

N222

BOX 43

**PRACTICAL
NOTE-BOOK**

Quantenelektrodynamik
II



(新案登録)

昭和五年十二月十七日

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Bemerkungen über die Rolle der Eigenenergie
des Elektrons in der Quantentheorie der Strahlung.
Von I. Waller in Upsala, zurzeit in Zürich
(Eingegeben am 24. März 1930.)

Zs. f. Phys. Bd 62. S 673

Die Arbeiten von Heisenberg und Pauli über die relativistische Formulierung der Quantentheorie[†] haben die Schwierigkeiten offenbar gemacht, welche wegen der nach der Theorie unendlich großen elektromagnetischen Eigenenergie des Elektrons einer exakten Formulierung der Quantentheorie noch im Wege stehen. Oppenheimer^{††} hat kürzlich im Anschluss an jene Arbeiten diese Schwierigkeiten näher untersucht. Der Zweck der vorliegenden Note ist, diese Ergebnisse für den Fall eines freien Elektrons näher auszuführen, wobei auch die entsprechende Frage im Anschluss an die ursprüngliche nichtrelativistische Diracsche Strahlungstheorie betrachtet wird.

Wird die Diracsche relativistische Dynamik des Elektrons mit der Diracschen Strahlungstheorie^{†††} kombiniert, so erhält man für ein freies Elektron ein System von Wellengleichungen^{††††}, welche für die Fälle aufgeschrieben

[†] Heisenberg und W. Pauli, Zs. f. Phys. 56, 1, 1929; 59, 168, 1930.

^{††} R. Oppenheimer, Phys. Rev. 35, 461, 1930.

^{†††} Dirac, Proc. Roy. Soc. London 114, 243, 719, 1927.

^{††††} Waller, Zs. f. Phys. 61, 721, 1930. Aus der zitierten Arbeit von Oppenheimer folgt, dass diese Gleichungen auch ~~aus~~ aus der Heisenberg-Paulischen Theorie bei Weglassung der elektrostatischen Selbstenergie folgen.

werden, wo die Wellenfunktion der linken Seite sich auf Zustände mit bzw. null, eins, zwei... Photonen bezieht. Geht man ferner zu dem Fall über, wo die Photonenzustände kontinuierlich verteilt sind (unendlich großer Hohlraum), so sind diese Gleichungen von der Form

$$(1) \left\{ \begin{aligned} [-W + E^k(p)] \Phi(p, k) &= \gamma \sum_{\kappa'} \sum_{\mu} \int S_{\mu} A_{p-\kappa, \kappa'}^{p, k} \kappa'^{-\frac{1}{2}} \Phi(p-\kappa, \kappa', \mu) \\ &\quad \times d\kappa \\ [-W - E^k(p) + c\kappa] \Phi(p, k, \mu) &= \gamma \sum_{\kappa'} \int S_{\mu} A_{p+\kappa, \kappa'}^{p, k} \kappa'^{-\frac{1}{2}} \Phi(p+\kappa, \kappa') \\ &\quad + \gamma \sum_{\kappa'} \sum_{\mu'} \int S_{\mu'} A_{p-\kappa, \kappa'}^{p, k} \kappa'^{-\frac{1}{2}} \Phi(p-\kappa', \kappa', \mu', \mu) d\kappa' \end{aligned} \right.$$

usw., mit

$$A_{p', k'}^{p, k} = h^3 u^{*k}(p) \epsilon_{\mu\nu\lambda} \sigma_{\mu} u^{\lambda}(p), \quad \gamma = \left(\frac{e^2 c}{2\pi h} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\kappa = |\kappa|,$$

Die κ bedeuten die Impulse der Photonen, die S_{μ} ($\mu = 1, 2$; $S_{\mu} \perp \kappa$) geben deren Polarisation an. Die Lösungen der Diracschen Gleichungen für ~~den~~ ein freies Elektron mit dem Impuls p sind dabei als Funktionen des Lagevektors x des Elektrons in der Form $u^k(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px - E(p)t)}$ geschrieben, mit $k=1, 2, 3, 4$ und $u^{*k}(p) u^k(p) = h^{-3} \delta(k-k)$. Dabei soll $E^{(1)} = E^{(2)} > 0$, $E^{(3)} = E^{(4)} < 0$ sein. Ferner soll z. B. $[\Phi(p, k, \mu)] dp d\kappa$ die Wahrscheinlichkeit dafür geben, daß das Elektron im Zustandsbereich (dp, k)

ist und daß zugleich ein freies Photon vorhanden ist, das in den Bereich $(d\mathbf{x}, \mu)$ gehört.

Es wird nun eine Lösung dieser Gleichungen gesucht, die einem mit dem Impuls \mathbf{p}_0 bewegten und nur mit seinem Eigenfeld in Wechselwirkung befindlichen Elektron entspricht. Die Lösung wird in bezug auf die Wechselwirkungsglieder in (1) entwickelt[†], nämlich in der Form

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \Phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + \Phi_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + \dots;$$

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{x}, \mu) = \Phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{x}, \mu) + \dots$$

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \dots$$

angesetzt, mit $\Phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, wobei $a_3 = a_4 = 0$. Die Indizes der Φ und W geben deren Größenordnung (in bezug auf γ) an. Es folgt $W_0 = \bar{E}^{(1)}(\mathbf{p}_0) = E(\mathbf{p}_0)$; $W_1 = 0$, und für W_2 die Säkulargleichung

$$W_2 a_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}'=1}^2 W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} = 0$$

mit

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -\gamma^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{\mu=1}^2 \int \frac{(\sum_{\nu} A_{\mathbf{p}_0 - \mathbf{k}, \nu}^{\mu}) (\sum_{\nu} A_{\mathbf{p}_0 - \mathbf{k}', \nu}^{\mu})}{\kappa [-E(\mathbf{p}_0) + E^l(\mathbf{p}_0 - \kappa) + c\kappa]} d\mathbf{x}.$$

Ausführung der Summationen in bezug auf l und μ gibt^{††}

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -\gamma^2 \hbar^{-3} \int n^{*\mathbf{k}}(\mathbf{p}_0) \frac{[\mathbf{p}_0 + \kappa - n(n\mathbf{p}_0)] \cdot \mathbf{p}_0 + \kappa \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}'}{\kappa E(\mathbf{p}_0) - c\kappa p_0} n^{\mathbf{k}'}(\mathbf{p}_0) d\mathbf{x}$$

mit $n = \frac{\kappa}{\kappa}$.

Wird die x_3 -Achse in die Richtung \mathbf{p}_0 gelegt, und benutzt man für die $n^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_0)$ früher angegebene Werte, so läßt sich[†] über die entsprechende Entwicklung für ein gebundenes Elektron siehe R. Oppenheimer, l.c.
^{††} Vgl. dazu I. Waller, l.c.

die Integration über alle Richtungen von x leicht ausführen,
und es folgt $W_{kk'} = 0$ für $k \neq k'$, ferner mit $p_0 = |p_0|$

$$W_{11} = W_{22} = W_2(p_0) \int_0^\infty dx + \frac{2e^2 c}{h F(p_0)} \int_0^\infty x dx.$$
$$= \frac{e^2}{h} \left[\frac{m^2 c^3}{p_0 F(p_0)} \log \frac{F(p_0) + c p_0}{F(p_0) - c p_0} - 2 \right] \int_0^\infty dx + \frac{2e^2 c}{h F(p_0)} \int_0^\infty x dx.$$

Folglich wird $W_2(p_0)$ unendlich groß und ebenso die
Differenzen $W_2(p_0) - W_2(p'_0)$ für $p_0 \neq p'_0$. Die unendliche
Teil der Eigenwertstörungen zweiter Näherung für zwei
Zustände mit verschiedenem Absolutwert des Impulses
können sich also nicht kompensieren*. Diese Rechnung
lässt sich natürlich die Möglichkeit offen, dass der
Fehler im Näherungsverfahren liegt. Dieses Lösungs-
verfahren scheint aber dem Sinne der Theorie zu ent-
sprechen, da die Ladung prinzipiell beliebig klein
gedacht werden kann. Ein anderes Lösungsverfahren
scheint auch allgemein kaum möglich zu sein.

Es soll nun eine entsprechende Rechnung durchgeführt
werden für den Fall, dass in der Bewegungsgleichung des
Elektrons Glieder von der Größenordnung v^2/c^2 gegen Eins
vernachlässigt werden, wie es Dirac in der ursprünglichen
Fassung seiner Strahlungstheorie gemahnt hat. Die
Retardierung der elektrischen Kräfte wird jedoch berück-
sichtigt. Statt (2) erhalten wir die Gleichungen

* Ein entsprechendes Ergebnis für gebundene Elektronen wurde h.c.
von R. Oppenheimer auf einem weniger direkten Wege erhalten

$$\begin{aligned}
 [W - E(p_0)] \Phi(p_0) &= \frac{\gamma}{mc} \int S_{\mu} p_0 x^{-\frac{1}{2}} \Phi(p_0 - p_0, p_0 \mu) dx, \\
 [W - E(p_0) - cx] \Phi(p_0, \mu) &= \frac{\gamma}{mc} [S_{\mu} p_0 x^{-\frac{1}{2}} \Phi(p_0 + p_0) \\
 &+ \sum_{\mu'} \int S_{\mu'} p_0 x'^{-\frac{1}{2}} \Phi(p_0 - p_0', p_0 \mu \mu')] dx' \\
 &+ \frac{\gamma^2}{mc^2} \sum_{\mu'} \int S_{\mu} S_{\mu'} (xx')^{-\frac{1}{2}} \Phi(p_0 + p_0 - p_0', p_0 \mu \mu') dx'
 \end{aligned}$$

Werden dieselben Entwicklungen wie im relativistischen Falle benutzt mit $\Phi(p_0) = a \delta(p_0 - p_0)$, so folgt

$$\begin{aligned}
 W_2(p_0) &= \frac{\gamma^2}{m^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu} \frac{(S_{\mu} p_0)}{E(p_0) - E(p_0 - p_0) - cx} dx \\
 &= \frac{e^2}{4mch p_0} \int_0^{\infty} \{[(2mc+x)^2 - 4p_0^2] \log \frac{2mc+x+2p_0}{2mc+x-2p_0} - 4p_0(2mc+x)\} dx,
 \end{aligned}$$

und man begegnet hier denselben Schwierigkeiten wie im relativistischen Falle.

Will man die Streuung durch ein freies Elektron untersuchen, so hat man nach dem angegebenen Näherungsverfahren im relativistischen Falle etwa zu setzen:

$$\begin{aligned}
 \Phi(p_0 k \mu) &= a_k \delta(p_0 - p_0) \delta(p_0 - p_0) \delta(\mu - \mu_0) + \Phi_{01}(p_0 k \mu) + \dots, \\
 \Phi(p_0 k) &= \Phi_1(p_0 k) + \dots, \quad \Phi(p_0 k \mu \mu' \mu'') = \Phi_1(p_0 k \mu \mu' \mu'') + \dots, \\
 W &= W_0 + W_1 + W_2 + \dots
 \end{aligned}$$

Dabei folgt allerdings für W_2 ein divergentes Integral, für $\Phi_2(p_0 k \mu)$ folgt aber ein vernünftiger Ausdruck, der in erster Annäherung die Strenwelle gibt. Das

Näherungsverfahren läßt sich aber zur Berechnung der Rückwirkung der Streustrahlung nicht weiterführen. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß eine der unendlichen Eigenwertstörung zweiter Näherung entsprechende Schwierigkeit auch bei Benutzung unperiodischer Lösungen auftritt. Geht man von einem zur Zeit $t=0$ vorhandenen Zustand k des Systems Atom + Strahlungsfeld aus, so folgt aus den Diracschen Gleichungen zweiter Näherung*, daß a_k unendlich groß wird (a_k = Wahrscheinlichkeitsamplitude des Zustandes k), d. h., daß a_k mit der Zeit unendlich schnell wächst. Dieser Umstand wird jedoch erst bei der Berechnung höherer Näherungen praktisch von Bedeutung.

Es ist auch klar, daß die hier hervorgehobenen Schwierigkeiten damit in direktem Zusammenhang stehen, daß der Elektron als punktförmiges Gebilde angenommen worden ist**.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Pauli für viele wertvolle und aufklärende Gespräche über die Frage der Eigenenergie bestens danken.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule, März 1930.

* p. Dirac, Proc. Roy. Soc. London 114, 710, 1927, Anfang 55.
** Vgl. W. Heisenberg und W. Pauli, l. c.

Die Streuung von Strahlung durch gebundene und freie Elektronen nach der Diracschen relativistischen Mechanik.

Von I. Waller in Upsala

ZS. 61, 837, 1930

(Eingegangen am 12. Februar 1930.)

Zunächst wird (in § 1) das Probleme der Streuung von Strahlung beliebiger Wellenlänge durch gebundene Elektronen mit Anwendung der Diracschen rel. Mechanik und der Diracschen Strahlungstheorie untersucht. Die Streuprozesse kommen dann durch Aufeinanderfolge von Absorptions- und Emissionsprozessen zustande. Es treten keine wahren Streuprozesse auf. Um auf eine durch die Erfahrung weitgehend bestätigte, früher abgeleitete Streuformel zu kommen, ist es notwendig, die jener Streuprozesse zu berücksichtigen, wo die Zwischenzustände des Elektrons Zustände negativer Energie sind.

In § 2 wird in entsprechender Weise die Streuung durch freie Elektronen untersucht. Dann folgt in der betrachteten Annäherung, wo die Rückwirkung der Streustrahlung noch vernachlässigt wird, eine Bestätigung der Streuformel von Klein und Nishina. Die hier gegebene Ableitung dürfte gegenüber der von jenen Autoren benutzten Godauschen Methode wegen der allgemeinen Bedeutung der Diracschen Strahlungstheorie von Interesse sein, ferner auch weil sie die Bedeutung der Zwischenzustände negativer Energie zeigt.

Bekanntlich hat Dirac* neuerdings eine Weg angegeben, der zur Vermeidung der mit den negativen Energien verknüpften Schwierigkeiten führt und neue Ausblicke auf die Probleme der Elektronen und der Protonen öffnet. Beim

* 126, 360 (1930)

hier betrachteten Problem gibt diese neue Auffassung, insofern, als sie in dieser Arbeit in Betracht kommt, wesentlich nur formale Abänderungen, und wir können uns deshalb der Kürze wegen der alten Ausdrucksweise bedienen.

§ 1. Nach Dirac* wird bekanntlich die Bewegung eines Elektrons in einem el. mg. Felde mit dem Vektorpotential A und dem skalaren Potential V , wobei A und V zunächst c -Zahlen sind, durch die Wellengl

$$\hat{F}\psi = \left[\frac{E + eV}{c} + \beta_1 \sigma (\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}) + \beta_3 mc \right] \psi = 0 \quad (1)$$

beschreiben. Wir wollen im folgenden stets die von Dirac angegebenen Hermiteschen Matrizen für $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. V soll nun das Feld des als ruhend betrachteten Atomkerns darstellen, eventuell unter Minusnahme eines schwachen äusseren Feldes, wodurch die im folgenden angenommene Nichtentartung der Bewegung des Elektrons im Felde Verzielt wird. Als Hamiltonsche T_H des Elektrons folgt

$$E = H_0 - c \beta_1 \sigma \mathbf{A},$$

wobei

$$H_0 = -c \beta_1 \sigma \mathbf{p} - \beta_3 mc^2 - eV \quad (2)$$

die Hamiltonsche T_H für die Bewegung im Felde V allein ist. Wird nun das el. mg. Feld nach Dirac** quantisiert, folgt bei Berücksichtigung der Retardierung als Hamiltonsche Funktion für Atom + Feld:

$$H = H_0 + \sum_{\nu} N_{\nu} h \nu$$

* 117, 610
 ** 114, 710

relativistic, $\hbar = 2\pi \cdot 2.27 \cdot 10^{-27} \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, $T \approx 2$ g-Zahl, \hbar

$$-\sum_{\nu} \left[e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}} \rho_i \circ \mu_{\nu} N_{\nu}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\nu}} + e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}} \rho_i \circ \mu_{\nu} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\nu}} N_{\nu}^{1/2} \right], \quad (3)$$

wobei N_{ν} und Θ_{ν} r Operatoren sind, welche die Bedingung

$$N_{\nu} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\nu}} - e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\nu}} N_{\nu} = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\nu}}$$

erfüllen. \mathbf{x} mit den Komponenten x_1, x_2, x_3 ist der Lagevektor im Raume, ferner

$$\mu_{\nu} = \left(\frac{e^2 \hbar \nu_r}{2\pi c \sigma_r} \right)^{1/2} \nu_r \quad \kappa_{\nu} = \frac{\hbar \nu_r}{c} \kappa_{\nu}, \quad (3')$$

wobei σ_r ν_r $d\nu_r$ die Anzahl von Komponenten r des Strahlungsfeldes mit gegebener Polarisation ν im Frequenzgebiet $d\nu_r$ und mit Fortschrittingsrichtungen N_{ν} im Raumwinkelgebiet $d\omega_r$ angeben soll. Daraus folgten als Schrödingersche Gleichungen für die Funktionen $\Phi(J', N')$, welche von den Eigenwerten J' der die stationären Zustände des Atoms charakterisierenden Variablen J sowie von den N'_i abhängt, wobei N'_i die Anzahl von Photonen in der Feldkomponente r ergibt:

$$\left[-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - E(J'') - \sum_{\nu} N_{\nu} \hbar \nu_r \right] \Phi(J'; \cdot, N'_i, \cdot) \\ = \sum_{\nu} \sum_r \mu_{\nu} \left[N'_i{}^{1/2} A_{\nu}^r(J'' J') \Phi(J'; \cdot, N'_i - 1, \cdot) \right. \\ \left. + (N'_i + 1)^{1/2} B^r(J'' J') \Phi(J'; \cdot, N'_i + 1, \cdot) \right]$$

mit

$$\begin{aligned} A^r(J'' J') &= \int \Psi_{J''}^*(\mathbf{x}) \rho_i \circ \Psi_{J'}(\mathbf{x}) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \kappa_{\nu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \\ B^r(J'' J') &= \int \Psi_{J''}^*(\mathbf{x}) \rho_i \circ \Psi_{J'}(\mathbf{x}) e^{+\frac{2\pi i}{\hbar} \kappa_{\nu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4')$$

wobei $\Psi_{J', N'}$ und $E(J')$ Eigenfunktionen und Eigenwerte für die Bewegung des Elektrons im Felde V sind, $|\Phi(J', N')|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit für den Zustand (J', N') des Systems Atom + Feld. Die Gleichung (4) ist von der Form

$$\left[-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - W(m) \right] \Phi(m) = \sum_n (m|V|n) \Phi(n), \quad (5)$$

wobei die m, n die Zustände des ganzen Systems bezeichnen. $W(m)$ ist die Energie des Zustandes m , wenn von der Wechselwirkung zwischen Atom und Strahlung abgesehen wird, die $(m|V|n)$ sind die Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie. Die einzigen von Null verschiedenen $(m|V|n)$ sind solche, welche sich auf die Emission oder die Absorption eines Photons beziehen, nämlich

$$\begin{aligned} (J''; \cdot, N_r+1, \cdot |V| J'; \cdot, N_r, \cdot) &= M_r (N_r+1)^{1/2} A^r(J''J'); \\ (J''; \cdot, N_r-1, \cdot |V| J'; \cdot, N_r, \cdot) &= M_r N_r^{1/2} B^r(J''J'). \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist die einfache Form, welche die Hamiltonsche Funktion (3) hier erhält, sowie die daraus folgende Tatsache, daß keine Matrixelemente $(m|V|n)$ auftreten, denen wahre Streuprozesse entsprechen.

Es wird nun im Einklang mit dem allgemeinen Diracschen Schema $\Phi(m) = a(m) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} W_m t}$ (5')

gesetzt. Zur Zeit $t=0$ soll sich das Atom im Zustand J' befinden während N_r s -Photonen und keine anderen

vorhanden sind. Für einen Zeitpunkt, bis zu dem die $a^{(m)}$ sich nur wenig von den Ausgangswerten verändert haben, folgt, wenn von Resonanzfällen abgesehen wird,

$$a(J''; 1r, N_s' - 1) = -N_s'^{1/2} \left\{ \frac{[\mu_r A^r(J''J''')][\mu_s B^s(J''J')] + [\mu_s B^s(J''J''')][\mu_r A^r(J''J')]}{E(J') - E(J''') - h\nu_r} \right\} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \gamma t} - 1}{\gamma}, \quad (6)$$

wobei $\gamma = E(J'') + h\nu_r - E(J') - h\nu_s$ gesetzt wird wurde. $a(J''; 1r, N_s' - 1)$ bezeichne bezieht sich auf einen Zustand, der durch Absorption eines s -Photons und Emission eines r -Photons entstanden ist. Dabei kann entweder der Absorptions- oder der Emissionsprozess zuerst geschehen, wie aus den Zählern in $\sum_{J'''}^{\prime\prime}$ ersichtlich ist; die J'' geben die Zwischenzustände des Atoms an. Aus (6) folgt in üblicher Weise die Wahrscheinlichkeit für die Streuung eines Photons der Polarisation r in den Raumwinkel $d\omega_r$ unter gleichzeitigem Übergang des Atoms in den Zustand J'' :

$$\sigma_r d\omega_r \int |a(J''; 1r, N_s' - 1)|^2 d\nu_r = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} t \left| \sum_{J'''}^{\prime\prime} \right|^2 \sigma_r N_s' d\omega_r,$$

wo die $\sum_{J'''}^{\prime\prime}$ dieselbe wie in (6) ist. Ferner folgt für die Frequenz des gestreuten Photons $\nu_r = [E(J') - E(J'')] / \hbar \nu_s^{1/2}$.
 Führen wir die Intensität $I_0 = h\nu_s^3 N_s' / c^2 \sigma_s$ ein,

folgt als Intensität im Abstand R vom Atom der in der Richtung \mathbf{n}_r gestreuten Strahlung mit der Polarisation \mathbf{r} :

$$I_r = \frac{I_0 e^4 v_r^2}{R^2 v_s^2} \left| \sum_{J''} \left\{ \frac{[\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^r(J'' J'')] [\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^s(J' J')] + [\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^r(J'' J'')] [\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^s(J' J')] }{E(J') - E(J'') + h\nu_s} \right\} \right|^2 \quad (7)$$

In analoger Weise können die Streuprozesse zweiter Art, die aus zwei aufeinanderfolgenden Emissionsprozessen zusammengesetzt sind, behandelt werden.

Bei der Ableitung von (7) wurde die Rückwirkung der Streustrahlung auf das streuende System vernachlässigt, und es ist deshalb zu erwarten, dass dieselbe Formel auch ohne Quantisierung des Feldes* abgeleitet werden kann, unter Heranziehung der Ausdrücke für wellenmechanische Ladungs- und Stromdichte** in der Form, welche diese Ausdrücke in der Diracschen Theorie annehmen.

Im folgenden Teile von § 2 sollen m, n, s stationäre Zustände des Atoms bezeichnen. Für die Wellengleichung

$$\left[\frac{1}{c} \left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + eV \right) + \beta_1 \sigma \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right) + \beta_3 mc \right] \psi = 0 \quad (8)$$

des durch die Lichtwelle

$$\mathbf{A} = -\frac{c}{4\pi i \nu} \left[\mathbf{E}_0 e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{n\mathbf{x}}{c} \right)} - \mathbf{E}_0 e^{-2\pi i \nu \left(t - \frac{n\mathbf{x}}{c} \right)} \right]$$

* Schrödinger: Ann. 81, 139, (1926); Gordon: 40, 117 (1926); Klein 41, 409 (1927); Klein und Y. Nishina, 52, 853, (1928).

