad (15)$$

Anwendung der Formel (12), (13) liefert für den Integranden in (11):

a) bei Bosecher Statistik

$$b_r^* b_r^2 b_r^* = N_r (1 + N_r); \quad (16)$$

b) bei Paulischer Statistik

$$b_r^* b_r^2 b_r^* = N_r (1 - N_r). \quad (17)$$

Die Formel (16) ist aber in der Tat nur ein anderer Ausdruck der bekannten Einsteinschen Schwankungsformel bei Bosecher Statistik. In (17) andererseits haben wir die entsprechende Formel der Fermi-Diracschen

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Statistik erhalten — übereinstimmend mit einem Ergebnis,  
das von Pauli<sup>1</sup> auf thermodynamisch-statistischem Wege ab-  
geleitet wurde.

§ Schlussbemerkungen. Die Überlegung von § 1, 2 bezogen  
sich auf das ideale Gas ohne Wechselwirkung zwischen den  
Gasatomen. Will man <sup>mit</sup> der von Dirac bzw. § 1, 2 entwickelten  
Methode auch eine Wechselwirkung der Teilchen beschreiben,  
so muß man die Funktion  $F$  in der Wellengleichung (6),  
§ 1, in der die  $b_r^*$ ,  $b_r$  quadratisch auftreten — entsprechend  
linearen Bewegungsgleichungen —, durch eine allgemeinere  
Funktion ersetzen; ich hoffe bald darauf zurückzukommen.  
Die bisherigen Überlegungen geben aber bereits die  
Gewißheit, daß die Wahrscheinlichkeitsgesetze aller stoß-  
artigen Wechselwirkungen im Pauli-Fermischen Gase durch  
unsere Methode richtig geliefert werden. Denn diese  
Wahrscheinlichkeitsgesetze, deren Gestalt bereits aus Thermo-  
dynamisch-statistischen Betrachtungen abgeleitet werden  
konnte<sup>2</sup>, unterscheiden sich von den entsprechenden Wahr-  
scheinlichkeitsgesetzen beim Bose-Einsteinischen Gase  
durch das Auftreten von Faktoren  $1 - N_r$  an Stelle von  
 $1 + N_r$ . Derselbe Unterschied tritt auch in den Gleichungen  
(6), (7), § 2, zutage; sein Ursprung liegt nach unserer  
Theorie in dem entsprechenden Unterschied zwischen  
1. W. Pauli jr., 25. J. Phys. 41, 81, 1927  
2. P. Jordan, ebenda 41, 111, 1927; L. S. Ornstein u. H. A. Kramers  
ebenda 42, 481, 1927.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

den Grundgleichungen (12) und (13), § 2, der Boseschen und der Paulischen Systeme.

Die erzielten Ergebnisse lassen es kaum noch als zweifelhaft erscheinen, daß - trotz der Gültigkeit der Paulischen statt der Boseschen Statistik für Elektronen - eine quantenmechanische Wellentheorie der Materie durchgeführt werden kann, bei der die Elektronen durch gequantelte Wellen im gewöhnlichen dreidimensionalen Räume dargestellt werden, und daß die naturgemäße Formulierung der quantentheoretischen Elektronentheorie derart zu gewinnen sein wird, daß Licht und Materie gleichzeitig als wechselwirkende Wellen im dreidimensionalen Räume aufgefaßt werden<sup>1</sup>. Die Grundsätze der Elektronentheorie, die Existenz diskreter elektrischer Teilchen, erweist sich dabei als eine charakteristische Quantenerscheinung, nämlich als gleichbedeutend mit damit, daß die Materiewellen nur in diskreten Quantenzuständen auftreten. Die von Dirac und Heisenberg konstruierten Schrödingerschen Eigenfunktionen der Materie materiellen Teilchen spielen im Rahmen dieses Bildes eine Rolle, durch die sie in bezug auf Hinsicht als ein Analogon der elektromagnetischen Wellen erscheinen. Vielmehr erweisen sie sich als ein Spezialfall

2. Die Überzeugung, daß in solcher Weise eine Theorie der Systeme mit mehreren gleichartigen materiellen Körpern durch eine

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsamplituden, welche als mathematisches Hilfsmittel zur Beschreibung des statischen Verhaltens der gequantelten nicht mit Materie dazwischen zu benutzen sind.

Herrn Professor Bohr bin ich herzlich dankbar für anregende Unterhaltungen über Problemen der Quantentheorie. Dem International Education Board habe ich zu danken für die Ermöglichung eines Aufenthalts in Kopenhagen.

Quantelung der Schrödingerschen Gleichung zu entwickeln sei, ist vom Verfasser bereits unmittelbar nach Erscheinen der ersten Schrödingerschen Untersuchung geäußert worden. Es schien jedoch damals die Paulische Äquivalenzregel ein ernstes Hindernis für diese Auffassung zu bilden.

Über das Paulische Äquivalenzverbot.

Von P. Jordan u. E. Wigner in Göttingen.

(Eingegangen am 26. Januar 1928) ZS.f. Phys **47**, 631, 1928

§1. Schon bei den ersten Untersuchungen zur systematischen Ausbildung der Matrixtheorie der Quantenmechanik ergaben sich Hinweise darauf, daß die Bekannten Schwierigkeiten der Strahlungstheorie überwunden werden könnten, indem man nicht nur auf die materiellen Atome, sondern auch auf das Strahlungsfeld die quantenmechanischen Methoden anwendet\*. In diesem Sinne sind durch mehrere Arbeiten\*\* der letzten Zeit Fortschritte erzielt worden einerseits bezüglich einer quantenmechanischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, andererseits bezüglich einer Formulierung der Quantenmechanik materieller Teilchen, welche die Wellendarstellung im abstrakten Koordinatenraum vermeidet zugunsten einer Darstellung durch quantenmechanische Wellen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, und welche die Existenz materieller Teilchen in ähnlicher Weise zu erklären sucht, wie durch die Quantelung der elektromagnetischen Wellen die Existenz von Lichtquanten bzw. jeder durch die Annahme von Lichtquanten zu deutende physikalische Effekt erklärt wird.

Man verfährt bei dieser Beschreibung so, daß man diejenige, als  $q$ -Zahl aufzufassende Größen  $N_r$ , welche in korpuskular-theoretischer Umdeutung die Anzahl von Atomen (etwa

\* Born, Heisenberg u. Jordan 35.

\*\* Dirac, 114; Jordan 44, 473, (1927) (A bezeichnet); Jordan und Klein, 45, 751 (1927); Jordan 45, 766 (1927) (B ..) Jordan u. Pauli 47, 151 (1928)

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

innerhalb eines Kastens) im  $r$ -ten Quantenzustande ruft,  
in zwei Faktoren

$$N_r = b_r^\dagger b_r \quad (1)$$

der Form

$$\left. \begin{aligned} b_r &= e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} N_r^{\frac{1}{2}} \\ b_r^\dagger &= N_r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

zerlegt, wobei man fordert, daß  $N_r, \Theta_r$  kanonisch konjugiert  
seien. Legt man nun als Definition kanonisch konjugierter  
Größen diejenige zugrunde, die von einem der Verfasser  
kürzlich vorgeschlagen wurde\*, so erhält man die Mög-  
lichkeit, in dieser Form nicht nur die Einsteinsche Statistik  
darzustellen, bei der die Eigenwerte  $N_r$  von  $N_r$  durch

$$N_r' = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

gegeben sind, sondern auch die Paulische, bei der nur

$$N_r' = 0, 1 \quad (4)$$

in Frage kommt. Man erhält dann ferner sofort neben (2)  
weitere Gleichungen, und zwar im Einsteinschen Falle

$$\left. \begin{aligned} b_r &= (1 + N_r)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \\ b_r^\dagger &= e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} (1 + N_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

aber statt dessen im Paulischen Falle:

$$\left. \begin{aligned} b_r &= (1 - N_r)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} \\ b_r^\dagger &= e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} (1 - N_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}^{**} \quad (5'')$$

\* Jordan 44, 1, 1921.

\*\* (2) (5') zu  $N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  then  $e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$   $e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} = \begin{pmatrix} 0 & a_{21}^{-1} \\ a_{12}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

wie in A gezeigt wurde.

Diese Formeln stützen bereits sehr die Überzeugung, daß diese Darstellungsweise des Paulischen Äquivalenzverbotes dem Wesen der Sache entspricht und in ihrer weiteren Verfolgung zu richtigen Ergebnissen führen wird. Die Formeln (5'), (5'') stehen nämlich in enger Beziehung einerseits zu den Problemen der stoffartigen Wechselwirkungen von Korpuskeln, und andererseits zu den Dichteschwankungen Quantenmechanischer Gase.

§ 2. Was zunächst die Wechselwirkung betrifft, so mag es erlaubt sein, aus einer früheren Note folgendes zu wiederholen\*: In einem abgeschlossenen Kasten mögen (endlich oder unendlich viele) Arten verschiedener Teilchen (materielle oder Lichtquanten) vorhanden sein. Die Dichte der  $l$ -ten Teilchenart pro Zelle im Phasenraum sei  $n^{(l)}(E)$ , wo  $E$  die zu den betrachteten Zelle gehörige Energie bedeutet. Die Gesamtzahlen  $N^{(l)}$  (Integrale der  $n^{(l)}(E)$ ) über den Phasenraum  $\Gamma$  seien beliebig vielen ( $j = 1, 2, \dots$ ) linearen Nebenbedingungen

$$\sum_l C_l^{(j)} N^{(l)} = C^{(j)} = \text{const} \quad (6)$$

unterworfen (Beispiel dazu a. a. O.), wo die  $C_l^{(j)}$  ganze

\* Jordan, 41, 711, 1927. Bohre, 46, 327, 1928.

positive oder negative Zahlen (oder Null) sind. Dann wird im statistischen Gleichgewicht

$$n^{(l)}(\mathbf{E}) = \frac{1}{e^{\sum_j c_j^l a_j(\mathbf{T}) + \frac{\mathbf{E}}{kT} \pm 1}} \quad (7)$$

wobei das positive oder negative Vorzeichen in  $\pm 1$  zu wählen ist, je nachdem, ob die  $l$ -te Teilchenart dem Pauliprinzip oder der Einsteinstatistik gehorcht.

Als Wechselwirkungsprozesse sind nun natürlich nur solche zuzulassen, bei denen die Forderungen (b) nicht verletzt werden. Eine bestimmte Form eines solchen Elementaraktes ist zu beschreiben durch Angabe der Indizes  $l$  und der Geschwindigkeiten der vor dem Elementarakt vorhandenen und der nach dem Prozess vorhandenen mitwirkenden Teilchen. Es seien  $n_1^+, n_2^+, \dots, n_r^+$  die zugehörigen Dichten  $n^{(l)}(\mathbf{E})$  für diejenigen vor dem Prozess vorhandenen Teilchen, welche der Einsteinstatistik folgen; und  $n_1^-, n_2^-, \dots, n_s^-$  die  $n^{(l)}(\mathbf{E})$  für die vor dem Prozess vorhandenen mitwirkenden Teilchen Paulischer Art. Entsprechend sollen sich  $m_1^+, m_2^+, \dots, m_p^+$ ,  $m_1^-, m_2^-, \dots, m_q^-$  auf die nach dem Prozess übriggebliebenen bzw. neu erzeugten Teilchen beziehen. Dann muß aus statistisch-thermodynamischen Gründen die Wahrscheinlichkeit des Elementaraktes proportional mit

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

Inches  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8  
 cm  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8

$$n_1^+ n_2^+ \dots n_r^+ n_1^- n_2^- \dots n_s^- (1+m_1^+) (1+m_2^+) \dots (1+m_r^+) (1-m_1^-) (1-m_2^-) \dots (1-m_s^-) \quad (8)$$

angenommen werden\*) die des inversen Elementaraktes entsprechend proportional mit

$$m_1^+ \dots m_r^+ m_1^- \dots m_s^- (1+n_1^+) \dots (1+n_r^+) (1-n_1^-) \dots (1-n_s^-) \quad (9)$$

Bezüglich der Faktoren  $(1+m_i^+)$  usw. bei den Einsteinschen Teilchen ist nun von Dirac bei der Untersuchung der Absorption und Emission von Licht und Atome gezeigt worden, daß ihre Gestalt unmittelbar folgt aus der Gestalt der entsprechenden Faktoren in den Formeln (5'). Entsprechend wird die Form der Glieder  $(1-m_i^-)$  usw. in (8), (9) auf (5'') zurückzuführen sein.

Was andererseits die Schwankungserscheinungen anbelangt, so ist in A darauf hingewiesen, daß das Schwankungsquadrat der Teilchendichte in einem Volumen, welches mit einem großen Volumen bezüglich der zu einem engen Frequenzintervall  $\Delta\nu$  gehörigen Wellen kommutiert, nach den bekannten Einsteinschen Formeln einen Wert proportional zu

$$n_r (1+n_r) \quad (10)$$

besitzt. (Für klassische Wellen wäre es proportional  $n_r^2$ ).

Die von Pauli berechnete analoge Größe bei einem Fermischen Gase ist aber proportional

\* Pauli, 1927, A (25) 43.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi(n_r, n_s) \end{pmatrix} = \psi(0, 1)$   
 $\therefore \begin{matrix} \psi(0, 1) \rightarrow \psi(1, 0) \\ \psi(1, 0) \rightarrow \psi(0, 1) \end{matrix}, \text{ z.B. } +0 = -+ + 5. \quad \begin{pmatrix} \psi(0,0) & \psi(0,1) \\ \psi(1,0) & \psi(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi(0,1) & 0 \end{pmatrix}$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

$$N_r(1-N_r); \quad (10'')$$

und in (10'), (10'') zeigt sich der Unterschied vom Einsteinschen und Paulischen Gase wieder in derselben Form wie (5'), (5'').

Von dem Einsteinschen Gas bzw. dem Boseischen Wellenfeld besitzt man auf Grund der Arbeiten, die auf S. 631 genannt wurden, bereits eine weitgehende Kenntnis. Wir beschäftigen uns im folgenden damit, in ähnlicher Weise die in A begründete Theorie des Pauligases zu vertiefen.

§ 3. Wir wiederholen hier der Deutlichkeit halber einige in A gebrachte Formeln. Die Größen  $b_r, b_r^\dagger, N_r, \Theta_r$  sind darstellbar durch die Matrizen

$$b_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_r; \quad b_r^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r; \quad (11)$$

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r; \quad \Theta_r = \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r.$$

Hierbei ist jeweils

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}_r \quad (12)$$

eine Matrix, deren Zeilen und Spalten bezeichnet durch eine Reihe von Indizes, deren jeder den Wert 0 oder 1 haben kann; und zwar ist (12) eine Diagonalmatrix in bezug auf den ersten bis  $(r-1)$ -ten Index und in bezug auf den  $(r+1)$ -ten und die folgenden Indizes.

Neben den schon in § 1 besprochenen Gleichungen gelten die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} b_r^\dagger b_r &= N_r & b_r b_r^\dagger &= 1 - N_r \\ N_r^2 &= N_r & (b_r^\dagger)^2 &= (b_r)^2 = 0 \\ e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_r} &= i \frac{4}{h} \Theta_r \end{aligned} \right\} (13)$$

Man kann alle diese Größen ausdrücken durch drei Größen  $k_1^{(r)}, k_2^{(r)}, k_3^{(r)}$ , die den Multiplikationsregeln der Quaternionen folgen:

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(r)} k_2^{(r)} &= -k_2^{(r)} k_1^{(r)} = k_3^{(r)} \\ (k_1^{(r)})^2 &= (k_2^{(r)})^2 = (k_3^{(r)})^2 = -1 \end{aligned} \right\} (14)$$

wobei durch die Punkte die beiden aus der angeschriebenen Gleichungen durch zyklische Permutation der 1, 2, 3 hervorgehenden Gleichungen angedeutet ~~wird~~ sein sollen.

$$\left. \begin{aligned} \text{nämlich: } b_r^\dagger &= -\frac{ik_2^{(r)} + k_3^{(r)}}{2}, & b_r &= -\frac{ik_2^{(r)} - k_3^{(r)}}{2} \\ N_r &= -\frac{ik_1^{(r)} - 1}{2}, & \Theta_r &= -\frac{h}{4} ik_3^{(r)} \end{aligned} \right\} (15)$$

Die Quaternionen  $k_1^{(r)}, k_2^{(r)}, k_3^{(r)}$  werden dabei selbst dargestellt durch die Matrizen

$$k_1^{(r)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}_r; \quad k_2^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}_r; \quad k_3^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_r. \quad (16)$$

$$\# = b + ib$$

§4. Ebenso wie in B für die Bose'sche Statistik ausgeführt wurde kann man auch bei der Fermischen Statistik die

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Heisenberg-Diracschen Determinantenformeln für die Herleitung der antisymmetrischen Schrödingerschen Eigenfunktionen des Gesamtsystems aus denen eines Einzelatoms übertragen auf beliebige Wahrscheinlichkeitsamplituden. Eine solche Amplitude sei für ein Einzelatom gegeben durch

$$\Phi_{\alpha p}^{\beta q} = \Phi_{\alpha p}(\rho', q') \quad (17)$$

Um die Vorzeichen der aus ihr zu bildenden Determinanten eindeutig zu machen, legen wir für die Eigenwerte  $\rho'$  von  $\rho$  in beliebiger, aber ein für allemal bestimmter Weise eine Reihenfolge fest. Wir bezeichnen die so definierte Anordnung für zwei spezielle Eigenwerte  $\rho', \rho''$  von  $\rho$  durch  $\rho' < \rho''$  bzw.  $\rho'' < \rho'$ , ohne jedoch mit dem Zeichen  $<$  notwendig die Bedeutung „kleiner als“ zu verbinden. Genau so verfahren wir mit den Eigenwerten  $q'$  von  $q$  und allgemein mit den Eigenwerten  $\alpha'$  jeder meßbaren Größe  $\alpha$  beim Einzelatom. Danach kann man jeder Amplitude (17) für das Einzelatom in eindeutiger Weise eine antisymmetrische Amplitude  $\Psi_{\alpha p}^{\beta q}$  für ein System von N energetisch ungekoppelten Teilchen zuordnen. Wir schreiben

$$\Psi_{\alpha p}^{\beta q} = \Psi_{\alpha p}(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(N)}; q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(N)}) \quad (18)$$

worin

$$\begin{matrix} \rho^{(1)} < \rho^{(2)} < \dots < \rho^{(N)} \\ q^{(1)} < q^{(2)} < \dots < q^{(N)} \end{matrix} \quad (19)$$

sein soll; und dann:

$$\Psi_{\alpha p}^{\beta q} = \frac{1}{N!} \sum_{(n)} \epsilon_n \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha p}(\rho^{(k)}, q^{(n_k)}) \quad (20)$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

wo die Summe über alle  $N!$  Permutationen  $n_1, n_2, \dots, n_N$  der Zahlen  $1, 2, \dots, N$  zu erstrecken ist, während  $\epsilon_n$  gleich  $+1$  ist für gerade Permutationen und  $-1$  für ungerade. Nach (20) verschwindet  $\Psi_{\alpha}^{\beta}$ , sobald zwei der Größen  $\beta^{(k)}$  einander gleich werden. Das heißt physikalisch: Es kommt nicht vor, daß irgend eine nichtentartete  $\beta$  bei zwei verschiedenen Teilchen des Systems gleichzeitig denselben Wert annimmt. Wählen wir für  $\beta$  insbesondere das System der Quantenzahlen, so ergibt dieser Satz das Paulische Äquivalenzverbot in seiner ursprünglichen Fassung. Wir wollen im folgenden das gleichzeitige Bestehen dieses Satzes für alle Größen  $\beta$  als den eigentlichen Inhalt des Paulischen Äquivalenzverbots betrachten.

Wir beschäftigen uns übrigens im folgenden vorwiegend mit dem Falle, daß jede Größe  $\beta$  am Einzelatom nur endlich viele, sagen wir  $K$ , Eigenwerte hat. Nur gelegentlich werden wir näher hinweisen auf den Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$ , der im allgemeinen keinerlei Schwierigkeit macht. Wir wollen die  $K$  Eigenwerte jeder Größe  $\beta$  nummerieren mit  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ , und zwar so, daß die oben vorausgesetzte Anordnung der Eigenwerte gerade die Form

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_K \quad (21)$$

gewinnt.

§5. Die in solcher Weise definierten antisymmetrischen Amplituden sind nun in eindeutiger Weise darstellbar als Funktion von Argumenten

$$N'(\beta'); N'(q') \quad (22)$$

mit folgender Bedeutung:  $N'(\beta')$  ist die Anzahl von Atomen, bei denen  $\beta$  den Wert  $\beta'$  hat; ist also  $\beta'$  ein diskreter Eigenwert, so ist nach dem allgemeinen Paulischen Äquivalenzverbot

$$N'(\beta') = 0 \text{ oder } 1. \quad (23)$$

Liegt dagegen  $\beta'$  in einem kontinuierlichen Eigenwertgebiet, so haben wir zu schreiben:

$$N'(\beta') = \sum_{k=1}^N \delta(\beta' - \beta_k), \quad (24)$$

wenn insgesamt  $N'$  Teilchen vorhanden sind; das Integral von  $N'(\beta')$  über ein Teilstück des Eigenwertgebietes ist dann die Anzahl der Atome, bei denen die Werte von  $\beta$  in dieses Teilstück fallen.