** Dirac: 118, 351, (1928).

gestörter Atoms werden in gewöhnlicher Weise approximative
 Lösungen

$$\psi_n e^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t} + \bar{\psi}_n e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_n - h\nu)t} + \bar{\psi}'_n e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_n + h\nu)t} \quad (8')$$

gesucht, wobei ψ_n eine normierte Eigenf \bar{u} für das
 ungestörte Atom ist. Setzt man für $\bar{\psi}_n$ die Entwicklung
 nach Eigenf \bar{u} en

$$\bar{\psi}_n = \sum_s \bar{\psi}_s \psi_s$$

an, folgt

$$\bar{\psi}_s = \frac{ec}{4\pi i \nu} \frac{\int \bar{\psi}_s \rho_{00} \psi_n e^{-\frac{2\pi i}{h} \kappa x} dx}{E_n - E_s - h\nu}$$

mit $\kappa = h\nu n/c$. $\bar{\psi}'_n$ erhält man durch Ersetzung von
 ν durch $-\nu$. Die wellenmechanische Stromdichte ist von
 der Form $ec \psi^* \rho_{00} \psi$. Führt man hier die gestörten
 Wellenfunktionen (8') ein, findet man, daß der mit
 E_0 proportionale Teil der Stromdichte in der Form

$$\sum_n I_n \text{ geschrieben werden kann, wobei}$$

$$I_n = \sum_{m < E_n + h\nu} (I_{nm} + I_{nm}^*) + \sum_{m < E_n - h\nu} (I_{nm} + I_{nm}^*)$$

$$I_{nm} = ec (\psi_n^* \rho_{00} \bar{\psi}_m + \bar{\psi}'_n{}^* \rho_{00} \psi_m) e^{\frac{2\pi i}{h} (E_n - E_m + h\nu)t}$$

und es wird dadurch möglich, die I_{nm} (mit festem n) der
 einzelnen Komponenten der Sekundärstrahlung eines Atoms
 im Zustand n korrespondenzmäßig zuzuordnen[†]. Da durch
 folgt, daß diejenigen Komponenten der Sekundärstrahlung,
 die den Übergang des Atoms vom Zustand n in den Zustand
[†] Klein, l.c.

n entspricht, für große Abstände vom Atom in der Richtung n' durch den reellen Teil des Dipolmoments $\dagger\dagger$

$$d_{nm} = \frac{e^2 c^2}{4\pi^2 v v'} \sum_s \left[\frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{A}_{ns}) \mathbf{A}'_{sm}}{E_s - E_n - h\nu} + \frac{\mathbf{A}'_{ns} (\mathbf{E}_0 \mathbf{A}_{sm})}{E_s - E_m + h\nu} \right] \times e^{\frac{2\pi i}{h} (E_n - E_m + h\nu) t} \quad (10)$$

definiert ist, wobei $v' = \frac{E_n - E_m}{h} + \nu$ und

$$\mathbf{A}_{ns} = \int \psi_n^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{\frac{2\pi i}{h} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \psi_s d\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}'_{ns} = \int \psi_n^* \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{\frac{2\pi i}{h} \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (10')$$

mit $\mathbf{k}' = (E_n - E_m + h\nu) \mathbf{n}' / c$. Den Streuprozessen zweiter Art entspricht in ähnlicher Weise die zweite Summe in (9). Man sieht leicht, daß (10) mit (7) im Einklang ist.

Es soll nun skizziert werden, wie bei Vernachlässigung von Relativitäts- und Spineffekten eine früher abgeleitete nichtrelat. Streuformel aus (10) erhalten werden kann. Dabei wird angenommen, daß Anfangs und Endzustand des Atoms beim Streuprozess Zustände positiver Energie sind, so daß E_n und E_m von der Größenordnung $m\tilde{c}^2$ sind. Dagegen ist es notwendig, für die Zwischenzustände s sowohl solche positiver Energie ($E_s \sim m\tilde{c}^2$) als solche negativer Energie ($E_s \sim -m\tilde{c}^2$) in Betracht zu ziehen. Für positive Energiewerte wird $E = m\tilde{c}^2 + E'$ gesetzt, und für negative $E = -m\tilde{c}^2 - E'$. Wir setzen voraus, daß für alle in Betracht kommenden Zustände $|E'| \ll m\tilde{c}^2$ ist; ferner wird vorausgesetzt, daß $h\nu \ll m\tilde{c}^2$. Bezeichnen wir die Komponenten einer Eigenf. ψ der Diracschen Gleichungen mit $\dagger\dagger$ Diese Formel wurde ohne Ableitung vom Verfasser in ZS. f. Phys 58, 75, 1929 gegeben.

$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, sind für $E > 0$ ψ_1 und ψ_2 , für $E < 0$ dagegen ψ_3 und ψ_4 als klein zu betrachten. Für ψ_3 und ψ_4 bzw. für ψ_1 und ψ_2 folgen dann in erster Annäherung Gleichungen vom Schrödingerschen Typus[†]. Die letzten Gl. entsprechen der Bewegung eines Elektrons $+e$ im Felde V .

Wir teilen die Σ in (10) in Σ^+ und Σ^- auf, wobei die erste Summe sich auf alle Zustände mit $E_s > 0$, die zweite auf alle Zustände mit $E_s < 0$ bezieht. In Σ^- können wir für die Nenner annäherungsweise $-2mc^2$ setzen, und können dann mit Beibehaltung dieses konstanten Großen Wertes der Nenner die Summation über alle Zustände s erstrecken, weil für positive E_s sämtliche Glieder in den Integralen der Ausdrücke (16) für A_{ns} usw. Komponenten kleiner Wellen $p_{\pm n}$ (vgl. oben) als Faktoren enthalten, wie man leicht mit Rücksicht auf die Diracschen Ausdrücke für ψ_s und ψ bestätigt. Demnach folgt

$$\begin{aligned} \Sigma^- &= -\frac{1}{2mc^2} \sum_s \{ (E_0 A_{ns}) A'_{s1n} + A'_{n5} (E_0 A_{sm}) \} \\ &= -\frac{E_0}{mc^2} \int \psi_n^* \psi_m e^{\frac{im}{\hbar}(\alpha'_1 - \alpha'_2)x} dx, \quad (11) \end{aligned}$$

wobei die für einen beliebigen Vektor A gültigen Beziehungen

$$(A \circ) \circ = A - iA \times \circ, \quad \circ(A \circ) = A + iA \times \circ \quad (12)$$

benutzt würden. Zur Umformung von Σ^+ beachten wir, [†] Darwin: 118, 654, 1928. Darin untersucht der Fall $E \sim mc^2$, der Fall $E \sim -mc^2$ läßt sich in entsprechender Weise behandeln.

dass ψ_s und ψ_n^* die Gleichungen erfüllen

$$\left(\frac{E_s + eV}{c} + \beta_s mc\right) \psi_s + \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{r=1}^3 \beta_r \sigma_r \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} = 0,$$

$$\psi_n^* \left(\frac{E_n + eV}{c} + \beta_s mc\right) - \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \psi_n^*}{\partial x_r} \beta_r \sigma_r = 0.$$

Wird die erste Gl. von links mit $\psi_n^* \beta_r \sigma_r$, die zweite von rechts mit $\beta_r \sigma_r \psi_s$ multipliziert, folgt durch Addition, da $E_n + E_s + 2eV = 2mc^2$ gesetzt werden kann,

$$2mc \psi_n^* \beta_r \sigma_r \psi_s = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left[\psi_n^* \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} - \psi_s \frac{\partial \psi_n^*}{\partial x_r} + i \left(\frac{\partial \psi_n^* \psi_s}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_n^* \psi_s}{\partial x_3} \right) \right],$$

folglich

$$A_{ns} = -\frac{1}{mc} \int \left[\psi_n^* \mathbf{p} \psi_s + \frac{\hbar}{4\pi} \text{rot}(\psi_n^* \otimes \psi_s) \right] e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

$$\text{mit } \mathbf{p} = \frac{\hbar}{2\pi i} \nabla. \quad (13)$$

Dabei ist eine partielle Integration ausgeführt. Ein mit \mathbf{x} proportionalen Glied kam dabei weggelassen werden, weil $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = 0$. A_{ns} erhält man durch Ersetzen von \mathbf{x} mit $-\mathbf{x}'$. (Beachte, dass nur die auf \mathbf{n}' senkrechte Komponente von $\mathbf{d}\mathbf{x}$ in Betracht kommt.)

Das den Operator rot enthaltende Glied in (13) kann als eine Spinkorrektur aufgefasst werden. Bis auf dieses Glied folgt aus (10), (11) und (13) der Form nach gerade die früher abgeleitete, auf die nicht-relativ. Schwed. Gleichung basierte Streifenformel.

Bei der Berechnung von (11) und (13) kommen wesentlich nur die 3- und 4-Komponenten der Wellenfunktion ψ_n, ψ_n^* + Waller, 51, 213, 1928; 58, 95, 1929.

und ψ_s in Betracht, die als Lösungen nullter Näherung einiger von Darwin angegebenen approximativen Wellen-
 gl. ^{††} gewählt werden können

Gemäß (10) und (12) gibt Σ^- gerade denjenigen Teil von a_{nm} , der zur Beschreibung der Streuung von Röntgenstrahlen durch Atome am wichtigsten ist, am schärfsten ist dies für die kohärente Streustrahlung von R. W. James in Manchester und seinen Mitarbeitern bewiesen. Dies zeigt in zwingender Weise die Notwendigkeit, in der Streuformel (10) Zustände negativer Energie zu berücksichtigen.

Für lange Wellen ist in (10')

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} \epsilon x} = e^{-\frac{2\pi i}{h} \epsilon x} = 1$$

zu setzen. Dann folgt mit Anwendung der Diracschen Kontinuitätsgleichung

$$A_{ns} = A'_{ns} = \frac{2\pi i}{ehc} (E_n - E_s) D_{ns} \text{ mit} \quad (14)$$

$$D_{ns} = e \int \psi_n^* \psi_s dx,$$

(10) kann durch in der Kramers-Meisenberg'schen Form

$$a_{nm} = \sum_s \left[\frac{(F_0 D_{ns}) D_{sm}}{E_s - E_n - h\nu} + \frac{D_{ns} (F_0 D_{sm})}{E_s - E_n + h\nu} \right] e^{\frac{2\pi i}{h} (E_n - E_m + h\nu) x} \quad (14')$$

geschrieben werden. In (14) geben diejenigen Glieder, wo s einen Zustand negativer Energie bezeichnet, nur einen kleinen Beitrag. Die Formel (14') wurde in ^{††} Darwin, l.c., Formel 412.

wesentlichen von Hargreaves[†] gegeben, der allerdings auf Zustände negativer Energie keine Rücksicht nahm.

§ 2. Ich gehe jetzt zur Behandlung des Problems der Streuung durch freie Elektronen nach der Diracschen Strahlungstheorie in der Diracschen relat. Mechanik über.^{††} Dann ist in (1), (2) und (3) $V=0$ zu setzen. Die Schrödingersche Gl. für das System Atom + Feld kann zunächst in der Form

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi(x, N')}{\partial t} = H \Psi(x, N') \quad (15)$$

geschrieben werden, wobei H durch (3) und (2) gegeben ist.

Die Diracschen Gleichungen für das freie Elektron, die nach (1) mit $V=A=0$ folgen, haben bekanntlich für jeden bestimmten Wert des Impulses p_0 vier linear unabhängige Lösungen

$$\Psi^k(p_0, x) = u^k(p_0) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E^k t - p_0 x)}, \quad k=1, 2, 3, 4, \quad (16)$$

von denen zwei, etwa $\Psi^{(1)}$ und $\Psi^{(2)}$, dem positiven Energiewert $E^{(1)} = E^{(2)} = c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$, die anderen dagegen dem negativen Energiewert $E^{(3)} = E^{(4)} = -c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$ entsprechen.

Die $\Psi^k(p_0, x)$ ebenso wie die $u^k(p_0)$ haben je vier Komponenten, die durch einen unteren Index bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß die $u^k(p_0)$ gemäß

$$\sum_{l=1}^4 u_l^{*k}(p_0) u_l^{k'}(p_0) = \hbar^{-3} \delta(k-k') \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^4 u_l^{*k}(p_0) u_l^k(p_0) = \hbar^{-3} \delta(l-l') \quad (17)$$

[†] Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 329, 1924, Nr. 3.

^{††} Auf das Interesse dieser Erweiterung der Rechnungen des § 1 hat mir Prof. W. Pauli freundlichst aufmerksam gemacht.

wesentlichen von Hargreaves[†] gegeben, der allerdings auf Zustände negativer Energie keine Rücksicht nahm.

§ 2. Ich gehe jetzt zur Behandlung des Problems der Streuung durch freie Elektronen nach der Diracschen Strahlungstheorie und der Diracschen relat. Mechanik über.^{††} Dann ist in (1), (2) und (3) $V=0$ zu setzen. Die Schrödingersche Gln. für das System Atom + Feld kann zunächst in der Form

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi(x, N')}{\partial t} = H \Psi(x, N') \quad (15)$$

geschrieben werden, wobei H durch (3) und (2) gegeben ist.

Die Diracschen Gleichungen für das freie Elektron, die nach (1) mit $V=A=0$ folgen, haben bekanntlich für jeden bestimmten Wert des Impulses p_0 vier linear unabhängige Lösungen

$$\Psi^k(p_0, x) = u^k(p_0) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E^k t - p_0 x)}, \quad k=1, 2, 3, 4, \quad (16)$$

von denen zwei, etwa $\Psi^{(1)}$ und $\Psi^{(2)}$, dem positiven Energiewert $E^{(1)} = E^{(2)} = c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$, die anderen dagegen dem negativen Energiewert $E^{(3)} = E^{(4)} = -c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$ entsprechen.

Die $\Psi^k(p_0, x)$ ebenso wie die $u^k(p_0)$ haben je vier Komponenten, die durch einen unteren Index bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß die $u^k(p_0)$ gemäß

$$\sum_{l=1}^4 u_l^{*k}(p_0) u_l^{k'}(p_0) = \hbar^{-3} \delta(k-k') \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^4 u_l^{*k}(p_0) u_l^k(p_0) = \hbar^{-3} \delta(k-l) \quad (17)$$

[†] Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 329, 1924, Nr. 3.

^{††} Auf das Interesse dieser Erweiterung der Rechnungen des § 1 hat mir Prof. W. Pauli freundlichst aufmerksam gemacht.

normiert sind, wobei die späteren Gleichungen die Umkehrung der ersteren sind. Dann folgt, wenn über den ganzen Raum integriert wird,

$$\int \Psi^{*k}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \Psi^{k'}(\mathbf{p}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \sum_{\ell} \Psi_{\ell}^{*k}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \Psi_{\ell}^k(\mathbf{p}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta(k-k') \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \quad (17')$$

Wenn allgemein für einen bestimmten Zeitpunkt t

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int \sum_{\mathbf{k}} \alpha^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) u^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{p}, \quad (18)$$

$$\int |\Psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int \sum_{\mathbf{k}} |\alpha^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)|^2 d\mathbf{p} = 1,$$

so gibt $|\alpha^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)|^2 d\mathbf{p}$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, zur Zeit t das Elektron in dem \mathbf{k} und $d\mathbf{p}$ definierten Zustandsbereich anzutreffen.

Die $u^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ können folgendermaßen gewählt werden:

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} &= -\gamma p_3 & u_2^{(1)} &= -\gamma(p_1 + ip_2) & u_3^{(1)} &= \gamma\left(\frac{E}{c} + mc\right) & u_4^{(1)} &= 0 \\ u_1^{(2)} &= -\gamma(p_1 - ip_2) & u_2^{(2)} &= \gamma p_3 & u_3^{(2)} &= 0 & u_4^{(2)} &= \gamma\left(\frac{E}{c} + mc\right) \\ u_1^{(3)} &= \gamma\left(\frac{E}{c} + mc\right) & u_2^{(3)} &= 0 & u_3^{(3)} &= \gamma p_3 & u_4^{(3)} &= \gamma(p_1 + ip_2) \\ u_1^{(4)} &= 0 & u_2^{(4)} &= \gamma\left(\frac{E}{c} + mc\right) & u_3^{(4)} &= \gamma(p_1 - ip_2) & u_4^{(4)} &= -\gamma p_3 \end{aligned} \right\} (19)$$

mit
$$E = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}, \quad \gamma = \frac{ch^{-3/2}}{\sqrt{2E(E+mc^2)}} \quad (19')$$

Wir führen nun in (15) \mathbf{p} statt \mathbf{x} als Variable ein, indem wir

$$\Psi(\mathbf{x}, N) = \int \sum_{\mathbf{k}} \Phi^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, N) u^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) e^{\frac{2\pi i}{h} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{p} \quad (19'')$$

Dieser nicht veröffentlichten Untersuchung hat Prof. W. Heisenberg schon gefunden, daß in dem Grenzfall, wo $h\nu/mc^2$ gegen eins vernachlässigt wird, die klassische Streifenformel wegen der Zwischenzustände negativer Energie erhalten wird.

setzen. Dann werden beiden Seiten der Gleichung von links mit $u^l(p_0') e^{-\frac{2\pi i}{h} p_0' x}$ multipliziert und ferner in bezug auf x integriert. Nach dem Fouriersatz folgt, wenn

$$A_{p\kappa}^{p'l} = u^{*l}(p_0') p_{i0} u^{\kappa}(p_0) \cdot \left(\frac{e^{i h \nu_r}}{2\pi c \sigma_r}\right)^{1/2} = \mu_r \quad (20)$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} & \left[\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + E^l(p_0) + \sum_{\nu} N_{\nu}' h \nu_{\nu} \right] \Phi^l(p_0 N_{\nu}') \\ &= h^3 \sum_{\nu} \sum_{\kappa} \mu_{\nu} \left[N_{\nu}'^{1/2} \times A_{\kappa, p_0 + \kappa_{\nu}}^{l, p_0} \Phi^{\kappa}(p_0 + \kappa_{\nu}, N_{\nu}' - 1) \right. \\ & \quad \left. + (N_{\nu}' + 1)^{1/2} \times A_{\kappa, p_0 - \kappa_{\nu}}^{l, p_0} \Phi^{\kappa}(p_0 - \kappa_{\nu}, N_{\nu}' + 1) \right], \quad (21) \end{aligned}$$

was der Gleichung (4) bzw. (5) entspricht. Die von Null verschiedenen $(m|v|n)$ sind also

$$(21) \begin{cases} (l p_0, N_{\nu}' + 1 | v | \kappa, p_0 + \kappa_{\nu}, N_{\nu}') = \mu_{\nu} (N_{\nu}' + 1)^{1/2} \times A_{\kappa, p_0 + \kappa_{\nu}}^{l p_0} \\ (l p_0, N_{\nu}' - 1 | v | \kappa, p_0 + \kappa_{\nu}, N_{\nu}') = \mu_{\nu} N_{\nu}'^{1/2} \times A_{\kappa, p_0 - \kappa_{\nu}}^{l p_0} \end{cases}$$

Die $a(m)$ können hier $a^{\kappa}(p_0 N')$ geschrieben werden.

Wir nehmen nun an, zur Zeit $t=0$ sei die Wellenfunktion des Elektrons durch (18) definiert, wobei $\psi_e(x)$ nur in einer gewissen Umgebung um $x=0$ von Null wesentlich verschieden sind, so daß sich das Elektron dann in der Nähe von $x=0$ befindet. Der Anfangszustand des Feldes soll wie früher dadurch gegeben sein, daß N_{ν}' s-Photonen, und keine anderen vorhanden sind. Wir haben demnach für

$t = 0 \quad \alpha^k(p_0 N) = \alpha^k(p_0)$ für beliebige p_0 , wenn N'
den angegebenen Feldzustand bezeichnet; sonst ist
 $\alpha^k(p_0 N') = 0$.

Wenn man t einen Zeitpunkt bedeutet, bis zu dem die $\alpha^k(u)$
sich nur wenig verändert haben, finden wir durch Integration
der Gleichungen für die $\alpha^k(u)$ bis zur zweiten Näherung in
der von Dirac angegebenen Weise und mit Rücksicht auf (21')

$$\alpha^k(p'; 1, N_s - 1) = \frac{1}{k} - \mu_r \mu_s N_s'^{1/2} \sum_k B^{k'k} \alpha^k(p' + \kappa_r - \kappa_s) (e^{\frac{2\pi i}{k} \gamma_0} - 1) / \gamma \quad (22)$$

mit

$$B^{k'k} = \hbar^0 \sum_l \left\{ \frac{[K A_{l, p' + \kappa_r}^{k' p'}] [S A_{k, p' + \kappa_r - \kappa_s}^{l, p' + \kappa_r}]}{E^{k'}(p' + \kappa_r - \kappa_s) - E^l(p' + \kappa_r) + \hbar \nu_s} + \frac{[S A_{l, p' - \kappa_s}^{k' p'}] [K A_{k, p' + \kappa_r - \kappa_s}^{l, p' - \kappa_s}]}{E^{k'}(p' + \kappa_r - \kappa_s) - E^l(p' - \kappa_s) - \hbar \nu_r} \right\} \quad (22')$$

und

$$\gamma = E^{k'}(p') + \hbar \nu_r - E^k(p' + \kappa_r - \kappa_s) - \hbar \nu_s. \quad (22'')$$

Dabei sind auf der rechten Seite von (22) gewisse Glieder
fortgelassen. Die Rechtfertigung dafür ist, daß in diesen
Gliedern keine verschwindenden Nenner auftreten können, wie
man leicht mit Anwendung der Beziehung $|E^l(p_0)|$
 $= c \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$ kontrolliert (l, p_0 beliebig), es wird
veransetzt, daß der Anfangszustand ein Zustand positiver
Energie ist, so daß, da $E^{(0)} = E^{(2)}$, γ auch von k nicht ab-
hängt.

Nun gibt $|a^{k'}(p', l_r, N_s - 1)|^2 dp'$ die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Photons zum vom Zustand s in den Zustand r während der Zeit t bei gleichzeitigem Übergang des Elektrons in den Zustandsbereich $(k' dp')$. Ferner gibt

$$\sigma_r dp' d\omega_r \int |a^{k'}(p', l_r, N_s - 1)|^2 dV_r \quad (23)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, zur Zeit t das Streuelektron in $(k' dp')$ und irgendein „gestreutes“ Photon der Polarisation k im Raumwinkel $d\omega_r$ zu finden. Der im Integranden von (23) auftretende Faktor $4\gamma^2 \sin^2 \frac{2\pi}{h} \gamma t$ hat unter gewöhnlichen Voraussetzungen ein scharfes Maximum für $\gamma = 0$. Wir führen in (23) γ als Integrationsvariable ein. Da nach (22")

$$\frac{d\gamma}{dV_r} = h \Delta_r^k(p_0) \quad \text{mit} \quad \Delta_r^k(p_0) = 1 - \frac{c}{E^k(p_0)} p_0 n_r, \quad (23')$$

$$p_0 = p_0' + \hbar k_r - \hbar k_s,$$

folgt als Wert von (23)

$$t \frac{4\pi^2 \sigma_r M^2 \mu_s^2 N_s'}{h^2 \Delta_r^k(p_0)} \left| \sum_k B^{kk} a^k(p_0) \right|^2 dp' d\omega_r, \quad (23'')$$

die Bedingung $\gamma = 0$ gibt

$$E^{k'}(p_0') + \hbar \nu_r = E^k(p_0) + \hbar \nu_s. \quad (24)$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Streuung eines Photons der Polarisation r in den Raumwinkel $d\omega_r$ finden wir

durch Integration von (23') über den ganzen p_0' -Raum und Summation in bezug auf k' . Im Integral führen wir $p_0 = p_0' + \kappa_r - \kappa_s$ als Integrationsvariable ein. Für die Funktionaldeterminante finden wir mit Rücksicht auf (24)

$$\frac{dp_0'}{dp_0} = \frac{\Delta_r^k(p_0)}{\Delta_r^{k'}(p_0')} = \frac{V_r}{V_s} \frac{E^{k'}(p_0') \Delta_r^k(p_0)}{E^k(p_0) \Delta_s^{k'}(p_0')} \quad (25)$$

wobei die letzte Umformung aus der letzten Gleichung (25) und (24) folgt. Ferner folgt

$$(26) \quad B^{k'k} = h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{[u^{*k'}(p_0 + \kappa_s - \kappa_r) \rho \cdot \sigma u^l(p_0 + \kappa_s)] [u^{*l}(p_0 + \kappa_s) \rho \cdot \sigma u^k(p_0)]}{E^k(p_0) - E^l(p_0 + \kappa_s) + h\nu_s} \right. \\ \left. + \frac{[u^{*k}(p_0 + \kappa_s - \kappa_r) \rho \cdot \sigma u^l(p_0 - \kappa_r)] [u^{*l}(p_0 - \kappa_r) \rho \cdot \sigma u^k(p_0)]}{E^k(p_0) - E^l(p_0 - \kappa_r) - h\nu_r} \right\}$$

Es wird nun die Rechnung auf den Fall spezialisiert, wo die $a^k(p_0)$ nur in der Nähe von $p_0 = 0$ von Null wesentlich verschieden sind. Dies bedeutet, daß wir die Streuung durch ein anfangs ruhendes Elektron betrachten. Ferner wird vorausgesetzt, daß auch der Endzustand ($k' p_0'$) des Elektrons ein Zustand positiver Energie ist. Für die Zwischenzustände ($l, p_0 + \kappa_s$) und ($l, p_0 - \kappa_r$) kommen auch Zustände negativer Energie in Betracht. Mit Einführung der Intensität I der „einfallenden“ Strahlung wie in § 1 folgt demnach als

Intensität der in der Richtung κ_r gestreuten Strahlung mit der Polarisation σ und für einen Punkt im großen Abstand R von $\kappa=0$,

$$I_r = \frac{I_0}{R^2} \frac{e^4 v_r E(\rho')}{v_s^3 m c^2} \sum_{k'=1}^2 \int \left| \sum_{k=1}^2 B^{k'k} \alpha^k(\rho) \right|^2 d\rho \quad (27)$$

wobei $B^{k'k}$ durch (26) mit $\rho=0$ gegeben ist und ferner nach (18) und (23')

$$\int \sum_{k=1}^2 |\alpha^k(\rho)|^2 d\rho = 1, \quad \rho' = \kappa_s - \kappa_r$$

ist. Zur Ermittlung der Totalintensität der Streustrahlung hat man I_r für zwei aufeinander senkrechte Richtungen σ zu berechnen und die Resultate zu addieren.

Wir werden zunächst einen einfacheren Ausdruck für die Größe $B^{k'k}$ suchen. Wird

$$a^l = \frac{u^{*l}(\rho + \kappa_s) \rho_1 \sigma S u^k(\rho)}{E^k(\rho) - E^l(\rho + \kappa_s) + h\nu_s}, \quad b^l = \frac{u^{*l}(\rho - \kappa_r) \rho_1 \sigma u^k(\rho)}{E^k(\rho) - E^l(\rho - \kappa_r) - h\nu_r}$$

gesetzt, folgt nach (17)

$$\sum_{l=1}^4 a^l [E^k(\rho) - E^l(\rho + \kappa_s) + h\nu_s] u^l(\rho + \kappa_s) = h^{-3} \rho_1 \sigma S u^k(\rho).$$

und daraus, weil $u^l(\rho + \kappa_s)$ eine Lösung der Diracschen gl für freie Elektronen ist,

$$\begin{aligned} [E^k(\rho) + h\nu_s + c\rho_1 \sigma(\rho + \kappa_s) + \rho_3 m c^2] \sum_l a^l u^l(\rho + \kappa_s) \\ = c h^{-3} \rho_1 \sigma S u^k(\rho). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit
 $-E^k(p_0) - \hbar v_s + c \beta_1 \sigma_1 (p_0 + \kappa_s) + \beta_3 \kappa c$

und finden

$$\sum_{\mathcal{L}} a^{\mathcal{L}} u^{\mathcal{L}}(p_0 + \kappa_s) = \hbar^{-3} \frac{\kappa_s \beta_1 \sigma_1 - i \sigma_2 \kappa_s \beta_3 - 2 p_0 \beta_3}{2 E^k(p_0) \kappa_s \delta_s^k(p_0)} u^k(p_0), \quad (28)$$

wobei die Diracsche Formel $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i \sigma \cdot (A \times B)$,
 wo A und B beliebige Vektoren sind, benutzt wurde,
 ferner die Tatsache, dass die $u^k(p_0)$ Lösungen der Dirac-
 schen Gleichungen sind. Ebenso folgt

$$\sum_{\mathcal{L}=1}^4 b^{\mathcal{L}} u^{\mathcal{L}}(p_0 - \kappa_r) = \hbar^{-3} \frac{\kappa_r \beta_1 \sigma_1 - i \sigma_2 (\kappa_r \times r) + 2 p_0 r}{2 E^k(p_0) \kappa_r \delta_r^k(p_0)} u^k(p_0), \quad \dots (28')$$

Dadurch sind die die in (26) auftretenden Summationen in
 bezug auf \mathcal{L} ausgeführt. Es folgt nun leicht unter Be-
 nützung von bekannten Vektorformeln im Falle $p_0 = 0$

$$B^{k'k} = \frac{\hbar^{-3}}{2mc^2} u^{*k'}(\kappa_s - \kappa_r) \omega u^k(0),$$

wo ω eine vierdimensionale Matrix bedeutet:

$$\omega = 2rs + i \beta_1 (\sigma \times r)(\kappa_r - \kappa_s) + [\beta_1 \sigma(\kappa_r + \kappa_s)] \sigma r - \beta_1 \sigma \times (\sigma \kappa_r) - \beta_1 \sigma \sigma (\sigma \kappa_s) \quad (29)$$

Wir legen nun die x_1 -Achse in die Richtung κ_s und die
 x_2 -Achse senkrecht zur Ebene (κ_r, κ_s) . κ_r liegt dann
 in der x_1, x_2 -Ebene und soll mit der x_1 -Achse, d.h. mit κ_s ,
 den Winkel φ bilden. s liegt in der x_2, x_3 -Ebene und soll
 mit der x_3 -Achse den Winkel ϑ bilden. Dann wird die

Matrix u für $x \parallel 0x_3$ und $v \perp 0x_3$ berechnet. Gemäß (29) wird

$$\sum_k B^{k'k} \alpha^k(p_0) = \frac{\hbar^{-3}}{2mc} u^{*k'}(x_s - x_r) \omega \sum_{k=1}^2 \alpha^k(p_0) u^k(0).$$

Nach (19) können als Komponenten von $u = \sum_k \alpha^k(p_0) u^k(0)$ gewählt werden:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

$$u_3 = \alpha^{(1)} \gamma_0 2mc, \quad u_4 = \alpha^{(2)} \gamma_0 2mc \quad \text{mit } \gamma_0 = \frac{\hbar^{-3/2}}{2mc}.$$

Für die Endzustände des Elektrons folgt nach (19) wenn

$k'=1$:

$$u_1^{(1)} = 0, \quad u_2^{(1)} = \gamma'(x_r e^{i\varphi} - x_s), \quad u_3^{(1)} = \gamma'(mc + \frac{E'}{c}), \quad u_4^{(1)} = 0,$$

und wenn $k'=2$:

$$u_1^{(2)} = 0, \quad u_2^{(2)} = \gamma'(x_r e^{-i\varphi} - x_s), \quad u_3^{(2)} = 0, \quad u_4^{(2)} = \gamma'(mc + \frac{E'}{c})$$

$$\text{mit } \gamma' = \frac{c \hbar^{-3/2}}{\sqrt{2E'(E'+mc^2)}}, \quad E' = c \sqrt{m^2 c^2 + (x_s - x_r)^2},$$

$$x_r = \frac{\hbar v_r}{c}, \quad x_s = \frac{\hbar v_s}{c}.$$

Mit Anwendung der aus der letzten Gleichung (23') und aus (24) folgenden Beziehung $mc(x_s - x_r) = x_s x_r (1 - \cos \varphi)$ findet man nun nach kurzer Rechnung für $k'=1$, wenn

$$v \perp 0x_2: \sum_k B^{1k} \alpha^k(p_0) = \frac{\sigma(\varphi)}{2\sqrt{E' m c^2 x_r x_s}} [\alpha^{(1)}(x_s + x_r) e^{i\varphi} \cos \varphi + i \alpha^{(2)}(x_s - x_r) \cos \varphi],$$

$$v \parallel 0x_2: \sum_k B^{1k} \alpha^k(p_0) = - \frac{\sigma(\varphi)}{2\sqrt{E' m c^2 x_r x_s}} [- \alpha^{(1)}(x_r e^{i\varphi} + x_s e^{-i\varphi}) \sin \varphi + i \alpha^{(2)}(x_s - x_r) \cos \varphi],$$

wobei $\sigma(\varphi)$ die Größe $(\kappa_1 e^{i\varphi} - \kappa_5)(e^{i\varphi} - 1)$, dividiert durch deren absoluten Betrag, bedeutet. Die Werte von (30) für $k'=2$ folgen dann, wenn bzw. in den angegebenen Formeln für $k'=1$ $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ vertauscht werden und φ durch $-\varphi$ ersetzt wird. Demnach folgt

$$\sum_{\substack{Y \parallel Oz \\ Y \perp Oz}} \sum_{k'=1}^2 \left| \sum_{k=1}^2 B^{k'k} \alpha^k(\varphi) \right|^2$$

$$= \frac{|\alpha^{(1)}(\varphi)|^2 + |\alpha^{(2)}(\varphi)|^2}{4E' mc^2 v_r v_s} [v_s^2 + v_r^2 - 2v_r v_s \cos^2(\theta_{Nr})]$$

und dann nach (27) und (28) für die Totalintensität der Streustrahlung in der Richtung N_r

$$I = \frac{I_0}{R^2} \frac{e^4}{2m^2 c^4} \frac{v_r^3}{v_s^3} \left[\frac{v_s}{v_r} + \frac{v_r}{v_s} - 2 \cos^2(\theta_{Nr}) \right],$$

d. h. die Formel von Klein und Nishina. Man verifiziert leicht, daß I von der oben getroffenen speziellen Wahl der beiden unabhängigen Wellenfrequenzen des Endzustandes sowie der Beiden aufeinander senkrecht Richtungen θ unabhängig ist.

Die oben ausgeführte Rechnung zeigt, daß es notwendig ist, sowohl die Zwischenzustände positiver Energie wie diejenigen negativer Energie zu berücksichtigen. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der relative Beitrag der entsprechenden beiden Arten von doppelten Streuprozessen zur Intensität der Streustrahlung wesentlich von der Frequenz

der v_s der einfallenden Strahlung abhängt. Ferner zeigt es sich, daß in dem Falle, wo $h\nu_s/mc^2$ gegen Eins vernachlässigt werden kann, nur die Zwischenzustände negativer T -Energie in Betracht kommen. Es ergibt sich dann die klassische Streuformel entsprechend den Ergebnissen des § 1.

Anmerkung bei der Korrektur. Aus einer eben veröffentlichten Untersuchung* von R. Oppenheimer folgt, daß die Gleichungen (4) auch aus der Heisenberg-Paulischen relativistischen Quantentheorie folgen, in dem Spezialfall, wo nur ein Elektron vorhanden ist, und wenn die unendlich große elektrostatische Eigenenergie des Elektrons gestrichen wird.

* Phys. Rev. 35. 461, 1930

Jan. 7th, 1931.

Note on the Theory of the Interaction of Field
and Matter

By J. R. Oppenheimer
Berkeley, California

(Phys. Rev. 35, 461, 1930)

(Received November 12, 1929)

The relativity theory of the interaction of electrons and protons with each other and with the electromagnetic field has been developed in two papers.¹ The theory is developed in close analogy to the corresponding classical theory: the field is on the one hand determined by the configuration of the charge; and the motion of the charges is affected by the field. The interaction between two charges is not then, on this theory, expressed directly as a function of the configuration of the charges, but as the effect on each of the charges of the field induced by the other. On the classical theory this procedure involves grave difficulties, because each charge reacts also with its own field. The proper field energy of this interaction is, for point charges infinite; and it depends upon the motion of the charge. On the classical theory one tried to avoid this difficulty by ascribing to the elementary charges a finite size; but it was not possible to carry through the theory in a way that was not completely arbitrary; nor was it possible to make the work relativistically invariant. One of the purpose of the present paper is to see in how far these difficulties persist in the quantum theory, and in what measure they render impossible the application of the theory.

We may recapitulate briefly the main points of divergence between the present quantum theoretic treatment and the classical theory.

1. H. P. I, II. The second of these two papers is referred to in this work as LC. I am greatly indebted to Prof. H. and P. etc.

In the first place the state of matter is here represented, not by a trajectory, but by a wave function. Further, the Hamiltonian for the matter is that derived from Dirac's linear wave equation, and not from the quadratic wave equation which would follow from the classical relativistic Hamiltonian. Finally, both the material waves and the electromagnetic waves are quantized, the matter to make the particles satisfy the exclusion principle, the field to make the quanta satisfy the Einstein-Bose statistics. This procedure leads to a formal difficulty; for the fourth Maxwell equation[†] is inconsistent with the quantum conditions, according to which there are functions of the electromagnetic potentials which do not commute with $\text{div } \mathbf{E}$ but which must commute with the charge density. The two papers of H. and P. are distinguished chiefly by different methods of resolving this difficulty. In the former paper new terms were added to the fourth Maxwell equation to make the new equation consistent with the quantum conditions; in obtaining physical results these terms were to be made to vanish. In the second paper a much more satisfactory method has been used, which takes advantage of the fact that the left hand side of (1) is a constant of the motion for all systems involving matter and radiation; and it is shown that this constancy follows from the gauge invariance of the Hamiltonian

$$\dagger \quad \text{div } \mathbf{E} - 4\pi\rho = 0 \quad (1)$$

for all such systems. The solution^{of} the dynamical problem thus reduces to finding a wave function for the coupled system of field and matter, which make the Hamiltonian for the coupled system of field a diagonal matrix, and which in addition makes the left hand side of (1) vanish. The wave function has thus to satisfy not only the Hamiltonian wave eq., but also a series of wave equations which express the fact that (1) is satisfied at all points in space. It is from this set of wave equations that we shall start in this paper; we shall write them first in the form given in LC Eq. (68), in which the wave function is taken as a function of the Cartesian coordinates

$q_P = (q_P^{(1)}, q_P^{(2)}, q_P^{(3)})$; $P = 1, 2, \dots, N$
and spin variables

σ_P ; $P = 1, 2, \dots, N$

of the N particles in the system, the number of quanta

$M_{r\lambda}$

of frequency

ν_r

vector of propagation $K_r = (K_r^1, K_r^2, K_r^3)$; $K_r = \nu_r/c$

and polarization

λ

, and finally a third set of variables P_{r3} , which are essentially the constant components of the electric field parallel to the vectors of propagation K_r . We shall first show that it is possible to eliminate the P_{r3} 's from the wave equations in such a way that (1) is automatically

satisfied. The reason why this is possible is that the condition (1) determines $\text{div } \mathbf{E}$ precisely — instead of determining only the relative probabilities of different values of $\text{div } \mathbf{E}$, — when the configuration of the charges is known, so that the values of the P 's so determined can be put at once into the Hamiltonian. When this is done the variables Q_{rs} canonically conjugate to the P 's must disappear from the Hamiltonian, since otherwise the Hamiltonian would not be consistent with (1); we shall now show that this is in fact the case, and then proceed to an investigation of the resulting Hamiltonian.

It should be observed that the wave functions must satisfy, in addition to the wave equations in the configuration space, the condition that they be antisymmetric in all the electrons of the system, and antisymmetric in all the protons of the system.

Only wave functions satisfying these conditions are to be considered in this paper; and it will therefore be unnecessary to indicate the wave antisymmetry of the wave functions explicitly. The fact that electrons and protons satisfy the exclusion principle is largely irrelevant to the difficulties discussed in this work; for these difficulties persist even in the one-electron problem. On the other hand it is to be hoped that the resolution of the errors in the present theory will make the heuristic postulate

of the exclusion principle unnecessary.

We shall look for a solution of the wave equation in which both wave function and characteristic values are expanded in powers of v/c . It has already been shown by Breit² that, when the interaction of the particles may be treated as small, and radiation processes may be neglected, that these interaction terms give a contribution to the energy of the system, which, in second order in v/c , agrees with that computed from Breit's eq.³ We shall not retain the assumption that the interaction terms are small, and shall show, somewhat more generally, that when the proper energy terms are systematically neglected, the characteristic energy levels and the wave fun are determined by Breit's eq. This equation is, of course, not relativistically invariant; and it takes no account of radiation processes. In order to remedy these defects we must retain the proper energy terms; and we shall show that it is then possible to make a formally satisfactory theory to give the shape and position of all spectral lines, and the energy terms; of the normal state. The theory is, however, wrong, since it gives a displacement of the spectral lines from the frequency predicted on the basis of the nonrelativistic theory which is in general infinite. This displacement arises from the infinite interaction of the electron with itself; this

2. G. Breit, Phys. Rev. **34**, 553 (1929)

3. Breit, *ibid.*, eq. (6),

infinite interaction
difficultly

interaction depends upon the state of the material system; and the difference in the energy for two different states is not in general finite. Thus the present theory gives no more than the non-relativistic theory of Jordan, Klein and Wigner⁴. It seems improbable that Breit's equation gives the energy levels of an atom correct to second order terms in v/c ; but we shall see that there is ground for supposing that it does give the separation of the fine structure levels correctly in this order. On the other hand the displacement in the frequency of the spectral lines which arises from the proper energy should be of the second order in v/c , and is thus larger than the natural line breadth, which is of the third order in v/c ; and is thus larger than on the present theory it is not possible to compute this displacement. We shall return later to a consideration of these difficulties.

1. The condition that the left hand side of (4), regarded as an operator on the wave function Ψ of the variables

$$q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}, P_{r3}$$

shall make the wave function vanish at every point in space, gives a series of wave equations

$$I \quad Cr \Psi = [P_{r3} + \sum_p e_p v^{r0}(q_p)] \Psi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}, P_{r3}) = 0$$

which must hold for all values of the Kr consistent with

4. Jordan & Klein 45, 752. Jordan and Wigner, 47, 631.

the boundary conditions. Here the V^{r0} are functions defined in LC (54):

$$V^{r0}(q_p) = \frac{2}{\pi} (ck_r^3 L^3)^{-1/2} \sin \pi k_r^{(1)} q_p^{(1)} \sin \pi k_r^{(2)} q_p^{(2)} \times \sin \pi k_r^{(3)} q_p^{(3)} \quad (2)$$

Here L is the length of the fundamental cube, or Hohlraum, and is taken finite in LC to avoid the introduction of a continuous manifold of normal coordinates; in all our results we shall make L become infinite. Furthermore the Hamiltonian for the coupled system, regarded as an operator on the same wave function, gives the wave equation

$$\begin{aligned} & \left\{ -E + \sum_Y \left[\sum_{\lambda=1,2} M_{Y\lambda} h\nu_Y + \pi \nu_Y P_{Y3}^2 \right] \right. \\ & + \sum_{P=1}^N \left[\frac{hc}{2\pi i} (\alpha^P \text{grad}_P) + m_P \alpha_0^P c^2 \right] \left. \right\} \Psi \\ & + \left\{ \sum_{P=1}^N [e_P A_0^0(q_P) + e_P (\mathbf{a}^P \cdot \mathbf{A}^0(q_P))] \right\} \Psi \\ & + \left\{ i \sum_Y \sum_{\lambda=1,2} \sum_{P=1}^N M_P^{Y\lambda} [(M_{Y\lambda} + 1)^{1/2} \Delta_{Y\lambda}^{-1} - M_{Y\lambda}^{1/2} \Delta_{Y\lambda}] \right\} \Psi \\ & + \left\{ \sum_Y \sum_{P=1}^N M_P^{Y3} Q_{Y3} \right\} \Psi = (+H - E) \Psi = 0. \quad \text{II} \end{aligned}$$

Here A_0^0 is the external scalar potential, and \mathbf{A}^0 the external vector potential; and $\Delta_{Y\lambda}$ is an operator which transforms $M_{Y\lambda}$ into $M_{Y\lambda}^{-1}$, and leaves all other variables unchanged; the α^P 's are operators which operate only on σ_P , and are

derived from the Dirac matrices $\alpha_{p\sigma}^l$ by the definition

$$\alpha_l^P F(\sigma_P) = \sum_{PP} \alpha_{\sigma_P}^l P_P F(P_P); \quad \alpha_0^P F(\sigma_P) = \sum_{PP} \alpha_{\sigma_P}^0 P_P F(P_P).$$

Further the Q_{r3} are canonically conjugate to the P_{r3} so that

$$[P_{r3} Q_{r'3}] = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{rr'} \quad (3)$$

Finally the functions $\mu_P^{r\lambda}$ are defined in LC (59):

$$\mu_P^{r3} = e_P c \left(\frac{v_r}{2}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^3 \alpha_l^P v_l^{r3}(q_P)$$

$$\mu_P^{r\lambda} = e_P c \left(\frac{\hbar}{2\pi v_r}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^3 \alpha_l^P v_l^{r\lambda}(q_P); \quad \lambda=1, 2 \quad (4)$$

$$v_l^{r\lambda}(q_P) = \left(\frac{8}{L^3}\right)^{1/2} F_{l\lambda}^r \cos \pi k_l q_P^{(l)} \sin \pi k_l' q_P^{(l')} \sin \pi k_l'' q_P^{(l'')};$$

$$l=1, 2, 3. \quad \lambda=1, 2, 3$$

The square matrix $F_{l\lambda}^r$ is given by the scheme

$$\begin{array}{c|ccc} l & \lambda=1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \epsilon_2^r / (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} & \epsilon_1 \epsilon_3 / (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} & \epsilon_1 \\ 2 & -\epsilon_1 / (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} & \epsilon_2 \epsilon_3 / (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} & \epsilon_2 \\ 3 & 0 & -(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} & \epsilon_3 \end{array} \quad (5)$$

where the ϵ_l^r 's are the direction cosines of the vector \mathbf{K}_r .

It should be observed that

$$\frac{\hbar c}{2\pi i} (\alpha^P \text{grad}_P) e_P v^{r0}(q_P) = \frac{\hbar}{2\pi i} \mu_P^{r3}. \quad (6)$$

This equation, together with (3), shows that

$$[H C_r] = 0 \quad (7)$$

for all v , so that all the C_r 's are constants of the motion.

The equations I and II are those given⁵ in LC(68).

From I we see that the wave $f_{\underline{r}}$ must be singular in the P 's. We may avoid the use of singular $f_{\underline{r}}$ s by making a contact transformation from the variables P to Q , and writing the wave $f_{\underline{r}}$ as:

$$\Psi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}, Q_{rs}).$$

For we may then solve (3) by taking

$$P_{rs} = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial Q_{rs}}.$$

If we may then solve (3) by now we set

$$\Psi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}, Q_{rs}) = e^{-2\pi i/\hbar \sum_r \sum_p e_p v^{r0}(q_p) Q_{rs}} \times \phi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}, Q_{rs}) \quad (8)$$

the equations I give us

$$\frac{\partial \phi}{\partial Q_{rs}} = 0 \quad (9)$$

for all r so that

$$\phi = \phi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}).$$

Further the Hamiltonian II becomes

$$\begin{aligned} & e^{-2\pi i/\hbar} \sum_r \sum_p e_p v^{r0}(q_p) Q_{rs} \left\{ -E + \sum_r \left[\sum_{\lambda=1,2} M_{r\lambda} \hbar v_r + \hbar \right. \right. \\ & + \pi v_r \sum_{P, P'} e_p e_{p'} v_0^{r0}(q_p) v_0^{r0}(q_{p'}) \left. \left. + i\hbar \sum_r \sum_p v_r e_p v^{r0}(q_p) \frac{\partial}{\partial Q_{rs}} \right. \right. \\ & - \frac{\hbar^2}{4\pi} \sum_r v_r \frac{\partial^2}{\partial Q_{rs}^2} + \sum_p \left[\frac{\hbar c}{2\pi i} (\alpha^P \text{grad}_p) + m_p c^2 \alpha_0^P \right] \\ & - c \sum_r \sum_p e_p (\alpha^P \text{grad}_p) v^{r0}(q_p) Q_{rs} + \sum_p e_p [A_0^0(q_p) + (\alpha^P A^0(q_p))] \\ & \left. + \sum_r \sum_p M_p^{rs} Q_{rs} + i \sum_r \sum_{\lambda=1,2} \sum_p \mu_p^{r\lambda} [(M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \Delta_{r\lambda}^{-1} - M_{r\lambda}^{1/2} \Delta_{r\lambda}] \right\} \phi(q_p, \sigma_p, M_{r\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

5. In LC(68) the A 's are dropped.

The term in 2 drop out because of (6); the terms in $\frac{\partial}{\partial Q}$ give nothing because of (9). The equations I and II thus reduce to the single system

$$\left\{ -E + H_0 + \sum_{r\lambda} M_{r\lambda} h\nu_r + i \sum_{r\lambda p} \mu^{r\lambda} [(M_{r\lambda} + 1)^{1/2} \Delta_{r\lambda}^{-1} - M_{r\lambda}^{1/2} \Delta_{r\lambda}] \right\} \times \phi = 0$$

$$H_0 = \sum_p \left\{ \frac{hc}{2\pi i} (\alpha^p \text{grad}_p) + m_p c^2 \alpha_0^p + \rho_p [A_0^p(q_p) + (\alpha^p \cdot A^p(q_p))] \right. \quad (11)$$

$$\left. + \pi \sum_{p'} \sum_r e_p e_{p'} \nu_r \nu_{r0}(q_p) \nu_{r0}(q_{p'}) \right\}.$$

It is this system which we must now investigate.

The terms

$$G(q_p, q_{p'}) = \sum_r \pi \nu_r \nu_{r0}(q_p) \nu_{r0}(q_{p'})$$

may readily be evaluated⁶, and give for $L \rightarrow \infty$

$$G(q_p, q_{p'}) \rightarrow -\frac{1}{2r_{pp'}}; \quad r_{pp'} = |q_p - q_{p'}|. \quad (12)$$

The terms for p and p' different give the electrostatic interaction of the two particles; the terms for $p = p'$ give the infinite electrostatic proper energy of the particles; on the present theory it is not possible, as it was on the nonrelativistic theory⁴, to eliminate these terms; the physical ground for his impossibility has already been indicated, and lies in the fact that the field acting on any particle is the sum of the fields induced by all particles; it is a consequence of the principle of superposition of the field. These electrostatic proper energy terms do not, however, interfere with the application of the theory, since they are constants, 6. H.P. I, (15); Breit(57). Breit has independently evaluated the ρ_p terms in the Hamiltonian; and I am much indebted to him for informing me of his result.

and may be dropped from (11) without altering the form of the wave function. We shall find other infinite proper energy terms in the course of the work; but these will turn out not to be constants, but to depend upon the configuration of the system; dropping them does alter the form of the wave function.