Wir begnügen uns aber nicht mit der rein mathematischen Einführung der neuen Größen  $N'(\beta')$ ,  $N'(q')$ , sondern gehen zu einer neuen physikalischen Theorie über, indem wir annehmen, das Gesamtgas sei ein System, das durch ein kanonisches System von  $q$ -Zahlgrößen

$$N(\beta'); \Theta(\beta') \quad (25)$$

beschrieben werden kann, wobei die  $N'(\beta')$  gerade die

58

$\beta' = \beta_r$

Eigenwerte von  $N(\beta')$  darstellen. Dann sind die  $N(\beta')$ ,  $\Theta(\beta')$  in der §3 erläuterten Weise durch Matrizen darzustellen; den verschiedenen Eigenwerten  $\beta'$  entsprechen die verschiedenen Werte der in §3 gebrauchten Indizes  $r, s$ . Insbesondere gilt für diskretes  $\beta'$  die Gleichung

$$N(\beta') [1 - N(\beta')] = 0, \quad (26)$$

für nicht diskretes  $\beta'$  kann man statt dessen schreiben:

$$N(\beta') [\delta(\beta' - \beta'') - N(\beta'')] = \begin{cases} N(\beta') N(\beta'') & \text{für } \beta' \neq \beta'' \\ 0 & \text{für } \beta' = \beta'' \end{cases} \quad (27)$$

Während nun die  $g$ -Zahlen  $N(\beta')$  durch ihre physikalische Bedeutung völlig definiert sind, ist dasselbe natürlich nicht der Fall für die  $\Theta(\beta')$ , wenn wir von ihnen nur verlangen, daß sie kanonisch konjugiert zu den  $N(\beta')$  seien. Man muß diese Nicht-eindeutigkeit natürlich beseitigen bzw. beschränken, wenn man eindeutige Relationen zwischen den Größen  $N(\beta')$ ,  $\Theta(\beta')$  und  $N(g')$ ,  $\Theta(g')$  erhalten will. Wir werden nun im weiteren Verlauf unserer Betrachtungen sehen: Man kann, nachdem für den jede Größe  $\beta$ ,  $g$  usw. in der oben besprochenen Weise eine Reihenfolge der Eigenwerte  $\beta'$  und  $g'$  usw. festgelegt ist, ein gewisses System von konjugierten Phasen  $\Theta(\beta)$ ,  $\Theta(g)$  usw. zu den  $N(\beta)$ ,  $N(g)$  usw. bestimmen derart, daß einfache und eindeutige Relationen zwischen den

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

verschiedenen kanonischen Systemen  $N(p'), \Theta(p')$ ;  $N(q'), \Theta(q')$   
 usw. entstehen. Man hat dabei aber noch verschiedene  
 Möglichkeiten können eindeutig zugeordnet werden den ver-  
 schiedenen konjugierten Impulsen  $\alpha$  zu  $p$ . Wir bezeich-  
 nen deshalb die  $q$ -Zahlgrößen, deren Theorie wir im  
 folgenden entwickeln wollen, endgültig mit

$$N(p'); \Theta_{\alpha}(p') \quad (28)$$

bzw.  $N(q'); \Theta_{\beta}(q')$  usw. (29)

Die gebildeten Verhältnisse besitzen offenbar die denkbar  
 größte Analogie zu den in B erörterten Verhältnissen im  
 Bose'schen Falle, soweit man überhaupt angesichts der  
 tiefgehenden Verschiedenheit beider Fälle eine Analogie  
 erwarten kann.

§ 6. Die zwei  $K$  Größen

$$N(p'), \Theta_{\alpha}(p')$$

müssen als  $q$ -Zahlen gewisse Funktionen der  $q$ -Zahlen

$$N(q'), \Theta_{\beta}(q')$$

sein; dieser funktionale Zusammenhang soll jetzt besprochen  
 werden. Im Bose-Einstein'schen Falle galt einfach

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha}(p') &= \sum_{q'} \Phi_{\alpha p}(p', q') b_{\beta}(q'), \\ b_{\alpha}^{\dagger}(p') &= \sum_{q'} b_{\beta}^{\dagger}(q') \Phi_{p\alpha}(q', p'); \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

aber diese Formeln gelten nicht für das Paulische Gas,  
 Statt dessen gelten Formeln

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha(p') &= \sum_{q'} \Phi_{\alpha p}(p', q') a_p(q'), \\ a_\alpha^\dagger(p') &= \sum_{q'} a_p^\dagger(q') \Phi_{p\alpha}(q', p'), \end{aligned} \right\} (30a)$$

wenn wir die Größen  $a, a^\dagger$  durch

$$\left. \begin{aligned} a_p(q') &= v(q') b_p(q'), \\ a_p^\dagger(q') &= b_p^\dagger(q') v(q'); \end{aligned} \right\} (31)$$

$$v(q') = \prod_{q'' \leq q'} \{1 - 2N(q'')\} \quad (32)$$

definieren. Hier ist also  $v(q')$  das Produkt der Größen  $1 - 2N(q'')$  für  $q'' = q'$  und alle vor  $q'$  kommenden  $q''$ .  
 Es ist also  $v(q')$  eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente sämtlich gleich  $+1$  oder  $-1$  sind; und es wird

$$[v(q')]^2 = 1. \quad (33)$$

Der vollständige mathematische Beweis für die Richtigkeit dieser Formeln (30a) wird sich in den §§8 und 9 ergeben. Hier wollen wir lediglich die Multiplikationseigenschaften der Größen  $a, a^\dagger$  untersuchen und die Invarianz dieser Multiplikationseigenschaften gegen Transformationen (30a) nachweisen.

Zunächst wird

$$b_p(q') \neq v(q') = \begin{cases} -v(q'') \cdot b_p(q') & \text{für } q' \leq q'', \\ v(q'') \cdot b_p(q') & \text{für } q' > q''; \end{cases} \quad (34)$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$$b_p^+(q') \cdot v(q'') = \begin{cases} -v(q'') \cdot b_p^+(q') & \text{für } q' \leq q'' \\ v(q'') \cdot b_p^+(q') & \text{für } q' > q'' \end{cases} \quad (34)$$

Der Beweis ergibt sich leicht daraus, daß z. B.,

$$\begin{aligned} b_p^+(q') \{1 - 2N(q'')\} &= N(q'') e^{\frac{2\pi i}{\hbar} p(q'')} \{1 - 2N(q'')\} \\ &= -\{1 - 2N(q'')\} b_p^+(q') \end{aligned} \quad (35)$$

wird. Dann wird weiter

$$\left. \begin{aligned} a_p(q') a_p(q'') &= -a_p(q'') a_p(q'), \\ a_p^+(q') a_p^+(q'') &= -a_p^+(q'') a_p^+(q'). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Man beweist z. B.

$$\begin{aligned} a_p(q') a_p(q'') &= v(q') b_p(q') v(q'') b_p(q'') \\ &= \begin{cases} -v(q') v(q'') b_p(q') b_p(q'') & \text{für } q' \leq q'' \\ v(q') v(q'') b_p(q') b_p(q'') & \text{für } q' > q'' \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

man ist aber insbesondere für  $q' = q''$ :

$$b_p(q') b_p(q'') = [b_p(q')]^2 = 0, \quad (38)$$

also auch

$$[a_p(q')]^2 = 0, \quad (39)$$

womit für  $q' = q''$  die Formel (36) schon bewiesen ist.

Man sieht danach aus (37), daß das Produkt (36) in der Tat antisymmetrisch in  $q', q''$  ist.

Ferner gilt

$$a_p^+(q') a_p(q'') + a_p(q'') a_p^+(q') = \delta(q' - q''). \quad (40)$$

Denn es wird der links stehende Ausdruck gleich

$$\begin{aligned} & b_p^+(q') v(q') v(q'') b_p(q'') + v(q'') b_p(q'') b_p^+(q') v(q') \\ & = \{ \end{aligned}$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$$= \left\{ \begin{array}{l} v(q')v(q'')b_p^+(q')b_p(q'') - v(q'')v(q')b_p(q'')b_p^+(q') \text{ für } q' < q''; \\ v(q')v(q'')b_p^+(q')b_p(q'') + v(q'')v(q')b_p(q'')b_p^+(q') \text{ für } q' = q''; \\ -v(q')v(q'')b_p^+(q')b_p(q'') + v(q'')v(q')b_p(q'')b_p^+(q') \text{ für } q' > q'' \end{array} \right\} \quad (41)$$

also verschwindet er in der Tat für  $q' \neq q''$  und wird für  $q' = q''$  gleich

$$[v(q')]^2 [b_p^+(q')b_p(q') + b_p(q')b_p^+(q')] = 1, \quad (42)$$

Nunmehr zeigen wir, daß die Gleichungen (36) und (40) wirklich invariant sind gegen Transformationen (30a). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & a_\alpha(\beta') a_\alpha(\beta'') + a_\alpha(\beta'') a_\alpha(\beta') \\ &= \sum_{q', q''} \Phi_{\alpha p}(\beta', q') \Phi_{\alpha p}(\beta'', q'') \{ a_p(q') a_p(q'') + a_p(q'') a_p(q') \} = 0 \\ & a_\alpha^+(\beta') a_\alpha(\beta'') + a_\alpha(\beta'') a_\alpha^+(\beta') \\ &= \sum_{q', q''} \Phi_{p\alpha}(q', \beta') \Phi_{p\alpha}(q'', \beta'') \{ a_p^+(q') a_p(q'') + a_p(q'') a_p^+(q') \} \\ &= \delta(\beta' - \beta'') \end{aligned} \quad (43)$$

Während also die Größen  $b, b^+$  im Paulischen Falle ebenso wie im Einsteinschen Falle die Eigenschaften haben, daß  $b(\beta')$  mit  $b(\beta'')$  und  $b^+(\beta')$  für  $\beta' \neq \beta''$  vertauschbar ist, kommt den  $a, a^+$  diese Eigenschaft nicht mehr zu. Trotzdem besitzen die  $a, a^+$  des Fermischen Gases in gewisser Hinsicht eine engere Analogie zu den  $b, b^+$  des Einsteinschen

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

-gases, also die  $b, b^\dagger$  des Pauligases selbst; man sieht das besonders deutlich durch die Gegenüberstellung:

Bose-Einstein	Pauli
$b_\alpha(p') b_\alpha(p'') - b_\alpha(p'') b_\alpha(p') = 0;$	$a_\alpha(p') a_\alpha(p'') + a_\alpha(p'') a_\alpha(p') = 0;$
$b_\alpha^\dagger(p') b_\alpha(p'') - b_\alpha(p'') b_\alpha^\dagger(p')$ $= \delta(p' - p'');$	$a_\alpha^\dagger(p') a_\alpha(p'') + a_\alpha(p'') a_\alpha^\dagger(p')$ $= \delta(p' - p'');$
$b_\alpha^\dagger(p') b_\alpha(p') = N(p');$	$a_\alpha^\dagger(p') a_\alpha(p') = N(p');$
$b_\alpha(p') = \sum_{q'} \Phi_{\alpha p}(p', q') b_p(q')$	$a_\alpha(p') = \sum_{q'} \Phi_{\alpha p}(p', q') a_p(q').$

Wir haben diese Gleichungen abgeleitet, indem wir das Paulische Äquivalenzverbot von vornherein zugrunde legten. Es zeigt sich aber, daß umgekehrt diese Multiplikationseigenschaften der  $a, a^\dagger$  bereits die möglichen Eigenwerte der  $N(p')$  bestimmen und die Vertauschbarkeit (gleichzeitige Beobachtbarkeit) von  $N(p')$  und  $N(p'')$  nach sich ziehen. Infolgedessen können wir sagen, daß die Existenz korpuskularer Teilchen und die Gültigkeit des Paulischen Prinzips als eine Folgerung aus den quantenmechanischen Multiplikationseigenschaften der de Broglieschen Wellenamplituden aufgefaßt werden dürfen, da in den beiden Gleichungen

$$N(p') N(p'') - N(p'') N(p') = 0, \quad (45)$$

$$N'(p') = 0, \text{ oder } 1, \quad (46)$$

diese Tatsachen vollständig ausgedrückt sind. Die

Kodak Color Control Patches

Blue  
Cyan  
Green  
Yellow  
Red  
Magenta  
White  
3/Color  
Black

$$\psi + \psi\psi = 0$$

$$N \quad \psi^\dagger \psi + \psi \psi^\dagger = 0$$

$$\psi^\dagger \psi (\delta - \psi^\dagger \psi) = \psi^\dagger \psi \cdot \psi \psi^\dagger = 0$$

symmetrisch

$$\psi \cdot \psi = \sum_{n,m} a_n^* a_m^\dagger \sum_{k,l} a_k a_l$$

$$= \sum_{n,m} a_n a_m^\dagger a_n a_m = \sum (a_n a_n^\dagger + a_n^\dagger a_n) a_n a_m = 0$$

Gleichungen (45) folgt. Der Beweis, dass auch (46) aus den Multiplikationsregeln der  $a(\rho'), a^\dagger(\rho')$  folgt, ergibt sich folgendermaßen:

Auf Grund von

$$a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho') + a_\alpha(\rho') a_\alpha^\dagger(\rho') = 1 \quad (47)$$

gilt wegen  $[a_\alpha(\rho')]^2 = 0$

die Gleichung

$$a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho') a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho')$$

$$= a_\alpha^\dagger(\rho') [1 - a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho')] a_\alpha(\rho') = a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho') \quad (48)$$

also wird

$$N(\rho') [1 - N(\rho')] = a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho') [1 - a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho')] = 0 \quad (49)$$

Es sei noch betont: Da  $v(\rho')$  aus den  $N(\rho')$  allein zu bilden ist (nach dem eine Reihenfolge der Eigenwerte festgelegt wurde), so kann man vermittelst

$$\left. \begin{aligned} b_\alpha(\rho') &= v(\rho') a_\alpha(\rho') \\ b_\alpha^\dagger(\rho') &= a_\alpha^\dagger(\rho') v(\rho') \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

die  $b, b^\dagger$  eindeutig durch die  $a, a^\dagger$  definieren. Man kann also in der Tat die  $a, a^\dagger$  als die ursprünglichen Größen der Theorie und alle anderen Größen als Funktionen der  $a, a^\dagger$  betrachten.

Endlich sei hervorgehoben, dass die Gesamtzahl  $N$  der vorhandenen Teilchen gegenüber den betrachteten Transformationen invariant bleibt:

$$1 - 2N(\rho') = a_\alpha(\rho') a_\alpha^\dagger(\rho') - a_\alpha^\dagger(\rho') a_\alpha(\rho') =$$

$$\Pi(1 - 2N(\rho')) = \Pi(1 - 2N(\rho'))$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

$$N = \sum_{p'} N(p') = \sum_{q'} N(q') \quad (51)$$

Diese Invarianz ist offenbar nur ein anderer Ausdruck dafür, daß (30a) eine unitäre Transformation ist.

Zusatz bei der Korrektur: Es zeigt sich durch eine genauere Betrachtung, die im Anhang mitgeteilt wird, daß die Multiplikationsregeln der  $a, a^\dagger$  nicht nur die Eigenwerte der  $N(p')$  schon bestimmten, sondern überhaupt die Matrizen  $a, a^\dagger$  bis auf eine kanonischer Transformation der Matrixdarstellung festlegen.

§7. Für eindimensionales Kontinuum mit der Schwingungsgleichung  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ;  $\psi = \psi(x, t)$  (52)

und der Randbedingung

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0 \quad (53)$$

war in A versuchsweise die räumliche Teilchendichte der Wellenkorpuskeln definiert durch

$$N(x) = \psi^\dagger \psi \quad (54)$$

$$\psi = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \sin r \frac{\pi}{l} x, \quad (55)$$

wo  $N_r = b_r^\dagger b_r$  die Anzahl von Teilchen im  $r$ -ten Quantenzustand der Translation bedeutet.

Wir haben jetzt (55) zu korrigieren, indem wir die  $b_r$  durch entsprechende  $a_r$  ersetzen:

$$\psi = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin r \frac{\pi}{l} x. \quad (56)$$

Die in A durchgeführte Betrachtung der Dichteschwankungen kann aber sofort von (55) auf (56) übertragen werden und zeigt dann, daß (56), wie es sein muß, wirklich die richtige Formel liefert. Es wurde nämlich aus (55) erhalten, daß der fragliche quadratische Mittelwert  $\overline{\Delta^2}$  proportional sei mit

$$\overline{b_r^2 b_r} \overline{b_r b_r^2} = \overline{N_r \cdot (1 - N_r)}, \quad (57)$$

wo die Querstriche die Mittelung über ein infinitesimales Frequenzgebiet im Anschluß an die Frequenz  $\nu_r$  bedeuten, so daß sich die in §2 erwähnte Formel

$$\overline{\Delta^2} = \text{const. } N_r(1 - N_r) \quad (58)$$

ergibt. Rechnet man nun entsprechend mit (56), so wird  $\overline{\Delta^2}$  proportional mit

$$\overline{a_r^2 a_r} \overline{a_r a_r^2} = \overline{N_r(1 - N_r)} \quad (59)$$

d.h. das Endergebnis bleibt ungeändert.

§8. Wir wollen nun den in §6 angekündigten vollständigen Beweis für die Äquivalenz der Formeln (30a) mit den Formeln der gewöhnlichen Darstellung im mehrdimensionalen Koordinatenraum aufreten. Wir müssen uns in diesem Koordinatenraum auf solche Größen (Operatoren) beschränken, die symmetrisch in den gleichen Teilchen sind; außerdem aber beschränken wir uns in diesem Paragraphen auf Größen, die aus einer Summe bestehen,

wo in jedem Summand nur ein Elektron vorkommt. Von dieser Art ist die Energie eines idealen Gases. Diese Operatoren haben also die Gestalt

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N, \quad (60)$$

wo die  $V_i$  immer dieselbe Größe darstellen, nur an verschiedenen (am 1., 2., ...,  $N$ -ten) Teilchen gemessen.

Unsere Wellenfunktion dagegen wird (§ 5, Gleichung (22), (23)) von den  $N'(p_k)$  abhängen. Dies erscheint in der Tat vom Standpunkt der Q. M. als der naturgemäße Ansatz, da ja ein „maximaler versuch“ — wegen der Gleichheit der Teilchen — immer nur bestimmen kann, wie viele Teilchen im Zustande  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sind, während die Frage, in welchem Zustand ein bestimmtes Elektron ist, nicht entschieden werden kann. Im Sinne des Paulischen Äquivalenzverbotes haben wir in (23) den Wertebereich der  $N'(p_k)$  auf 0, 1 beschränkt.

Wir nehmen nun noch, wie in § 4 bereits betont, der Einfachheit halber an (was in Wahrheit niemals erfüllt ist), daß ein Elektron nur endlich viele (sagen wir  $K$ ) Zustände annehmen kann, die wir also mit  $p_1, p_2, \dots, p_K$  bezeichnen. Dann ist die im folgenden einzuführende Wellenfunktion  $\Psi(N'(p_1), N'(p_2), \dots, N'(p_K))$  gerade  $K$  Argumente

Fermi Statistik  $V_1 + V_2 + \dots$   
Bose Statistik

und ist für  $2^k$  Wertsysteme der Argumente definiert. Der Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$  scheint keine wesentlichen Schwierigkeiten zu bieten.

Die nun folgenden Betrachtungen lassen sich am einfachsten ausführen, wenn man den Zustand eines einzelnen Elektrons im mehrdimensionalen Koordinatenraum mit einer Wellenfunktion beschreibt, deren Argument  $\rho'$  ist. Das bedeutet, daß beim Einzelelektron die Messung eben die Bestimmung der Größe  $\rho$  ist, deren Wertebereich also  $K$  Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  umfaßt.

Haben wir nun im mehrdimensionalen Koordinatenraum eine antisymmetrische Wellenfunktion von  $N'$  Elektronen

$$\Psi(\rho_1', \rho_2', \dots, \rho_{N'}'), \quad (61)$$

so bestimmen wir, daß wir diesen Zustand fortan in unserem neuen  $N$ -Raum durch die Wellenfunktion  $\Psi(N'(\rho_1), N'(\rho_2), \dots, N'(\rho_k))$  beschreiben wollen.

Dabei sei  $\Psi(N'(\rho_1), \dots, N'(\rho_k)) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \Psi(\rho_1', \dots, \rho_{N'}'). \quad (62)$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, daß  $\Psi$  überall 0 ist, wo nicht genau  $N$  von den  $k$  ( $k > N$ ) Zahlen  $N'(\rho_1), \dots, N'(\rho_k)$  gleich 1, die übrigen gleich 0 sind. Um den Wert an diesen Stellen zu bestimmen, setzt man

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

rechts für die  $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{N'}$  jene Werte ein, für die eben  $N'(\rho^i) = 1$  ist, und zwar für  $\rho^1$  den (im Sinne der in §4 getroffenen Anordnung) ersten, für  $\rho^2$  den folgenden, ..., für  $\rho^{N'}$  den letzten.

Wir wollen an dieser Zuordnung einer Funktion

$$\Psi(N'(\rho^1), N'(\rho^2), \dots, N'(\rho^{N'}))$$

im neuen  $N$ -Raume zu einer Funktion

$$\Psi(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{N'})$$

im mehrdimensionalen Koordinatenraume im folgenden immer (also auch wenn  $\Psi$  keine Wellenfunktion ist) festhalten. Es ist zu beachten, daß es für das Vorzeichen von  $\Psi$  wichtig ist, in  $\Psi$  die  $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{N'}$  in der einmal festgesetzten Reihenfolge

$$(\rho^1 < \rho^2 < \dots < \rho^{N'})$$

einzusetzen, da nur dadurch das Vorzeichen von  $\Psi$  eindeutig geregelt wird; und nur hierdurch ist die Zuordnung einer eindeutigen Funktion  $\Psi$  zu der Funktion  $\psi$  möglich.

Umgekehrt wird aber auch  $\psi$  durch  $\Psi$  eindeutig bestimmt\*; an den Stellen, für welche  $\rho^1 < \dots < \rho^{N'}$  gilt durch (62), überall sonst durch die Forderung der Antisymmetrie.

Die einzelnen Teile (z. B.  $V_1$ ) des Operators  $V$  [gl. (60)]

\* Wir setzen voraus, daß  $\Psi$  wieder überall verschwindet, wo nicht  $N'(\rho^1) + \dots + N'(\rho^{N'}) = N'$  ist.

im mehrdimensionalen Koordinatenraum sind im Wesentlichen hermitesche Matrizen von  $K$  Zeilen und  $K$  Spalten. In der  $\nu$ -ten Zeile und  $\mu$ -ten Spalte stehe  $H_{\nu\mu}$ . Dann ist der ganze Operator  $V$  mit der Matrix

$$H_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N} = H_{\nu_1, \mu_1} \delta_{\nu_2, \mu_2} \delta_{\nu_3, \mu_3} \dots \delta_{\nu_N, \mu_N} \quad (63)$$

$$+ \delta_{\nu_1, \mu_1} H_{\nu_2, \mu_2} \delta_{\nu_3, \mu_3} \dots \delta_{\nu_N, \mu_N} + \dots + \delta_{\nu_1, \mu_1} \delta_{\nu_2, \mu_2} \dots H_{\nu_N, \mu_N}$$

identisch. Wir schreiben zur Abkürzung

$$V\psi(\rho^1, \dots, \rho^N) = \bar{\Psi}(\rho^1, \dots, \rho^N), \quad (64)$$

dann ist also

$$\bar{\Psi}(\rho^1, \dots, \rho^N) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N=1}^K H_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N} \psi(\rho^1, \dots, \rho^N) \quad (65)$$

Aus diesem  $\bar{\Psi}(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N)$  bilden wir — genau wie in (62) — ein  $\bar{\Psi}(N(\rho^1), \dots, N(\rho^N))$  durch

$$\bar{\Psi}(N(\rho^1), \dots, N(\rho^N)) = \bar{\Psi}(\rho^1, \dots, \rho^N) \frac{1}{\sqrt{N!}} \quad (62a)$$

Wir behaupten nun, daß

$$\bar{\Psi}(N(\rho^1), \dots, N(\rho^N)) = \Omega \bar{\Psi}(N(\rho^1), \dots, N(\rho^N)), \quad (66)$$

wo der Operator  $\Omega$

$$\Omega = \sum_{\kappa \lambda=1}^K H_{\kappa \lambda} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\lambda} \quad (66a)$$

ist, mit den  $a$  aus (31).

Gleichung (65) ist zunächst sicher richtig an allen Stellen (für alle Wertsysteme der Argumente), wo

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

die Anzahl der 1 im Argumentensystem von  $\Psi$  nicht eben gleich  $N'$  ist. Dann verschwindet nämlich die linke Seite wegen (62), (62a), und auch auf der rechten Seite stehen lauter Nullen, da  $\alpha_N^+$  die Anzahl der 1 nicht ändert.

An den Stellen aber, wo etwa die  $N'(\beta_{i1}), N'(\beta_{i2}), \dots, N'(\beta_{iN'})$  (also genau  $N'$ ) gleich 1 sind, ist  $\sqrt{N!} \Psi$  gleich  $\Psi(\beta_{i1}, \dots, \beta_{iN'})$ ,

also gleich

$$\sum_{m_1, \dots, m_{N'}=1}^K H_{i_1, \dots, i_{N'}, m_1, \dots, m_{N'}} \Psi(\beta_{i_1}^{m_1}, \dots, \beta_{i_{N'}}^{m_{N'}})$$

$$= \sum_{m_1=1}^K H_{i_1, m_1} \Psi(\beta_{i_1}^{m_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_{N'}}) + \sum_{m_2=1}^K H_{i_2, m_2} \Psi(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}^{m_2}, \beta_{i_{N'}}) + \dots + \sum_{m_{N'}=1}^K H_{i_{N'}, m_{N'}} \Psi(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_{N'}}^{m_{N'}}) \quad (67)$$

$$= \sum_{r=1}^{N'} \sum_{m_r=1}^K H_{i_r, m_r} \Psi(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_{r-1}}, \beta_{i_r}^{m_r}, \beta_{i_{r+1}}, \dots, \beta_{i_{N'}})$$

das zweite ersieht man aus (63). Unsere Absicht ist nun, die rechte Seite von (67) durch die  $\mathbb{F}$  auszu-drücken. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß in (67) rechts die  $\beta_i$  schon in der richtigen Reihenfolge stehen, nur das jeweils auftretende  $\beta_i^{m_i}$  ist an der falschen Stelle. Ist etwa\*

\* Das Gleichheitszeichen kommt nicht in Frage, da dann das entsprechende  $\Psi$  doch verschwindet.

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8  
 inches 1 2 3 4 5 6 7 8

$\beta_{i's-1} < \beta'_\mu \leq \beta_{i's}$ ,  
 so können wir die Reihenfolge der  $\beta'$  zur richtigen  
 machen, indem wir  $\beta'_\mu$  über die zwischen  $\beta_{i's-1}$   
 und  $\beta_{i's}$  verschieben. Dabei multipliziert sich die  
 antisymmetrische Funktion  $\Psi$  mit  $(-1)^z$ , wo  
 $z$  die Anzahl der zwischen den beiden angegebenen  
 Stellen stehenden  $\beta_i$  ist.

Wir können (67) also auch schreiben

$$\Psi(\beta_{i_1} \dots \beta_{i_N}) = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \pm H_{\nu,\mu} \Psi(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_N}) \quad (67a)$$

wo natürlich noch dies Vorzeichen  $\pm$  von  $\nu$  und  
 $\mu$  abhängt, aber schon

$$\beta_{i_1} < \dots < \beta_{i_k} < \dots < \beta_{i_N}$$

gilt. Wenn wir (62) beachten, können wir dies  
 auch\*

$$\Psi(x_1 \dots x_k) = \sum_{x_j=1} \sum_{x_\ell=0} \pm H_{j\ell} \Psi(x_1 \dots x_{j-1}, 0, x_{j+1} \dots x_{\ell-1}, 1, x_{\ell+1} \dots x_k) \\
 + \sum_{x_j=1} H_{jj} \Psi(x_1 \dots x_k) \quad (68)$$

Schreiben, wie man leicht überlegt. In den Summanden  
 nämlich, in (67a), wo  $i \neq \mu$  ist [erstes Glied in (68)],  
 sind dieselben Argumenten vorhanden wie an  
 der linken Seite, es fehlt nur  $\beta_{i'}$ , was links vor-  
 handen war ( $x_j=1$ ), dagegen ist  $\beta_{i'}$  hinzukommen,  
 \* Wir setzen aus Bequemlichkeitsgründen  $x_k$  für  $N(\beta_k)$ .

und wir können annehmen daß es nicht da war ( $x_i=0$ ),  
da sonst  $\psi$  doch verschwinden würde. Ist  $i_r = p_i$   
[zweites Glied in (68)], so sind rechts in  $\psi$  dieselben  
Argumente wie links.

Das Vorzeichen in (68) bestimmt sich offenbar dadurch,  
daß man  $+$  oder  $-$  setzt, je nachdem zwischen der  
ausgeschriebenen 0 und 1 eine gerade oder ungerade  
Anzahl von 1 steht. (Über ebenso viele  $\beta_i$  mußte man  
das entsprechende  $\beta_j$  hinüberschieben.) Dies ist aber  
die Anzahl der 1, die links von  $x_i$  stehen, vermindert  
um die Anzahl der 1, die links von  $x_j$  stehen.

Obwohl jetzt die Richtigkeit der vorangehenden Formeln  
schon klar ist, wollen wir diese Gedanken doch zu Ende  
führen. Wir wissen daß der Wertebereich der Argumente  
von  $\Psi$  insgesamt  $2^K$  Stellen umfaßt, indem für jedes  
der  $x_k = N(\beta_k)$  entweder  $+1$  oder  $0$  gesetzt werden  
kann. Ein darauf wirkender linearer Operator ist also  
eine Matrix mit  $2^K$  Zeilen und ebensoviel Spalten.  
Wir bezeichnen jede Zeile oder Spalte mit  $K$  Indizes  
(den  $x_1, \dots, x_k$  entsprechend), die jeweils  $1$  oder  $0$   
sein können.

Der Operator  $a_x$  ist entsprechend §3 und §6 zu  
definieren (wir schreiben das besserer Übersicht

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

halber die Indizes als Argumente) durch

$$a_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k; y_1, y_2, \dots, y_k) \quad (69)$$

$$= (-1)^{x_1+x_2+\dots+x_{k-1}} \delta_{x_1, y_1} \delta_{x_2, y_2} \dots \delta_{x_{k-1}, y_{k-1}} \delta_{x_k, y_k} \delta_{x_{k-1}, y_{k-1}} \delta_{x_k, y_k} \dots \delta_{x_k, y_k}$$

und entsprechend ist dann  $a_\lambda^\dagger$

$$a_\lambda^\dagger(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) \quad (69a)$$

$$= (-1)^{x_1+\dots+x_{k-1}} \delta_{x_1, y_2} \dots \delta_{x_{k-1}, y_{k-1}} \delta_{x_k, y_1} \delta_{y_k, 0} \dots \delta_{x_k, y_k}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann (68) auch so geschrieben werden:

$$\Psi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\lambda, \kappa=1}^K H_{\lambda\kappa} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_\kappa=0,1 \\ z_1, \dots, z_\kappa=0,1}} a_\kappa^\dagger(x_1, \dots, x_\kappa; y_1, \dots, y_\kappa) \cdot a_\lambda(y_1, \dots, y_\kappa; z_1, \dots, z_\kappa) \Psi(z_1, \dots, z_\kappa) \quad (70)$$

Wie man sich mit einiger Mühe überlegen kann, was aber schwer hingeschrieben werden kann. Damit ist (66) gewonnen.

§9. Wir haben also in §8 folgendes gesehen: Jede antisymmetrischen Funktion, welche definiert ist in den Koordinatenraum mit allen Anzahlen  $N' < K$  von Dimensionen, entspricht durch (62) eine Funktion im neuen Raume. Es entspricht dann dem Operator (60)  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$  [mit der Matrix in (64)  $H_{\nu_1, \dots, \nu_{N'}}; \mu_1, \dots, \mu_{N'}$ ] im Koordinatenraum der Operator  $\mathcal{Q}$  von (68) im neuen

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

$N'$ -Raum. Der Operator  $\Omega$  ist dabei

$$\Omega = \sum_{\kappa, \lambda=1}^N \Omega_{\kappa\lambda} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\lambda} \quad (66a)$$

mit den  $a_{\kappa}^{\dagger}, a_{\lambda}$  von (69), (69a).

Es folgt hieraus, daß einer Eigenfunktion von  $V$  eine Eigenfunktion von  $\Omega$  entspricht. Wenn wir noch zeigen können, daß das innere Produkt zweier Funktionen im Koordinatenraum denselben Wert hat wie dasjenige der entsprechenden Funktionen im neuen  $N'$ -Raum, so sind wir mit dem Beweis fertig. Im Koordinatenraum ist

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{\beta^1, \dots, \beta^{N'}} \Psi(\beta^1, \dots, \beta^{N'}) \tilde{\Phi}(\beta^1, \dots, \beta^{N'}), \quad (71)$$

was wegen der Antisymmetrie

$$(\Psi, \Phi) = N! \sum_{\substack{\beta^1, \dots, \beta^{N'} \\ \beta^1 < \dots < \beta^{N'}}} \Psi(\beta^1, \dots, \beta^{N'}) \tilde{\Phi}(\beta^1, \dots, \beta^{N'}) \quad (72)$$

ergibt. Andererseits gilt im neuen Raum

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{x_1, \dots, x_k=0,1} \Psi(x_1, \dots, x_k) \tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_k), \quad (73)$$

was mit Rücksicht auf (62) eben (72) ist.

Wir möchten noch bemerken, daß die  $q$ -Zählrelationen (36), (40) natürlich sofort aus der Formel (69) hervorgehen. §10. Wir müssen schließlich Operatoren betrachten, die keine Zerlegung mehr in die Gestalt (66) gestatten.

Von dieser Form ist die Energie eines nichtidealen Gases. Wir beschränken uns dabei zunächst auf solche, die in Teile zerlegbar sind, die jeweils nur zwei, stets verschiedene, Teilchen enthalten. Die Erledigung dieser Aufgabe ergibt sich durch Analogisierung der entsprechenden Formeln für die Bose-Einsteinsche Statistik\*. Der Operator  $V$  läßt sich dann schreiben:

$$V = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^{N'} V_{jk} \quad (60b)$$

wobei  $V$  die Matrix

$$= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^{N'} H_{\nu_j \nu_k; \mu_j \mu_k} \delta_{\nu_j \mu_j} \dots \delta_{\nu_{j-1} \mu_{j-1}} \delta_{\nu_{j+1} \mu_{j+1}} \dots \delta_{\nu_{k-1} \mu_{k-1}} \delta_{\nu_{k+1} \mu_{k+1}} \dots \delta_{\nu_{N'} \mu_{N'}} \quad (63b)$$

entspricht. Es ist dann

$$V \Psi(\rho^1, \dots, \rho^{N'}) = \bar{\Psi}(\rho^1, \dots, \rho^{N'}) \quad (64b)$$

mit Hilfe von (63b) [ebenso wie (65)] zu berechnen. Dann ist wieder die „richtige Reihenfolge“ der  $\rho$  auf der rechten Seite herzustellen. Dabei können die  $\rho_i$  stengelassen bleiben,  $\rho_j$  und  $\rho_k$  müssen über eine Anzahl von  $\rho_i$  hinübergeschoben werden, wobei sich wieder das Vorzeichen ändern kann.

Beachten wir wieder (62), so können wir wieder \* Jordan u. Klein, a.a.O.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

links und rechts für  $\bar{\Psi}$  bzw.  $\Psi$  einsetzen  $\bar{\Psi}$  bzw.  $\Psi$ .  
Unter Beachtung von (69) findet man nun, daß dem  
Operator (60b) nunmehr der Operator

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2=1 \\ x_1, x_2=1}}^K H_{x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2} a_{x_1}^\dagger a_{x_2}^\dagger a_{x_2} a_{x_1} \quad (66b)$$

entspricht.

Es ist befriedigend, daß die Rückwirkung der  
Teilchen auf sich selbst wieder durch die nicht-  
kommutativen Multiplikationseigenschaften  
der Wellenamplituden im dreidimensionalen Raume  
automatisch ausgeschlossen wird. Im Bose-Einstein-  
schen Falle wurde dieser Umstand deutlich gemacht  
durch Formel (40) der Arbeit von Jordan und Klein. Daß  
dieselbe Formel auch hier gilt, folgt aus der leicht  
beweisbaren Formel

$$a_x^\dagger a_{x_1} a_{x_2} a_x - a_x^\dagger a_x a_{x_2} a_{x_1} = \delta_{x_1 x_2} a_x^\dagger a_x.$$

Wir wenden uns endlich zu dem Fall von Operatoren,  
die aus Summanden bestehen, welchen, welche jeweils  
in  $n > 2$  Teilchen symmetrisch sind, während in der  
Summe alle diejenigen Summanden auszulassen sind,  
welche dasselbe Teilchen zweimal enthalten (was  
eine Wechselwirkung des Teilchens mit sich selbst  
bedeuten würde). Eine Verallgemeinerung der obigen

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Betrachtungen führt dann zu den folgenden Formeln, welche analog sind der in B angegebenen Verallgemeinerung\* der Formel von Jordan und Klein:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_n=1}^K \sum_{\kappa_1 \dots \kappa_n=1}^K H(x_1 \dots x_n; \lambda_1 \dots \lambda_n, a_{\lambda_1}^+, \dots, a_{\lambda_n}^+, a_{\kappa_1}, \dots, a_{\kappa_n}) \dots (66c)$$

§12. Wir können endlich die erhaltenen Ergebnisse in einer etwas anderen Form so aussprechen: Es gibt bei einem Paulischen Mehrkörperproblem eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, welche die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß, nachdem für die meßbaren Größen  $N(\beta'_1), N(\beta'_2), \dots, N(\beta'_k)$  ein gewisses Wertesystem  $N'(\beta'_1), N'(\beta'_2), \dots, N'(\beta'_k)$  gemessen worden ist, für die anderen, entsprechend definierten Größen  $N(q'_1), N(q'_2), \dots, N(q'_k)$  die Werte  $N'(q'_1), N'(q'_2), \dots, N'(q'_k)$  gefunden werden.

Eine solche Amplitude wird erhalten durch

$$\Phi_{\Theta_{\alpha}(\beta'), -\Theta_{\beta}(q')}^{N(\beta'), N(q')} = 0, \text{ für } \sum_{\beta'} N(\beta') \neq \sum_{q'} N(q') \quad (74)$$

und  $\Phi_{\Theta_{\alpha}(\beta'), -\Theta_{\beta}(q')}^{N(\beta'), N(q')} = N! \Phi_{\alpha\beta}^{N(q)}$  für  $\sum_{\beta'} N(\beta') = \sum_{q'} N(q')$ ,

wobei  $\Phi_{\alpha\beta}^{N(q)}$  die in §4 besprochenen Funktionen sind.

Die in A in der Form

\* Vgl. B, Formel (34),

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

$$\left\{ \sum_{rs} H_{rs} b_r^\dagger b_s - W \right\} \Phi = 0$$

angegebene Funktionalgleichung für die zum Gesamtsystem gehörige Amplitude  $\Phi$  lautet nimmehr bei unserer Vorzeichenbestimmung der in  $\Phi$  enthaltenen Determinanten:

$$\left\{ \sum H_{rs} a_r^\dagger a_s - W \right\} \Phi = 0;$$

diese Abänderung ist nötig, weil in A die Vorzeichen-zweideutigkeit dieser Determinanten nicht ausreichend berücksichtigt wurde; die Matrizen  $a_r$  unterscheiden sich wie wir wissen, von den  $b_r$  nur bezüglich der Vorzeichen ihrer verschiedenen Elemente. Es scheint sehr befriedigend, daß die für die Bildung des Energieausdrucks notwendige Einführung der Größe  $a_r$  gleichzeitig auch zu einfachen Multiplikationsgesetzen führte, wie wir in § 6 gesehen haben.

Es sei endlich hervorgehoben, daß die in § 6 erörterten Multiplikationsgesetze der geklammerten Amplituden  $a_p(q)$  in Analogie zu den von Jordan und Pauli entwickelten relativistisch invarianten Multiplikationsregeln des ladungsfreien elektromagnetischen Feldes leicht relativistisch verallgemeinert werden können, so daß man die dem Paulischen Äquivalenzverbot entsprechende Quantelung der de Broglie-

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

sehen Wellen in relativistisch invarianter Form erhält. Ein genauere Darlegung soll jedoch vorläufig zurückgestellt werden.

Zusatz bei der Korrektur: Zwischen den  $2K$  Operatoren  $a_1, a_2, \dots, a_K; a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_K^\dagger$  bestehen die Relationen

$$\left. \begin{aligned} a_\lambda a_\lambda + a_\lambda a_\lambda &= 0 \\ a_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger + a_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

und 
$$a_\lambda^\dagger a_\lambda + a_\lambda a_\lambda^\dagger = \delta_{\lambda\lambda} \quad (40)$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese  $\psi$ -Zahlrelationen die Operatoren  $a, a^\dagger$  schon eindeutig bestimmen, wenn man sich auf irreduzible Matrixsysteme beschränkt und Matrixsysteme, die auseinander durch Ähnlichkeitstransformation hervorgehen, als nicht verschieden voneinander ansieht\*.

Um dies einzusehen, bilden wir zunächst folgende Größen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\lambda &= a_\lambda + a_\lambda^\dagger \\ \alpha_{\lambda+\lambda} &= \frac{1}{i}(a_\lambda - a_\lambda^\dagger) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Die  $2K$  Matrizen  $\alpha$  bestimmen umgekehrt die  $a$  eindeutig. Nun gilt für die  $\alpha_\lambda$  allgemein

$$\alpha_\lambda \alpha_\lambda + \alpha_\lambda \alpha_\lambda = 2\delta_{\lambda\lambda} \quad (II)$$

Man überzeugt sich z. B. wenn  $\lambda < K, \lambda < K$

Kodak Color Control Patches

Blue  
Cyan  
Green  
Yellow  
Red  
Magenta

White

3/Color

Black

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8  
 inches 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8

$d_5?$   $K=2$   $K=3$   
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$   $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$   $(\alpha_i)$   
 $\alpha\alpha\alpha\alpha$   $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$

ist, dass  

$$\alpha_\kappa \alpha_\lambda + \alpha_\lambda \alpha_\kappa = (\alpha_\kappa + \alpha_\kappa^\dagger)(\alpha_\lambda + \alpha_\lambda^\dagger) + (\alpha_\lambda + \alpha_\lambda^\dagger)(\alpha_\kappa + \alpha_\kappa^\dagger)$$

$$= 2\delta_{\kappa\lambda}$$

Man kann (II) auch schreiben

$$\alpha_\kappa^2 = 1$$

$$\alpha_\kappa \alpha_\lambda = -1 \alpha_\lambda \alpha_\kappa \text{ für } \kappa \neq \lambda \quad \} \quad (IIa)$$

was aber mit anderen Worten so viel bedeutet,  
 dass die  $2K$  Matrizen  $\alpha$  zusammen mit der  
 Matrix  $-1$  eine Gruppe aufspannen. Wenn  
 z. B.  $K=2$  ist, so hat diese Gruppe folgende  
 Elemente

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \alpha_3\alpha_4; \\ -1; -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4; -\alpha_1\alpha_2, -\alpha_1\alpha_3, -\alpha_1\alpha_4, -\alpha_2\alpha_3, -\alpha_2\alpha_4, -\alpha_3\alpha_4; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \\ -\alpha_1\alpha_2\alpha_3, -\alpha_1\alpha_3\alpha_4, -\alpha_1\alpha_2\alpha_4, -\alpha_2\alpha_3\alpha_4, -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4. \end{array} \right.$$

Das sind  $32$  Elemente, im allgemeinen  $2^{2K+1}$   
 Elemente. Das irreduzible Matrixensystem, das (II)  
 genügt, ist sicher eine irreduzible Darstellung dieser  
 Gruppe (umgekehrt braucht es nicht der Fall zu  
 sein, die Isomorphie kann ja mehrstufig sein).  
 Wir werden nur die irreduziblen Darstellungen  
 bestimmen.

$\tau = 10 \neq 10$  Unser Gruppe hat den Normalteiler  $1, -1$  (das Zentrum),

$$\frac{2^{2K+1}}{2} + 1$$

ihre Faktorgruppe vom Grade  $2^{2K}$  ist abelsch. Sie hat also  $2^{2K}$  dieser Abelschen Faktorgruppe entsprechende irreduzible Darstellungen vom Grade 1, die auch Darstellung der ganzen Gruppe sind. Indessen kommen sie für uns nicht in Betracht, da sie den Gleichungen II nicht genügen (da sie ja kommutativ sind).