If we now neglect the coupling between matter and the light quantum field the wave equation reduces to

$$[-E + H_0 + \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} \hbar \nu_r] \phi = 0 \quad (13)$$

and for the case that no quanta are present we have

$$\left\{ -E + \sum_p \left[\frac{\hbar c}{2\pi i} (\alpha^p \text{grad } p) + m_p c^2 \alpha_0^p + e_p [A_0^p(q_p) + (\alpha^p \cdot A(q_p))] \right] - \sum_{PP'} \frac{e_p e_{p'}}{2r_{PP'}} \right\} \phi(\sigma_p, q_p) = 0 \quad (14)$$

We shall show that the terms which we have neglected in (12) are small of the order $(v/c)^2$; and by neglecting other terms of the same order, (13) can be considerably simplified. For consider first the equation

$$\left\{ -\frac{1}{2} + \sum_p \left[\frac{\hbar c}{2\pi i} (\alpha^p \cdot \text{grad } p) + m_p c^2 \alpha_0^p \right] \right\} \phi = 0, \quad (15)$$

For N -free uncoupled particles. If we choose all matrices α_p, β_p of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & c & d \\ \bar{b} & \bar{c} & 0 & 0 \\ \bar{a} & \bar{d} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

and all the $\|\alpha_{pp}^0\|$ of the form:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

and satisfying of course

$$[\alpha^{m,P}, \alpha^{n,P'}] = 0 \text{ for } P \neq P'; \quad [\alpha^{m,P}, \alpha^{n,P}]^+ = 2\delta_{mn} \quad (17)$$

then any $\phi(\sigma_p)$ in which n of the σ_p 's have either of the values 3 or 4 will be small compared with any of the ϕ 's for which all of the σ_p 's have the values 1 or 2 of the order $(\nu/c)^n$. Now the terms

$$-\sum_{PP'} \frac{e_P e_{P'}}{2r_{PP'}} \cdot e_P A_0^0(q_P)$$

in (14) do not involve the α^P 's while the terms

$$e_P (\alpha^P \cdot A(q_P))$$

are small of the order ν/c ; thus as ν/c is made to vanish, all the solutions of (14) vanish except those for which all the σ_p 's have the values 1 or 2; and (14) reduces to

$$\left[-E + \sum_P \left\{ m_P c^2 + e_P A_0^0(q_P) - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_P} \Delta_P - \sum_{P'} \frac{e_P e_{P'}}{2r_{PP'}} \right\} \right] \phi(\sigma_P q_P) = 0 \quad \dots (18)$$

for all σ_p 's = 1 or 2 and

$$\phi(\sigma_p q_p) = 0 \text{ for any } \sigma_p = 3 \text{ or } 4$$

which is the Schraedinger equation for the N -body problem?

It should thus be possible to take (18) as the starting point

7. It is possible to write the two component wave equation when the magnetic interactions are retained up to the order $(\nu/c)^2$, as has been shown by Breit, ref 2.

for our systematic solution of (11) in powers of v/c ,
 We shall not do this, however, as it would complicate
 the analysis and lead to no new results. We shall thus
 give up the assumption that the α 's are written in the
 form (16), and take for our zeroth approximation to (11),
 the solution of (14). *

2. We may write the equations (11) seriatim:

$$\sum_{r\lambda} M_{r\lambda} = M = 0; \quad (-E + H_0) \phi = -i \sum_{r\lambda p} \mu_p^{r\lambda} \phi(1r\lambda);$$

$$\phi = \phi(0r\lambda) \quad (11, 1)$$

$$M=1 \begin{cases} (-E + h\nu_r + H_0) \phi(1r\lambda) = +i \sum_p \mu_p^{r\lambda} \phi \\ -\frac{1}{2} \left[i \sum_{r'\lambda'} \sum_p \mu_p^{r'\lambda'} \phi(1r\lambda, 1r'\lambda') \right] - 2^{1/2} i \sum_p \mu_p^{r\lambda} \phi(2r\lambda) \end{cases} \quad (11, 2)$$

$$M=2 \begin{cases} (-E + h(\nu_r + \nu_{r'}) + H_0) \phi(1r\lambda, 1r'\lambda') = +i \sum_p [\mu_p^{r\lambda} \phi(1r\lambda) \\ + \mu_p^{r'\lambda'} \phi(1r'\lambda')] - i \sum_{r''\lambda''} \sum_p \mu_p^{r''\lambda''} \phi(1r\lambda, 1r'\lambda', 1r''\lambda'') \\ - 2^{1/2} i \sum_p [\mu_p^{r\lambda} \phi(2r\lambda, 1r'\lambda') + \mu_p^{r'\lambda'} \phi(1r\lambda, 2r'\lambda')] \end{cases} \quad (11, 3)$$

$$\begin{cases} (-E + 2h\nu_r + H_0) \phi(2r\lambda) = +2^{1/2} i \sum_p \mu_p^{r\lambda} \phi(1r\lambda) \\ -i \sum_{r'\lambda'} \sum_p \mu_p^{r'\lambda'} \phi(2r\lambda, 1r'\lambda') - 3^{1/2} i \sum_p \mu_p^{r\lambda} \phi(3r\lambda) \end{cases} \quad (11, 4)$$

etc.

Now for fixed ν , and fixed Kr ,
 $\mu_p^{r\lambda} = O(c^{-1/2})$

whereas

$$\nu_r = O(c).$$

* We shall not make explicit use of the fact that the α 's are in the form (16);
 we shall, however, retain the assumption that the α 's are small of the order
 v/c , to obtain $\mu_p^{r\lambda} = O(c^{-1/2})$.

Thus we should expect $\phi(1r\lambda)$ to be small of the order $c^{-3/2}$,
 $\phi(1r\lambda, 1r\lambda')$ to be of the order c^{-3} , and so on, and we should
try to find a solution of (11) of the form

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} \dots \quad (19)$$

with

$$\phi(Mr\lambda) = \phi^{(0)}(Mr\lambda) + \phi^{(1)}(Mr\lambda) \dots$$

with

$$E^{(n)} = O(c^{-n})$$

$$\phi^{(0)}(Mr\lambda) = O(c^{-n-3/2M}).$$

It should be observed that in general there will be certain
frequencies for which $\phi(1r\lambda)$, $\phi(1r\lambda, 1r\lambda')$ etc. will
not converge uniformly for $c \rightarrow \infty$; and that for these frequencies
the expansions (19) will be illegitimate. The frequencies
for which this convergence is non-uniform are those for
which

$$+E - \sum_{r\lambda} Mr\lambda h\nu_r$$

is a characteristic value of the homogeneous equations

$$(H_0 - \lambda)\phi = 0 \quad (20)$$

Such frequencies will not occur if (20) has no solutions
for $\lambda < E$, i.e. if the material system is in a normal
state; but in general the expression (19) must be modified;
we shall return to this modification later, and shall
see that it gives a satisfactory theory of the absorption and
emission of radiation; but for the present we shall assume
that the atom is in a normal state so that (19) is justified.

1A87A

On the present theory there is no normal state for the matter, because

states of infinite negative energy are possible; one may in fact show that, on the present theory, Dirac's jumps to such states from states of positive energy, jumps in which the energy and momentum lost by the matter are taken up by the field, are not only possible, but infinitely probable. But that the theory should predict this is a token of an error in the theory; and since the Dirac jumps do not seem to be directly responsible for the difficulties with which we are, in this work most concerned, we shall for the present neglect them.

We shall first give a complete solution for the case that we drop all proper energy terms, for the case, that is, that in all double sums of the form

$$\sum_{pp'} F(p, \sigma_p, p', \sigma_{p'})$$

we may set the terms with p equal to p' equal to zero. This solution is not unique beyond terms of the second order in v/c ; for in the higher orders it is no longer possible uniquely to separate proper energy and interaction energy. But we may readily obtain a possible solution:

$$\phi(M_{r\lambda}) = \prod_{r\lambda} \left[\frac{-i \sum_p M_p^{r\lambda}}{h\nu_r} \right]^{M_{r\lambda}} \phi \quad (21)$$

$$\text{where } \left[-E + H_0 - \sum_{r\lambda} \sum_{pp'} \frac{M_p^{r\lambda} \mu_{p'}^{r\lambda}}{h\nu_r} \right] \phi = 0. \quad (22)$$

For if we put these values, for example, in (1,2) we get

$$\frac{+i \sum_P \mu_P^{r\lambda}}{h\nu_r} \left[-E + H_0 - \sum_{r'\lambda'} \sum_{PP'} \frac{M_P^{r'\lambda'} M_{P'}^{r\lambda'}}{h\nu_{r'\lambda'}} + h\nu_r \right] \phi$$

$$+ \frac{i}{h\nu_r} \left[H_0, \sum_P \mu_P^{r\lambda} \right] \phi = i \sum_P \mu_P^{r\lambda} \phi \quad (23)$$

Now in

$$(24) \sum_P [H, \mu_P^{r\lambda}] = \sum_{PP'} \left\{ \frac{hc}{2\pi i} (\alpha^P \cdot \text{grad}_P) + m_P c^2 \alpha_0^P + e_P (\alpha^P \cdot A(q_P)) \right\} \mu_P^{r\lambda}$$

and in

$$\sum_{PP'} \mu_P^{r'\lambda'} \mu_{P'}^{r\lambda}$$

we may put

$$\sum_{PP'} \rightarrow \sum_{PP'}'$$

so that

$$\sum_P [H, \mu_P^{r\lambda}] = 0 \quad (25)$$

and (1,2) a satis field. In a similar way it may be shown that all the equations (1) are satisfied.

We may evaluate the terms

$$\sum_{r\lambda} \frac{M_P^{r\lambda} \mu_{P'}^{r\lambda}}{h\nu_r} = e_P e_{P'} \frac{c^2}{2\pi} \sum_{ll'} \alpha_l^P \alpha_{l'}^{P'} \sum_{r\lambda} \frac{v_l^{r\lambda}(q_P) v_{l'}^{r\lambda}(q_{P'})}{v_r^2}$$

$\sum \frac{v^{\nu_0}(P) v^{\nu_0}(P')}{v^2}$

in (22) by observing that for $l \neq l'$

$$\sum_{r\lambda} \frac{v_l^{r\lambda}(q_P) v_{l'}^{r\lambda}(q_{P'})}{v_r^2} = \frac{\partial}{\partial q_P^{l'}} \frac{\partial}{\partial q_{P'}^l} F(q_P, q_{P'}) ; \Delta_P F = \frac{\pi}{c^2 \gamma_{PP'}}$$

and

$$\sum_{r\lambda} \frac{v_l^{r\lambda}(q_P) v_l^{r\lambda}(q_{P'})}{v_r^2} = \frac{-\pi}{2c^2 \gamma_{PP'}} - \frac{\partial^2}{\partial q_P^{l^2}} F(q_P, q_{P'})$$

so that

$$\sum_{r\lambda} \frac{M_P^{r\lambda} \mu_{P'}^{r\lambda}}{h\nu_r} = \frac{-e_P e_{P'}}{4} \left\{ \frac{(\alpha^P \cdot \alpha^{P'})}{\gamma_{PP'}} + \frac{(\alpha^P \cdot r_{PP'}) (\alpha^{P'} \cdot r_{PP'})}{\gamma_{PP'}^2} \right\} \dots (27)$$

This gives for ϕ_0

$$\left\{ -E + H_0 + \frac{1}{4} \sum_{PP'} \frac{e_P e_{P'}}{r_{PP'}} \left[(\alpha^P \cdot \alpha^{P'}) r_{PP'}^2 + (\alpha^P \cdot r_{PP'}) (\alpha^{P'} \cdot r_{PP'}) \right] \right\} \times \phi = 0 \quad (28)$$

This is the eq. used by Breit³. It is patently not relativistically invariant; this means that the proper energy terms are not invariant, and forces us to retain these terms, at least in part. Furthermore, we have not, in the deduction of (28), used the fact that the atoms is in its normal state; in spite of this there is no sign, in the solution, of processes involving the emission or absorption of radiation; for these processes arise from the interaction of the particles with their own field. We have, therefore, to consider the solution of (11) when the proper energy is not neglected; the retention of these terms will preserve the invariance of the theory, and give us an account of radiation processes, but it leads to results in contradiction with experiment; it makes the validity of (28), even to the second order in v/c , doubtful.

3. We can readily find a solution of the form (19) when E^0 and ϕ^0 correspond to a normal state for the matter; but we cannot find this solution in closed form; nor it is there an eq. in configuration space, corresponding to (28), for ϕ . If we put (19) in (11, 2) etc. we get

$$\phi^{(0)}(1r\lambda) = i \sum_m \frac{b_{0m}^{r\lambda} \phi_m^{(0)}}{h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}} \left\{ \begin{aligned} b_{0m}^{r\lambda} &= \sum_p \int \dots \int dg_p^{(1)} \dots dg_p^{(3)} \\ & \left[\sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \bar{\phi}_m^{(0)} M_p^{r\lambda} \phi_0^{(0)} \right] \\ & (H_0 - E_m^{(0)}) \phi_m^{(0)} = 0 \end{aligned} \right. \quad (29)$$

and further

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \phi^{(1)}(1r\lambda, 1r\lambda') &= - \sum_{mn} \frac{b_{0m}^{r\lambda} b_{mn}^{r\lambda'} \phi_n^{(0)}}{(h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [h(\nu_r + \nu_{r'}) + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \\ & - \sum_{mn} \frac{b_{0m}^{r\lambda'} b_{mn}^{r\lambda} \phi_n^{(0)}}{(h\nu_{r'} + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [h(\nu_r + \nu_{r'}) + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \\ \phi^{(0)}(2r\lambda) &= -2^{1/2} \sum_{mn} \frac{b_{0m}^{r\lambda} b_{mn}^{r\lambda}}{(h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [2h\nu_r + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \text{ etc} \end{aligned} \right.$$

Further $E_0^{(1)}$ and $\phi^{(0)}$ vanish, and

$$(31) \left\{ \begin{aligned} E_0^{(2)} &= - \sum_{r\lambda} \sum_m \frac{|b_{0m}^{r\lambda}|^2}{h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}} \\ \phi_0^{(2)} &= \sum_{r\lambda} \sum_m \sum_{n \neq 0} \frac{b_{0m}^{r\lambda} b_{mn}^{r\lambda} \phi_n^{(0)}}{(h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \end{aligned} \right.$$

Moreover $\phi^{(1)}(r\lambda)$, $\phi^{(0)}$ and $E^{(0)}$ vanish, and

$$(32) \left\{ \begin{aligned} \phi^{(2)}(1r\lambda) &= i \sum_{r\lambda'} \sum_{mk} \sum_{n \neq 0} \frac{b_{0m}^{r\lambda'} b_{mn}^{r\lambda'} b_{nk}^{r\lambda} \phi_k^{(0)}}{(h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [h\nu_r + E_k^{(0)} - E_n^{(0)}] [E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \\ E_0^{(4)} &= - \sum_{r\lambda} \sum_{r\lambda'} \sum_{mk} \sum_{n \neq 0} \frac{b_{0m}^{r\lambda'} b_{mn}^{r\lambda'} b_{nk}^{r\lambda} b_{k0}^{r\lambda}}{(h\nu_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}) [h\nu_r + E_k^{(0)} - E_n^{(0)}] [E_n^{(0)} - E_0^{(0)}]} \end{aligned} \right.$$

etc.

The terms $-E_0^{(3)} \phi^{(0)}(1r\lambda)$

and $-i \sum_p \sum_{\lambda\lambda'} M_p^{r\lambda'} \phi^{(0)}(1r\lambda, 1r\lambda') - 2^{1/2} i \sum_p M_p^{r\lambda} \phi^{(0)}(2r\lambda)$
 in the eq. for $\phi^{(0)}(1r\lambda)$ cancel, so that

$$\phi^{(3)}(1, r, \lambda) = 0$$

and $\phi_0^{(5)} = 0, \quad E_0^{(5)} = 0.$

The expansion for $E^{(0)}$ and $\phi^{(0)}$ can be continued, and only terms of even order in v/c appear.

It will be observed that the interaction terms in (31)

$$- \sum_{r, \lambda} \sum_m [\hbar v_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}]^{-1} \left| \int \bar{\Phi}_m^{(0)} M_P^{r, \lambda} \phi_0^{(0)} dq \right| \left| \int \Phi_m^{(0)} M_P^{r, \lambda} \phi_0^{(0)} dq \right| \quad (33)$$

[we write $\int dq$ for $\int \dots \int dq_1^{(1)} \dots dq_N^{(N)} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N}$]

differ from those computed for the second order from (28):

$$- \sum_{r, \lambda} \sum_m (\hbar v_r)^{-1} \left| \int \bar{\Phi}_m^{(0)} M_P^{r, \lambda} \phi_0^{(0)} dq \right| \left| \int \bar{\Phi}_m^{(0)} M_P^{r, \lambda} \phi_0^{(0)} dq \right| \quad (34)$$

It is possible to express

$$\sum_{r, \lambda} \frac{M_P^{r, \lambda} M_P^{r, \lambda}}{\hbar v_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}}$$

in terms of the confluent hypergeometric ${}_2F_1$'s, but the expressions are too complicated to be suitable for calculation.

The proper energy terms

$$- \sum_{r, \lambda} \sum_p \sum_m \frac{\left| \int \bar{\Phi}_m^{(0)} M_P^{r, \lambda} \phi_0^{(0)} dq \right|^2}{\hbar v_r + E_m^{(0)} - E_0^{(0)}} = - \sum_{r, \lambda, p, m} T_{0m, p}^{r, \lambda}$$

do not exist, although both

$$\sum_{r, \lambda} T_{0m, p}^{r, \lambda}$$

and

$$\sum_m T_{0m, p}^{r, \lambda}$$

converge; for large ν_V ,
$$\sum_{r\lambda} T_{0m,p}^{r\lambda} = O(1)$$

and for large E
$$\sum_{r\lambda} T_{0m,p}^{r\lambda} = O(1),$$

The energy level of the normal state is thus infinitely displaced by the interaction of the particles with the field; the question which we may have now to consider is whether or not the energy differences between two states are displaced by a finite or an infinite amount.

In order to answer this question we must treat the case of energies which do not correspond to a normal state for the matter; and we have to modify (19), and take account of the emission of radiation by the system. And for this purpose it is convenient to make the dimensions L of the Hohlraum infinite, because that makes the physical interpretation of the solution more immediate. For then ν_r becomes continuous and we may normalize the $\nu_r^{r\lambda}(Q_P)$ to the intervals $\Delta\nu\Delta\omega$, where $\Delta\omega$ is the element of solid angle of the unit vector ϵ_r . Furthermore we may treat here, to simplify the writing, the case that E corresponds to the first order excited state of the atom, so that there is only one energy E_0 lower than E for which (20) is soluble.

We define the energy of the normal state by

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(2)} + E_0^{(4)} + \dots \quad (35)$$

where $E_0^{(2)}$ and $E_0^{(4)}$ are given by (31) and (32), and we define the corresponding wave function

$$u_0 = \phi_0^{(0)} + \phi_0^{(2)} + \phi_0^{(4)} + \dots \quad (36)$$

where $\phi_0^{(2)}$ is given by (31). We can then extend this definition formally to obtain the energy and wave fun of excited states:

$$E_m = E_m^{(0)} + E_m^{(2)} + E_m^{(4)} + \dots \quad ; \quad |b_{m\lambda}|^2$$

$$E_m^{(2)} = - \int d\nu_r \int d\nu_l \sum_{\lambda} \sum_n \frac{|b_{m\lambda}|^2}{h\nu_r + E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (37)$$

$$u_m = \phi_m^{(0)} + \phi_m^{(2)} + \phi_m^{(4)} + \dots \text{ etc.}$$

But in the expressions for $E_m^{(2)}$ etc, and $\phi_m^{(2)}$ etc, the integrals over ν are now improper, and we have to displace the path of integration around the singularities. This is equivalent to replacing

$$\frac{1}{h\nu + E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad \text{for } E_n^{(0)} < E_m^{(0)}$$

$$\text{by } \frac{1}{h\nu + E_n^{(0)} - E_m^{(0)} \pm i\pi} \delta(h\nu + E_n^{(0)} - E_m^{(0)}) \quad (38)$$

and then taking the principal value of the integrals over ν .

Then in general all the E_m 's except E_0 are complex. We now transform the $\phi(M, \lambda, q, \sigma_p)$ by the formulae

$$\phi(M, \lambda, m) = \sum_{\sigma_p} \int \dots \int dq_1^{(1)} \dots dq_N^{(N)} u_m(q_p, \sigma_p) \phi(M, m, q_p, \sigma_p) \quad (39)$$

and introduce

$$\mu_{mn,p}^{r\lambda} = \sum_{\sigma p} \int \dots \int dq_i^{(1)} \dots dq_N^{(3)} \bar{u}_m \mu_p^{r\lambda} u_n. \quad (40)$$

Then if the $\phi(M, m)$ satisfy the equations, which follow from

$$(11): (-E + E_m)\phi(0, m) = -i \int dv_r \int dw_r \sum_{\lambda} \sum_P \mu_{0m,p}^{r\lambda} F_1(\omega, \lambda) \delta(v_r + \frac{E_0 - E}{\hbar}) \\ - \int dv_r \int dw_r \sum_{\lambda} \sum_P \mu_{nm,p}^{r\lambda} \int dv_r' \int dw_r' \sum_{\lambda'} \sum_{P'} \mu_{0n,p'}^{r\lambda'} F_2(\omega_r, \omega_r', v_r', \lambda, \lambda') \delta(v_r + v_r' + \frac{E_0 - E}{\hbar}) \\ + \dots \quad (41)$$

$$\phi(1, r\lambda, 1m) = i \sum_{Pn} \mu_{nm,p}^{r\lambda} \phi(0, n) \left\{ \frac{1}{-E + \hbar v_r + E_m} + \frac{i\pi \delta_{m0}}{\hbar} \delta(v_r + \frac{E_m - E}{\hbar}) \right\} \\ + F_1(\omega, r\lambda) \delta(v_r + \frac{E_m - E}{\hbar}) - i \sum_P \int dv_r' \int dw_r' \sum_{\lambda'} \mu_{0n,p}^{r\lambda'} F_2(\omega_r', \omega_r, v_r', \lambda, \lambda') \\ \delta(v_r + v_r' + \frac{E_0 - E}{\hbar}) \dots \quad (42)$$

$$\phi(1, r\lambda, 1, r\lambda', m) = i \sum_{Pm} \left\{ \mu_{nm,p}^{r\lambda'} \phi(1, r\lambda, n) + \mu_{nm,p}^{r\lambda} \phi(1, r\lambda', n) \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{-E + \hbar(v_r + v_r') + E_m} \pm \frac{i\pi \delta_{m0}}{\hbar} \delta(v_r + v_r' + \frac{E_m - E}{\hbar}) \right\} + F_2(\omega_r, \omega_r', v_r', \lambda, \lambda') \\ \delta(v_r + v_r' + \frac{E_0 - E}{\hbar}) \dots$$

where now the F_2 's are completely arbitrary, then the $\phi(M, r\lambda, q, p, p')$ satisfy (11); for each choice of these F 's we can obtain a solution of (11). Now the terms

$$\frac{\mu_{nm,p}^{r\lambda} \phi(0, n)}{-E + \hbar v_r + E_m} \text{ etc.}$$

give a radiation field which does not extend to infinity; and

$$\text{the terms } \frac{\pm i\pi \mu_{nm,p}^{r\lambda}}{\hbar} \phi(0, n) \delta_{m0} \delta(v_r + \frac{E_0 - E}{\hbar}) \text{ etc.}$$

represent outgoing electromagnetic waves, so that by the
 v. Dirac, 44, 585 (1927).

choice of the F 's we may determine the radiation incident upon the system. The simplest case is that in which only quanta of the single frequency

$$\nu = \frac{1}{h} (E - E_0) = \nu_r \quad (43)$$

are independent upon the system, so that all the F 's vanish except $F_1(\omega, \lambda)$.