Wie viele Klassen hat unsere Gruppe? Die beiden Elemente 1 und  $-1$  bilden je eine Klasse für sich, sonst ist aber jedes Element  $R$  mit  $-1 \cdot R$  in einer Klasse. Besteht 1 nämlich  $R$  in (III) aus einer ungeraden Anzahl von Faktoren, so ist  $\alpha R \alpha^{-1} = -1 \cdot R$ , wenn  $\alpha$  in  $R$  <sup>nicht</sup> enthalten ist, wenn  $R$  aus einer geraden Anzahl von Faktoren besteht, ist  $\alpha R \alpha^{-1} = 1 \cdot R$ , wenn  $\alpha$  in  $R$  <sup>\*</sup> enthalten ist. Die Anzahl der Klassen ist also  $2^{2K} + 1$ ; dies ist auch die Anzahl der voneinander verschiedenen irreduziblen Darstellungen. Da wir  $2^{2K}$  Darstellungen schon kennen und diese nicht für uns in Betracht kommen, kann es nur eine einzige, die letzte sein, die die Gleichungen (II) befriedigt, alle anderen Lösungen von (II) geben daraus durch Ähnlichkeitstransformation hervor.

Wir bestimmen noch die Anzahl von Zeilen und Spalten, die Dimension dieser Darstellung, (Es muß dabei

$$* \frac{1}{2} \{ 2^{2K+1} - 2 \} + 2$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

natürlich  $2^K$  herauskommen.) In der Tat ist der Grad  
der Gruppe  $2^{2K+1}$  gleich der Summe der Quadrate der  
Dimensionen ihrer Darstellungen. Es haben  $2^{2K}$   
die Dimension 2, die letzte muß die Dimension  $2^K$   
haben, damit  $(2^K)^2 + 2^{2K} \cdot 2^2 = 2^{2K+1}$ . Sie stimmt  
also tatsächlich mit unserem Matrixsystem (69)  
oder §3 und 6 überein

Göttingen, Institut für Theoretische Physik.

$$2^{2K+1} - 2^{2K}$$

$$= 2^{2K} \cdot 2$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

T211 ZT 10.

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik

Von P. Jordan, 2. 2, in Kopenhagen.

(Eingegangen am 11. Oktober 1929.) ZS. 45, 766, 1929.

Bekanntlich hat Dirac gezeigt, in welcher Weise man für ein der Bose-Einsteinschen Statistik unterworfenen Gas einerseits<sup>1</sup> Schrödingersche Eigenfunktionen im vieldimensionalen Koordinatenraum konstruieren kann, und wie man andererseits<sup>2</sup> im Spezialfall eines idealen Gases diese Eigenfunktion in Zusammenhang bringen kann mit einer quantenmechanischen Beschreibung des Gases, welche sich auf die von Einstein herrührende Vorstellung gründet, daß ein solches Gas allgemein — wie im Spezialfall des Lichtquantengases — als ein dreidimensionales schwingendes Kontinuum mit gequantelten Eigenschwingungen aufzufassen sei. Von O. Klein und dem Verfasser ist diese zweite Darstellung ausgedehnt worden<sup>3</sup> auf den Fall eines Mehrkörperproblems mit einer beliebigen Wechselwirkungsenergie zwischen je zwei Teilchen.

In der vorliegenden Note gebe ich eine verallgemeinerte Darlegung aller dieser Überlegungen. Wenngleich die auszuführenden Verallgemeinerungen<sup>ne</sup> sehr naheliegend und einfach sind, so möchte ihre explizite Durchführung doch nicht überflüssig sein, da sie, wie mir scheint, eine sehr weitgehende und durchsichtige Aufklärung liefern über die mathematischen Zusammenhänge, welche dem quantenmechanischen Dualismus von Korpuskeln

1. 112
2. 114, 243.
3. 45, 751.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

und gequantelten Wellen zugrunde liegen. Insbesondere scheinen sie eine abschließende Erklärung zu liefern für die von Einstein aufgedeckten Schwankungseigenschaften der Strahlung, welche bislang nur zum Teil quantenmechanisch gedeutet waren.<sup>4</sup>

§ 1. Wir betrachten zunächst ein „ideales“ Mehrkörperproblem ohne Wechselwirkung zwischen den Einzelatomen. Ein jedes dieser Einzelatome möge  $f$  Freiheitsgrade haben, und es mögen bei einem einzelnen Atom etwa die Größen

$$\begin{matrix} q_1 & q_2 & \dots & q_f \\ \hline p_1 & p_2 & & p_f \end{matrix} \quad (1)$$

ein kanonisches Koordinatensystem bilden. Wir bezeichnen dieses Koordinatensystem zusammenfassend mit dem Buchstaben  $q$  und werden auch sonst im folgenden durchweg Bezeichnungen und Ausdrucksweisen gebrauchen, als wenn speziell  $f=2$  wäre; trotzdem beziehen sich alle Überlegungen durchaus auf den Fall eines beliebigen Wertes  $f$ .

Wir wollen nun die Diracsche Konstruktion von Eigenfunktionen des Gases aus den Schrödingerschen Eigenfunktionen des Einzelatoms anwenden auf beliebige Wahrscheinlichkeitsamplituden des Einzelatoms. Es sei also<sup>1</sup>

$$\Phi_{q,p}^{(A)} = \Phi_{\alpha p}(\beta, \alpha')$$

eine solche Amplitude für ein Einzelteilchen. Dann bilden

4. 35, 557, 1926

1. vgl. **I**. Die Amplitude  $\Phi_{\alpha p}(\beta, \alpha')$  ist eine Funktion der Argumente  $\beta$  und  $\alpha'$ . Die Funktionsform ist bestimmt durch den

wir für ein System von  $N$  der Einsteinschen Statistik ge-  
 hörenden, nicht in Wechselwirkung stehenden Teilchen  
 die entsprechende Amplitude

$$\Psi_{\alpha P}^{PQ} = \Psi_{\alpha P} (p_1', p_2', \dots, p_N'; Q', Q'', \dots, Q^{(N)}) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_n \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha P} (p^{(nk)}, Q^{(k)})$$

dabei bedeutet  $\sum_n$  Summierung über alle Permutationen  
 $N_k$  der Zahlen  $1, 2, \dots, N$ .

Diese Amplituden  $\Psi_{\alpha P}^{PQ}$  gehorchen denselben Kombi-  
 nationsgesetze, wie die Amplituden  $\Phi_{\alpha P}^{PQ}$  beim Einzel-  
 teilchen. Es ist nämlich

$$\sum_{Q'} \sum_{Q''} \dots \sum_{Q^{(N)}} \Psi_{\alpha P} (p_1', p_2', \dots; Q' Q'' \dots) \Phi_{PP} (Q' Q'' \dots; q_1' q_2' \dots)$$

$$= \Psi_{\alpha P} (p_1' p_2', \dots; q_1' q_2' \dots), \quad (3)$$

oder, wie wir kurz schreiben wollen:

$$\Psi_{\alpha P}^{PQ} \Phi_{PP}^{PQ} = \Psi_{\alpha P}^{PQ}. \quad (4)$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (2):

$$\frac{1}{(N!)^2} \sum_{Q'} \sum_{Q''} \dots \sum_{Q^{(N)}} \sum_{n_1 n_2} \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha P} (p^{(nk)}, Q^{(k)}) \Phi_{PP} (Q^{(k)}, q^{(nk)}) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{n_1 n_2} \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha P} (p^{(nk)}, q^{(nk)}) = \frac{1}{N!} \sum_n \prod_{k=1}^N \Phi_{\alpha P} (p^{(nk)}, q^{(k)}).$$

Charakter der Größen  $p, Q$  und  $\alpha, P$ , wobei  $\alpha$  ein kanonischer  
 Impuls zu  $p$  und  $P$  ein Impuls zu  $Q$  ist; ihrem Absolutwert nach  
 ist die Funktion  $\Phi_{\alpha P} (p, Q)$  schon durch  $p, Q$  allein bestimmt.  
 2. Das Zeichen  $\sum$  bedeutet je nach dem Umständen eine Summe  
 oder ein Integral oder eine Summe von Summen und Integralen  
 vgl. II, S. 405

Kodak Color Control Patches

Blue  
Cyan  
Green  
Yellow  
Red  
Magenta

White

3/Color

Black

Aus (4) folgen insbesondere die Formeln

$$\Psi_{\alpha p}^{p\alpha} \Psi_p^{\alpha\alpha} = \Psi_{\alpha\alpha}^{p\alpha} \quad (6)$$

$$\Psi_{\alpha\alpha}^{p\alpha} \Psi_p^{\alpha\alpha} = \Psi_{\alpha\alpha}^{p\alpha} \quad (7)$$

$$\Psi_{p\alpha}^{\alpha\alpha} \Psi_{\alpha\alpha}^{p\alpha} = \Psi_{p\alpha}^{\alpha\alpha}$$

Darin ist

$$\Psi_{\alpha\alpha}^{p\alpha} = \Psi_{\alpha\alpha}(\bar{p}', \bar{p}'', \dots; \bar{p}', \bar{p}'', \dots) = \frac{1}{N!} \sum_n \prod_{k=1}^N \delta(p^{(k)} - \bar{p}^{(k)}) \quad (8)$$

§ 2. Wir wollen zur Vermeidung rein formaler Komplikationen in den folgenden Erörterungen die Annahme machen, daß jedes der Größen  $\beta, \alpha; q, p; Q, P$  usw. am Einzelatom  $K$  Eigenwerte<sup>1</sup>, was die hier durchzuführenden Überlegungen sehr erleichtert. Wir können aber diese Überlegungen durch einen Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$  auch auf unendlich viele (diskrete oder kontinuierliche) Eigenwerte übertragen. Wir betrachten jetzt <sup>h</sup> das ideale Gas — unabhängig von der Anzahl der vorhandenen Atom — als ein System von  $K$  Freiheitsgraden. Dieses System kann also beschrieben werden durch  $K$  vertauschbare, unabhängige  $q$ -Zahlgrößen

$$R_1, R_2, \dots, R_K \quad (9)$$

mit zugehörigen Impulsen

$$T_1, T_2, \dots, T_K, \quad (10)$$

Wir wollen nun zeigen, daß man insbesondere, wenn  $\beta$  eine beliebige Größe (d.h. also: ein kanonisches Größen-system

<sup>1</sup> Vgl. II, S. 9.

$(p_1, p_2, \dots, p_f)$  beim Einzelatom ist, für  $R_1, R_2, \dots, R_K$  die

$K$  Größen  $N(p')$  ( $p' =$  Eigenwerte von  $p$ ) (11)  
währen kann, welche folgende physikalische Bedeutung  
haben sollen: Eine Messung der Werte  $N(p')$  aller  $K$   
Größen  $N(p')$  ist gleichbedeutend mit der Messung der  
verschiedenen Werte  $p'$  für alle vorhandenen Atome;  
und zwar ist  $N(p')$  gleich der Anzahl derjenigen Atome,  
bei denen  $p$  gerade den Wert  $p'$  besitzt. Die Größen  $N(p')$   
sind offenbar die naturgemäße Verallgemeinerung der  
von Dirac im Anschluss an Einstein eingeführten  
Größen  $N_r$ ; wir erhalten aus  $N(p')$  speziell die Größe  
 $N_r$ , indem wir für  $p$  die Energie des Einzelatoms und  
für  $p'$  den  $r$ -ten Eigenwert dieser Energie wählen.  
Die Eigenwerte jeder der Größen (11) sind für die Bose-  
Einsteinische Statistik gleich

$$N(p') = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Während so die Größen  $N(p')$  durch Angabe von  $p$   
physikalisch völlig definiert sind, besteht in der Defi-  
nition der zugehörigen kanonisch konjugierten Phasen  
zu den  $N(p')$  kennzeichnen durch Hervorhebung eines  
bestimmten Impulses  $\alpha$  zu  $p$ ; wir bezeichnen dann  
die Größen (11) und ihre konjugierten Phasen durch

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

$$N(p') ; \Theta_{\alpha}(p') \quad (13)$$

Die Eigenwerte der Phasen sind allgemein gegeben durch

$$0 \leq \Theta_{\alpha}(p') < h \quad (14)$$

Betrachten wir nun neben den  $N(p') ; \Theta_{\alpha}(p')$  gewisse andere Größen  $N(Q') ; \Theta_{\beta}(Q')$  — wo also  $Q$  wieder eine meßbare Größe am Einzelatom mit einem zugehörigen Impuls  $P$  ist —, so muß es möglich sein, die  $q$ -Zahlen  $N(Q') ; \Theta_{\beta}(Q')$  als durch Multiplikationen und Additionen aufgebaute Funktionen der  $q$ -Zahlen  $N(p') ; \Theta_{\alpha}(p')$  darzustellen. Diesen Zusammenhang der  $N(Q') ; \Theta_{\beta}(Q')$  mit den  $N(p') ; \Theta_{\alpha}(p')$  formulieren wir folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Wir setzen } b_{\alpha}(p') &= e^{-\frac{2\pi i}{h} \Theta_{\alpha}(p')} \sqrt{N(p')} \\ b_{\alpha}^{\dagger}(p') &= \sqrt{N(p')} e^{\frac{2\pi i}{h} \Theta_{\alpha}(p')} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und zwar wieder für jedes beliebige  $p$ , so daß wir z. B. auch  $b_{\beta}(Q')$  und  $b_{\beta}^{\dagger}(Q')$  definiert haben. Dann gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha}(p') &= \sum_{Q'} \bar{\Phi}_{\alpha\beta}(p', Q') b_{\beta}(Q') \\ b_{\alpha}^{\dagger}(p') &= \sum_{Q'} b_{\beta}^{\dagger}(Q') \Phi_{\beta\alpha}(Q', p') \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ersetzen wir hier  $\alpha$  durch  $\bar{\alpha}$ , wobei also  $\bar{\alpha}$  wieder konjugiert zu  $\alpha$  sein soll, so ~~ist~~ <sup>multipliziert</sup> sich  $\Phi_{\alpha\beta}(p', Q')$

mit einem Faktor  $e^{iF(\beta)}$ ; also wird

$$\Theta_{\alpha}(\beta') = \Theta_{\alpha}(\beta) - \frac{h}{2\pi\alpha} F(\beta') \quad (17)$$

Diese Gleichung zeigt, in welcher Weise  $\Theta_{\alpha}(\beta')$  von der Wahl des Impulses  $\alpha$  zu  $\beta$  abhängt.

§ 3. Wir haben in § 2 einerseits die Eigenwerte  $N(\beta')$  der  $N(\beta)$  durch die Eigenwerte der Größe  $\beta$  bei sämtlichen Einzelatomen ausgedrückt derart, daß eine Messung der  $N(\beta')$  gleichbedeutend mit der Messung der  $\beta$  aller Einzelatome ist; und ein entsprechender Zusammenhang soll zwischen den  $N(Q)$  und den Größen  $Q$  der Einzelatome bestehen. Andererseits haben wir mit den (15), (16) die Größen  $N(Q')$  als Funktionen der  $N(\beta')$ ;  $\Theta_{\alpha}(\beta')$  definiert. Diese Formeln (15), (16) ergeben sich nach der allgemeinen Quantenmechanik einen statistischen Zusammenhang zwischen den  $N(\beta')$  und den  $N(Q')$ , also auch einen statistischen Zusammenhang zwischen den  $\beta$  und  $Q$  aller Atome in der Tat Größen  $\beta$  aller Atome und den  $Q$  aller Atome. Wir müssen nun zeigen, daß dieser so bestimmte statistischen Zusammenhang zwischen den  $\beta$  und  $Q$  aller Atome in der Tat der richtige ist, nämlich derselbe, den man aus den Amplituden  $\Psi_{\alpha\beta}^{\beta'Q}$  des § 1 entnehmen kann. Ist aber dieser Beweis geführt, so werden wir eine vollständige Recht-

fertigung der Ansätze von §2 gegeben haben.

Mathematisch stellt sich der zu beweisende Satz folgendermaßen dar: In den kanonischen Größen  $N(\beta')$ ;  $\Theta \alpha(\beta')$  und  $N(\alpha')$ ;  $\Theta p(\alpha')$  beim Gesamtsystem gehört eine gewisse Eigenfunktion

$$\Phi_{N(\beta'), N(\alpha')}^{N(\beta'), N(\alpha')} = \Phi_{-\Theta \alpha(\beta'), -\Theta p(\alpha')}^{N(\beta'), N(\alpha')} \quad (18)$$

Sie hängt also ab von den  $K$ -Argumenten  $N(\beta')$  einerseits und den  $K$ -Argumenten  $N(\alpha')$  andererseits. Und sie ist gegeben:

a) Im Falle  $\sum_{\beta'} N(\beta') \neq \sum_{\alpha'} N(\alpha')$   
 durch  $\Phi_{N(\beta'), N(\alpha')}^{N(\beta'), N(\alpha')} = 0, \quad (19)$

b) Im Falle  $\sum_{\beta'} N(\beta') = \sum_{\alpha'} N(\alpha') = N'$   
 durch  $\Phi_{N(\beta'), N(\alpha')}^{N(\beta'), N(\alpha')} = N'! \left\{ \prod_{\beta'} N(\beta')! \prod_{\alpha'} N(\alpha')! \right\}^{-\frac{1}{2}} \Psi_{\alpha p}^{(20)}$

Es genügt, die Formeln (19), (20) zu beweisen für eine beliebige Größe  $\beta$ , während für  $\alpha$  eine spezielle, feste Größe genommen wird. Wir wählen für  $\alpha$  die Energie  $W$  des Einzelatoms. Die Energie  $E$  des Gesamtgases ist in dem bislang ausschließlich berücksichtigten Falle eines idealen Gases gegeben durch

$$E = \sum_v W_v N_v. \quad (21)$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak



Ausdruck  $N(\rho') = b_\alpha^\dagger(\rho') b_\alpha(\rho')$  die räumliche Dichte der Atome. In der eingangs erwähnten Arbeit von O. Klein und dem Verfasser ist die Amplitude  $b_\alpha(\rho')$  der räumlichen Dichte mit  $\varphi(\mathbf{r}')$  bezeichnet worden. Die dort benutzte Beziehung

$$\varphi(\mathbf{r}') \varphi^\dagger(\mathbf{r}'') - \varphi^\dagger(\mathbf{r}'') \varphi(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \quad (26)$$

ist ebenso wie die bei den Diracschen  $b_r, b_r^\dagger$  geltende Gleichung

$$b_r b_s^\dagger - b_s^\dagger b_r = \delta_{rs} \quad (27)$$

ein Spezialfall der allgemein für beliebiges  $\rho$  geltenden Regel<sup>1</sup>

$$b_\alpha(\rho') b_\alpha^\dagger(\rho'') - b_\alpha^\dagger(\rho'') b_\alpha(\rho') = \delta(\rho' - \rho'') \quad (28)$$

Wir haben soeben bereits einen Grenzübergang von  $K$  Eigenwerten der Größe  $\rho$  zu unendlich vielen, kontinuierlichen Eigenwerten vorgenommen. Dabei erhalten die Eigenwerte  $N(\rho)$  der  $N(\rho')$  offenbar folgende Gestalt:

$$N(\rho') = \sum_{\rho} n_{\rho} \delta(\rho' - \rho)$$

wo die  $n_{\rho}$  ganze Zahlen und die  $\rho$  lauter verschiedene Eigenwerte von  $\rho$  sein sollen. In dieser Formel zeigt sich besonders deutlich die innige Verschmelzung von Wellen- und Korpuskularvorstellung, wie sie sich aus der Anwendung der charakteristischen quanten-

<sup>1</sup> Neben (28) gilt nämlich

$$b_\alpha(\rho') = \sqrt{N(\rho') + 1} \cdot e^{-\frac{i\hbar}{2} \Theta_\alpha(\rho')} \quad b_\alpha^\dagger(\rho') = e^{\frac{i\hbar}{2} \Theta_\alpha(\rho')} \sqrt{N(\rho') + 1}$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

mechanischen Begriffe ergibt; Für die Wellenamplituden  $\varphi(x)$  gilt unbeschränkt das Superpositionsprinzip, bei uns vertreten durch die Formeln (16); trotzdem zeigt sich die korpuskulare Natur der Strahlung in schärfer Form, sobald wir die c-Zahlwerte von  $N'(x') = \varphi^\dagger(x') \varphi(x')$  ins Auge fassen.

Die physikalische Notwendigkeit, die ungequantelten Maxwell'schen Gleichungen der klassischen Theorie zu ersetzen durch ein q.m. gequanteltes Wellfeld, zeigt sich bekanntlich, wenn wir absehen von allen Problemen der Wechselwirkung von Strahlung und Materie, nicht nur in der Gültigkeit des Planckschen statt des Rayleigh-Jeanschen Gesetzes, sondern vor allem in den Schwankungseigenschaften der Strahlung; und aus diesen hat Einstein bekanntlich die ersten und stärksten Gründe für die korpuskulare Struktur der Strahlung abgeleitet. Schon in der ersten systematischen Untersuchung der von Heisenberg in die Quantentheorie eingeführten Gedanken konnte gezeigt werden, daß man ohne explizite Einführung korpuskularer Lichtquanten durch bloße Quantelung der Wellenamplitude jedenfalls das mittlere Schwankungsquadrat der Wellenamplitude energie (bzw. der Teilchendichte)

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

richtig erhalten kann<sup>1</sup>, während die klassische Theorie bekanntlich in diesem Punkte zu einem falschen Ergebnis führte. Man bildet aber natürlich dieses mittlere Schwankungsquadrat nur ein einzelnes Beispiel für die Abweichungen von der klassischen Theorie, die sich allgemein in allen Schwankungseigenschaften der Strahlung zeigen; und man wird deshalb von einer befriedigenden Theorie verlangen müssen, daß sie auch alle anderen Schwankungserscheinungen, für welche einfache Formeln gelten, in entsprechend einfacher Weise zu übersehen gestattet. In dieser Beziehung sind nun die Wahrscheinlichkeiten der extrem selten räumlichen Energieverteilungen besonders lehrreich; und die früher erhaltenen Ergebnisse bezüglich des mittleren Schwankungsquadrats konnten nur teilweise befriedigen, solange es nicht möglich war, sie durch eine Aufklärung über jene extrem seltenen Verteilungen zu ergänzen<sup>1</sup>.

Thermodynamische Betrachtungen haben Einstein schon im Jahr 1905 für das Gültigkeitsgebiet des Wienschen statt des Planckschen Gesetzes zu folgendem Ergebnis geführt; Ist monochromatische Strahlung von der Frequenz  $\nu$  und der Energie  $E$  in das Volumen

1.35, 537

<sup>1</sup> Hierauf bin ich seinerseits in freundlichen brieflichen Mitteilungen von Herrn A. Einstein mehrfach hingewiesen worden.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

$v_0$  (durch spiegelnde Wände) eingeschlossen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig heraus gegriffenen Zeitmoment die ganze Strahlungsenergie in dem Teilvolumen  $v$  des Volumens  $v_0$  befindet:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{2}{k}} \quad (29)$$

In dieser Formel sieht man unmittelbar die korpuskularen Quanten  $h\nu$ , aber die elementaren Matrixmethoden, die seinerzeit für die Bestimmung des mittleren Schwankungsquadrats benutzt wurden, gaben offenbar keine Möglichkeit einer von der Thermodynamik unabhängigen Ableitung der Einsteinschen Formel (29); sie erlaubten nicht einmal eine Formulierung der durch (29) beantworteten Frage. Denn mit den damaligen Hilfsmitteln konnten nur zeitliche Mittelwerte definiert werden, während für eine unmittelbare g. m. Bestimmung physikalischer Wahrsch. damals noch keine Unterlagen vorhanden waren.

Inzwischen hat die allgemeine Formulierung der Q.M. wie sie von Dirac und dem Verfasser angeführt wurde, eine allgemeine Regel zur Bestimmung jeder deutbaren physikalischen Wahrsch. gegeben, und es kann deshalb

2, A. Einstein, Ann. der Phys. 17, 132, 1905. Wir haben hier  $h$  statt der von Einstein gebrauchten  $\frac{h}{2\pi}$  benutzt; im übrigen ist Einsteins Ergebnis wörtlich zitiert.

zunehmend die Frage aufgeworfen worden, ob in einem  
gequantelten Wellenfeld im Grenzfall des Wienschen  
Gesetzes wirklich die von der Thermodynamik geforderte  
Formel (29) richtig herauskommt. Diese Frage ist ohne  
weitere zu bejahen auf Grund der Feststellungen, die wir  
im vorangehenden in Erweiterung der Diracschen Überlegung  
gemacht haben. Denn diese Überlegungen zeigten, daß  
das gequantelte Wellenfeld in allen seinen physikalischen  
Eigenschaften, insbesondere also hinsichtlich seiner  
Intensitätsschwankungen äquivalent ist mit einem  
Korpuskularsystem (mit symmetrischen Eigenfunktionen);  
man bekommt also, indem man die Wahrscheinlichkeit  
Win (29) berechnet aus der Wahrscheinlichkeit

$$|\Phi - \Theta \alpha(\beta'), -\Theta p(\alpha')|^2, \quad (30)$$

wobei wieder  $\beta$  den Ort und  $\alpha$  die Energie des Einzel-  
teilchens bezeichnet, im Grenzfall des Wienschen  
Gesetzes dieselbe Formel wie in der klassischen Gestalt.

§ 5. Wenden wir uns endlich zum Falle eines „Feinsten“  
Mehrkörperproblems mit Wechselwirkungsenergien zwischen  
den Teilchen, so ist zu sagen, daß die obigen Feststel-  
lungen über die Möglichkeit der Einführung allgemeiner  
Variablen  $N(\beta')$ ;  $\Theta \alpha(\beta')$  und die allgemeinen  
Beziehungen (15), (16) auch hier gültig bleiben.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Nur setzt sich jetzt eben die Energie des Gesamtsystems nicht mehr additiv aus den Energien der Einzelteilchen zusammen, und dies hat zur Folge, daß ein die „Schrödingergleichung“ (25) eine andere Gestalt erhält, so daß ihre Lösung nicht mehr mit der in § 3 betrachteten Amplituden  $\Phi = \mathbb{Q} \alpha(p'), - \mathbb{Q} p(\alpha)$  identisch ist.

Für den Fall, daß die Gesamtenergie  $H$  in der korpuskulartheoretischen Darstellung die Form

$$H = \sum_{k=1}^N H^{(1)}(p_k, q_k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N H^{(2)}(p_k, q_k; p_l, q_l) \quad (31)$$

besitzt, wo in der Summe  $\sum_{k,l}$  die Glieder mit  $k=l$  auszulassen sind, hat man wie O. Klein und der Verfasser gezeigt haben, die wellenmäßige Darstellung der Energie zu geben in der Form

$$E = \sum_{q'} b_p^+(q') \cdot H^{(1)}(\bar{p}', q') b_p(q') + \frac{1}{2} \sum_{q'q''} b_p^+(q') b_p^+(q'') H^{(2)}(\bar{p}', q'; \bar{p}'', q'') \times b_p(q') b_p(q'') \dots (32)$$

Hierv. soll  $\bar{p}$  den Operator von  $p$  in bezug auf  $q, p$  bedeuten; und  $\bar{p}'$  bzw.  $\bar{p}''$  soll jeweils auf Funktionen von  $q'$  bzw.  $q''$  wirken. Die erste Summe in (32) stimmt überein

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

mit (23)

Es ist nun aber (31) nicht die allgemeinste mögliche Gestalt der Wechselwirkungsenergie zwischen gleichartigen Teilchen; z.B. ist offenbar schon die Wechselwirkung zwischen geladenen, polarisierbaren Teilchen von einer allgemeineren Gestalt als (31). Man kann aber die Ergebnis von O. Klein und dem Verf. wohl unmittelbar verallgemeinern auf den Fall einer Energie

$$H = \sum_{\kappa=1}^N H^{(1)}(p_{\kappa} q_{\kappa}) + \frac{1}{2} \sum_{\kappa, \ell=1}^N H^{(2)}(p_{\kappa} q_{\kappa}; p_{\ell} q_{\ell}) + \frac{1}{3} \sum_{\kappa, \ell, j=1}^N H^{(3)}(p_{\kappa} q_{\kappa}; p_{\ell} q_{\ell}; p_j q_j) + \dots \quad (33)$$

In jeder dieser endlich oder unendlich vielen Summen soll alle Glieder mit (mindestens) zwei gleichen Indizes fortgelassen werden. Dann ergibt sich als naheliegende Verallgemeinerung von (2) für die Wellenenergie

$$E = \sum_{q'} b_p^+ H^{(1)}(\bar{p}, q') b_p(q') + \frac{1}{2} \sum_{q' q''} b_p^+(q') b_p^+(q'') H^{(2)}(\bar{p}, q'; \bar{p}'', q'') b_p(q') b_p(q'') + \frac{1}{3!} \sum_{q' q'' q'''} b_p^+(q') b_p^+(q'') b_p^+(q''') H^{(3)}(\bar{p}, q'; \bar{p}'', q'''; \bar{p}''', q''') \times b_p(q') b_p(q'') b_p(q''') + \dots \quad (34)$$

Ich habe Herrn Prof. N. Bohr sehr zu danken für seine freundliche Anteilnahme an dieser Arbeit, und dem Int. Ed. Board für die Ermöglichung meines Kopenhagener Aufenthalts.

1. Ein erstes Teilchen induziert ein Moment in einem zweiten; dieses Moment ergibt eine Energie zwischen diesem zweiten u. einem dritten Teilchen usw.

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

十二月一日

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University  
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder.

Von P. Jordan in Göttingen und W. Pauli jr. in Hamburg

(Eingegangen am 7. Dezember 1927)

ZS. 47, 151, 1928

Bekanntlich ist es Dirac<sup>\*</sup> zuerst gelungen, die quantenmechanischen Methoden auch auf die Behandlung des elektromagnetischen Feldes selbst zu übertragen, indem er die Amplituden der Partialwellen des Feldes als „q-Zahlen“ auffasst und Vertauschungsrelationen für diese aufstellt. Dafs auf diesem Wege wesentliche Fortschritte zu erzielen seien, mußte gewifs erscheinen, nachdem eine analoge Behandlung eines einfacheren Problems, der skalaren (eindimensionalen) Wellengleichung, schon früher ergeben hatte<sup>\*\*</sup>, dafs eine bekannte, von Einstein aufgefundene Schwierigkeit bezüglich der Energieschwankungen in einem Wellenfeld durch eine q.m. Behandlung der Eigenschwingungen des Feldes gelöst werden konnte. In der Tat gelang es Dirac, eine konsequente Theorie der Emission, Absorption und Dispersion der Strahlung aufzustellen. Jordan<sup>\*\*\*</sup> hat ferner eine Übertragung der Diracschen Methoden der Quantelung von Wellenfeldern auf den Fall der Materiewellen selbst entsprechend der Fermistatistik angegeben, und die Resultate einer neueren Arbeit von Jordan u. Klein<sup>\*\*\*\*</sup> lassen es überdies als sehr aussichtsreich erscheinen, das noch ungelöste Problem einer Q.theorie der Wechselwirkung von Teilchen bei Mitberücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschw. der Kraftwirkungen anzugreifen; eine

\* 114, 243, 1710

\*\* 35      \*\*\* 44, 4173      47, 631

\*\*\*\* 45, 1751

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

welche Theorie müßte auch die el. statischen und die Strahlungswirkungen des el. mg. Feldes nach einheitlichen Methoden behandeln.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit soll indessen noch nicht dieses allgemeine Wechselwirkungsproblem sein, sondern es ~~wird~~ wird hier vorläufig nur beabsichtigt, zunächst im Falle des reinen el. mg. Strahlungsfeldes ohne geladene Teilchen einem Mangel der in den genannten Arbeiten erreichten Formulierung der Theorie abzuwehren, der von deren Verfassern noch auch stets betont wurde. In diesen Arbeiten wird nämlich die Zeitkoordinate von den Raumkoordinaten stets in eigentümlicher Weise ausgezeichnet, die Resultate sind nicht relativistisch invariant. Dagegen sind die in der vorliegenden Arbeit zur Quantelung des el. mg. Feldes verwendeten Methoden relativistisch invariant.

Zunächst wird in § 1 noch der Standpunkt angenommen, daß die el. mg. Feldstärken nach Fourier in polarisierte, monochromatische Partialwellen zerlegt werden und deren Amplituden als „g-Zahlen“ gewisse Vertauschungsrelationen erfüllen. Es gelingt, diese Relationen so zu formulieren, daß kein Bezugssystem der speziellen Relativitätstheorie vor einem anderen durch diese ausgezeichnet ist, während die Schwächungseigenschaften der Strahlungsenergie nach den erwähnten

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

früheren Ergebnissen zugleich richtig durch die Theorie  
wiedergegeben werden\*, bei welchem eine Fourierzerlegung  
des Feldes nichtexplizite gebraucht wird und die Feld-  
stärken selbst als Kontinuum von  $q$ -Zahlen an-  
gesehen werden, In den § 2 bis 4 des ersten Teils dieser  
Arbeit wird dieser die stetig von den Raum-Zeitkoordinaten  
abhängigen. Es mögen solche Gesamtheiten von  $q$ -Zahlen  
kurz als „ $q$ -F<sub>rel</sub>“ bezeichnet werden. In den § 2 bis 4 des  
ersten Teils dieser Arbeit wird dieser allgemeinere Stand-  
punkt, stets unter Wahrung der relativistischen Invarianz,  
durchgeführt. Es sei hier ~~bemerkt~~, daß dieser Arbeit  
wird dieser Überlegungen sich auch auf Materiewellen  
kräftefreier bewegter Teilchen vollständig übertragen  
lassen und zu einer rel. inv. Quantelung dieser Wellen  
führen, falls man es mit gleichartigen Partikeln zu  
tun hat, die der Einstein-Bose-Statistik gehorchen.  
Da jedoch im anderen Falle von Partikeln mit Fermi-  
statistik die Quantelung der Materiewellen noch nicht  
völlig geklärt ist\*\*, sind wir hierauf in dieser Arbeit  
nicht näher eingegangen. Von einer noch ausstehenden all-  
gemeinen rel. inv. Quantentheorie der Wellenfelder, die  
einerseits auch solche el. mg. Felder in Betracht zu ziehen  
haben wird, die dem Vorhandensein geladener  $g$ -Teilchen

\* 45, 766.

\*\* Vgl. jedoch Jordan u. Wigner 49.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

entsprechen, andererseits die Beeinflussung der Materiewellen durch die el. mg. Wellen wird in Rechnung stellen müssen, darf wohl erwartet werden, dass sie die hier aufgestellten V. R. des freien el. mg. Strahlungsfeldes sowie diejenigen der Materiewellen kräftefreier Teilchen als spezielle Grenzfälle in sich enthalten wird.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, in welcher Weise die  $q$ -Funktionen als Operatoren, die auf gewisse „Wahrscheinlichkeitsamplituden“  $\Psi$  angewandt werden, interpretierbar sind. In der gewöhnlichen Q.M. geht man ja bekanntlich von den Gleichungen

$$pq - qp = \frac{\hbar}{2\pi i}$$

und dem Energiesatz

$$H(p, q) = E,$$

was zunächst Relationen zwischen  $q$ -Zahlen sind, zu einer Differentialgleichung für die  $F_n \Psi_E(q)$  über, indem man  $p$  durch den Operator  $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$ ,  $q$  durch den Operator Multiplikation mit  $q$  selbst und nun  $H(p, q)$  als Operator geschrieben, auf  $\Psi$  angewendet:

$$H\left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \Psi_E(q) = E \Psi_E(q).$$

Im Falle eines her. Osz., wo

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} (2\pi \nu_0)^2 q^2$$

gesetzt werden kann, führt die zugehörige Diff. Gl. für

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$\Psi$ , wie Schrödinger gezeigt hat, auf die Eigenwerte  
$$E_n = (n + \frac{1}{2}) h\nu_0 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

während die  $\Psi$ -Funktionen durch die sogenannten  
Hermiteschen Polynome gegeben werden; für  $n=0$   
ist speziell  $\Psi_0(q) = C e^{-\frac{2\pi^2 n \nu_0}{h} q^2}$ .

Dies hat nun eine Schwierigkeit zur Folge, wenn  
es sich, wie bei der Eigenschw. der Hohlraumstrahlung,  
um unendlich viele Oszillatoren (den unendlich  
vielen Freiheitsgrade  $n$  der Strahlung entsprechend)  
handelt. Erstens würde die gesamte Energiedichte  
der Strahlung unendlich groß werden, weil zu dieser  
(im Grenzfall eines sehr großen Hohlraums) die  
Strahlung mit einer Frequenz zwischen  $\nu$  und  $\nu+d\nu$   
selbst für  $n=0$  den Beitrag  
$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{2} d\nu$$

liefern würde. Zweitens wird selbst dann, wenn  
nur eine endliche Zahl von Eigenschw. angeregt ist,  
das Produkt der unendlich vielen Eigenschw. im all-  
gemeinen nicht konvergieren, so daß die  $\Psi$ -Funktion  
der unendlich vielen Amplituden  $q_n$  der Osz., zunächst  
keinen bestimmten Wert besitzt.

Verschiedene Erwägungen scheinen uns dafür zu sprechen,  
daß im Gegensatz zu den Eigenschw. in Kristallgitter

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

(wo sowohl theoretische als auch empirische Gründe für das Vorhandensein einer Nullpunktenergie sprechen) bei der Eigenschw. der Strahlung jener „Nullpunktenergie“  $h\nu/2$  pro Freiheitsgrad keine physikalische Realität zukommt. Da man es bei dieser mit streng harmonischen Osz zu tun hat und da jene „Nullpunktstrahlung“ weder absorbiert noch zerstreut oder reflektiert werden kann, scheint sie sich, einschließlich ihrer Energie oder Masse, jeder Möglichkeit eines Nachweises zu entziehen. Es ist deshalb wohl die einfachere und befriedigendere Auffassung, daß beim el. mg. Felde jene Nullpunktstrahlung überhaupt nicht existiert.

In dieser Verbindung ist es vielleicht von Interesse, zu bemerken, daß es möglich ist, bei einem einzelnen harm. Osz. diese Auffassung auch mathematisch zu formulieren. Führt man nämlich statt  $p$  und  $q$  die Größen

$$P = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p - i\sqrt{\pi\nu_0 m} q,$$
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p + i\sqrt{\pi\nu_0 m} q,$$

ein, so folgt aus  $PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}$

die Relation  $PQ - QP = i(PQ - QP) = \frac{h}{2\pi}$ ,

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

ferner wird

$$\frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 q^2$$

$$= 2\pi\nu_0 \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p + i\sqrt{\pi\nu_0 m} q \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_0 m}} p - i\sqrt{\pi\nu_0 m} q \right)$$

$$+ \pi\nu_0 i(pq - qp) = 2\pi\nu_0 QP + \frac{h\nu_0}{2}$$

Führt man also eine neue Hamiltonfz  
 $H'(P, Q) \equiv 2\pi\nu_0 QP = E$

mit  $PQ - QP = \frac{h}{2\pi}$   
 ein, so kommt man auf die Eigenwerte  
 $E_0 = n h \nu_0$

ohne Nullpunktsenergie. Auch können Eigenfunktionen von  $\Psi_E(Q)$  auf gestellt werden, wobei allerdings die Variable  $Q$  eine komplexe Größe ist\*. Vielleicht ist zu hoffen, daß auf diesem Wege die mit der Nullpunktsstrahlung zusammenhängenden Konvergenzschw. bei unendlich vielen Osz. einmal überwunden werden können.

Im zweiten Teile dieser vorliegenden Arbeit sollte jedoch eine Methode angegeben werden, wie  $\Psi$ -Fren des Feldes und Operationen mit diesen definiert werden können, die mit vorgegebenen Relationen zwischen

$$2\pi\nu_0 \times \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi_E}{\partial X} = E \Psi$$

$$\Psi = A X^{\frac{E}{h\nu_0}} \quad Q - P = 2i\sqrt{\pi\nu_0 m} q \quad \text{b3}$$

$$\Psi_a - \frac{E}{h\nu_0} \Psi_{a-1} = 2i\sqrt{\pi\nu_0 m} \cdot q \Psi_a$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

$q$ -Funktionen im Einklang sind, ohne dass eine der obigen Betrachtung beim Einzeloz., analoge Elimination der Nullpunktsenergie in befriedigender Weise durchzuführen. Es sind daher die Ausführungen des zweiten Teiles dieser Arbeit noch in höherem Grade verbesserungs- und ergänzungsbedürftig und haben hier mehr im Hinblick auf die allgemeinen math. Methoden, die dort verwendet werden, Platz gefunden, als im Hinblick auf spezielle, dort angegebene Relationen.

## I. Methode der $q$ -Funktionen und $q$ -Zahlen.

§ 1. Fourierzerlegung des Feldes, relativistisch invariante Vertauschungsrelationen für die Amplituden der Eigenschwingungen.

Wir denken uns das el.-mg. Strahlungsfeld in ebene monochromatische Partialwellen zerlegt; und zwar denken wir an fortschreitende Wellen, erfüllen also keine besonderen Grenzbedingungen, die etwa undurchlässigen Hohlraumwänden entsprechen. Dagegen ist es zweckmäßig, statt Fourierintegrale zunächst Fourierreihen zu verwenden. Es sei  $k_s$  der Ausbreitungvektor einer ebenen Partialwelle (Vektor in Richtung der Wellennormale vom Betrag der Wellenzahl),  $|k_s| = k_s$  sein absoluter Betrag,  $\nu_s$  die Schwingungszahl, so dass gilt

$$k_s = \frac{v_s}{c}, \quad k_s^2 = \frac{v_s^2}{c^2}. \quad (1)$$

Der Index  $s$  soll nur die verschiedenen Eigenfrequenzen unterscheiden. Zunächst mögen nun die in der Fourierzerlegung des Feldes auftretenden Ausbreitungsvektoren  $k_s$  mit einer Dichtigkeit im  $(k_x, k_y, k_z)$ -Raum (kurz „ $k$ -Raum“) verteilt sein, die den Eigenschwingungen eines würfelförmigen Hohlraumes der Kante  $L$  (Volumen  $L^3$ ) entspricht. Das heißt, wir nehmen an, daß das mittlere Volumen einer Zelle des  $k$ -Raumes, auf die (von dem noch zu besprechenden Polarisationsfaktor abgesehen) eine Partialwelle der Fourierreihe entfällt, gleich ist

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{1}{L^3} \quad (2)$$

Die Feldstärken  $E$  und  $H$  setzen sich nun zusammen aus den Feldstärken  $E_s$  und  $H_s$  einer einzelnen Eigenschwingung, die aus einer monochromatischen Welle besteht:

$$E = \sum_s E_s, \quad H = \sum_s H_s.$$

Nun haben wir noch zu berücksichtigen, daß zu jedem  $k_s$  zwei unabhängige linear polarisierte Wellen möglich sind, deren Schwingungsrichtungen auf  $k_s$  senkrecht stehen. Um dies formelmäßig darzustellen, führen wir für jedes  $s$  ein orthogonales Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \zeta)_s$  ein, dessen

$\xi$ -Achse parallel zu  $\mathbf{k}_s$  ist, und es  $\mathbf{e}_\xi^{(s)}$ ,  $\mathbf{e}_\eta^{(s)}$ ,  $\mathbf{e}_\zeta^{(s)}$  Einheitsvektoren in den Richtungen  $\xi, \eta, \zeta$ . Die Amplituden  $a_s^{(1)}$  der elektrischen Feldstärken der einen linear polarisierten Eigenschwingung (mit Index 1 bezeichnet) sei parallel zur  $\xi$ -Achse, die der anderen (mit Index 2 bezeichnet) parallel zu  $\eta$ -Achse. Wenn wir noch aus einem sogleich ersichtlichen Grunde den Faktor  $\sqrt{\frac{V_s}{L_s^3}}$  hervorziehen, können wir also schreiben:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbb{E}_s &= \sqrt{\frac{V_s}{L_s^3}} \{ (\mathbf{e}_\xi^{(s)} a_s^{(1)} + \mathbf{e}_\eta^{(s)} a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}) - |\mathbf{k}_s| ct] \\ &+ (\mathbf{e}_\xi^{(s)} b_s^{(1)} + \mathbf{e}_\eta^{(s)} b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}) - |\mathbf{k}_s| ct] \} \\ \mathbb{H}_s &= [\mathbf{e}_\zeta^{(s)} \mathbb{E}_s] = \sqrt{\frac{V_s}{L_s^3}} \{ (\mathbf{e}_\eta^{(s)} a_s^{(1)} - \mathbf{e}_\xi^{(s)} a_s^{(2)}) \cos 2\pi [(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}) - |\mathbf{k}_s| ct] \\ &+ (\mathbf{e}_\eta^{(s)} b_s^{(1)} - \mathbf{e}_\xi^{(s)} b_s^{(2)}) \sin 2\pi [(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}) - |\mathbf{k}_s| ct] \} \end{aligned} \right.$$

Der Faktor  $\sqrt{\frac{V_s}{L_s^3}}$  in (3) ist so gewählt, daß die ganze Mohlräumenergie

$$E_s = \frac{1}{2} \int (\mathbb{E}_s^2 + \mathbb{H}_s^2) dV,$$

soweit sie von einer einzigen, linear polarisierten Partialwelle herrührt gleich wird

$$E_s = \frac{1}{2} V_s (a_s^2 + b_s^2), \quad (4)$$

worin für  $a_s$  und  $b_s$  entweder  $a_s^{(1)}$ ,  $b_s^{(1)}$  oder  $a_s^{(2)}$ ,  $b_s^{(2)}$  einzusetzen ist. (Die Feldstärken sind hierin in Heavisideschen Einheiten gemessen.)