For this case

$$\phi(0, m) = + \frac{i \sum_{\lambda} \sum_{\nu} \int d\omega_{\nu} \rho_{m,0}^{\nu \lambda} F_1(\omega, \lambda)}{E - E_m} = \frac{i G_m^{\nu}}{E - E_m} \quad (44)$$

Now by hypothesis E is to be chosen that only one $E_m - E$, that for $m=1$, say, is to be small, so that only

$$\phi(0, 1) = \frac{i G_1^{\nu}}{E - E_1} \quad (45)$$

is large. The probability of absorption to this state is thus proportional to

$$\frac{|G_1^{\nu}|^2}{|E - E_1|^2} = \frac{|G_1^{\nu}|^2}{|h\nu + E_0 - E_1|^2} \quad (46)$$

so that the shape of the absorption lines is given by

$$\frac{\text{const.}}{|\nu + \frac{1}{h}(E_0 - E_1)|^2} \quad (47)$$

since G_1^{ν} varies slowly with ν .

$\frac{1}{h\nu + E_0 - E_1}$ If we evaluate E_0, E_1 to the second order in v/c , and drop the higher terms — and this is equivalent to neglecting transitions in which more than one quantum plays a part — (47) reduces to

$$\int (k_1^2 \dots) (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{d^3x}{dx^2} = 0 \quad \Delta f(\dots) = 0$$

const.

$$\left[\nu + \frac{1}{h} (E_0^{(0)} - E_1^{(0)}) + \frac{1}{h} (E_0^{(2)} - \frac{1}{2} E_1^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{E}_1^{(2)}) \right] + \frac{1}{4h^2} |E_1^{(2)} - \bar{E}_1^{(2)}|^2, \quad (48)$$

The absorption line is thus of the same shape as that predicted on the basis of the correspondingence principle, and that found, for this case, by Dirac⁸, and the half-breadth of the line is

$$\left| \frac{E_1^{(2)} - \bar{E}_1^{(2)}}{2h} \right| = \frac{\pi}{h} \int d\omega \sum_{\lambda} |b_{01}^{r\lambda}|^2 = \frac{1}{4\pi\tau_1}, \quad (49)$$

where τ_1 is the natural life time of the state 1.

The centre of the absorption line is displaced to the red from $\frac{1}{h} (E_1^{(0)} - E_0^{(0)})$ by an amount

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (E_0^{(2)} - \frac{1}{2} E_1^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{E}_1^{(2)}) \\ &= \frac{1}{h} \int d\nu \int d\omega \sum_{\lambda} \sum_n \left\{ \frac{|b_{1n}^{r\lambda}|^2}{h\nu + E_n^{(0)} - E_1^{(0)}} - \frac{|b_{0n}^{r\lambda}|^2}{h\nu + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}} \right\} \\ &\sim \frac{1}{h} \int d\nu \int d\omega \sum_{\lambda} \sum_n \sum_{pp'} \left\{ \frac{M_{1n,p}^{r\lambda} \cdot M_{n1,p'}^{r\lambda}}{h\nu + E_n^{(0)} - E_1^{(0)}} - \frac{M_{0n,p}^{r\lambda} \cdot M_{n0,p'}^{r\lambda}}{h\nu + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}} \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

Here the principal values are to be taken for all improper integrals over ν . The terms for $p \neq p'$ are just those to be expected from (33) for the displacement of the energy levels by the magnetic interaction of the particles. The terms

$$\frac{1}{h} \int d\nu \int d\omega \sum_{\lambda} \sum_n \left\{ \frac{|M_{1n,p}^{r\lambda}|^2}{h\nu + E_n^{(0)} - E_1^{(0)}} - \frac{|M_{0n,p}^{r\lambda}|^2}{h\nu + E_n^{(0)} - E_0^{(0)}} \right\} \quad (51)$$

must be ascribed to the effect of the interaction of the particle with its own field. They may be compared with the formula

obtained⁸ for the same effect by Dirac, who finds a displacement

$$\frac{1}{h} \int d\nu \int d\omega \sum_r \frac{1}{r} \frac{M_{01} P_1^2}{h\nu + E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} \quad (52)$$

There does not appear to be any justification for this result, because in its derivation terms were neglected, that are of the same order as those retained. But it is of interest to observe that the integral in (52) exists, and gives a finite displacement of the line of the second order in $1/c$. This displacement is thus larger than the natural line breadth, which⁹ of the third order. It can be computed⁹ when the u 's are known. Thus for the first Lyman doublet of hydrogen we find the same displacement, in this order, for both components; it turns out to be

$$+ \frac{ch}{32\pi^2 e^2} \frac{1}{c_1} = \frac{ch}{32\pi^2 e^2} A_{10}.$$

which is about forty times the line breadth. The fact that this term, and the similar terms in (51), are the same, in second order, for the two components of the doublet, suggests that the formulae (33) in which the proper energy is neglected will give the atomic fine structure splitting correct to the second order.

If we try to compute the displacement from (51), we find that the integrals over ν diverge logarithmically for high

9. The calculations of the displacements predicted by the results of Dirac were carried through in collaboration with Harvey Mall, and I am indebted to him for permission to quote them here. One must use the retarded potentials to obtain a convergent integral.

frequencies. One can readily see that this is not the result of
○ the neglected of higher order terms, nor of any of approximations
made in the work. The theory thus leads to the false
prediction that spectral lines will be infinitely displaced
from the values computed by the Bohr frequency condition.
The behavior of the expression (51) calls for some comment.
As the formula stands, the integral over ν diverges absolutely;
this may be verified by evaluating the terms for a free particle.
But the question arises whether it is possible so to rearrange
the order of the integration over ν the summation over n , and the
two integrations involved in the evaluation of the μ_{mn} 's by
(40), that the limit $u \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$ exists. This cannot
be effected by an interchange of the sum over n and the
integral over ν ; but there is a procedure which, when the
 E 's in the resonance denominators of (51) are dropped, does
give an absolutely convergent result. This procedure was
suggested by Heisenberg, who showed that, if we first perform
the integration over ν and ω and the summation over λ , then
sum over all the states n of the same energy, then sum these
up to some large but finite energy E , take the difference
of the two terms for the state (0) and the state (1), then
perform ^{the} two integrations over the configuration space, and
finally allow E to become infinite, the limit $E \rightarrow \infty$

exist, and (51) tends to zero. But if we try to apply this procedure to (51) when the E terms are not dropped, we get for the leading term the divergent result

$$4e^2 \hbar^2 / hc \cdot (E_1^{(0)} - E_0^{(0)}) / \hbar \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \quad (53)$$

Nor is there any method for obtaining an absolutely convergent expression for (51), it should be observed that (53) gives us another justification for using (33) to get the fine structure separations correct to the second order.

One can see quite simply that (47) ought not to give a finite line displacement. For consider two states of a free particle; in one let the particle be at rest; in the other let it have the velocity v . Then if the energy of the particle at rest be E , the energy of the moving particle in proper coordinates moving with the particle will also be E . But we know how this energy transforms under a Lorentz transformation; in the original coordinates it will be

$$E \gamma \quad \gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$$

and in the same coordinates the difference in energy of the two states, which gives the line displacement, will be

$$E(\gamma - 1)$$

But this can only be finite if E is finite which, by (31), it is not.

Not finite any

We have treated these difficulties in some detail, because they show that the present theory will not be applicable to any problem where relativistic effects are important, where, that is, we cannot be guided throughout by the limiting case $c \rightarrow \infty$. The theory can thus not be applied to a discussion of the structure of the nuclei. It appears improbable that the difficulties discussed in this work will be soluble without an adequate theory of the masses of electron and proton; nor is it certain that such a theory will be possible on the basis of the special theory of relativity.

怨
去
し

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Two Notes on the Probability of Radiative Transitions

By J. R. Oppenheimer
Norman Bridge Laboratory, Pasadena
(Received March 4, 1930)

(Phys. Rev. 35, 939, 1930)

I

An electron satisfying Dirac's linear wave equation will very rapidly lose energy to the electromagnetic field. If the electron is free, it must lose this energy by radiating at least two quanta, in order that energy and momentum may be conserved in the process. If the electron is bound, e.g. in an atom, transitions in which only one quantum is radiated can occur, since there are then other particles present which can take up the necessary momentum. But these transitions are rare compared with the two-quantum transitions, which, as is well known, may be expected according to the theory to occur at an infinite rate. Now Dirac has suggested¹ that the reason why these transitions do not in fact occur is that the states of negative energy are filled; and this suggestion leads to a satisfactory understanding of the validity of the scattering laws derived from his wave equations. But according to Dirac not all of the states of negative energy are full; there are a few gaps in the distribution for negative electrons nearly at rest; and thus transitions to states of negative energy should not be quite excluded. Dirac further suggests that the empty states should correspond to the annihilation

¹ 126, 360, (1930).

lation of an electron and a proton. of negative energy are protons; and thus the filling of these states should correspond to the annihilation of an electron and a proton. This should occur very rarely; and if Dirac's suggestion were correct, we should expect to find a very small value for the corresponding transition probability. In this note we shall compute this transition probability on the basis of the present theory.

This computation cannot be made theoretically unique and certain until the grave difficulties introduced by the inequality of electron and proton masses are resolved; and this resolution seems to demand an essential advance² in the theory. The chief ambiguity for the present work arises from the fact that the energy radiated by the conversion of a stationary positive electron into a stationary negative electron is $2mc^2$; whereas the energy liberated by the annihilation of a stationary electron and a stationary proton should be $(m+M_p)c^2$. We shall make the computation without explicit recognition of the difference in mass of electron and proton; this gives a transition probability which absolutely absurdly large, and which is not appreciably reduced by the substitution of $m+M_p$ for $2m$ in the final formula.

2. 35,461 (1930).

Let us consider for definiteness an enclosure of volume V in which there is one free electron, and one gap in the negative energy distribution; and let both the electron and ^{the} gap be at rest. If electron and proton have in fact a relative velocity v , then our result will be in error by terms of the relative order $(\frac{v}{c})^2$. For the wave eq. of the electron we write

$$\left\{ \frac{W}{c} + \alpha_0 m c + \frac{\hbar}{2m} \left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} \psi = 0 \quad (1)$$

We take the matrices $\|\alpha_\mu(p\sigma)\|$ in the form

$$\left. \begin{aligned} \|\alpha_1(p\sigma)\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \|\alpha_2(p\sigma)\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \|\alpha_3(p\sigma)\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \|\alpha_0(p\sigma)\| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

The normalized solutions corresponding to momenta p, q, r , and energy W given by

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = m^2 c^2 + p^2 + q^2 + r^2 \quad (3)$$

may then be written

$$\begin{aligned} \psi_3^\alpha &= 0; & \psi_4^\alpha &= \frac{(m c + W/c) e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(p x + q y + r z)}}{A^{1/2} V^{1/2}} \\ \psi_1^\alpha &= \frac{-(p + i q) e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(p x + q y + r z)}}{A^{1/2} V^{1/2}}; & \psi_2^\alpha &= \frac{r e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(p x + q y + r z)}}{A^{1/2} V^{1/2}} \end{aligned}$$

where

$$A = (m c + W/c)^2 + p^2 + q^2 + r^2,$$

and $\psi_4^\beta = 0; \psi_3^\beta = \psi_4^\alpha; \psi_1^\beta = -\psi_2^\alpha; \psi_2^\beta = \psi_1^\alpha. \quad (4)$

The two wave functions for α and β gives electrons with spin oriented parallel and antiparallel respectively to the z axis,

For the initial state of the electron we take

$$W = E_0 = h\nu_0 = mc^2; \quad \psi_1^{(0)} = \psi_2^{(0)} = 0; \quad \psi_3^{(0)} = e^{2\pi i \gamma} (2V)^{-1/2};$$

$$\psi_4^{(0)} = (2V)^{-1/2} \quad (5)$$

similarly for the final state we take

$$W = E^e = -h\nu_0 = -mc^2; \quad \psi_3^e = \psi_4^e = 0;$$

$$\psi_1^e = e^{2\pi i \delta} (2V)^{-1/2}; \quad \psi_2^e = (2V)^{-1/2} \quad (6)$$

Here γ and δ are independent indeterminate phases; if in the final results we average over these, we shall have assumed random orientations for the spins of both initial and final states; and with ^{the} understanding both (5) and (6) may be regarded as spherically symmetric.

We shall need also the wave functions for states with

$$p = q = 0; \quad r = \pm mc; \quad W = \pm (2)^{1/2} mc^2.$$

These are

$$\psi_2^\alpha = \psi_4^\alpha = 0; \quad \psi_1^\alpha = \frac{-r e^{\pm 2\pi i mc z/h}}{mcV^{1/2}(4 \pm 2(2)^{1/2})^{1/2}}; \quad \psi_3^\alpha = \frac{(1 \pm (2)^{1/2}) e^{\pm 2\pi i mc z/h}}{V^{1/2}(4 \pm 2(2)^{1/2})^{1/2}}$$

$$\text{and } \psi_1^\beta = \psi_3^\beta = 0; \quad \psi_2^\beta = -\psi_1^\alpha; \quad \psi_4^\beta = \psi_3^\alpha. \quad (7)$$

Initially there is to be no radiation present; the electron is in the state (0). The probability amplitude at a later time t that a quantum of frequency ν , momentum pd , and electric

vector polarized along the unit vector \mathbf{E} , shall have been emitted, and that the electron shall have jumped to a state of momentum \mathbf{P} , energy $h\bar{\nu}$, and polarization of spin $\tau = \alpha, \beta$, is then

$$(8) \quad \phi(\mathbf{p}, \mathbf{E}; \mathbf{P}, \bar{\nu}, \tau) = -v(0; \mathbf{p}, \mathbf{E}, \bar{\nu}, \tau) \frac{1 - e^{2\pi i(\bar{\nu} + \nu_0)t}}{\nu + \bar{\nu} - \nu_0}$$

Here $v(0; \mathbf{p}, \mathbf{E}, \bar{\nu}, \tau)$ is the matrix component for the transition in question of the interaction energy between the electron and the light quantum field. This vanishes except when $\mathbf{P} = -\mathbf{p}$, and for $\mathbf{P} = -\mathbf{p}$ has the value

$$(9) \quad e c (2\pi/\nu h\nu)^{1/2} \left(\sum_{\ell=1}^3 \mathbf{E}_\ell \alpha_\ell e^{2\pi i \ell \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / h} \right) 0; \bar{\nu}, \mathbf{P}, \tau; \text{ with } \bar{\nu}^2 = \nu_0^2 + \nu^2$$

where $\left(\sum_{\ell=1}^3 \mathbf{E}_\ell \alpha_\ell e^{-2\pi i \ell \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} / h} \right) 0; \bar{\nu}, \mathbf{P}, \tau$

is the matrix component corresponding to the electronic transition $(0) \rightarrow (\bar{\nu}, \mathbf{P}, \tau)$

of the component of the vector
 $\propto e^{-2\pi i \ell \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} / h}$

parallel to \mathbf{E} ,

The probability amplitude that the electron should have jumped to state (ℓ) , and that a second quantum of frequency ν' , momentum \mathbf{p}' , and polarization along \mathbf{E}' should have been emitted, vanishes except when $\mathbf{p}' = -\mathbf{p} = \mathbf{P}$, and for $\mathbf{p}' = \mathbf{P}$ has the value

$$\phi(\mathbf{p}, \mathbf{E}, \mathbf{p}', \mathbf{E}'; \ell) = \frac{2\pi e^2 c^2}{h\nu\nu'} \sum \left\{ \frac{1 - e^{2\pi i(\nu - \bar{\nu} - \nu_0)t}}{\nu - \bar{\nu} - \nu_0} - \frac{1 - e^{4\pi i(\nu - \nu_0)t}}{2(\nu - \nu_0)} \right\}$$

with

$$(10) \left\{ \sum_{\bar{\nu}} \sum_{\tau} \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{\ell} \alpha_{\ell} e^{-2\pi i/\hbar}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right)_{0; \bar{\nu}, P, \tau} \left(\sum_{\ell=1}^3 \epsilon'_{\ell} \alpha_{\ell} e^{2\pi i/\hbar}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right)_{\nu, P, \tau; e} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sum_{\ell=1}^3 \epsilon'_{\ell} \alpha_{\ell} e^{2\pi i/\hbar}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right)_{0; \nu, P, \tau} \left(\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{\ell} \alpha_{\ell} e^{-2\pi i/\hbar}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right)_{\nu, P, \tau; e} \right\} (\nu + \bar{\nu} - \nu^{-1}) \right.$$

This grows large only for $\nu \sim \nu_0$, $\bar{\nu} \sim \pm (2)^{1/2} \nu_0$; and here the first term in the bracket may be neglected.

To evaluate Σ for $\nu = \nu_0$, $\bar{\nu} = \pm (2)^{1/2} \nu_0$, we may without loss of generality take \mathbf{p} along z , since both initial and final wave functions are effectively spherically symmetric. We may further take, again without loss of generality \mathbf{E} along x . There are then two cases to consider; with \mathbf{E}' along x and along y respectively. For these cases we have in turn

$$\Sigma = \sum_{\bar{\nu} = \pm (2)^{1/2} \nu_0} \sum_{\tau = \alpha, \beta} \bar{\nu}^{-1} \left\{ \left[\int dV \sum_{\rho} \bar{\Psi}_{\sigma} e^{-2\pi i/c \cdot \nu_0^2} \alpha(\sigma, \rho) \Psi_{\rho}^0 \right] \right. \\ \times \left. \left\{ \int dV \sum_{\rho} \Psi_{\sigma} e^{2\pi i/c \cdot \nu_0^2} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1(\sigma, \rho) \\ \alpha_2(\sigma, \rho) \end{matrix} \right\} \Psi_{\rho}^{\bar{\nu}, P, \tau} \right\} \right\} \quad (11) \\ + \left\{ \int dV \sum_{\rho} \bar{\Psi}_{\sigma} e^{2\pi i/c \cdot \nu_0^2} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1(\sigma, \rho) \\ \alpha_2(\sigma, \rho) \end{matrix} \right\} \Psi_{\rho}^0 \right\} \left[\int dV \sum_{\rho} \bar{\Psi}_{\sigma} e^{-2\pi i/c \cdot \nu_0^2} \alpha_1(\sigma, \rho) \Psi_{\rho}^{\bar{\nu}, P, \tau} \right] \right\}.$$

If we use (2) and (7) this gives us

$$\Sigma = 0 \quad \text{for } \mathbf{E}' \parallel x$$

$$\Sigma = (-i/2\nu_0) (1 + e^{2\pi i(\tau - \delta)}) \quad \text{for } \mathbf{E}' \parallel y. \quad (12)$$

From this we conclude that the probability of an emission is proportional to the square of the sine of the angle between the electric vectors of the two quanta.

Now there are $2\nu_0^2 (V/c^3)$ components of the radiation field per unit solid angle per unit frequency about ν_0 ; the direction

of propagation of one quantum can vary over a hemisphere; but when this is fixed polarization, frequency and direction of propagation of the other quantum are determinate. Thus we get the actual total chance of an emission at time t by integrating the absolute value of the square of ϕ (averaged over χ and δ) over a hemisphere of solid angle and all frequencies, and multiplying by $2\nu_0^2 (V/c^3)$; thus

$$\begin{aligned} \sum_{p, \epsilon} \int d\chi \int d\delta |\phi(p, \epsilon, -p, \epsilon'; t)|^2 \\ &= \frac{4\pi\nu_0^2}{c^3} \frac{e^4 c^4 \cdot 4\pi^2}{\hbar^2 \nu_0^2 V^2} \frac{1}{2\nu_0^2} \int_0^\infty d\nu \frac{|1 - e^{4\pi i(\nu - \nu_0)t}|^2}{4(\nu - \nu_0)^2} \\ &= t \cdot \frac{16\pi^4 e^4 c}{\hbar^2 \nu_0^2 V} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (13) \\ &= t \cdot \frac{16\pi^5 e^4}{m^2 c^3 V} \end{aligned}$$

The mean life time of an electron in a proton density of n_p protons per unit volume is thus

$$\Gamma = \frac{m^2 c^3}{16\pi^5 e^4 n_p} \sim \frac{5 \times 10^{10}}{n_p} \text{ sec.} \quad (14)$$

It should be observed that the retention of the terms for $\bar{\nu} = -2^{1/2}\nu_0$ in the expression (11) for Σ , may be justified by an argument similar to that used by Dirac to validate the scattering formulae. For although the electron can not jump to this state of negative energy, because it is already filled, there is a double transition which gives

just the same terms in Σ , and in which first a negative electron in the state $(-2^{1/2}v_0, P, \tau)$ jumps to a state near the state (0), and then the original positive electron jumps down from the state (0) to the state $(-2^{1/2}v_0, P, \tau)$; in either transition either of the two quanta may be emitted.

If we try to correct (13) to take account of the fact that the energy radiated should be $(m+M_p)c^2$ and not $2mc^2$, we get in place of (14)

$$T' = \frac{(m+M_p)^2 c^3}{64\pi^5 e^4 n_p} \sim \frac{5 \times 10^{16}}{n_p} \text{ sec.} \quad (15)$$

Both (14) and (15) give an absurdly short mean life time for matter, with $n_p = 10^{25}$ we get

$$T \sim 5 \times 10^{-15}; \quad T' \sim 5 \times 10^{-9}.$$

Of course the protons and electrons of matter are not in general free, nor uniformly distributed, nor at rest. But we should hardly expect their agglomeration into nuclei, or even atoms, to reduce appreciably the mean transition probability, since this would mean essentially an increase in the effective n_p to be used. In any case (14) or (15) should apply roughly to electrons and protons in a discharge tube.

II

-1110

In their paper on the relativistic treatment of the interaction of radiation

and matter, H. P. point out that according to their theory the radiationless transitions of the quantum mechanics may always be expected to be accompanied by transitions which correspond to a change in a material system and the emission of at least one quantum of light.³ So, for example, in the Auger jumps, in the ionization of an atom in an electric field, in the capture of electrons by α -particles, and in the radioactive decay of nuclei, the energy of the liberated particles should show a certain diffuseness; and energy is only conserved by the emission of an appropriate continuous distribution of light. H. P. derive an expression for the probability of such transitions involving radiation; they show that this probability is small, compared with that of the radiationless transitions, of the order $\frac{e^2}{hc} (\frac{v}{c})^2$

They apply this result to the problem of radioactive disintegration, where the escape of the alpha and beta particles may be roughly schematized as a diffusion through a high wall of potential energy; and they obtain so an explanation of the sharp definition of the energies of alpha-particles, and the great diffuseness of the beta spectrum. The non-appearance of the gamma radiation, which, on this theory, should accompany beta-ray disintegration, remains unexplained.

In this note we shall compute the relative probability of such radiative transitions on the basis of the Dirac radiation
3. H. P. I. (H. P.)

theory. For this probability we obtain an expression which, in the approximation to which the calculations of H. P. were carried, should agree with the results of that calculation. In our formula certain terms appear which were deliberately neglected in H. P.; and further this formula is applicable to a slightly more general group of problems than that of H. P., which cannot strictly be applied to any of the problems mentioned above except that of the Auger jumps; but except for these minor modifications our result reduces to that of H. P.; and it gives the same predictions when applied to the theory of radioactive disintegration. The present work is rather similar than that on the basis of the more general theory.

For the occurrence of radiationless transitions it is essential that the material system (and we shall call this the "Atom") be in a quasistationary state of an energy equal to the energy of some aperiodic motion of the system. Let the wave eq. for the atom, — which may be written in the configuration space, and without explicit reference to the radiation field, to the order $(v/c)^2$ be

$$(H - h\nu) \Psi_\nu = 0. \quad (16)$$

Let the initial state have the energy

$$E_0 = h\nu_0. \quad (17)$$

and be given by a wave packet which satisfies the eq.

$$(H - V - h\nu_0)\psi_0 = 0. \quad (18)$$

The wave packets for the quasi-stationary aperiodic states of the atom we call θ_ν ; they satisfy

$$(H - V' - h\nu)\theta_\nu = 0; \quad E = h\nu$$

and shall be normalized to $d\nu$. Then the probability of a radiationless transition to the continuum is given, to the first order in the small quantity λ_0/ν_0 , by

$$\lambda_0 = 4\pi^2/h^2 |V_{\nu_0}|^2; \quad V_{\nu_0} = \int d\tau \delta_{\nu_0} V \psi_0$$

(The integral over $d\tau$ is ~~to~~ to be taken over the configuration space of the atom.)

Now let there be no radiation present initially. Since the atom has energy levels lower than E_0 , it can make radiative transitions to these states; Dirac's radiation theory gives us, for the probability per unit time unit frequency ν_s of the radiation, for this transition

$$\lambda_s d\nu_s = 16\pi^2 \nu_s d\nu_s / 3hc^3 |P_{\nu_0-\nu_s, 0}|^2$$

with $P_{\nu_0-\nu_s, 0} = \int d\tau \bar{\theta}_{\nu_0-\nu_s} \dot{P} \psi_0$

where \dot{P} is the time rate of change of the electric moment of the atom. (With Dirac's linear Hamiltonian for the electron it will be

$$\sum_R e_k \alpha^k$$

where e_k is the charge on the k 'th particle, and the α^k 's are the Dirac matrices, and the summation is to be taken

overall particles.)