Da die Energie  $E_s$  (abgesehen von der Nullpunktennergie) ein

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Multiplum von  $h\nu_s$  sein muß, das heißt also  

$$\frac{1}{2}(a_s^2 + b_s^2)$$

(jedenfalls bis auf eine additive Konstante) die charakteristischen Werte  $N_s = 0, 1, 2, \dots$  haben muß, ist es nahe liegend, zu setzen:

$$a_s^{(1)} b_s^{(1)} - b_s^{(1)} a_s^{(1)} = a_s^{(2)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} a_s^{(2)} = i h, \quad (I)$$

wobei natürlich  $a_s$  und  $b_{s'}$  für  $s \neq s'$ , ebenso wie verschiedene  $a_s$  oder verschiedene  $b_s$  untereinander vertauschbar sind. Ferner scheint es auch naturgemäß, die Vertauschbarkeit der zu verschiedenen Polarisationsrichtungen gehörigen Amplituden anzunehmen:

$$\left. \begin{aligned} a_s^{(1)} a_s^{(2)} - a_s^{(2)} a_s^{(1)} &= 0, & b_s^{(1)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} b_s^{(1)} &= 0, \\ a_s^{(1)} b_s^{(2)} - b_s^{(2)} a_s^{(1)} &= 0, & a_s^{(2)} b_s^{(1)} - b_s^{(1)} a_s^{(2)} &= 0. \end{aligned} \right\} (I')$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Vertauschungsrelationen (Abkürzung: „V.-R.“) (I) und (I') von der Wahl der Einheitsvektoren  $e_z^{(s)}, e_y^{(s)}$  unabhängig sind, wenn diese nur senkrecht aneinander und auf  $k_s$  stehen. Ähnlich ist die Invarianz von (I) und (I') bei einer Änderung des Nullpunktes des Koord. systems. zu erweisen, der bei der Fourierzerlegung (3) des Feldes zunächst ausgezeichnet war. Bei einer Änderung dieses Nullpunktes transformieren sich nämlich die  $a_s$  und  $b_s$  für jede Polarisationsrichtung linear und orthogonal gemäß

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

$$a'_s = a_s \cos \delta_s + b_s \sin \delta_s,$$

$$b'_s = -a_s \sin \delta_s + b_s \cos \delta_s,$$

und hierfür gilt in der Tat:

$$a_s^2 a'_s - b_s^2 b'_s = a_s b_s - b_s a_s \quad (5)$$

Wenn man weiter beachtet, daß es nicht auf die genauen Werte der  $k_s$ , sondern nur auf ihre Dichtigkeit (2) im  $k$ -Raum ankommt, ist ferner mit Rücksicht auf (1) leicht zu sehen, daß die V.-R. (I) die Forderung der relat. Invarianz erfüllen.

Dies wird auch besonders deutlich, wenn man den Grenz-übergang von Fourierreihen zum Fourierintegral durchführt. Es wird dann für jede Polarisationsrichtung [wir lassen den Index (1) oder (2) der Einfachheit halber fort]

$$\sum_s a_s^2 \frac{1}{L^3} = \sum_s a_s^2 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \rightarrow \int A^2(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z$$

und analog für  $\sum_s b_s^2 \frac{1}{L^3}$ . Ferner ergibt sich bei Def. von  $E(k_x, k_y, k_z) = E(\mathbf{k})$  gemäß

$$\sum_s E_s \frac{1}{L^3} = \sum_s \frac{1}{L^3} \frac{1}{2} (E_s^2 + H_s^2) dV \rightarrow \int E(\mathbf{k}) dk_x dk_y dk_z$$

$$E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} v(\mathbf{k}) [A^2(\mathbf{k}) + B^2(\mathbf{k})] \quad (6)$$

und analog für  $\sum_s b_s^2 \frac{1}{L^3}$ . Ferner ergibt sich bei Def. von  $E(k_x, k_y, k_z) = E(\mathbf{k})$  gemäß

$$\sum_s E_s \frac{1}{L^3} = \sum_s \frac{1}{L^3} \frac{1}{2} (E_s^2 + H_s^2) dV \rightarrow \int E(\mathbf{k}) dk_x dk_y dk_z$$

$$E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} v(\mathbf{k}) [A^2(\mathbf{k}) + B^2(\mathbf{k})],$$

Wir berechnen weiter, indem wir einerseits über alle Eigenschwingungen mit  $\mathbf{k}_s$  in einem gewissen Gebiet  $\Omega_1(\mathbf{k})$  des  $\mathbf{k}$ -Raumes, andererseits über diejenigen mit  $\mathbf{k}_s$  in einem anderen Gebiet  $\Omega_2(\mathbf{k})$  summieren und mit  $\Omega_{12}(\mathbf{k})$  den Voluminhalt des  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  gemeinsamen Gebietes im  $\mathbf{k}$ -Raum bezeichnen:

$$\frac{1}{ih} \frac{1}{L^3} \left( \sum_{\mathbf{k}_s \in \Omega_1(\mathbf{k})} a_s \sum_{\mathbf{k}'_s \in \Omega_2(\mathbf{k})} b_s - \sum_{\mathbf{k}_s \in \Omega_2(\mathbf{k})} b_s \sum_{\mathbf{k}'_s \in \Omega_1(\mathbf{k})} a_s \right) = \Omega_{12}(\mathbf{k}),$$

Denn es ergibt sich zunächst der Wert der linken Seite als gleich der Anzahl der in beiden Summen gemeinsamen Eigenschw., dividiert durch  $L^3$ , was aber gemäß (2) mit  $\Omega_{12}(\mathbf{k})$  übereinstimmt. Andererseits werden die auf der linken Seite auftretenden Summen in der Grenze den entsprechenden mit  $A(\mathbf{k})$  und  $B(\mathbf{k})$  gebildeten Integralen gleich, so dass wir schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega_1} A(\mathbf{k}) d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z - \int_{\Omega_2} B(\mathbf{k}) d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z \\ & \int_{\Omega_2} B(\mathbf{k}) d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z - \int_{\Omega_1} A(\mathbf{k}) d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z = ih \Omega_{12} \end{aligned} \right\} (7)$$

oder mit Hilfe der im folgenden Paragraphen näher betrachteten Diracschen  $\delta$ -Funktion

$$A(\mathbf{k}) B(\mathbf{k}') - B(\mathbf{k}') A(\mathbf{k}) = ih \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (8)$$

Wichtiger als der Grenzübergang von Fourierreihe zu

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Fourierintegral ist der Verzicht auf die Fourierzerlegung  
des Feldes überhaupt und dessen direkte Auffassung als  
Kontinuum von  $q$ -Zahlen („ $q$ -Eigen“). Hierzu ist es  
nötig, eine neue, relat. invariante  $\delta$ -Funktion zu  
definieren, was im folgenden Paragraphen geschehen wird.

§2. Definition und Bedeutung der rel. inv.  $\delta$ -Funktion.  
Die gewöhnliche Diracsche  $\delta$ -F $\ddot{u}$ n einer Variablen  $x$  ist  
durch die Gleichung definiert;

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (a, b) \text{ den Nullpunkt enthalt, } (q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann auch

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } (a, b) \text{ den Nullpunkt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{enthalt, } (10)$$

Die „Funktion“  $\delta(x)$  kann aufgefasst werden als Ab-  
kingung fur eine Folge von Funktionen  $\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_N(x)$   
 $\dots$ , fur welche der  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_N(x) dx$  existiert und  
den oben angegebenen Wert hat, Ebenso soll dann  
 $\int_a^b f(x) \delta(x) dx$  bedeuten  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \delta_N(x) dx$ .

Als eine solche Folge von F $\ddot{u}$ en kann z. B. genommen werden:

$$\delta_N(x) = \frac{\sin 2\pi N x}{\pi x} = 2 \int_0^N \cos 2\pi k x dk, \quad (11)$$

da dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \delta_N(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{y}{2\pi N}\right) \frac{\sin y}{\pi y} dy = \begin{cases} f(0), & \text{wenn } a < 0, b > 0, \\ 0, & \text{wenn } a > 0, b > 0. \end{cases}$$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Natürlich ist (11) aber nicht die einzig mögliche Folge  $\delta_N(x)$ , die (10) im  $\lim$  befriedigt,

Wir werden nun im folgenden Paragraphen einer bestimmten Funktionenfolge  $\Delta_N(x, y, z, t)$  begegnen, u. d. zwar ist sie gegeben durch

$$\Delta_N(x, y, z, ct) = \iiint_{\substack{\text{Kugel} \\ |K| < N}} \frac{2}{|K|} \sin \{2\pi(Kx + Ky + Kz - |K|ct)\} \times dk_x dk_y dk_z, \quad (12)$$

$(|K| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2})$ ,

Wesentlich darin ist die Bindung des Koeffizienten von  $t$  mit denen von  $x, y, z$ , welche besagt, daß alle Partialwellen, aus denen sich (12) zusammensetzt, mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreiten.  $\Delta_N(x, y, z, t)$  ist übrigens bei festem Nullpunkt des Koord. systems rel. inv., denn wie man leicht nachrechnet, ist für den Fall, daß

$$k_x, k_y, k_z, i|K|$$

die Komponenten eines Vierervektors der Länge Null bilden,  $\frac{1}{|K|} dk_x dk_y dk_z$

eine Invariante gegenüber Lorentztransformationen<sup>\*</sup>.

Wir wollen nun die Folge  $\Delta_N(\dots)$  charakterisieren als  $\Delta$ -Folge, d. h. durch den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{V_4} f(x, y, z, t) \Delta_N(x, \dots, t) dV_4,$$

worin über irgend ein vierdimensionales Weltgebiet integriert

$$* \quad k_i x_i - |k|ct = k_i x_i + i|k| \cdot x_0 = k_i' x_i' + k_0' x_0' \quad + i j \quad k_i', k_0' \text{ z.B. } x_0' = x_0 - v x_1$$

$$x_i' = a_{ij} x_j \quad a_{ij} a_{jk} = \delta_{ik} \quad 0 = \sum k_i^2 - k^2 = \sum k_i'^2 - k'^2$$

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

wird und  $dV_4 = dx dy dz c dt$

gesetzt ist. Wir werden diesen lim wieder symbolisch schreiben

$$\int f(x, y, z, t) \Delta(x, y, z, t) dV_4$$

und solche Folgen  $\Delta_N$ , für welche für alle  $f$  dieser lim übereinstimmt, als nicht wesentlich verschieden betrachten, unabhängig davon, ob  $\Delta_N$  gerade die spezielle Gestalt (12) hat.

Nun bietet es gar keine Schwierigkeit, für diese spezielle Gestalt von  $\Delta_N$  den fraglichen lim auszurechnen. Zunächst ist das Integral in (12) auszuwerten. Einführung von Polarkoordinaten im  $k$ -Raum mit  $\mathcal{J}(x, k) = \mathcal{D}$ ,  $\cos \mathcal{D} = u$

$$dk_x dk_y dk_z = 2\pi |k|^2 d|k| du$$

ergibt

$$\Delta_N(x, \cdot, t) = 4\pi \int_0^N |k| d|k| \int_{-1}^{+1} \sin 2\pi |k| (r - ct) du$$

$$(r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$= 2 \int_0^N d|k| \frac{1}{r} [\cos 2\pi |k| (r+ct) - \cos 2\pi |k| (r-ct)] \quad (12')$$

oder endlich

$$\Delta_N(x, \cdot, t) = \frac{1}{\pi r} \left[ \frac{\sin 2\pi N(r+ct)}{r+ct} - \frac{\sin 2\pi N(r-ct)}{r-ct} \right]$$

(Betrachtet, dass das negative Vorzeichen in der Klammer

bewirkt, daß  $\Delta_N$  für  $t \neq 0, r=0$  endlich bleibt!  
 In vollkommener Analogie zu den Eigenschaften der  $\tilde{T}_N$   
 $\Delta_N(x)$  vom Beginn dieses Paragraphen können wir jetzt  
 auch den  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int f(\dots) \Delta_N dV_4$  angeben. Sei  $V_4$  das  
 Integrationsgebiet,  $V_3^+$  dessen dreidimensionaler Schnitt  
 mit dem „Lichtkegel“  $r+ct=0$ ,  $V_3^-$  der Schnitt mit  
 dem Lichtkegel  $r-ct=0$ , so wird

$$\int f(x \dots t) \Delta(x \dots t) dV_4 \quad \text{(II)}$$

$$= \int_{V_4} f(x, \dots, ct=-r) \frac{1}{r} dx dy dz - \int_{V_3^-} f(x, y, z, ct=r) \frac{1}{r} dx dy dz.$$

Und diese Gleichung ist jetzt als Definition der rel. inv.  
 (beachtete Invarianz von  $\frac{dx dy dz}{r}$ )  $\Delta$ -Funktion anzusehen,  
 unabhängig von ihrer spezielle Realisierung durch die Folge  
 (12). Setzt man in (II)  $f=1$ , so erhält man den Wert  
 von  $\int_{V_4} \Delta dV_4$ :  $\int_{V_4} \Delta dV_4 = \int_{V_3^+} \frac{dx dy dz}{r} - \int_{V_3^-} \frac{dx dy dz}{r}$ . (II')

Anschaulich können wir auf Grund von (II') sagen: Die  
 hier eingeführte  $\Delta$ -Funktion ist eine räumliche isotrope,  
 im  $\lim$  auf eine unendliche dünne Schale  $r=ct$  kon-  
 zentrierte Kugelschalenwelle, die sich erst mit Licht-  
 geschwindigkeit zusammenzieht, um für  $t=0$  im Nullpunkt

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$\gamma=0$  einzutreffen und sich dann wieder mit Lichtgeschw. expandiert,  $\Gamma_3$  ist übrigens

$$\Delta(-x, -y, -z, -t) = -\Delta(x, y, z, t) \quad (13)$$

Es bleibt noch zu bemerken, daß die Ableitung der  $\Delta$ -F $\ddot{u}$  durch den lim

$$\begin{aligned} \int_{V_4} f \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} dV_4 &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{V_4} f \frac{\partial \Delta_N}{\partial x_i} dV_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} - \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_N dV_4 \\ &= \int_{V_3^+} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{dx dy dz}{r} - \int_{V_3^-} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{dx dy dz}{r} \end{aligned}$$

definiert sind, wobei vorausgesetzt wird, daß  $f$  am Rande des Integrationsgebietes verschwindet. Analog sind die höheren partiellen Ableitungen zu definieren. Zu bemerken ist noch, daß im Sinne dieser Definition gilt

$$\sum_{a=1}^4 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_a^2} = 0 \quad (14)$$

§3. V.-R. für die als  $g$ -F $\ddot{u}$ er betrachteten el. mg. Feldstärken mit Elimination der Fourierzerlegung. Wir wollen nun die Werte der Vertauschungen irgendwelcher Komponenten der el. mg. Feldstärken an zwei verschiedenen Raum-Zeitwertpunkten unter Wahrung der rel. Inv zu charakterisieren versuchen, ohne im Endergebnis die Fourierzerlegung des Feldes explizite heranzuziehen. Es handelt sich also um die

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

ermittlung der Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_i(P) E_k(P') - E_k(P') E_i(P), \\ H_i(P) H_k(P') - H_k(P') H_i(P'), \\ E_i(P) H_k(P') - H_k(P') E_i(P), \end{aligned}$$

worin  $P$  und  $P'$  Abkürzungen für die vier Koordinaten  $x, y, z, t$  von  $P$  und  $x', y', z', t'$  von  $P'$  sein sollen und wo  $i, k = 1, 2, 3$  Indizes sind, welche die Komponenten in der  $x, y, z$ -Richtung kennzeichnen. Wir werden für die angegebenen Ausdrücke auch die eckigen Klammersymbole

$$[E_i(P), E_k(P')], [H_i(P), H_k(P')], [E_i(P), H_k(P')]$$

verwenden.

Wir wollen bei unserer <sup>rechen</sup> Behandlung von den Ausdrücken (3) für die Feldstärken ausgehen:

$$\begin{aligned} E_s = \sqrt{\frac{v_s}{L^3}} \{ (\epsilon_z a_s^{(1)} + \epsilon_\eta a_s^{(2)}) \cos 2\pi[(k_s x) - |k_s| ct] \\ + (\epsilon_z b_s^{(1)} + \epsilon_\eta b_s^{(2)}) \sin 2\pi[(k_s x) - |k_s| ct] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_s = \sqrt{\frac{v_s}{L^3}} \{ (\epsilon_\eta a_s^{(1)} - \epsilon_z a_s^{(2)}) \cos 2\pi[(k_s x) - |k_s| ct] \\ + (\epsilon_\eta b_s^{(1)} - \epsilon_z b_s^{(2)}) \sin 2\pi[(k_s x) - |k_s| ct] \}. \end{aligned}$$

Für  $a_s^{(1)}, b_s^{(1)}$  und  $a_s^{(2)}, b_s^{(2)}$  gelten einzeln die Gleichungen (I), während  $a_s^{(1)}$  mit  $b_s^{(2)}$ ,  $a_s^{(2)}$  mit  $b_s^{(1)}$  gemäß (I') vertauschbar sind.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Wir müssen nun Relationen der Form

$$(\mathbb{E}_z)_i (\mathbb{E}_z)_k + (\mathbb{E}_\eta)_k (\mathbb{E}_\eta)_i = \delta_{ik} - (\mathbb{E}_z)_i (\mathbb{E}_z)_k$$

( $i, k = x, y, z$ ;  $\delta_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ ,  $1$  für  $i = k$ )

$$(\mathbb{E}_z)_i (\mathbb{E}_\eta)_k - (\mathbb{E}_\eta)_k (\mathbb{E}_z)_i = (\mathbb{E}_z)_l = \frac{(\mathbb{K}_s)_l}{|\mathbb{K}_s|}$$

( $i, k, l$  gerade Permutation von  $1, 2, 3$ )

benötigen, in denen übrigens berücksichtigt wurde, daß die  $\xi$ -Achse  $\parallel$  zu  $(\mathbb{K}_s)$  ist. Setzen wir also bei angegebener Bedeutung der Indizes

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = |\mathbb{K}_s|^2 \delta_{ik} - (\mathbb{K}_s)_i (\mathbb{K}_s)_k,$$

$$\rho_{ik} = -\rho_{ki} = |\mathbb{K}_s| \cdot (\mathbb{K}_s)_l, \quad (\rho_{ik} = 0 \text{ für } i = k), \quad \text{(15)}$$

ferner  $(P_s) = 2\pi [(\mathbb{K}_s)_x - |\mathbb{K}_s| \alpha t], \quad (P'_s) = 2\pi [(\mathbb{K}'_s)_x - |\mathbb{K}_s| \alpha t'],$

so erhält wir gemäß (I)

$$[\mathbb{E}_i(P), \mathbb{E}_k(P')] = [H_i(P), H_k(P')] = i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s \overline{|\mathbb{K}_s|} \alpha_{ik}^{(s)}$$

$$\times [\cos(P_s) \sin(P'_s) - \sin(P_s) \cos(P'_s)]$$

$$= i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s \overline{|\mathbb{K}_s|} \alpha_{ik}^{(s)} \sin(P'_s - P_s),$$

ebenso  $[\mathbb{E}_i(P), H_k(P')] = -[H_i(P), \mathbb{E}_k(P')]$

$$= i\hbar c \frac{1}{L^3} \sum_s \frac{2}{|\mathbb{K}_s|} \rho_{ik}^{(s)} \sin(P'_s - P_s)$$

[also speziell  $\mathbb{E}_i(P)$  mit  $H_i(P')$  vertauschbar].

Wir ersetzen nun gemäß (2)  $\frac{1}{L^3} \sum (\dots)$  durch

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$\int (\dots) dk_x dk_y dk_z$ , wollen aber zuerst über eine Kugel mit dem Radius  $N$  im  $k$ -Raum integrieren und erst dann zur Grenze  $N \rightarrow \infty$  übergehen. Ferner bemerken wir, daß bei Bildung der zweiten Ableitung von  $\sin(P'_i - P_i)$  nach den Raumkoord.  $x_i$  und  $x_k$  von  $P$  oder  $P'$  der Faktor  $-4\pi^2 k_i k_k$  bei derjenigen nach  $x_i$  und  $+4\pi^2 |k_s| k_l$  vor diesen  $\sin(\dots)$  tritt. Auf diese Weise lassen sich die Faktoren  $\alpha_{ik}^{(s)}$  und  $\beta_{ik}^{(s)}$  durch geeignete Kombinationen solcher zweiter Ableitungen ersetzen und man erhält

$$[\mathbb{E}_i(P), \mathbb{E}_k(P')] = [\mathbb{H}_i(P), \mathbb{H}_k(P')] \\ = \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \iiint \frac{2}{|k|} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sin(P' - P)_k dk_x dk_y dk_z,$$

$$[\mathbb{E}_i(P), \mathbb{H}_k(P')] = -[\mathbb{H}_i(P), \mathbb{E}_k(P')] \\ = \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \iiint \frac{2}{|k|} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} \sin(P' - P) dk_x dk_y dk_z.$$

Hierin können Differentiation und Integration vertauscht werden und das Integral vor der Differentiation gibt gerade die in (12) stehende  $T_N \Delta_N$ , in welche die Argumente  $x' - x, \dots, t' - t$  einzusetzen sind. Bezeichnen wir  $\Delta(x' - x, \dots, t' - t)$  mit  $\Delta(P' - P)$  und gehen wir zum  $\lim N \rightarrow \infty$  über, so kommt also endgültig

$$[\mathbb{E}_i(P), \mathbb{E}_k(P')] = [\mathbb{H}_i(P), \mathbb{H}_k(P')] \\ = \frac{i\hbar c}{8\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \Delta(P' - P) \quad (IV)_1$$

$$[F_i(P), H_k(P')] = -[H_i(P), F_k(P')] = \frac{ihc}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_l} \Delta(P'-P) \quad (\text{III})_2$$
 ( $i, k = 1, 2, 3$ ); in der zweiten Gl. für  $i=k$  rechte Seite Null, für  $i \neq k$  ist  $i, k, l$  gerade Permutation von  $1, 2, 3$ ).