Now when V is not very small, (21) gives us only a very poor approximation for the probability of the corresponding transitions. Somewhat inaccurately we may say that the system can reach the same final state by a double jump, in which, e.g., the atom goes over into some arbitrary state in the continuum, and then - but there is no interval between the jumps, - jumps to the final state and emits a quantum. In this process of course only the total energy of the system is conserved, and that only when one considers the double jump as a single process. (This is the effect treated by H.P.) and to obtain it we have only to carry the perturbation theory a step farther than was necessary for the derivation of (20) and (21).

The Dirac wave eq. for the probability amplitude ϕ for the whole system, taken as a ϕ_{ν} of the state, which for brevity we describe by the single index ν , of the atom, and the number N_{ν} of quanta of frequency ν , polarization p , and given direction of propagation, is

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \phi(\nu, N_{\nu}, p) &= \sum_{\nu' N'_{\nu} p'} H(\nu, N_{\nu}, p; \nu', N'_{\nu}, p') \phi(\nu', N'_{\nu}, p') \\
 &= \int d\nu' V_{\nu\nu'} \phi(\nu', N_{\nu}, p) + V_{\nu 0} \phi(0, N_{\nu}, p) \\
 &+ \int d\nu' \sum_{s' p'} N_{s' p'}^{\frac{1}{2}} V_{\nu s' p'}^{\frac{1}{2}} \kappa_{s' p'}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_{s' p'} \cdot \mathbf{P}_{\nu\nu'}) \phi(\nu', N_{\nu}, p - \delta_{ss'} \delta_{pp'}) \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$+ \int dv' \sum_{s'p'} (N_{s'p'} + 1)^{1/2} v_s'^{1/2} \kappa_{s'p'}^{1/2} (\mathbf{e}_{s'p'}, \hat{\mathbf{P}}_{vv'}) \phi(v', N_{s'p'} + \delta_{ss'} \delta_{pp'})$$

with $\kappa_{sp} = \frac{h}{4\pi c^3} \sigma_{sp}$.

Here σ_{sp} is the number of components of the radiation field of given polarization per unit frequency about ν_s per unit solid angle for the direction of propagation; and \mathbf{e}_p is a unit vector parallel to the electric vector of the component $s p$. The summation \sum_{sp} , and the product \prod_{sp} infra, are to be taken over all the components of the field.

If we take for our initial conditions for ϕ

$$\phi(\nu, N_{sp}) = 0$$

$$\phi(0, N_{sp}) = \prod_{sp} \delta(N_{sp}, 0) e^{-2\pi i \nu_0 t} \quad (23)$$

and put these values in (17), we find in first approximation

$$\begin{aligned} \phi_1(\nu, N_{sp}) = & \prod_{sp} \delta(N_{sp}, 0) V \nu_0 \frac{e^{-2\pi i \nu t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}}{h(\nu - \nu_0)} \\ & + \sum_{s'p'} \delta(N_{s'p'}, 1) \prod'_{s''p''} \delta(N_{s''p''}, 0) v_s'^{1/2} \kappa_{s'p'}^{1/2} (\mathbf{e}_{s'p'}, \hat{\mathbf{P}}_{\nu_0}) \frac{e^{-2\pi i(\nu + \nu_{s'})t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}}{h(\nu + \nu_{s'} - \nu_0)} \quad (24) \end{aligned}$$

In \prod' the factor for $s''=s'$, $p''=p'$ is to be omitted.

If we now put this expression (24) for ϕ_1 in (22), integrate the eq to obtain the second approximation $\phi_2(\nu, N_{sp})$, and take the sum over all components of the field

$$\sum_p \int dv_s \int dw_s |\phi_2(\nu, 1_{sp})|^2,$$

This gives the probability that the system has, at time t emitted a quantum of frequency near $\nu_s = \nu_0 - \bar{\nu}$, and made a transition to a state in the continuum of energy near $h\bar{\nu}$. The coefficient of t in this expression gives the transition probability for transitions to a state in the range $\bar{\nu}$ to $\bar{\nu} + d\bar{\nu}$:

$$\lambda_s(\bar{\nu}) d\bar{\nu} = \frac{16\pi^2 \nu_s d\bar{\nu}}{3c^3 h^3} \left| h \dot{P}_{0\nu} - \int \frac{d\nu' V_{0\nu'} \dot{P}_{\nu'\bar{\nu}}}{\nu_0 - \nu'} - \int \frac{d\nu' \dot{P}_{0\nu'} V_{\nu'\bar{\nu}}}{\bar{\nu} - \nu'} \right|^2 \quad (25)$$

The first term in the bracket is the direct emission given by (21) and neglected by H.P.; the remaining terms differ from those of H.P. (132) only by having V' in place of V . When ψ_0 and ψ_s are characteristic fns of the same equation, these terms reduce to those given in H.P.

It should be observed, the momentum of the light quantum, and terms of higher order in v/c , are neglected in both computations. The retention of this momentum leads to the same modification in (25) and H.P. (132); and so does the retention of terms of the fourth order in v/c . But in higher orders only the method of H.P. can be used, since then no eq. of the form (16) holds for the atom, and it is necessary to work directly from the more general eqs of q.e.d., and take more complete account of the retardation of the forces between the particles of

the atom.

To obtain the order of magnitude of the total radiative transition probability for radioactive disintegrations, we may observe that V and V' may be expected to be of the same order of magnitude as $h\nu_0$, and we integrate (25) for all frequencies ν_s up to ν_0 ; this gives

$$\lambda_s = \int_0^{\nu_0} \lambda_s(\bar{\nu}) d\bar{\nu} \sim \pi \nu^2 \nu_0^2 e^2 / c h \left| \int d\tau \bar{\Theta}_r \Psi_0 \right|^2. \quad (26)$$

The ratio of this to (20) gives the relative intensity probability that radiation will be emitted in the disintegration:

$$\lambda_s / \lambda_0 \sim e^2 / h c \cdot (\nu/c)^2 \quad (27)$$

in agreement with M.P. (133). From (25) it is clear that only a much more detailed knowledge of Θ_r and Ψ_0 and of the form of the Hamiltonian H in (16) than is at present available can give us any precise value for λ_s / λ_0 .

The application of (27) enables us to estimate the relative probability of radiative and radiationless capture of electrons from atoms by an alpha particle, and gives for the ratio of the probabilities 10^{-6} , in agreement with the more detailed calculations of the effect.

Radiation 473
1776

The Equilibrium between Matter and Radiation

By Louis S. Kassel *

Gates Chemical Laboratory, California Institute

(Received February 7, 1930)

There have recently been a number of attempts to calculate the equilibrium between matter and radiation in the universe.^{1,2,3} There are two difficulties in these calculations; one of these is the generalization of energy and entropy which must be made before the equil. state of the entire universe can be treated; this problem has been discussed in particular by Tolman. The other difficulty is the assignment of entropy to a perfect crystal at the absolute 0; it cannot be regarded as entirely certain that this entropy is equal to that of a perfect vacuum, as is assumed. Nevertheless, all calculations agree in yielding for the final equil. state one in which the ratio of the energy in the form of matter to that in the form of radiation ~~is~~ is exceedingly small; this ratio is dominated by the exponential factor $e^{-h\nu_c/kT}$ which completely wipes out the effect of all the other factors; the final state of the universe indicated by these calculations is thus one in which there is practically no matter left.

Quite recently Dirac⁴ has proposed a theory of the nature of the proton which seems to call for a new calculation of the equil. concentration of matter. Briefly stated, Dirac's theory is that the fundamental unit of matter is the electron;

* National Research Fellow in Chemistry

1. Stern, Zs. f. Elektrochem. **31**, 448 (1925); Trans. Far Soc. **21**, 477 (1925-6)
2. Tolman, Proc. Nat. Acad. Sci. **12**, 670 (1926); **14**, 353 (1928)
3. Zwicky, **24**, 592 (1928)
4. 126.

in addition to the usual states in which the electron is observed, there are others in which its mass is negative; in these states its total energy y is negative, and in fact becomes more negative as its velocity increases. These negative energy electrons are attracted by ordinary electrons, but ordinary electrons are nevertheless repelled by them. All these properties correspond to solutions of the wave equation of the electron which were previously known, but generally considered extraneous. Dirac proposes the hypothesis that space contains great numbers of these negative energy electrons, which obey the Fermi statistics; the states of lowest energy (highest velocity) are therefore full, but a few of the states of low velocity are not occupied; these gaps constitute irregularities in the normal arrangement of space, and are observable. It is evident that the gaps will attract ordinary electrons, and be attracted by them; they will also have in effect a positive energy, since they correspond to the absence of a particle of negative energy.

The most natural assumption is that the total number of electrons in the universe is just equal to the number of cells of negative energy; then at the absolute zero every electron would be in the lowest possible state, there would be

complete uniformity throughout space, and the universe would be observably (or actually) empty. The problem to be solved is simply that of finding the distribution of electrons among the various cells at high temperatures; we shall confine our solution to a finite region in which there is flat space-time. The problem then differs from the usual applications of the Fermi statistics chiefly in that there are two continuous ranges of energy values. We divide these ranges into intervals in the usual way, and write for the number of cells in the s^{th} interval of the positive energy range

$$Q_s = 4\pi V/h^3 (2m)^{3/2} E_s^{1/2} \Delta E \quad (1)$$

and for the number in the t^{th} interval of the negative energy range

$$M?m? \quad Q_t = 4\pi V/h^3 (2M)^{3/2} E_t^{1/2} \Delta E. \quad (2)$$

We have included in these formulae a factor 2 arising from the spin, which we suppose exists for all energies, and in (2) we use the observed proton mass M ; there is some doubt about the correct procedure at this point; — M is what the chemist would call the partial molar (or partial molecular) mass of the electrons of a true mass $-m$; it is the right value to use for the change in mass produced in a system by creating the first proton

in it, when another proton is created sufficiently close a different value will be needed. The result of our calculations will be that the concentration of matter is exceedingly small, and M therefore is certainly the correct mass for most purposes, though possibly not for ours; it would not make any important change in the results if m did replace M in (2). Also it is unnecessary to use the correct rel. expressions for (1) and (2), since all cells of large positive kinetic energy are empty, and all those of large negative kinetic energy are full; the number of cells of these kinds will not be correctly given by our results, but this number does not concern us.

The number of distribution N_s particles among Q_s cells, using the Fermi statistics, is known to be $Q_s! / N_s!(Q_s - N_s)!$ and hence the number of distributions for the entire system, the number N_s and N_t being specified, is

$$W = \prod_s \frac{Q_s!}{N_s!(Q_s - N_s)!} \prod_t \frac{Q_t!}{N_t!(Q_t - N_t)!} \quad (4)$$

This is to be a maximum subject to the conditions of conservation of charge and of energy. Proceeding in the usual way we have

$$\sum_s \{-\log N_s + \log(Q_s - N_s)\} \delta N_s + \sum_t \{-\log N_t + \log(Q_t - N_t)\} \delta N_t = 0 \quad (4)$$

$$\sum_s \delta N_s + \sum_t \delta N_t = 0 \quad (5)$$

$$\sum_s (E_s + mc^2) \delta N_s - \sum_t (E_t + mc^2) \delta N_t = 0, \quad (6)$$

Using multipliers e^α and e^β for (5) and (6) we add these three equations and then require each term in the two sums to vanish. Upon rearranging the necessary conditions we have

$$N_s = \frac{Q_s}{e^{\alpha + (E_s + mc^2)\beta} + 1} \quad (7)$$

$$N_t = \frac{Q_t}{e^{\alpha - (E_t + mc^2)\beta} + 1} \quad (8)$$

It is easily shown in the usual manner that $\partial E / \partial s = \frac{1}{k\beta}$ and since thermodynamics requires $\partial E / \partial s = T$, we have as always in this type of calculation

$$\beta = 1/kT. \quad (9)$$

For positive values of α the first term in the denominator of (7) will be very large and (7) may be written approximately

$$N_s = Q_s e^{-\alpha - (E_s + mc^2)/kT} \quad (10)$$

For values of α not too large the first term in the denominator of (8) will be extremely small and we will have

$$N_t = Q_t \{ 1 - e^{\alpha - (E_t + mc^2)/kT} \} \quad (11)$$

We now determine α from the state of electrification of

of the system. The condition for neutrality is

$$\sum_s N_s = \sum_t (Q_t - N_t) \quad (12)$$

which becomes

$$\sum_s Q_s e^{-\alpha - (E_s + mc^2)/kT} = \sum_t Q_t e^{-\alpha - (E_t + Mc^2)/kT} \quad (13)$$

Upon introducing the values of Q_s and Q_t and replacing the sum by an integral we find

$$\begin{aligned} (2m)^{3/2} e^{-\alpha - mc^2/kT} \int_0^\infty e^{-E/kT} E^{1/2} dE &= \\ = (2M)^{3/2} e^{-\alpha - Mc^2/kT} \int_0^\infty e^{-E/kT} E^{1/2} dE & \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{or } e^\alpha = (m/M)^{3/4} e^{(M-m)c^2/2kT} \quad (15)$$

This value of α is evidently such that the approximations (10), (11) are justified. Upon inserting (15) and (1) into (10) and integrating we obtain for the number of electrons of positive energy

$$\begin{aligned} N_+ &= \frac{4\alpha V}{h^3} (4mM)^{3/4} e^{-(m+M)c^2/2kT} \int_0^\infty e^{-E/kT} E^{1/2} dE \\ &= 2V \left(\frac{2\pi(mM)^{1/2} kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(m+M)c^2/2kT} \end{aligned} \quad (16)$$

This then is the number of electrons and also the number of protons which the system contains. It is very closely similar to Stern's result for the number of particles of mass m

$$N = V \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-mc^2/kT} \quad (17)$$

The vanishingly small amount of matter permitted by this

equation has already been pointed out, and our rest may be regarded as in some measure supporting the view that if any matter is to be preserved in the final equil of the universe it must be rescued by the tendency of matter toward aggregation. But the evidence of astronomy suggests that the stars are constantly gaining matter in the form of dust and meteors, transforming it into radiation and sending it back into space; this may mean, of course, that the universe cannot save its matter by any device and that it is steadily fading away. On the other hand the evidence of cosmic rays may be supposed to indicate that in the depths of space radiation is converted back into matter; if this process is occurring it can only mean that the foregoing calculation, and all others of a similar nature, are utterly incorrect.

1926

On the Annihilation of electrons and Protons

By. Dirac [Received 26 March, read 19 May (1930)]

Proc. Camb. Phil. Soc. 26. p. 361 (1930).

§ 1. Introduction

An electron, according to relativity quantum theory, has two different kinds of states of motion, those for which the kinetic energy is positive and those for which it is negative. Only the former, of course, can correspond to actual electrons as observed in the laboratory. The latter, however, must also have a physical meaning, since the theory predicts that transitions will take place from one kind to the other. It has recently been proposed* that one should assume that nearly all the possible states of negative energy are occupied, with just one electron in each state in accordance with Pauli's exclusion principle, and that the unoccupied states or 'holes' in the negative-energy distribution should be regarded as protons. According to these ideas, when an electron of positive energy makes a transition into one of the unoccupied negative states, we have an electron and proton disappearing simultaneously, their energy being emitted in the form of electromagnetic radiation. The object of the present paper is to calculate the frequency of occurrence of these processes of annihilation of electron and protons.

The large difference between the masses of the proton and electron forms an unsolved difficulty in the existing theory. This large difference seems to be connected with the interaction between electrons, but our present ideas about interaction are

*126, p. 360.

is inadequate to account for it. For this reason we cannot do better at present than to neglect the interaction altogether, which entails working with a theory in which the electron and proton have the same mass. This means, of course, a serious deficiency in our work and prevents one from attaching much physical importance to the results. All the same the calculation is of interest, since it all follows rigorously from the general principles of quantum mechanics and since it will presumably form the basis for future calculations that do take the interaction correctly into account. Incidentally our calculation provides a justification for the scattering formula of Klein and Nishina[†], which ~~has~~ was deduced by these authors with the help of classical analogies not rigorously proved to be consequences of general q. m.

It is easy to see from the laws of conservation of energy and momentum that an electron and proton cannot annihilate one another with the emission of only a single photon. We must have at least two photons emitted. Processes in which more than two photons are emitted will occur relatively much less frequently and will not be considered here.

Our emission processes are processes of spontaneous emission, which can occur without the help of any previously existing radiation. For the direct calculation of the probability of occurrence of such processes it is necessary to apply

† 52, p 853 (1929).

$g, m.$ to the radiation field. This will involve complicated mathematics, as it means dealing with a dynamical system of infinitely many degrees of freedom. It is more convenient to calculate instead the probability of occurrence of the corresponding stimulated emission process and then to use the known relation between spontaneous and stimulated emission process probabilities. For dealing with ~~sim~~ stimulated emission probabilities we do not need to quantize the field, but can treat it simply as an external perturbation having a given value at each point in space-time, and this results in a considerable simplification of the work.

Our problem now consists in considering an electron under the simultaneous influence of two incident beams of radiation. Provided that the frequencies and directions of motion of the beams satisfy a certain condition, they will induce transitions of the electron to states of negative energy and we can calculate the transition probab. per unit time.

The ordinary method of treating this problem, taking electron spin into account, would require us first to consider an electron with its ~~po~~ spin in a definite direction and to work out the transition probab. for this electron, and then to average over all directions of spin. The choosing of a given initial direction

for the spin puts a great deal of dissymmetry into the calculation, which dissymmetry ought not to be necessary on account of the final averaging. We can avoid this dissymmetry and arrange the calculation in a neater way by using a special method, which will be described in the next section.

§ 2. Methods of Solving Problems in Quantum Mechanics.

The usual method of dealing with a problem in quantum mechanics is the wave function method which consists in finding a wave $\psi(q')$ representing the required state. This wave ψ must satisfy the Schrödinger equation*

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(q') = \int (q' | H | q'') dq''(q' |) \quad (1)$$

$(q' | H | q'')$ being the matrix that represents the Hamiltonian. The conjugate complex wave $\psi^*(q')$ will satisfy the conjugate complex equation

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \psi^*(q') = \int (\psi^*(q'') dq''(q' | H | q'). \quad (2)$$

Provided that the wave ψ is properly normalised, we can interpret the square of its modulus, namely the product $(q' | \psi)(\psi | q')$, as the probability of q having the value q' , and further if ξ is any dynamical variable, represented by a matrix $(q' | \xi | q'')$, its average value for the state under consideration will be

$$\iint (q' | \xi | q'') dq''(q' | \psi)(\psi | q')$$

* strictly one should say the probab. of q having a value in the neighbourhood of q' per unit range of q' .

This wave fn method, although it can always be used, is not convenient for those problems in which we are interested, not in properties of a single state, but in average properties of a large number of states. Suppose, for instance, that we want the average probability of q having the value q' when the system is in any of a certain n of states. We should have to determine the wave fns $(q'|1), (q'|2), \dots, (q'|u)$, for each of these u states and then take the average $u^{-1} \sum_r (q'|r)(r|q')$. Similarly to obtain the average of ξ for these u states we should have to determine all the wave fns and form $u^{-1} \sum_r \iint (q'|\xi|q'') dq'' (q'|r)(r|q') dq'$. We can avoid the trouble of finding all the wave fns by obtaining instead just the one matrix $u^{-1} \sum_r (q'|r)(r|q'')$, equal to $(q'|P|q'')$ say, through which these averages are determined. In this way we deal right from the beginning with the whole set of u states. This set may be considered as forming the ensemble in Gibbs' sense. The matrix $(q'|P|q'')$ then represents a function of the dynamical variables which is the quantum analogue of the density of a Gibbs' ensemble†. With the help of equations (1) and (2) one can easily verify that the rate of change of this matrix is given by the eq.
$$i\hbar \frac{d}{dt} (q'|P|q'') = \int \{ (q'|H|q''') \} (q'''|P|q'') - (q'|P|q''') (q'''|H|q'') \} dq'''$$

† Proc. Camb. Phil. Soc. 25 p.62 (1929).

or, written symbolically,

$$i\hbar \dot{\rho} = H\rho - \rho H. \quad (3)$$

The density method of dealing with problems in a quantum mechanics is to find a density $\rho_{\underline{ij}}$ directly from the eq. of motion (3) satisfying the required initial conditions. The general solution of this eq. of motion corresponds to an ensemble of any number of states with an arbitrary weight attached to each. The density method is more convenient than the wave $\psi_{\underline{ij}}$ method when the $n_{\underline{ij}}$ of states concerned is large. The density method has, however, one serious disadvantage in that the unknown is a matrix, which is a $\rho_{\underline{ij}}$ of twice as many variables as a wave $\psi_{\underline{ij}}$ is. This results in the solving of eq. (3) in general a much more complicated matter than the solving of (1) or (2).

There is, however, a third method, intermediate between the two preceding ones, which in certain cases is more convenient than either of them and combines the advantages of both. This consists in finding a rectangular matrix Ψ with n rows and m columns, n being the number of rows and columns in the square matrix H , and m being arbitrary, which Ψ must satisfy an eq. of the same form as the Schröd. eq. (4), namely

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi = H\Psi. \quad (4)$$

The product of Ψ with the square matrix H , taken according to

the usual law of matrix multiplication, is another matrix with n rows and m columns, so that one is permitted to equate it to $\frac{d\psi}{dt}$. Suppose now that ϕ is the conjugate Hermitian matrix to ψ , obtained by interchanging the rows and columns and taking the conjugate complex of each element. Then ϕ will be a matrix with m rows and n columns and will satisfy

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \phi = \phi H. \quad (5)$$

If we now form the product $\psi\phi$, it will be a matrix with n rows and columns, i.e., a square matrix, and it will satisfy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} (\psi\phi) &= i\hbar \frac{d\psi}{dt} \phi + \psi (i\hbar \frac{d\phi}{dt}) \\ &= H\psi\phi - \psi\phi H. \end{aligned}$$

This is just eq. (3) with $\psi\phi$ for ρ . Thus the product of any solution of (4) with a solution of the conjugate Hermitian equation (5) is a solution of (3).

The third method is useful ^{when the} with density ρ that describe the ensemble to be studied is expressible in the form of a product $\psi\phi$ where m , the number of columns in ψ and of rows in ϕ is much less than n . In such cases the unknown ψ or ϕ is a much simpler thing than a square matrix of n rows and columns and can therefore be more easily determined than ρ itself. In the special case when

$m=1$, the unknown Ψ or Φ is a matrix with one column or row respectively, which is just the same thing as a wave f_{\pm} , and the third method then reduces to the first.

In practice the third method usually consists in working with a Ψ which is a wave f_{\pm} in certain variables and a matrix in others. Suppose that we can divide our dynamical variables into two independent commuting sets, say the p_1, q_1 set and the p_2, q_2 set, such that the states we have to average over are all the same with respect to the p_1, q_1 variables, and thus of the type $(q_1 | \cdot)$ but differ with respect to the p_2, q_2 variables. We should then take our Ψ to be a wave f_{\pm} in the p_1, q_1 variables, and thus of the type $(q_1 | \cdot)$, but a matrix in the p_2, q_2 variables. This means that the value of the wave $f_{\pm}(q_1)$ for any point q_1 in its domain is, not a number, but a f_{\pm} of the non-commuting variables p_2, q_2 which can be represented by a matrix $(q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2'')$. The density f_{\pm} that this Ψ gives is (for the case of discrete q_1)

$$\begin{aligned} (q_1' q_2' | \rho | q_1'' q_2'') &= \sum_{q_2'''} (q_1' | (q_1 | \cdot) | q_2''') (q_2''' | (q_1 | \cdot) | q_2'') \\ &= (q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2''). \end{aligned}$$

The probab. of q_1 having the value q_1' is

$$\sum_{q_2'} (q_1' q_2' | \rho | q_1' q_2') = \sum_{q_2'} (q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2'),$$

which is just the diagonal sum of the matrix that represents $(q_1 | \cdot) (q_1')$.

$$\begin{aligned} * (q_1' q_2' | \rho | q_1'' q_2'') &= (q_1' q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2'') (q_2'' | (q_1 | \cdot) | q_2'') \\ &= (q_1' | q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2'') (q_2'' | q_2'') = (q_1' | q_2' | (q_1 | \cdot) | q_2'') \end{aligned}$$

As an example let us consider the problem of an excited hydrogen atom subjected to some kind of perturbation, when we are not interested in the orientation of the hydrogen atom in space. We should then take for our p, q variables the radius r and its conjugate momentum p_r , and for our p_2, q_2 variables the components of angular momentum. Our Ψ would then be a wave $f_{\underline{m}}$ in r whose value $(r|)$ for any r' would be a $f_{\underline{m}}$ of the angular momentum \underline{m} . If we are given that initially all orientations are equally probable, we should know that $(r|)$ for any r' is initially a $f_{\underline{m}}$ only of k , the magnitude of the angular momentum. This $f_{\underline{m}}$ would be determined by the other initial conditions and the value of $(r|)$ at later times would then be given by eq (4). In this way we can avoid the dissymmetry of a spatial quantisation, which the wave $f_{\underline{m}}$ method would require.