Es sei ferner daran erinnert, daß gemäß (13) gilt
 
$$\Delta(P-P') = -\Delta(P'-P) \quad (13')$$

Mit  $(F_{41}, F_{42}, F_{43}) = iE$ ,  $(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = H$   
 $(x, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$

kann (III) in die einzige, vierdimensional invariante Form zusammengefaßt werden:

$$[F_{ik}(P), P_{lm}(P')] = \frac{ihc}{8\pi^2} \Delta_{ik,lm}(P'-P), \quad (\text{III}')_2$$

worin  $\Delta_{ik,lm}$  eine Abkürzung ist für

$$\Delta_{ik,lm} = \left( \delta_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} - \delta_{il} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} - \delta_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \right) \Delta. \quad (16)$$

Beim Vergleich von (III) und (III') ist die in Gl. (14) des vorigen Paragraphen zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft
 
$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2} \Delta = 0$$

heranzuziehen.

§ 4. Einfache Folgerungen aus den V. R. für die Feldstärken.  
 Über die Stellung der Q. E. D. zu den Maxwell'schen Gleichungen. Die  $g$ -Funktionen, die nach der hier zugrunde gelegten Form der Q. E. D. die Feldstärken darstellen, sind nicht beliebige Funktionen von Raum und Zeit, sondern

Blue  
 Cyan  
 Green  
 Yellow  
 Red  
 Magenta  
 White  
 3/Color  
 Black

solche, die den Maxwell'schen Vakuumfeldgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} = 0, \\ \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

genügen. Dies ist bereits in unserem Ausgangspunkt, der Zerlegung des Feldes in transversale Partialwellen, die sich mit Lichtgeschw. ausbreiten, enthalten. Hierbei ist die Ladungs- und Stromdichte überall als verschwindend angenommen worden. Dem liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Betrachtung dieses Sonderfalles eine mit den Gesetzen der R.E.D. verträgliche Abstraktion sei. Inwieweit dies zutrifft, wird erst durch die Aufstellung einer allgemeineren, das Verhalten geladener Teilchen mit berücksichtigenden R.E.D. beurteilt werden können. Läßt man aber diese Voraussetzung zu, so kann man sagen, daß die klassischen Feldgleichungen (IV) auch in die R.E.D. explizite eingehen, und zwar als Nebenbedingungen, die den  $q$ - $F_{ik}$ en der Feldstärken auferlegt werden.

Damit die V.-R. (III) mit den Feldgl. (IV) verträglich sind, müssen die linken Seite der Gl. (16) vermöge (III') mit irgend einer Feldstärkenkomponente  $F_{ik}$  vertauschbar sein. Dafür, daß dies in der Tat der

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Fall ist, verbürgt uns bereits die Ableitung der V.-K. (III') aus denen der Fourierzerlegung des Feldes, Man kann es aber nicht leicht durch direkte Rechnung bestätigen. Besonders einfach ist die Betrachtung, was die zweiten Gl. IV betrifft, denn die Operatorion  $\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$  angewandt auf die rechte Seite von (IV') gibt bei beliebigem festem  $l, m$

$$\left( -i \delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_{\alpha}}$$

und dies ist vermöge (14) identisch Null. Analoges Weise, nur etwas länger, verläuft die Rechnung, was die ersten Gl (IV) betrifft. Rascher kommt man zum Ziel, wenn man den zu  $\tilde{F}_{ik}$  dualen Tensor  $\tilde{F}_{ik}^*$  einführt, dessen Komponenten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_{23}^*, \tilde{F}_{31}^*, \tilde{F}_{12}^*) &= -i \mathbb{E}, \\ (\tilde{F}_{41}^*, \tilde{F}_{42}^*, \tilde{F}_{43}^*) &= -\mathbb{H}, \end{aligned}$$

mit diesen Hilfe die ersten Gl (IV) bekanntlich auch geschrieben werden können

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \tilde{F}_{i\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} = 0. \quad (IV')$$

Der Übergang zum dualen Tensor bedeutet nur, daß man  $i\mathbb{E}$  durch  $-\mathbb{H}$ , also  $\mathbb{E}$  durch  $i\mathbb{H}$  und  $\mathbb{H}$  durch  $-i\mathbb{E}$  ersetzt. Wie man aus (III) unmittelbar erkennt, ändern hierbei die Werte aller Klammerausdrücke einfach

ihre Vorzeichen. Also gilt auch

$$\begin{aligned} [F_{ik}^*(P), F_{lm}^*(P')] &= -[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] \\ &= -\frac{ic}{8\pi} \Delta_{ik,lm}(P'-P) \end{aligned} \quad (III')$$

woraus die Vertauschbarkeit von (IV') mit  $F_{lm}$  ebenso folgt, wie aus (III') die Vertauschbarkeit von  $\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$  mit  $F_{lm}$ .

Da ferner auf Grund von (III) leicht zu verifizieren ist, dass gilt  $[F_{ik}(P), F_{lm}^*(P')] = -[F_{ik}^*(P), F_{lm}(P')]$ , (17)

$$[F_{ik}(P), F_{ik}^*(P')] = 0,$$

folgt weiter in Verbindung mit (III'') für die Tensoren

$$E_{ik} = F_{ik} + F_{ik}^*, \quad E_{ik} = F_{ik} - F_{ik}^* \quad (18a)$$

$$[E_{ik}(P), E_{lm}(P')] = 0, \quad [E_{ik}^*(P), E_{lm}^*(P')] = 0, \quad (18b)$$

$$[E_{ik}(P), E_{lm}(P')] = 2[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] + 2[F_{ik}^*(P), F_{lm}^*(P')],$$

$$[E_{ik}^*(P), E_{lm}(P')] = 2[F_{ik}(P), F_{lm}(P')] - 2[F_{ik}^*(P), F_{lm}^*(P')].$$

Die Relationen (18b) sind deshalb besonders bemerkenswert, weil sie bedeuten, dass es erlaubt ist, für die  $g$ - $F_{ik}$ en  $E_{ik}(P)$  allein [oder für die  $F_{ik}$ en  $E_{ik}^*(P)$  allein] bei speziellen Anwendungen gewöhnliche  $F_{ik}$ en („ $c$ - $F_{ik}$ en“) zu substituieren, da ihre Werte an verschiedenen Raum-Zeitpunkten stets vertauschbar sind.  $F_{ik}$ en mit ähnlichen Eigenschaften erhält man auch, wenn man die Feldstärken  $F_{ik}(P)$  in bezug auf einen beliebig zu wählenden Null-

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

punkt spiegelt:

$$F_{ik}^+(P) = \frac{1}{2} [F_{ik}(P) + F_{ik}(-P)] ,$$

$$F_{ik}^-(P) = \frac{1}{2} [F_{ik}(P) - F_{ik}(-P)] ,$$

so dass gilt

$$F_{ik}^+(P) = F_{ik}^+(-P) , \quad F_{ik}^-(P) = -F_{ik}^-(-P) ,$$

man erhält leicht

$$[F_{ik}^+(P), F_{lm}^+(P')] = \frac{ic}{8\pi^2} \frac{1}{4} [\Delta_{iklm}(P'-P) + \Delta_{iklm}(P'+P) + \Delta_{iklm}(-P'-P) + \Delta_{iklm}(-P'+P)] ,$$

Da für  $\Delta_{iklm}$  die zu (13') analoge Symmetrieeigenschaft

$$\Delta_{iklm}(P'-P) = -\Delta_{iklm}(-P'+P) ,$$

$$\Delta_{iklm}(P'+P) = -\Delta_{iklm}(-P'-P) .$$

besteht, heben sich die beiden mittleren Terme sowie der erste und letzte Term der Klammer gegeneinander weg und die rechte Seite verschwindet. Analoges findet man auch für  $[F_{ik}^-(P), F_{lm}^-(P')]$ , so dass gilt

$$[F_{ik}^+(P), F_{lm}^-(P')] \neq [F_{ik}^-(P), F_{lm}^+(P')] = 0 . \quad (19a)$$

Dagegen folgt leicht auf demselben Wege

$$[F_{ik}^+(P), F_{lm}^-(P')] = \frac{ic}{16\pi^2} [\Delta_{iklm}(P'-P) + \Delta_{iklm}(P'+P)] , \quad (19b)$$

$$[F_{ik}^-(P), F_{lm}^+(P')] = \frac{ic}{16\pi^2} [\Delta_{iklm}(P'-P) - \Delta_{iklm}(P'+P)] . \quad (19c)$$

Die Vertauschbarkeit der linken Seiten der Maxwell'schen Gleichungen mit allen Feldstärkekomponenten kann in

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Anwendung auf die letzteren Gl. auch so formuliert werden: Bei festem  $l, m$  und  $P'$  sind die rechten Seiten von (19b), für  $T_{ik}^+(P)$  eingesetzt, Lösungen der Maxwell'schen Gl. (IV), dasselbe gilt auch, wenn die rechte Seite von (19b) bei festem  $i, k$  und  $P$  für  $T_{ik}^-(P')$  eingesetzt wird. Strenger ist statt von Lösungen der Maxwell'schen Gl. wegen der Benutzung der  $\Delta$ -Funktion stets von singulären Grenzfällen solcher Lösungen zu sprechen.

Die letztere Eigenschaft der Relationen (19) werden wir später benutzen. Hier ist noch bemerkt, daß für die Viererpotentiale keine einfach formulierbaren rel. inv. V-R. bestehen, bei denen nur die  $\Delta$ - $T_{ij}$  und ihre Ableitungen verwendet werden.

$t = \text{Re} \neq \text{Im}$ .

## II. Methode der Funktionale und Funktionaloperatoren.

§ 1. Eindimensionales <sup>#</sup>Kontinuum, unrelativistisch behandelt. Wir betrachten stehende longitudinale Schwingungen in einem eindimensionalen Kontinuum mit den Grenzbedingungen

$$q(x) = 0 \quad \text{für } x=0 \quad \text{und } x=l.$$

Wir können dann sehen

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{\infty} q_s \sin 2\pi k_s x, \quad k_s = s \frac{\pi}{2l}, \quad s \text{ ganz};$$

... (20);

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black



Der Energiesatz führt dann nach (21) auf die Diff. gl.  
$$\frac{1}{2} \sum_s \left( -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial a_s^2} + \left( \sum_s \frac{1}{2} (2\pi\nu_s)^2 a_s^2 \right) \psi = E \psi. \quad (24)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bei unendlich vielen Variablen allerdings nicht konvergent, was mit der endlichen Nullpunktsenergie  $\frac{\hbar\nu_0}{2}$  pro Eigenschw. zusammenhängt. Diese noch ganz ungelöste Schwierigkeit wurde in der Einleitung ausführlich besprochen.

Hievon abgesehen, drängt sich aber die folgende Fragestellung auf. Was ist das Analogon zur Operator-darstellung von (22) und zur Gl (24), wenn wir statt von den abzählbar unendlich vielen Variablen  $q_1, \dots, q_s, \dots$  von der ~~Funktion~~  $q(x)$ , also einem Kontinuum von unabhängig zu variierende Variablen ausgehen?

Die Antwort darauf kann mit Hilfe der Volterra'schen Funktionalmathematik gegeben werden. Ein Funktional  $\Psi \{ q(x) \}$

ist die Zuordnung einer Zahl zu einer Funktion  $q(x)$ . Ein solches heißt im Punkt P differentiationsbar, wenn folgender Grenzwert unabhängig von seiner speziellen Durchführung stets existiert: Man bilde eine variierte Funktion  $q(x) + \bar{q}(x)$  und lasse das Intervall, in welchem  $\bar{q}(x)$  von 0 verschieden ist, sich auf den

Kodak Color Control Patches

Blue  
Cyan  
Green  
Yellow  
Red  
Magenta

White

3/Color

Black

Punkt  $x_0 = p$  zusammenziehen, während gleichzeitig auch  $\int \bar{q}(x) dx$  nach Null konvergiert. Dann heißt

$$\Psi q(x); p = \lim_{\bar{q} \rightarrow q} \frac{\Psi \{q(x) + \bar{q}(x)\} - \Psi \{q(x)\}}{\int \bar{q}(x) dx}$$

Mit Hilfe der  $\delta$ -Fkt kann man dies auch schreiben

$$\Psi q(x); p = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{q}(x_p) - \delta(x_p - x_p)} [\Psi \{q(x) + \alpha \bar{q}(x)\} - \Psi \{q(x)\}], \quad (25)$$

Die gewöhnliche Regel für Differentiation von Summe und Produkt bleibt bestehen. Analog ist die zweite Ableitung definiert durch

$$\Psi q(x), q(x); p, p_1 = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \bar{q} \rightarrow \delta(x - x_{p_1})}} \frac{1}{\bar{q}(x) - \delta(x - x_{p_1})} [\Psi q(x); p \{q(x) + \alpha \bar{q}(x)\} - \Psi q(x); p] \quad (25a)$$

Ein spezielle Fall hiervon ist die zweite Ableitung für  $p_1 = p$ , die wir durch den Index  $q(x), q(x); p, p$  bezeichnen werden.

Wir werden nun für  $p(x)$  und  $q(x)$  Funktionaloperatoren suchen, das heißt Zuordnungen neuer Funktionale  $\bar{\Psi}$  und  $\bar{\Psi}$  zu  $\Psi$ . Diese können durch die Formeln

$$\left( \int_J p(x) dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} \rightarrow \bar{\Psi}_J \{q(x)\},$$

$$\left( \int_J q(x) dx \right) \cdot \Psi \{q(x)\} \rightarrow \bar{\bar{\Psi}}_J \{q(x)\}$$

beschrieben werden, in denen links über ein beliebig vorgeschriebenes Intervall  $J$  von  $x$  zu integrieren

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

ist und die Abhängigkeit der Funktion  $\bar{\Psi}$  und  $\bar{\Psi}$  von diesem Integral durch den beigefügten Index  $J$  zum Ausdruck gebracht ist. Diese Zuordnung muß nun speziell so gewählt werden, daß die als Operatorgl. auf gefasste Relation (23) erfüllt ist. Es ist klar, daß

$$\left( \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \right) \cdot \Psi \{ q(x) \} = \frac{h}{2\pi i} \int_{x_1}^{x_2} \Psi \{ p(x); p \} dx_p, \quad (26)$$

$$\left( \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx \right) \cdot \Psi \{ q(x) \} = \Psi \{ q(x) \} \cdot \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

dieser Bedingung genügen.

Der Energiesatz (21) ergibt ferner die funktionelle Integrodifferentialgleichung

$$\int (-i) \left( \frac{h}{4\pi} \right)^2 \Psi \{ p(x), q(x); p, p \} dx_p + e^2 \left[ \int \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \Psi = E \Psi (27)$$

Um das Analogon der Orthogonalitätsbedingung aufzustellen, braucht man die Definition von

$$\int \Psi_E \Psi_{E'} d\Omega$$

über den Funktionalraum. Eine naheliegende Def. wäre die Teilung der Strecke  $(0, l)$  in  $N$  Intervalle und die Betrachtung von Treppenzpolygone  $q(x)$ , welche in den einzelnen Intervallen die konstanten Werte  $q_1$  bis  $q_N$  haben mögen. Manach gehe man zur Grenze  $N \rightarrow \infty$  über!

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

$$\int \Psi_E \Psi_{E'} \delta Q = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \Psi_E(q_1 \dots q_N) \Psi_{E'}(q_1 \dots q_N) dq_1 \dots dq_N = \delta(E - E'),$$

Doch ist hier die erwähnte Konvergenzschwierigkeit vorläufig hinderlich.

§2. Relativistisch invariante Funktionaldarstellung des Falles zweier kanonisch konjugierter skalärer  $q$ -Felder, die der Wellengleichung genügen. Als Vorbereitung für das Problem der Vakuum-Elektrodynamik soll zunächst folgendes einfachere Problem behandelt werden. Zwei skalare Zustandsgrößen  $f$  und  $g$  mögen beide der (vierdimensionalen) Wellengleichung

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2 g}{\partial x_\alpha^2} = 0 \quad (28)$$

genügen; Ferner soll für sie, als „ $q$ -Funktionen“ von  $x, y, z, t$  aufgefaßt die V.-R. gelten

$$f(P)g(P') - g(P')f(P) = i\hbar \Delta(P-P'), \quad (29)$$

worin  $\Delta$  die in I, §2 definierte Funktion ist, während die Werte von  $f$  an verschiedenen Punkten unter sich vertauschbar sind, ebenso die Werte von  $g$  unter sich. Es ist gefragt, wie diese V.-R. als Beziehung zwischen Funktionaloperatoren gedeutet werden kann, analog der Einführung der Operatoren (26) in (23).

Infolge des Umstandes, daß  $g(P)$  mit  $g(P')$  vertauschbar  
ist, ist es erlaubt, Funktionale  
$$\Psi \{g(x_1, \dots, x_4)\}$$

zu betrachten, in denen die Werte von  $g(x_1, \dots, x_4)$   
jetzt gewöhnliche Zahlen sind. Wesentlich ist aber,  
daß  $g(x_1, \dots, x_4)$  nunmehr keine willkürlichen F $\ddot{u}$ nen  
von  $x_1, \dots, x_4$  sein können, sondern nur solche, die der  
Wellenl. genügen. Innerhalb des Bereiches dieser  
speziellen F $\ddot{u}$ nen müssen wir auch verbleiben, wenn  
wir  $g(x_i)$  variieren. Insbesondere ist es also nicht  
mehr möglich, die Variation  $g(x_1, \dots, x_4)$  so zu wählen,  
daß sie nur in der Umgebung eines Wertpunktes von  
Null verschieden ist. Die Tatsache, daß nunmehr  
dem Argument des Funktionals  $\Psi$  die Wellenl. oder  
allgemeiner eine lineare partielle Differentialgl  
als Nebenbedingung auferlegt ist, macht als eine  
Abänderung des Volterraschen Begriffes der funktionellen  
Ableitung notwendig.

Eine solche ergibt sich indessen von selbst, wenn  
wir einfach in der Schreibweise (25) der Volterra-  
schen Ableitung die gewöhnliche  $\delta$ -Funktion  
durch die Kugelschalenwellen- $\Delta$ -F $\ddot{u}$  von I, § 2  
ersetzen, indem wir uns daran erinnern, daß diese

ja gemäß I, § 2, Gleichung (13) eine Lösung von (28) ist.

Wir definieren also jetzt eine funktionelle Ableitung durch

$$\Psi(g(x_i); P) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \bar{g}(x_i(P)) \rightarrow 0(P-P')}} \frac{1}{\alpha} [\Psi(g(x_i) + \alpha \bar{g}(x_i)) - \Psi(g(x_i))]. \quad (30)$$

Da auch für diese Ableitung die Regeln für Differentiation von Summe und Produkt bestehen bleiben, ist ferner unmittelbar klar, daß (29) durch den folgenden, zu (26) völlig analogen Operatorausatz befriedigt wird:

$$\left[ \int g(x_i) dx_i, \dots dx_i \right] \cdot \Psi(g(x_i)) = i\hbar \Psi(g(x_i)) \frac{dx_i \dots dx_i}{V_4} \quad (31)$$

Operator

ebenso bedeutet  $f(x)$  als Operator einfach Multiplikation mit  $f(x)$ .

Damit ist die in diesem Paragraphen gestellte Frage vollständig beantwortet und wir können nun unser eigentliches Ziel, die Finalgleichung der Lichtquantenelektrodynamik, ins Auge fassen.

§ 3. Darstellung der V.-R. der Vakuum-Elektrodyn. als rel. inv. Relationen zwischen Funktionaloperatoren. Impuls-Energiesatz als Verallgemeinerung der Schröd.-Gl. Wenn wir die durch I, gl (3) definierten Fourieramplituden  $b_1, \dots, b_i, \dots$  als unabhängige

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Variable einführen, ist die Funktionaldarstellung klar und der  $q$ -Zahl  $a_s$  entspricht der Operator  $ih \frac{\partial}{\partial a_s}$ . Die in II, §1 erwähnte Konvergenzschwierigkeit stellt sich allerdings auch hier ein und läßt sich nicht auch das Folgende noch als weitgehend problematisch erscheinen.

Auch hiervon abgesehen, stellt sich aber eine Schwierigkeit ein, wenn wir in unserer Funktionaldarst. eine Fourierreuelegung des Feldes nicht explizite benutzen wollen. Wie bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, können nämlich nur solche physikalischen Feldgrößen als Argumente eines  $\mathcal{F}_q$ -als verwendet werden, die als  $q$ - $\mathcal{F}_q$ -en aufgefaßt, für alle Raum-Zeitpunkte vertauschbar sind. Bei Annahme der in Teil I formulierten V.-R. (III) für die Feldstärken  $F_{ik}$  können also diese selbst als Argumente eines  $\mathcal{F}_q$ -als nicht in Betracht kommen, sondern gemäß I, §4, Gl (18b) oder (19a) nur eines von dem vier dort definierten Größensystemen  $F_{ik}^+(P)$ ,  $F_{ik}^-(P)$ ,  $F_{ik}(P)$ ,  $F_{ik}^*(P)$ . Die Heranziehung dieser Funktionen, namentlich der in bezug auf einen festen Punkt gespiegelten Größen  $F_{ik}^+$  und  $F_{ik}^-$ , erscheint als sehr künstlich, indessen ist es uns nicht möglich

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

sie zu vermeiden.

Die folgende Betrachtung ist für  $F_{ik}$  des in bezug auf einen festen Nullpunkt schief-symmetrischen Teiles  $F_{ik}^- (x_1, \dots, x_4)$  der Maxwell'schen Gl. [Teil I, Gl. (IV)] durchgeführt, die wir also mit

$$\Psi \{ F_{ik}^- (x_1, \dots, x_4) \}$$

bezeichnen können. Natürlich könnte man in allen folgenden Überlegungen  $F_{ik}^-$  und  $F_{ik}^+$  auch die Rollen tauschen lassen; auch würden bei Einführung von  $F_{ik}$  oder  $F_{ik}^*$  als Argumenten der  $F_{ik}$  analoge Überlegungen gelten.

Das Problem liegt ganz ähnlich wie das des vorigen Paragraphen, nur daß hier als Argumente des Funktionals mehrere (sechs) Funktionen simultan auftreten, die durch die Gl. IV, die Maxwell'schen Gl., voneinander abhängig gemacht werden. Man kann jetzt also nicht nach einzelnen der sechs Komponenten der Feldstärken differenzieren, weil eine Feldstärkenkomponente nicht ohne die übrigen variiert werden kann. Wieder ist es die  $\Delta$ -Funktion, diesmal mit ihren zweiten Ableitungen, die hier Abhilfe schafft. Führen wir den durch Teil I, Gleichung (16) definierten Ausdruck  $\Delta_{ik, \ell m}$  ein, dann ist gemäß I, §4 für jedes Indexpaar  $(i, k)$ ,

$$F_{ik}^-(P) = \Delta_{ik,lm}(P'-P) + \delta_{ik,lm}(P'+P) = \Delta_{ik,lm}(P', P) \quad (32)$$
 bei festem  $P$  eine zulässige Variation der  $F_{ik}^-$ , weil sie den Maxwell'schen Gleichungen genügt und auch die Symmetriebedingung [Vorzeichenänderung beim Übergang von  $(P')$  zu  $(-P')$ ] erfüllt. Wir können also die sechs folgenden, durch  $(i, k)$  und schiefe Symmetrie in diesem Indexpaar charakterisierten Ableitungen unseres Funktionals  $\Psi\{F_{ik}^-(P')\}$  in Analogie zu (30)  $\neq$  definieren:

$$\begin{aligned}
 & \Psi'_{ik; P}\{F_{ik}^-(P')\} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\Psi\{F_{ik}^-(P') + \alpha(\delta F_{ik}^-)(P')\} - \Psi\{F_{ik}^-(P')\}] \\
 & \delta F_{ik}^-(P') \rightarrow \Delta_{ik,lm}(P', P) \quad (33)
 \end{aligned}$$

Es ist dann auch unmittelbar klar, daß die  $V_4$ -R. (III), als Operatorgleichung gefaßt, erfüllt ist, wenn der zu  $F_{ik}^+(P)$  gehörige Operator definiert wird gemäß

$$\left( \int_{\mathcal{J}} \dots \int F_{ik}^+(P) dV_P \right) \Psi\{F_{ik}^-(P)\} = \frac{i\hbar c}{16\pi^2} \int_{\mathcal{J}} \int \Psi'_{ik; P}\{F_{ik}^-(P)\} \times dV_P \quad (34)$$

worin mit  $dV_P$  das Volumenelement des vierdim. Raumes der Koord.  $x_1 \dots x_4$  von  $P$  und mit  $\mathcal{J}$  ein beliebiges, endliches vierdimensionales Intervall in diesem bezeichnet ist, während

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

$$\iint F_{em}^{-}(P) dV_P$$

als Operator einfach Multiplikation mit dieser Größe bedeutet.

Hier sollen noch kurz Überlegungen solcher Art angeführt werden, die analog sind denjenigen, die in II, § 2 zur Aufstellung der Gl (25) führten. Zunächst ist wohl klar, wie zweite Ableitungen unseres Funktional  $\Psi$  gebildet werden können; die allgemeinste zweite Ableitung schreiben wir

$$\Psi_{ik,rs;P_1P_1}$$

doch wird im folgenden nur der Spezialfall  $P_1 = P$  benötigt werden. Wesentlich berücksichtigt werden muß; daß in einer rel. inv. Theorie neben dem Energieintegral die Impulsintegrale als gleichwertig angesehen werden müssen, so daß wir für das von der vier Gesamtenergie-Impulskomponenten  $J_4 = -E; (J_1, J_2, J_3)$   $z \in \mathbb{C}$  abhängige „Eigen“-Funktional  $\Psi_{J_k}$  vier simultane partielle funktionale Differentialgl. zweiter Ordnung erhalten. Bekanntlich drückt sich  $J_k$  in der klassischen El. dyn. folgendermaßen durch die Feldstärken aus:

$$J_k = \int_{t=\text{const}} \left( \sum_{r=1}^4 F_{kr} F_{4r} - \delta_{k4} \sum_{(rs)} \frac{1}{2} (F_{rs})^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Wir können den Schnitt  $t = \text{const}$  speziell als  $t = 0$

wählen, d.h. als solchen, der durch den Nullpunkt geht, der wir für die Teilung der Feldstärken in  $\vec{F}_{ik}^+$  und  $\vec{F}_{ik}^-$  verwendet haben. Dann zerfällt jedes der vier Integrale  $J_K$  in zwei Teile, die von den  $\vec{F}_{ik}^+$  bzw.  $\vec{F}_{ik}^-$  allein abhängen, da die Integrale über die gemischten Glieder aus Symmetriegründen verschwinden. Wir erhalten so die vier simultanen ( $K=1$  bis 4 entsprechenden), zu (29) analog gebildeten Gl

$$\left(\frac{ihc}{16\pi^2}\right)^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{r=1}^4 \Psi''_{kr,4r;PP} - \delta_{k4} \sum_{(rs)} \frac{1}{2} \Psi''_{rs;rs;PP} \right] dx_p dy_p dz_p + \Psi \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{r=1}^4 \vec{F}_{kr}^- \vec{F}_{4r}^- - \delta_{k4} \frac{1}{2} \sum_{rs} (\vec{F}_{rs}^-)^2 \right] dx_p dy_p dz_p = J_K \Psi, \quad (35)$$

worin  $\Psi$  ein Funktional ist, das von den  $\vec{F}_{rs}^-(x_k)$  und daneben noch von den  $J_K$  als Parametern abhängt. Diese Gleichungen spielen für ein "abgeschlossenes" Strahlungsfeld eine analoge Rolle, wie die Schröd. Differentialgl. für einen bestimmten Quantenzustand eines abgeschlossenen mechanischen Systems.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind die im letzten Paragraphen dieses Teiles II angeführten Gl., für die übrigens direkte Integrationsmethoden noch nicht vorliegen, in noch höherem Grade als vorläufig anzusehen, als die in Teil I entwickelten Überlegungen über  $q$ -Funktionen.

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

Jedoch halten wir die Einführung von Funktionalen in  
eine konsequente  $q_n$ -theo Wiedergabe der klassischen Feld-  
physik trotz vieler ungelöster Probleme bei ihrer spez-  
ziellen Durchführung im allgemeinen für natur-  
gemäß.

**Kodak Color Control Patches**

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

# A Theory of Electrons and Protons.

By P. A. M. Dirac, St. John's College, Cambridge.

(Communicated by R. H. Fowler, F.R.S. - Received December 6, 1929.)

(Proc. Roy. Soc., 126, p. 360, 1930.)

## § 1. Nature of the Negative Energy Difficulty.

The relativity quantum theory of an electron moving in a given electromagnetic field, although successful in predicting the spin properties of the electron, yet involves one serious difficulty which shows that some fundamental alteration is necessary before we can regard it as an accurate description of nature. This difficulty is connected with the fact that the wave equation, which is of the form

$$\left[ \frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 + p_1 (\otimes) p_2 + \frac{e}{c} A + p_3 mc \right] \psi = 0, \quad (1)$$

has, in addition to the wanted solutions for which the kinetic energy of the electron is positive, an equal number of wanted solutions with negative kinetic energy for the electron, which appear to have no physical meaning\*.

Thus if we take the case of a steady electromagnetic field, equation (1) will admit of periodic solutions of the form

$$\psi = u e^{-iEt/\hbar}, \quad (2)$$

where  $u$  is independent of  $t$ , representing stationary states,  $E$  being the total energy of the state, including the relativity term  $mc^2$ . There will then exist solutions (2) with negative values for  $E$  as well as those with positive values; in fact, if we take a matrix representation

\* 2 Dirac,  $\alpha + \beta = \alpha + \beta$ ,  $\psi$  の kinetic energy  $E + mc^2$ , solution  
+ 2 Dirac,  $\alpha - \beta = \alpha - \beta$ , solution  $+ mc^2$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

すなわち、可逆力ト力カ。

of the operators  $p_1 \sigma_1, p_1 \sigma_2, p_1 \sigma_3, p_3$  with the matrix elements all real, then the conjugate complex of any solution of (1) will be a solution of the wave equation obtained from (1) by reversal of the sign of the potentials  $A$ , and either the original wave function or its conjugate complex must refer to a negative  $E$ .

The difficulty is not a special one connected with the quantum theory of the electron, but is a general one appearing in all relativity theories, also in the classical theory. It arises on account of the fundamental fact that in the relativity Hamiltonian equation of the classical theory, namely,

$$\left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0\right)^2 - \left(p + \frac{e}{c} A\right)^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (3)$$

there is an ambiguity in the sign of  $W$ , or rather  $W + eA_0$ . Although the operator on the wave function in (1) is linear in  $W$ , yet it is, roughly speaking, equivalent to the left hand side of (3) and the ambiguity in sign persists. The difficulty is not important in the classical theory, since here dynamical variables must always vary continuously, so that there will be a sharp distinction between those solutions of the equations of motion for which  $W + eA_0 \gg mc^2$  and those for which  $W + eA_0 \ll -mc^2$  and we may

$$\begin{aligned} * \quad \psi = u + iv, \quad i\left(\frac{\partial}{\partial x} + A(x)\right)\psi &= i\left(\frac{\partial}{\partial x} + A\right)(u + iv) = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Av\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + Au\right) \\ i\left(\frac{\partial}{\partial x} - A(x)\right)\bar{\psi} &= i\left(\frac{\partial}{\partial x} - A\right)(u - iv) = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Av\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + Au\right) \\ &\text{real.} \end{aligned}$$

Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

simply ignore the latter,  
We cannot, however, get over the difficulty so easily in the quantum theory. It is true that in the case of a steady el. mg. field we can draw a distinction between those solutions of (1) of the form (2) with  $E$  positive and those with  $E$  negative and may assert that only the former have a physical meaning (as was actually done when the theory was applied to the determination of the energy levels of the hydrogen atom), but if a perturbation is applied to the system it may cause transitions from one kind of state to the other. In the general case of an arbitrary varying el. mg. field we can make no hand-and-fast separation of the solutions of the wave equation into those referring to positive and those to negative kinetic energy. Further in the accurate theory quantum theory in which the el. mg. field also is subjected to quantum laws, transitions can take place in which the energy of the electron change from a positive to a negative value even in the absence of any external field, the surplus energy, at least  $2mc^2$  in amount, being spontaneously emitted in the form of radiation. (The laws of conservation of energy and momentum require at least two light-quanta to be formed simultaneously in such a process.) Thus we can ignore the negative-

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

energy states without giving rise to ambiguity in the interpretation of the theory.

Let us examine the wave functions representing states of negative energy a little more closely. If we superpose a number of these wave functions in such a way as to get a wave packet, the motion of this packet will be along a classical trajectory given by the Hamiltonian (3) with  $W \neq A_0$  negative. Such a trajectory, it is easily seen, is a possible trajectory for an ordinary electron (with positive energy) moving in the electromagnetic field with reversed sign, or for an electron of charge  $+e$  (and positive energy) moving in the original el. mag. field. Thus an electron with negative energy moves in an external field as though it carries a positive charge.

This result has led people to suspect a connection between the negative energy electron and the proton or hydrogen nucleus\*. One cannot, however, simply assert that a negative-energy electron is a proton, as that would lead to the following paradoxes:—

- (1) A transition of an electron from a state of positive to negative energy would be interpreted as a transition of an electron into a proton, which would violate the
- \* See for example, Weyl, 'Z.f. Phys.,' vol. 56, p. 332 (1929)

law of conservation of electric charge.  
(ii) Although a negative-energy electron moves in an external field as though it has a positive charge, yet, as one can easily see from a consideration of conservation of momentum, the field it produces must correspond to its having a negative charge, e.g., the negative-energy electron will repel an ordinary positive-energy electron although it is itself attracted by the positive-energy electron.

(iii) A negative-energy electron will ~~have~~ have less energy the faster it moves and will have to absorb energy in order to be brought to rest. No particles of this nature have ever been observed.

A closer consideration of the conditions that we should expect to hold in the actual world suggests that the connection between protons and negative-energy electrons should be on a somewhat different basis and this will be found to ~~be~~ remove all the above-mentioned difficulties.

## § 2. Solution of the Negative Energy Difficulties.

The most stable states for an electron (i.e., the states of lowest energy) are those with negative energy and very high velocity. All the electrons in the world will

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

tend to fall into these states with emission of radiation. The Pauli exclusion principle, however, will come into play and prevent more than one electron going into any one states. Let us assume there are so many electrons in the world that all the most stable states are occupied, or, more accurately, that all the states of negative energy are occupied except perhaps a few of small velocity. Any electrons with positive energy will now have very little chance of jumping into negative-energy states, and indeed an infinite number per unit volume all over the world, but if their distribution is exactly uniform we should expect them to be completely unobservable. Only the small departures from exact uniformity, brought about by some of the negative-energy states being unoccupied, can we hope to observe.

Let us examine the properties of the vacant states or "holes". The problem is analogous to that of the X-ray levels in an atom with many electrons. According to the usual theory of the X-ray levels, the hole that is formed when one of the inner electrons of the atom is removed is describable as an orbit and is pictured as the orbit of the missing electron before it was removed.

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

This description can be justified by quantum mechanics, provided the orbit is regarded, not in Bohr's sense, but as something representable, apart from spin, by a three-dimensional wave function. Thus the hole or vacancy in a region that is otherwise saturated with electrons is much the same thing as a single electron in a region that is otherwise devoid of them.

In the X-ray case the holes should be counted as things of negative energy, since to make one of them disappear (i.e., to fill it up), one must add to it an ordinary electron of positive energy. Just the contrary holds, however, for the holes in our distribution of negative-energy electrons. These holes will be things of positive energy and will therefore be in this respect like ordinary electron-particles. Further, the motion of one of these holes in an external electromagnetic field will be the same as that of the negative-energy electron that would fill it, and will thus correspond to its possessing a charge  $+e$ . We are therefore led to the assumption that the holes in the distribution of negative energy electrons are the protons. When an electron of positive energy drops into a hole and fills it up, we have an electron and proton disappearing together with emission

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

of radiation.

A difficulty arises when consider the field produced by the distribution of negative energy electrons. There is an infinite density of electricity which, according to Maxwell's equation

$$\text{div } \mathbf{E} = -4\pi \rho, \quad (4)$$

should produce an electric field of infinite divergence. It seems natural, however, to interpret the  $\rho$  in Maxwell's equation (4) as the departure from the normal state of electrification of the world, which normal state of electrification, according to the present theory, is the one where every electronic state of negative energy and one of positive energy is occupied. This  $\rho$  will then consist of a charge  $-e$  arising from each states of positive energy that is occupied, together with a charge  $+e$  arising from each state of negative energy that is unoccupied. Thus the field produced by a proton will correspond to its having a charge  $+e$ .

In this way we can get over the three difficulties mentioned at the end of the preceding section. We require to postulate only one fundamental kind of particle, instead of the two, electron and proton, that were previously necessary.

The mere tendency of all the particles to go into their

次の表の方へ H.P. II, (4)式へ代入して計算すればよい

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak

states of lowest energy results in all the distinctive things in nature having positive energy.

Can the present theory account for the great dissymmetry between electrons and protons, which manifests itself through their different masses and the power of protons to combine to form heavier atomic nuclei? It is evident that the theory gives, to a large extent, symmetry between electrons and protons. We may interchange their rôles and assert that the protons are the real particles and the electrons are merely holes in the distribution of protons of negative energy. The symmetry is not, however, mathematically perfect when one takes interaction between the electrons into account. If one neglects the interaction, the Hamiltonian describing the whole system will be of the form  $\sum H_a$ , where  $H_a$  is the Hamiltonian or energy of an electron in state  $a$  and the summation is taken over all occupied states. This differs only by a constant (i.e., by something independent of which states are occupied) from the sum  $\sum (-H_a)$  taken over all unoccupied states. Thus we get formally the same dynamical system if we consider the unoccupied states or protons each to contribute a term  $-H_a$  to the

Hamiltonian. On the other hand, if we take interaction between the electrons into account we get an extra term of the form  $\sum V_{ab}$  in the Hamiltonian, the summation being taken over all pairs of occupied states (a, b), and this is not equivalent to any sum taken over pairs of unoccupied states. The interaction would therefore give an essentially different Hamiltonian if we regard the proton as the real particles that occupy states. \*

The consequence of this dissymmetry are not very easy to calculate on relativistic lines, but we may hope it will lead eventually to an explanation of the different masses of proton and electron. Possibly some more perfect theory of interaction, based perhaps on Eddington's calculation† of the fine structure constant  $e^2/hc$ , is necessary before this result can be obtained.

### § 3, Application to Scattering

As an elementary application of the foregoing ideas we may consider the problem of the scattering of radiation by an electron, free or bound. A scattering process ought, according to theory, to be considered as a double transition process, consisting of first an absorption of a photon with the electron simultaneously jumping to

\*  $\approx 2.15 \times 10^{-4}$  Wellerfeld, 1927, p. 107.  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{hc} \frac{1}{1 - \beta^2}$  in Y. I. P.  
† Eddington, 112, p. 538 (1929).

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

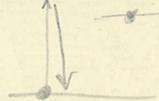
Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak



any state, and then an emission with the electron jumping into its final states, or else of first the emission and then the absorption. We therefore have to consider altogether three states of the whole system, the initial state with an incident photon and the electron in its final initial state, an intermediate state with either two or no photons in existence and the electron in <sup>any</sup> final state, the initial and the final state with the scattered photon and the electron in its final state. The initial and final states of the whole system must have the same total energy, but the intermediate state, which lasts only a very short time have a considerably different energy.

The question now arises as to how one is to interpret those scattering processes for which the intermediate states is one of negative energy for the electron. According to previous ideas these intermediate states had no real physical meaning, so it was doubtful whether scattering processes that arise through their agency should be included in the formula for the scattering coefficient. This gives rise to a serious difficulty, since in some important practical cases nearly all the scattering comes from intermediate states with negative energy for the inter

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

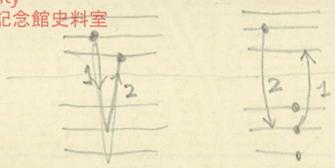
Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak 2007 TM: Kodak



electron.\* In fact for a free electron and radiation of low frequency, where the classical formula holds, the whole of the scattering comes from such intermediate states.

According to the theory of the present paper it is absolutely forbidden, by the exclusion principle, for the electron to jump into a state of negative energy, so that the double transition process with intermediate states of negative energy for the electron must be excluded. We now have, however, another kind of double transition process taking place, namely, that in which first one of the distribution of negative-energy electrons jumps up into the required final state for the electron with absorption (or emission) of a photon, and then the original positive-energy electron drops into the hole formed by the first transition with emission (or absorption) of a photon. Such processes result in a final state of the whole system indistinguishable from the final state with the more direct processes, in which the same electron makes two successive jumps. These ~~two~~ new processes just make up for those of the more direct processes that are excluded on account of the intermediate state having negative energy for the electron, since the matrix elements that determine the transition probabilities are just the same in the two cases, though they come into play in the reverse order. In this way the old scattering formulas, in which intermediate states are excluded, can be justified.

\*I am indebted to I. Waller for calling my attention to this difficulty.

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Jan. 6th, 1931.

©2022 YHAL, YIP, Kyoto University  
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

On the Theory of Electrons and Protons  
J. R. Oppenheimer.

( Letters to the Editor ) ( Phys. Rev., 35, p 562, 1930 )

In a recent paper, Dirac has suggested that the reason why the transitions of an electron to states of negative energy, which are predicted by his theory of the electron, do not in fact occur is that near all of states of negative energy are already ~~occupied~~ occupied. Dirac has further shown that the unoccupied states of negative energy have many of properties of protons; that, for instance, they may be represented by wave functions which would be taken to correspond to a particle of positive charge and positive mass. He has further shown that the mass associated with these gaps is not necessarily the same as that of the electron, and he has suggested the assumption that the gaps are protons. In order to account for the fact that the divergence of <sup>the</sup> electric field is not, in spite of the infinite electron density, everywhere infinite, Dirac further ~~assumes~~ assumes that only the departures from the normal state in which all negative states are filled are to be counted in computing the charge density for Maxwell's fourth equation

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi \rho \quad (1)$$

Finally, Dirac is able to account for the validity of the Thomson formula for the scattering of soft light by a free electron, in spite of the fact that the derivation of this formula on this theory of the electron - a derivation which makes

2. 126, 360

Kodak Color Control Patches

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak



difference in mass between the electron, and makes it seem improbable that this difference can be explained on the basis suggested by Dirac. For the scattering process must in this case be regarded as a double jump of a single electron, in which a negative energy electron jumps to some state of positive energy, and then falls back into the hole that is the original proton. Now it is easy to see that the probability of this scattering is determined by precisely the same matrix components as those which give the electron scattering, and that the present theory gives equal scattering coefficients for electron and proton. Of course, the interaction between electrons is omitted in this computation; but the difficulty is this, that such interaction would affect electron scattering and proton scattering in precisely the same way; whereas the Thomson formula requires the latter to be smaller by a factor proportional to the square of the ratio of the masses.

Finally, there is a numerical discrepancy to be noted. According to Dirac's suggestions, the filling of the proton gaps in the distribution of a negative electrons should correspond to the annihilation of an electron and a proton, and should thus, under all normal conditions, be a very rare occurrence. Now if we consider for definiteness a free electron in an enclosure in which there are  $n_p$  free protons per unit volume, we may readily compute the rate at which the electron should, by the Dirac radiation theory, fall into one of the corresponding gaps. The conservation laws require that at least two quanta

\*  $\omega \rightarrow \omega'$ , two quanta,  $\hbar\omega = \hbar\omega' + \hbar\nu$  positive elec state  $\rightarrow$  hole  
probability  $\propto \omega^2 \omega'^2 \nu^2$  negative electron  $\rightarrow$

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

© Kodak, 2007 TM: Kodak