§3. First-Order Calculations.

The general wave equation for the motion of an electron in an e.m.g field is

$$\left\{ \frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 + p_1 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}) + \beta_3 m c \right\} \Psi = 0. \quad (6)$$

In our present problem the field consists of two incident beams of radiation. If we choose our potentials so that the scalar potential A_0 vanishes, we shall have

$$A = a_r e^{i\nu_r [t - (r, \mathbf{x})/c]} + \bar{a}_r e^{-i\nu_r [t - (r, \mathbf{x})/c]} + a_s e^{i\nu_s [t - (s, \mathbf{x})/c]} + \bar{a}_s e^{-i\nu_s [t - (s, \mathbf{x})/c]} \quad (7)$$

where ν_r and ν_s are 2π times the frequencies f of the two beams, ℓ_r and ℓ_s are unit vectors in their directions of motion, and \bar{a}_r and \bar{a}_s are complex vectors in their direction of electric polarisation specifying their amplitudes.

We shall solve eq (6) by a perturbation method, taking as our perturbing energy all the terms that involve the field.

Thus we write (6) as

$$\{W/c + p_1(\sigma, p) + p_3 m c\} \psi = V \psi, \quad \dots \quad (8)$$

where V , the perturbing energy divided by c , is equal to

$$V = -e/c \cdot p_1(\sigma, A).$$

Provided that V is small we can obtain a solution of (8) in the form

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots,$$

where ψ_0 is a solution for no field, i.e.

$$\{W/c + p_1(\sigma, p) + p_3 m c\} \psi_0 = 0 \quad \dots \quad (9)$$

and the n th order correction ψ_n is given in terms of the $(n-1)$ th by

$$\{W/c + p_1(\sigma, p) + p_3 m c\} \psi_n = V \psi_{n-1}. \quad \dots \quad (10)$$

Corresponding to the four terms in (7), V will consist of the sum of four terms, a typical one being

$$-e/c \cdot p_1(\sigma, a) e^{i\nu(\ell \cdot x)/c - i\nu t} \quad \dots \quad (11)$$

The four terms are given by taking a , ν and ℓ equal to \bar{a}_r , ν_r and ℓ_r ; \bar{a}_r , $-\nu_r$ and ℓ_r ; \bar{a}_s , ν_s and ℓ_s ; and \bar{a}_s ,

- v_s and l_s respectively.

We are not interested in particular direction of spin for the electron, so we use the third of the methods described in the preceding section, taking for our p, q variables those that describe the position and momentum of the electron, and for our p, q variables all the p 's and σ 's. Our ψ satisfying (6) is now a fn of x_1, x_2, x_3 and t whose value for any point x_1, x_2, x_3, t is not a number, but some fn of the p 's and σ 's which can be represented by a matrix with four rows and columns. Any such ψ can be expressed as a linear fn of the p 's and σ 's whose coefficients are fns of x_1, x_2, x_3, t .

We choose our ψ_0 to represent an electron, (or rather a distribution of electrons,) at rest and having a positive kinetic energy mc^2 . Thus ψ_0 is of the form

$$\psi_0 = u_0 e^{-i\nu_0 t} \quad (12)$$

where $\nu_0 = mc^2/h$ \hbar

and u_0 is a function of the p 's and σ 's that is independent of x_1, x_2, x_3 and t . Substituting (12) in (9), we obtain

$$(1 + \beta_3) u_0 = 0. \quad (13)$$

We want our ψ_0 to represent a distribution of electrons with no preferential direction of spin, which means that it must be independent of the σ 's. Thus u_0 can be a

function only of the ρ 's. A possible u_0 satisfying (13) is now

$$u_0 = (1 - \beta_3) f_0$$

Other solutions do not lead to anything more general when we form the product $\psi_0 \phi_0$. We therefore take our ψ_0 to be

$$\psi_0 = (1 - \beta_3) f_0 e^{-i\nu_0 t}$$

representing an electron distribution whose density is the diagonal sum of

$$\psi_0 \phi_0 = \int (1 - \beta_3) f_0^2 = 2 \int (1 - \beta_3) f_0$$

which is 8.

Using this value for ψ_0 , we obtain from (10) the following equation for the first-order correction ψ_1 , if we write down for V only its typical term (11),

$$\left\{ W/c + P(\sigma, p) + \beta_3 m c \right\} \psi_1 = -e/c \cdot P(\sigma, a) (1 - \beta_3) e^{i(\nu_0 - \nu)t - i\nu(\ell, x)/c}$$

The solution of this is evidently

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{e}{c} \frac{1}{W/c + P(\sigma, p) + \beta_3 m c} P(\sigma, a) (1 - \beta_3) e^{i(\nu_0 - \nu)t - i\nu(\ell, x)/c} \\ &= -\frac{e}{h} \frac{1}{\nu_0 - \nu - P(\sigma, \ell) + \beta_3 \nu_0} P(\sigma, a) (1 - \beta_3) e^{i(\nu_0 - \nu)t - i\nu(\ell, x)/c} \end{aligned}$$

The operators W and P being equivalent to the numerical multiplicationers $h(\nu_0 - \nu)$ and $0 - h\nu\ell/c$. We can remove the ρ 's and σ 's from the denominator by multiplying it by $[\nu_0 - \nu + P(\sigma, \ell) - \beta_3 \nu_0]$ and putting this same factor in the numerator, which gives us

$$\psi_1 = -\frac{e}{h} \frac{1}{(\nu_0 - \nu)^2 - \nu^2 - \nu_0^2} [\nu_0 - \nu + P(\sigma, \ell) - \beta_3 \nu_0] \times P(\sigma, a) (1 - \beta_3) e^{i(\nu_0 - \nu)t - i\nu(\ell, x)/c}$$

The terms that involve v_0 in the square brackets will cancel, since their coefficient is $1 - p_3$, which vanishes when multiplied by $f_1(1 - p_3)$. Thus our expression for ψ_1 reduces to

$$\psi_1 = -e^{i(v-v_0)t - i(v\ell + v'\ell')/c} \frac{e^{i\alpha}}{2\hbar v_0} [1 - f_1(\alpha, \ell)] f_1(\alpha, \alpha) (1 - p_3) e \quad (14)$$

The total ψ_1 will consist of the sum of four terms like this, corresponding to the four terms in V .

§ 4. Second-Order Calculations.

The first-order change in ψ caused by the field consists of terms that vary periodically with the termine, which will not represent the occurrence of any kind of transition process. We must therefore proceed to the second-order correction ψ_2 . This will consist of sixteen terms, arising from the sixteen terms that occur in $V\psi_1$ on account of V and ψ_1 , each having four terms. A typical term of $V\psi_1$, obtained by multiplying term (1) of V , with α', v' and ℓ' substituted for α, v and ℓ , into the typical term (14) of ψ_1 , is

$$e^{i(v+v'-v_0)t - i(v\ell + v'\ell')/c} \frac{e^{i\alpha'}}{2\hbar v_0 c} (\alpha, \alpha') [1 - f_1(\alpha, \ell)] (\alpha, \alpha) (1 - p_3) \quad (15)$$

We may write this as

$$u e^{-i(Wt - p'\ell')/\hbar} \quad (16)$$

where $W' = \hbar(v_0 - v - v')$, $p' = -\hbar(v\ell + v'\ell')/c$ (17)

and the coefficient u is a fn of the p 's and σ 's only. This term in ψ_1 will give rise to a term in ψ_2 satisfying

$$[W'/c + \beta_2(\omega, \beta) + \beta_3 mc] \psi_2 = u e^{-i[W't - (p', X)]/\hbar} \quad (18)$$

We can solve this eq. as before, obtaining

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{W'/c + \beta_2(\omega, \beta) + \beta_3 mc} u e^{-i[W't - (p', X)]/\hbar} \\ &= \frac{1}{W'^2/c^2 - p'^2 - m^2 c^2} [W'/c - \beta_2(\omega, \beta) - \beta_3 mc] u e^{-i[W't - (p', X)]/\hbar} \end{aligned} \quad (19)$$

Thus in general a term in ψ_2 will also be periodic in the time. An exception arises, however, in the case when

$$W'^2/c^2 - p'^2 - m^2 c^2 = 0. \quad (20)$$

The above method of solution then fails and a closer investigation shows that ψ_2 in this case increases linearly with the time. This will mean physically a continual appearance of electrons with energy W' and momentum p' , and will thus show that transition processes are taking place ending up with these values for the energy and momentum of the electrons.

The final energy and momentum are given by eqs (17) in which ν and ν' may be any two of the four quantities $\nu_r, \nu_s, -\nu_r, -\nu_s$. These equations express the laws of conservation of energy and momentum for a process in which two photons are unlearned and are either emitted or absorbed according

to whether ν and ν' are positive or negative. For our present problem the incident beams will be such that eq (20) can be satisfied only when ν and ν' are equal to ν_r and ν_s , corresponding to a process of emission of the photons r and s . Thus we shall have

$$W' = h(\nu_0 - \nu_r - \nu_s), \quad p' = -h(\nu_r \ell_r + \nu_s \ell_s)/c, \quad (21)$$

and the condition for the incident beams, obtained by substituting this W' and p' in (19), is

$$(\nu_0 - \nu_r - \nu_s)^2 - (\nu_r \ell_r + \nu_s \ell_s)^2 - \nu_0^2 = 0.$$

$$\text{or} \quad \nu_0(\nu_r + \nu_s) = \nu_r \nu_s [1 - (\ell_r \ell_s)]$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{\nu_r} + \frac{1}{\nu_s} = \frac{1}{\nu_0} [1 - (\ell_r \ell_s)]. \quad (22)$$

It is easily seen that W' must be negative.

We must now consider only those two terms of $V\psi$, which are obtained from the typical form term (5) by taking $\nu = \nu_r$, $\nu' = \nu_s$ and $\nu = \nu_s$, $\nu' = \nu_r$ respectively. The other fourteen terms will not contribute to the transitions. These two terms will both be of the form (16) and when combined will give as the total coefficient u

$$\begin{aligned} u &= e^2 / 2h\nu_0 c \{ (\sigma, a_s) [1 - p_1(\sigma, \ell_r)] (\sigma, a_r) \\ &\quad + (\sigma, a_r) [1 - p_1(\sigma, \ell_s)] (\sigma, a_s) \} (1 - \beta_s) \\ &= e^2 k_r k_s / 2h\nu_0 c \{ (\sigma, m_s) [1 - p_1(\sigma, \ell_r)] (\sigma, m_r) \\ &\quad + (\sigma, m_r) [1 - p_1(\sigma, \ell_s)] (\sigma, m_s) \} (1 - \beta_s) \end{aligned}$$

where $a_r = k_r m_r$ and $a_s = k_s m_s$, m_r and m_s being unit vectors in the directions of the electric vectors of the two beams. If we put $a_r \times m_r = n_r$ and $a_s \times m_s = n_s$, so that a_r, m_r, n_r and a_s, m_s, n_s form two sets of three unit mutually \perp vectors, our expression for u reduces to*

$$u = e^2 k_r k_s / 2 h \nu_0 c \{ 2(m_r, m_s) - \rho_1 [i(m_s, n_r) - (a_s, m_r m_r) + i(m_r, n_s) - (a_r, m_r \times n_s)] \} (1 - \rho_3).$$

This may be written for brevity

$$u = e^2 k_r k_s / 2 h \nu_0 c \{ \gamma_1 - i \rho_1 \gamma_2 + \rho_1 (a_s, \gamma) \} (1 - \rho_3) \quad (23)$$

where $\gamma_1 = 2(m_r, m_s)$, $\gamma_2 = (m_r, n_s) + (m_s, n_r)$ (24)

$$\gamma = m_r \times n_s + m_s \times n_r$$

For calculating transition probabilities that have a physical significance it is necessary to suppose the incident beams to be such that eq (20) or eq (22) is only approximately satisfied.

Let $\delta W'$ be the small correction that would have to be made in W' for equation (20) to hold exactly, i.e.,

$$(W' + \delta W')^2 / c^2 - p'^2 - m^2 c^2 = 0$$

$$\text{or } \delta W' = - [W'^2 / c^2 - p'^2 - m^2 c^2] c^2 / 2W' \quad (25)$$

We shall now obtain a solution of (18) that remains finite as $\delta W' \rightarrow 0$. We get this by adding on ^{to} the solution (19) a certain quantity, namely

* The reduction may conveniently be made with the help of formula (6) in R17, p 618 (1928)

$$\frac{1}{W'^2/c^2 - p'^2 - m^2c^2} \times [(W' + \delta W')/c - p_1(\theta, p') - p_3 mc] u e^{-i[(W' + \delta W')t - (p', x)]/\hbar}$$

which is easily verified to be a solution of (9) and thus not to contribute anything to the right-hand side of (18). The sum is, with neglect of a high frequency part which does not contribute to the transitions,

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{1}{W'^2/c^2 - p'^2 - m^2c^2} \times [W'/c - p_1(\theta, p') - p_3 mc] \\ &\quad \times u e^{-i[W't - (p', x)]/\hbar} [1 - e^{-i\delta W't/\hbar}] \\ &= -c^2/2W' [W'/c - p_1(\theta, p') - p_3 mc] \\ &\quad \times u e^{-i[W't - (p', x)]/\hbar} [1 - e^{-i\delta W't/\hbar}] / \delta W' \quad (26) \end{aligned}$$

with the help of (25). This expression, with u given by (22), is the wave function representing electrons that have made the double emission process and jumped into negative-energy states.

§ 5. The Transition Probability for an Elementary Process.

We must now determine the density of electrons represented by the wave ψ_2 (26). To do this we must multiply this ψ_2 by its conjugate Hermitian $\bar{\psi}_2$, putting the $\bar{\psi}_2$ on the right, which will give us a matrix in the p 's and $\delta\sigma$'s, whose diagonal sum we must then take. We have

$$\begin{aligned} \psi_2 \bar{\psi}_2 &= c^4/4W'^2 [W'/c - p_1(\theta, p') - p_3 mc] u \\ &\quad \times \bar{u} [W'/c - p_1(\theta, p') - p_3 mc] \cdot 2 [1 - \cos \delta W't/\hbar] / \delta W'^2 \end{aligned}$$

where \bar{u} is the conjugate Hermitian of u . From (23) we have

$$\begin{aligned} u\bar{u} &= e^4 |k_r k_s|^2 / 4h^2 v_0^2 c^2 \\ &\quad \times [\gamma_1 - i\rho, \gamma_2 + \rho, (\mathcal{D}, \mathcal{D})] 2(1 - \rho_s) [\gamma_1 + i\rho, \gamma_2 + \rho, (\mathcal{D}, \mathcal{D})] \\ &= e^4 |k_r k_s|^2 / 2h^2 v_0^2 c^2 \\ &\quad \times [\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \mathcal{D}^2 + 2\gamma_1 \rho, (\mathcal{D}, \mathcal{D}) + (\gamma_2^2 + \mathcal{D}^2 - \gamma_1^2) \rho_s + 2\gamma_1 \gamma_2 \rho_s]. \end{aligned}$$

We now obtain for the diagonal sum of $\Psi_2 \Phi_2$

$$\begin{aligned} &c^2 e^4 |k_r k_s|^2 / W'^2 h^2 v_0^2 \cdot [(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \mathcal{D}^2)(W'^2/c^2 + \rho_s'^2 + m^2 c^2) \\ &\quad - 4\gamma_1 W'/c \cdot (\mathcal{D}, \rho_s') - 2(\gamma_2^2 + \mathcal{D}^2 - \gamma_1^2) W' m] \\ &\quad \times [1 - \cos \delta W' t/h] / \delta W'^2 \\ &= 2e^4 |k_r k_s|^2 / W' h v_0^2 [(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \mathcal{D}^2)(v_r + v_s - v_0) \\ &\quad - 2\gamma_1 (\mathcal{D}, v_r \rho_r + v_s \rho_s) + (\gamma_2^2 + \mathcal{D}^2 - \gamma_1^2) v_0] [1 - \cos \delta W' t/h] / \delta W'^2 \end{aligned}$$

with the help of (20) and (21). From (24) it is easily verified that

$$\begin{aligned} (\gamma, \rho_s) &= (m_r \times n_s, \rho_s) + (m_s \times n_r, \rho_s) \\ &= (m_r, m_s) + (n_r, n_s) = (\mathcal{D}, \rho_r) \end{aligned}$$

and also that

$$\mathcal{D}^2 + \gamma_2^2 = 2 + 2(m_r, m_s)(n_r, n_s) + 2(m_r, n_s)(m_s, n_r)$$

Our expression for the density now reduces to

$$\frac{16e^4 |k_r k_s|^2}{W' h v_0} B \frac{1 - \cos \delta W' t/h}{\delta W'^2}$$

where

$$B = -(m_r, m_s)^2 + \frac{1}{4} \{ 1 - (m_r, m_s)(n_r, n_s) + (m_r, n_s)(m_s, n_r) \} (v_r + v_s) / v_0. \quad (27)$$

This density divided by the initial density, which we

found in §3 to be δ , gives us the probability of an electron making a transition in the time t . Putting

$$I_r = v_r^2 / 2\pi c \cdot |K_r|^2, \quad I_s = v_s^2 / 2\pi c \cdot |K_s|^2,$$

I_r and I_s being the intensities, (i.e. the amounts of energy crossing unit area per unit time,) of the two incident beams, we get for this transition probability

$$I_r I_s \frac{8\pi^2 c^2 e^4}{|W| h \nu_0 v_r^2 v_s^2} B \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2}$$

To get a transition probability that has a physical meaning we must suppose one of the incident beams, say the beam s , to be not sharply monochromatic, but to consist of an intensity I_{sv} per unit frequency range about the correct frequency for the transition processes to be able to take place. The total probab.

for a transition in the time t will now be given by

$$I_r I_{sv} \frac{8\pi^2 c^2 e^4}{|W| h \nu_0 v_r^2 v_s^2} B \int \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2} \frac{dv_s}{2\pi} \quad (28)$$

Variations of v_s are connected with variations of $\delta W'$ through eq (21) and (25). These eq. give, with neglect of terms of order $\delta W'$,

$$\begin{aligned} \frac{d\delta W'}{dv_s} &= -\frac{c^2}{2W'} \frac{d}{dv_s} [W'^2/c^2 - p_0'^2 - m^2 c^2] \\ &= -\frac{c^2}{2W'} \frac{h^2}{c^2} [2(v_r + v_s - v_0) - 2(l_s, v_r l_r + v_s l_s)] \end{aligned}$$

$$= h^2 \nu_0 \nu_r / W' \nu_s$$

with the help of (22). Thus the integrand in (28) has the value

$$\frac{W' \nu_s}{2\pi h^2 \nu_0 \nu_r} \int \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2} d\delta W' = \frac{W' \nu_s}{2h^2 \nu_0 \nu_r} t,$$

and the transition probability (28) itself has the value

$$I_r I_{sv} \frac{4\pi^2 c^4 e^4}{h^4 \nu_0^2 \nu_r^2 \nu_s} Bt = I_r I_{sv} \frac{4\pi^2 e^4}{m^2 c^2 h^2 \nu_r^2 \nu_s} Bt.$$

We now have a transition probability that increases linearly with the time and by removal of the factor t we obtain the transition probability per unit time.

If we substitute for I_{sv} the stimulation coefficient $2\pi h/c^2 \cdot (\nu_s/2\pi)^3$, we shall get the probability of a process in which the s -photon is spontaneously emitted and the r -photon is stimulated, this probability being per unit solid angle of direction of emission of the s -photon about \mathcal{E}_s . This probability per unit time is thus

$$I_r \frac{e^4}{m^2 c^4 h} \frac{\nu_s^2}{\nu_r^2} B. \quad (29)$$

If we further substitute for I_r the stimulation coef. $2\pi h/c^2 \cdot (\nu_r/2\pi)^3$, we shall get the probability per unit time of a double spontaneous emission. This probability, namely

$$\frac{e^4 \nu_s^2}{4\pi^2 m^2 c^6} B, \quad (30)$$

is per unit solid angle of direction of emission of the s-photon about \mathcal{L}_s and of the r-photon about \mathcal{L}_r and also per unit frequency range of the r-photon, the frequency of the s-photon being determined by (22).

To get the total transition probability with either state of polarisation for the emitted s-photon, we must substitute for B, instead of expression (27), the expression obtained by summing (27) and what we get from (27) by putting m_s for m_r and $-m_s$ for m_r . This sum is

$$B = -(m_r, m_s)^2 - (n_r, n_s)^2 + \frac{1}{4} \{ 2 - 2(m_r, m_s)(n_r, n_s) + 2(m_r, n_s)(m_s, n_r)(v_r + v_s)/v_0 \}$$

$$= -1 + (m_r, \mathcal{L}_s)^2 + \frac{1}{2} \{ 1 - (\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_s) \} (v_r + v_s)/v_0 \quad (31)$$

$$= -\sin^2 \phi + \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta) (v_r + v_s)/v_0 \quad (32)$$

where Θ is the angle between \mathcal{L}_r and \mathcal{L}_s , the directions of motion of the two beams, and ϕ is the angle between m_r and \mathcal{L}_s . To get the total transition probability with either state of polarisation also for the r-photon, we must make the further sum of expression (31) and what we get from (31) by putting n_r for m_r . This further sum is

$$B = -(1 + \cos^2 \Theta) + (1 - \cos \Theta) (v_r + v_s)/v_0 \quad (33)$$

Our calculation as far as formula (29) will apply to the

process of absorption of an ν photon and emission of an ν_s -photon, i.e., the process of the scattering of a photon from the ν -beam to the ν_s -beam, provided that we just change the sign of ν_r all through. Thus the probab. of scattering per unit time per unit solid angle will be given by (29), with B given by (32), provided that we write $-\nu_r$ for ν_r . This result is agreement with that of Klein and Nishina

§ 6. The Annihilation Probability,

The probability of a double emission per unit time per unit solid angle of direction of emission of each photon per unit frequency range for the ν -photon is given by formula (30), with B given by (33), and is thus

$$\frac{e^4 \nu_s^2}{4\pi^2 m^2 c^6} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) + (1 - \cos \theta) (\nu_r + \nu_s) / \nu_0 \right\},$$

where θ is the angle between the two directions of emission. It is convenient to express this result as a probability per unit energy range for the final electron rather than per unit frequency of the ν -photon. If we keep the two directions of emission fixed and vary ν_r , thereby causing a variation in ν_s in accordance with eq. (22), we shall

$$\text{have } \frac{d\nu_r}{\nu_r^2} = -\frac{d\nu_s}{\nu_s^2} = \frac{d(\nu_r + \nu_s)}{\nu_r^2 - \nu_s^2} = -\frac{dW'}{h(\nu_r^2 - \nu_s^2)}$$

from (21). Taking for definiteness the case $v_r > v_s$, we obtain

$$\left| \frac{d(v_r/2\pi)}{dW'} \right| = \frac{1}{2\pi h} \frac{v_r^2}{v_r^2 - v_s^2},$$

so that the transition probability per unit range of W' is

$$\frac{e^4}{8\pi^3 h m^2 c^6} \frac{v_r^2 v_s^2}{v_r^2 - v_s^2} \left\{ -(1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{\gamma} + (1 - \cos \theta) (v_r + v_s) / v_0 \right\},$$

With the help of (22) this may be expressed as

$$\frac{e^4}{8\pi^3 h^3 c^2} \frac{(1 - \cos \theta) \gamma - (1 + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \left\{ (1 - \cos \theta)^2 - 4(1 - \cos \theta) / \gamma \right\}^{1/2}} \quad (34)$$

where $\gamma = (v_r + v_s) / v_0 = |W'| / mc^2 + 1 > 2$,

We shall now integrate (34) over all direction of emission to obtain the total probability per unit time of processes ending with the electron having an energy between W' and $W' + dW'$. To integrate over all directions of emission of the s -photon we must multiply (34) by $2\pi \sin \theta d\theta$ and integrate with respect to θ , the limits of integration being $\cos \theta = -1$ and $\cos \theta = 1 - 4/\gamma$, and then to integrate over all directions of emission of the r -photon we must multiply by a further factor 4π . This gives us altogether, putting $1 - \cos \theta = z$,

$$\frac{e^4}{\pi h^3 c^2} \int_{4/\gamma}^2 \frac{(2+\gamma) z - z^2 - 2}{z (z^2 - 4z/\gamma)^{1/2}} dz$$

$$= \frac{e^4}{\pi h^3 c^2} \left[\left(2 + \gamma - \frac{2}{\gamma}\right) \log \left\{ 2 - \frac{2}{\gamma} + \left(2^2 - \frac{4z}{\gamma}\right)^{1/2} \right\} - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \left(\frac{z^2 - 4z}{\gamma}\right)^{1/2} \right]_{z=4/\gamma}^{z=2}$$

$$= \frac{e^4}{\pi h^3 c^2} \left[(2 + \frac{2}{\gamma}) \log \left\{ \gamma - 1 + (\gamma^2 - 2\gamma)^{\frac{1}{2}} \right\} - (2 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= e^4 / \pi h^3 c^2 \cdot f(\alpha) \quad (35)$$

say, where

$$\alpha = \gamma - 1 = |W'| / mc^2$$

and $f(\alpha) = \left\{ \alpha + 3 - 2 / \alpha + 1 \right\} \log \left\{ \alpha + (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\}$
 $- (\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\alpha + 3) / (\alpha + 1).$

Expression (35) multiplied by dW' is the total probab. per unit time of an electron making a double emission process and finish with an energy between W' and $W' + dW'$. The amount of momentum space in this energy range is $4\pi P' |W'| dW' / c^2$, where P' is the magnitude of the momentum corresponding to energy W' , i.e.

$$P'^2 = W'^2 / c^2 - m^2 c^2 = m^2 c^2 (\alpha^2 - 1).$$

Thus the transition probability per unit of momentum space for the final electron is

$$e^4 / 4\pi^2 h^3 P' |W'| \cdot f(\alpha). \quad (36)$$

If we have initially one electron per unit volume, then expression (36) gives the number of transitions per unit time per unit of phase space for the final electron.

Up to the present we have supposed all the negative-energy states to be unoccupied, so that electrons can fall into them freely. We now assume them all to be occupied except one, and this one to correspond to a proton moving with energy $|W'|$. The existence of this proton will mean an

©2022 THAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$\text{Klein-Nishina: } S = \frac{2\pi N e^4}{m^2 c^4} \left\{ \frac{1+d}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+d)}{1+2d} - \frac{1}{\alpha} \log(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \log(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\}$$

amount $(2\pi h)^3$ of vacant phase space in the distribution of negative-energy electrons. It is only into this vacant cell of phase space that a positive-energy electron can fall. Thus if there is one positive-energy electron per unit volume, the probab. per unit time of one of them falling into the vacant phase space will be expression (36) multiplied by $(2\pi h)^3$. The vacant cell must, however, be associated with the correct direction of spin for each elementary transition process* with a definite initial direction of spin for the positive-energy electron. With random directions of spin for the proton and electrons, there will be a further factor $\frac{1}{2}$ in the transition probab. per unit time, which will therefore be

$$\frac{\pi e^4}{p' |W'|} f(\alpha) = \frac{\pi e^4}{m^2 c^4} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha^2+4\alpha+1}{(\alpha^2-1)^{\frac{1}{2}}} \log \left\{ \alpha + (\alpha^2-1)^{\frac{1}{2}} \right\} - (\alpha+3) \right] \quad \dots (37)$$

This expression divided by the velocity of the proton gives the effective area that it must hit in order to combine with an electron and disappear into radiation.

We cannot give an accurate numerical interpretation to our result (37) because we do not know whether the m there refers to the mass of the electron or of the proton. Presumably it is some kind of mean. In any case the result (37)

* An elementary transition process is one with definite directions of emission and states of polarisation for the emitted photons.

is much too large to agree with the known stability of electrons and protons. It gives an effective collision area of the order of magnitude of the classical size of the electron or proton with relative velocities comparable with the velocity of light, this effective collision area tending to infinity as the relative velocity tends to zero. We thus have to suppose that the interaction between the electron and proton, which has here been neglected, very considerably reduces the collision area, at any rate for all ordinary velocities. Possibly for very high velocities the result (37) is accurate when m is given the proper value.

-11790.

Die Selbstenergie des Elektrons

Von W. Meißnerberg in Leipzig.
(Eingegangen am 3. August 1930.) 25. 65, 4, 1930.

1. Einleitung. In der klassischen Theorie werden die Feldstärken E und H in der Umgebung einer punktförmigen Ladung e beliebig groß, so daß das Integral über die Energiedichte $\frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$ divergiert. Man nimmt daher, um diesem Übelstand zu entgehen, in der klassischen Elektromechanik einen endlichen Radius r_0 des Elektrons an, der mit der Masse m des Elektrons in der Größenordnungsbeziehung $r_0 \sim e^2/mc^2$ steht; es wird dann das Integral über die Energiedichte von der Ordnung mc^2 . In der Quantentheorie spielt neben diesem Radius r_0 eventuell noch eine andere für das Elektron charakteristische Länge $\lambda_0 = h/mc$ für die Selbstenergie eine Rolle. Bei einer oberflächlichen korrespondenzmäßigen Betrachtung würde man vermuten, daß auch in der Q. T. die Selbstenergie des punktförmigen Elektrons unendlich werden muß.

In der Tat haben auch Oppenheimer* und Waller** gezeigt, daß ein Störungsverfahren, das nach Potenzen von e fortschreitet, keine endlichen Werte für die Selbstenergie liefert. Es sieht also zunächst so aus, als ob auch in der Q. T. aus dieser Schwierigkeit nur die Einführung eines endlichen Elektronenradius helfen könnte. Eine nähere Diskussion zeigt jedoch, daß eine solche Ein-

* 35, 461

** 62, 673

führung ganz radikale Änderungen unserer bisherigen Quanten-
Begriffe mit sich bringen würde, da man nach den bis-
herigen Prinzipien stets beliebig kleine Wellenpakete
für ein Elektron konstruieren kann. (Dieser Satz gilt
nicht mehr allgemein, wenn man in der Diracschen
Spintheorie zum Aufbau der Wellenpakete nur Zustände
positiver Energie zulässt. Ich glaube aber nicht, daß
dieser Umstand für die Frage der Selbstenergie wesentlich
ist.) Entschließt man sich zu einer derartigen grund-
sätzlichen Abänderung der Quantentheorie, so erscheint
es zunächst naheliegend, den Radius r_0 etwa in der
Weise einzuführen, daß man den Raum in Zellen der
endlichen Größe r_0^3 einteilt und Differenzgleichungen
an stelle der bisherigen Differentialgleichungen setzt.
In einer solchen Gitterwelt wäre jedenfalls die Selbst-
energie des Elektrons endlich. Obwohl eine solche
Gitterwelt wäre jedenfalls die Selbstenergie des auch sonst
noch bemerkenswerte Eigenschaften besitzt, so muß man
doch auch daran denken, daß sie zu Abweichungen von
der bisherigen Theorie führt, die experimentell
nicht wahrscheinlich sind. Insbesondere ist die Aus-
sage, daß eine kleinste Länge existiert, nicht mehr
relativistisch invariant und man sieht kleinste bei den

2021.11.15 湯川記念館史料室。31-11 Wellenpakete 7 8 8 8 2 4 8 8 8
positive, negative energy state 7 4 1 eigenfunction 7 1 7 7 1 1 7 3 2 2 2 2

Weg, die Forderung der relativistischen Invarianz mit der grundsätzlichen Einführung einer kleinsten Länge in Einklang zu bringen.

Es erscheint also einstweilen richtiger, die Länge r_0 nicht in die Grundlagen der Theorie einzuführen, sondern an der relat. Invarianz festzuhalten. Stellt man sich diesem zweiten Standpunkt, so erhält man eine wesentliche Vereinfachung des gestellten Problems, wenn man nur die Bewegung der Elektronen und der Protonen betrachtet, bei denen die ihre Geschwindigkeit nahezu die Lichtgeschwindigkeit und ihre Energie sehr groß gegen mc^2 und Mc^2 (M Protonenmasse) ist. * Für solche Bewegungen kann man nämlich die Ruhemasse des Elektrons und des Protons vernachlässigen und wir werden daher im folgenden stets mit $m = M = 0$ rechnen. In dieser vereinfachten Theorie kommen nur noch die Konstanten h , c und e vor; die Gleichungen sind übrigens in Protonen und Elektronen jetzt völlig symmetrisch. In einer solchen Theorie ist für die Einführung eines Elektronenradius kein Platz mehr, da sich aus den Konstanten h , c und e rein dimensionsmäßig keine Länge bilden läßt. ** Die Selbstenergie des Elektrons muß hier also aus anderen Gründen endlich bleiben. Die nähere Untersuchung zeigt auch, daß

120 * $v = \frac{q}{10} c \cdot \tau \cdot \epsilon$

** $h = m \frac{x}{t}$, $e^2 = m \frac{x^2}{t^2}$, $c = \frac{x}{t}$, $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{19}} \approx 2,11 \dots = 10 + 3 \alpha$, $\frac{e^2}{hc} = \text{dim. los}$ $\frac{e^2}{hc} = \frac{x}{t}$

zwischen Q.T. und der klassischen Auffassung gerade hinsichtlich der Selbstenergie so tiefgehende Unterschiede bestehen, daß die korrespondenzmäßige Betrachtung nichts mehr bedeutet kann. Wir wollen diese Unterschiede kurz aufzählen: In der Q.T. ist die Energie des Elektrons gar nicht durch $\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$ gegeben, vielmehr kommen hierzu noch Glieder von der Wechselwirkung des Materiefeldes und des Maxwell'schen Feldes. Ferner sucht man in der klassischen Theorie stationäre Lösungen der Gleichung $\text{div } \mathbf{E} = 0$ mit keiner Singularität in einem Punkt. In der Q.T. zerstreut sich ein punktförmiges Wellenpaket im allgemeinen sofort; es handelt sich also nicht um stationäre Lösungen von $\text{div } \mathbf{E} = 0$ mit einer Singularität, sondern um zeitlich veränderliche Felder, für die $\text{div } \mathbf{E}$ sich genau so verhält wie das Wellenpaket. In der klassischen Theorie wird ferner die Geschwindigkeit des Elektrons stets kleiner als c angenommen, in der Diracschen Theorie bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit ($q_i = \alpha_i \cdot c$, $\alpha_i^2 = 1$). In der Q.T. bestehen schließlich zwischen den Feldgrößen V, \mathbf{R} , die bei kleinen Quantenzahlen Abweichungen von der kl. Theorie hervorrufen. Die Rechnung wird zeigen, daß wegen des empirischen Zahlenwertes der Elektronenladung diese Abweichungen wesentlich sein können.

2. Mathematische Formulierung der Selbstenergie. Um die Bedingungen für das Auftreten einer eventuell unendlichen Selbstenergie zu untersuchen, schreiben wir zunächst die Grundgleichungen der Q.F.D.* für den Spezialfall $m = M = 0$ an:

$$\bar{H} = \int dV \left[\alpha_{\rho\sigma}^{\kappa} \psi_{\rho}^* \left(\frac{\hbar c}{2\pi i} \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_{\kappa}} + e \psi_{\sigma} \Phi_{\kappa} \right) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right],$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e \psi_{\rho}^* \psi_{\rho} \\ \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} = \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \\ \mathbf{E}_i = -4\pi c \Pi_i, \\ \psi_{\rho}^*(P) \psi_{\sigma}(P') + \psi_{\sigma}(P') \psi_{\rho}^*(P) = \delta(P-P') \delta_{\rho\sigma}, \\ \Pi_i(P) \Phi_{\kappa}(P') - \Phi_{\kappa}(P') \Pi_i(P) = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta(P-P') \delta_{i\kappa} \end{array} \right.$$

Hierin bedeutet \bar{H} die Hamiltonschen Funktionen, ψ_{ρ} die Diracschen Funktionen, α^{κ} die Spinmatrizen, Φ_{κ} die Komponenten des mg. Potentials, δ die Diracsche δ -F \bar{u} im Raume. Durch eine geringfügige Abänderung der Variablen läßt es sich erreichen, daß in der Hamil. Funktion die universellen Konstanten nur in einem gemeinsamen Faktor auftreten. Wir setzen also

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \sqrt{2\hbar c} \mathbf{a} \quad , \quad \Phi_i = \sqrt{2\hbar c} \varphi_i \quad , \quad \gamma \quad (2) \\ \mathbf{E}_i = \sqrt{2\hbar c} \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{H}_i = \sqrt{2\hbar c} \mathbf{h}_i \end{array}$$

* H.P. I, II

$$\mu^2 = \left(\frac{2\pi e^2}{hc} \right) \cdot 4\pi = 4\pi \alpha,$$

und es folgt:

$$\bar{H} = \frac{hc}{2\pi} \int dV \left[\alpha_{\rho\sigma}^{\kappa} \psi_{\rho}^* (-i \frac{\partial \psi}{\partial x_{\kappa}} + \mu \psi_{\sigma} \varphi_{\kappa}) + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right],$$

$$\text{div } \mathbf{e} = -\mu \psi_{\rho}^* \psi_{\rho}$$

$$\psi_{\rho}^*(P) \psi_{\sigma}(P') + \psi_{\sigma}(P') \psi_{\rho}^*(P) = \delta(P-P') \delta_{\rho\sigma}, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_{\kappa}(P) \varphi_{\ell}(P') - \varphi_{\ell}(P') \mathbf{e}_{\kappa}(P) = i \delta(P-P') \delta_{\kappa\ell}.$$

Hierin bedeutet μ den Ausdruck $\frac{4\pi e^2}{\sqrt{2hc}}$, also eine reine Zahl, deren Wert ungefähr 0,303... beträgt. Aus dem Umstand, dass μ keineswegs groß gegen Eins ist, folgt, dass die Abweichungen, die stets bei kleinen Quantenzahlen zwischen Q.T und kl. Th. auftreten, für das Problem der Selbstenergie wesentlich sein können. Die Felder \mathbf{e} und \mathbf{h} haben die Dimension einer reziproken Fläche.

Von den Materiewellen ψ kann man durch eine einfache Transformation übergehen zu den Koordinaten der materiellen Teilchen[†]. Es soll hier diese Transformation unter der speziellen Annahme ausgeführt werden, dass nur ein Elektron vorhanden ist. Ferner wollen wir, abweichend von der üblichen Bezeichnungsweise, das $2\pi/h$ fache des Elektronenimpulses $p(p_1, p_2, p_3)$ nennen. Es gilt dann in den neuen Variablen:

$$\bar{H} = \frac{hc}{2\pi} \left\{ \alpha^{\kappa} [p_{\kappa} + \mu \varphi_{\kappa}(q)] + \int dV \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right\}, \quad (4)$$

~~$\alpha^{\kappa} = \frac{2\pi}{h} p_{\kappa}$~~ $\alpha_{\kappa} = \frac{2\pi}{h} p_{\kappa}$ usw. $\mu \in \{L, T\} \rightarrow 0$

* II. 97.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_p \mathbf{e} &= -\mu \delta(P - P_0), \\
 p_k g_l - g_l p_k &= \frac{1}{i} \delta_{kl}, \\
 e_k(P) \varphi_l(P') - \varphi_l(P') e_k(P) &= i \delta(P - P') \delta_{kl}.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \operatorname{div}_p \mathbf{e} &= -\mu \delta(P - P_0), \\ p_k g_l - g_l p_k &= \frac{1}{i} \delta_{kl}, \\ e_k(P) \varphi_l(P') - \varphi_l(P') e_k(P) &= i \delta(P - P') \delta_{kl}. \end{aligned}} \right\} (4)$$

(P_0 oder g charakterisiert den Ort des Elektrons,) Es soll im folgenden also nur das Einelektronenproblem diskutiert werden, da für die Frage der Selbstenergie die Erweiterung auf mehrere Elektronen nur überflüssige Komplikationen ergäbe.

Für den Gesamtimpuls G_{π} des Wellenfeldes berechnet man (nach l.c. I (13);

$$\begin{aligned}
 G_{\pi} &= \frac{\hbar}{2\pi} (\mathbf{p} + \mu \mathbf{a}) + \frac{1}{4\pi c} \int dV \frac{1}{2} \{ [\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}] - [\mathbf{H} \parallel \mathbf{E}] \} \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \left[\mathbf{p} + \mu \mathbf{a} + \int dV \frac{1}{2} \{ [\mathbf{e} \parallel \mathbf{g}] - [\mathbf{g} \parallel \mathbf{e}] \} \right].
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

Es ist nun eine Besonderheit des Einelektronenproblems, daß sich hier die Elektronenkoordinaten mit Hilfe des Gesamtimpulses völlig aus der Hamiltonschen Funktion eliminieren lassen. Durch Einsetzen von (5) in (4) ergibt sich:

$$(6) \quad H = c \alpha^k G_{Tk} + \frac{\hbar c}{2\pi} \int dV \frac{1}{2} \{ e^k + \eta^2 - \alpha^k ([\mathbf{e} \parallel \mathbf{g}] - [\mathbf{g} \parallel \mathbf{e}])_k \}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas umformen, wenn man nach Dirac die Spinmatrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (als Vektor einfach „ σ “ geschrieben) und die Matrizen ρ_1, ρ_2, ρ_3 einführt, die mit

den Diracschen α^k in der Beziehung stehen: $\alpha^k = \rho, \sigma^k$;

$\alpha^4 = \beta_3$, Es wird aus (6):

$$\bar{H} = c \cdot \alpha^k G_k + \frac{hc}{2\pi} \int dV \frac{1}{2} (\sigma, \rho_2 \mathbf{e} - \beta_3 \eta)^2, \quad (7)$$

Die Komponenten des Gesamtimpulses genügen dabei den U.-R. (I, gl. (23)):

$$G_k g_l - g_l G_k = \frac{1}{i} \delta_{kl}, \quad G_k \varphi_l - \varphi_l G_k = c \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}, \quad (8)$$

Die Elektronenkoordinaten sind aus (7) ganz herausgefallen, sie kommen nur noch in der Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{e} = -\mu \delta (P - P_g) \quad (9)$$

vor.

Für ein kräftefreies Elektron muß nun nach der Diracschen Theorie die gl.

$$\bar{H} = c \alpha^k G_k \quad (9)$$

bestehen, Das Volumenintegral, welches in (7) außerdem noch auftritt: $\int dV \frac{1}{2} (\sigma, \rho_2 \mathbf{e} - \beta_3 \eta)^2$

kann daher als die „Selbstenergie“ des Elektrons gedeutet werden und muß in einer korrekten Theorie für ein kräftefreies Elektron verschwinden. Dies ist nur möglich, wenn im ganzen Raum

$$(\sigma, \rho_2 \mathbf{e} - \beta_3 \eta) = 0, \quad (10)$$

Es soll also ein Schrödingerfunktional $\Psi_p(\varphi, q)$ ($p=1, 2, 3, 4$) gemacht werden, das der gl:

$$(\sigma, \rho_2 \mathbf{e} - \beta_3 \eta) \Psi_p(\varphi, q) = 0 \quad (11)$$

genügt. Ferner soll die Bedingung (11) auch im Laufe der Zeit bestehen bleiben, es muss also für die spezielle Lösung (11) der Ausdruck (10) mit \bar{H} vertauschbar sein, d. h., es muss auch gelten:

$$(\sigma, \beta_2 \mathbf{e} - \beta_3 \mathbf{h}) \alpha^k \nabla_k \Psi_p(q, q) = 0. \quad (12)$$

Wenn es gelingt, Lösungen von (11) und (12) anzugeben, bei denen außerdem die Bedingung

$$\operatorname{div}_p \mathbf{e} = -\mu \delta(P - P_q) \quad (4)$$

erfüllt ist, so ist die Frage der Selbstenergie befriedigend gelöst,

3. Das Eigenfeld des Elektrons. Bevor die Lösungen von (11), (12) und (4) untersucht werden, soll zunächst die Frage behandelt werden, ob für $\mu = 0$ die Hamiltonsche \bar{H}_2 in zwei Teile zerfällt, von denen der erste

$$\bar{H}_1 = \frac{\hbar c}{2\pi} \alpha^k p_k \quad (13)$$

die Diracsche Hamiltonian \bar{H}_1 einer kräftefreien Partikel, der zweite

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{8\pi} \int dV (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{\hbar c}{2\pi} \int dV \frac{1}{2} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$$

die Hamiltonsche \bar{H}_2 der Vakuumelektrodynamik bedeutet. Das Schröd. fnal, das für $\mu = 0$ zur Hamilton \bar{H}_2 (4) gehört, kann also geschrieben werden als Produkt von zwei \bar{H}_1 'en, von denen die erste $\chi_p(q)$ nur von den Partikelvariablen (q_i und dem Diracschen Index p) abhängt; die zweite

ist ein Funktional $X(\varphi_k)$ der Feldstärken, das die Schröd.gl. der Vakuumelektrodynamik:

$$\left[\bar{H} - \frac{\hbar c}{2\pi} \int dV \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \right] X(\varphi_k) = 0 \quad (14)$$

und

$$\text{div } \mathbf{E} \cdot X(\varphi_k) = 0$$

befriedigt. Für die erste $\bar{H} \equiv X_p(q)$ gilt:

$$\left(\bar{H}_1 - \frac{\hbar c}{2\pi} \alpha^k p_k \right) X_p(q) = 0, \quad (15)$$

Das Produkt

$$\Psi_p(q, \varphi_k) = X_p(q) \cdot X(\varphi_k) \quad (16)$$

ist eine Lösung der durch (4) für $\mu=0$ gegebenen Schröd.gl. Wir sehen also, daß es zu jeder Lösung in der Vakuumelek., auch Lösung von (4) für $\mu=0$ gibt. Wählt man speziell Lösungen der Vakuum. E.D., für die der Energie-Impulsvektor ein Nullvektor ist, d.h. Lösungen, die einem Lichtquant (oder mehreren in der gleichen Richtung laufenden Lichtquanten) entsprechen, so läßt sich durch geeignete Wahl der Lösung von (15) stets erreichen, daß auch die gl.

$$\left[\bar{H} - c \alpha^k G_k \right] \Psi = 0 \quad (17)$$

erfüllt ist. Denn zu ihrer Gültigkeit ist ja nur erforderlich, daß die Energie des Systems aus dem Absolutbetrag des Impulses durch Multiplikation mit c hervorgeht.

Für solche ein Funktional $\Psi_p(q, \varphi)$ sind daher auch notwendig die gl. (11) und (12) erfüllt. Gäbe es insbesondere

Lösungen der Vakuum \mathbf{E}, \mathbf{D} , für den vollkommen leeren Raum, in dem also Energie und Impuls des Strahlungsfeldes verschwinden, so könnte man durch Multiplikation mit jeder beliebigen Lösung von (15) wieder eine Lösung von (17) und daher von (11) und (12) erhalten. Bekanntlich existieren in der bisherigen Quantentheorie der Wellen wegen der unendlichen Nullpunktsenergie des Strahlungsfeldes keine solchen Lösungen.

Wir gehen nun zum eigentlichen Problem: Lösung der Gl (11) und (12) für $\mu \neq 0$ über. Dabei interessieren wir uns fürs erste nicht für den zeitlichen Ablauf und suchen daher nur die beiden Gl.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma, \rho_2 \mathbf{e} - \rho_3 \mathbf{h}) &= 0, \\ \operatorname{div}_p \mathbf{e} &= -\mu \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_q) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

zu befriedigen. Speziell kann man jetzt den Punkt \mathbf{P}_q in den Anfangspunkt des Koordinatensystems legen und erhält dann $\operatorname{div} \mathbf{e} = -\mu \delta(\mathbf{P})$.

Wir wollen ferner zuerst klassische Theorie treiben und \mathbf{e} und \mathbf{h} als vertauschbar c -Zahlen betrachten; über den Sinn solcher Rechnungen soll später gesprochen werden. Dann hängt das Funktional nur noch vom Diracschen Index p ab. Diesen Index ($p = 1, \dots, 4$) wollen wir als Repräsentant für zwei Indizes auffassen, die jeweils der zwei

Werte 1 und 2 fällig sind; wir schreiben also statt $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ bzw. $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{21}, \Psi_{22}$. Auf den zweiten Index sollen nur die Spinmatrizen

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

auf den ersten Index nur die Matrizen

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad \rho_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \rho_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

wirken. Da keine Richtung im Raume ausgezeichnet ist, so muß die Abhängigkeit der Größe Ψ von der Indizes noch willkürlich wählbar sein. Wir nehmen etwa an, daß nur Ψ_{11} von Null verschieden ist:

$$(\Psi_{12} = \Psi_{21} = \Psi_{22} = 0),$$

d.h. wir betrachten ein Elektron, dessen Spin in der positiven z -Richtung orientiert ist und dessen Energie bei positivem z -Impuls positiv ist.

Aus (18) folgen dann die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} e_z - i\hbar \nabla_z = 0 & & e_x + i e_y - i\hbar \nabla_x + \hbar \nabla_y = 0, \\ \operatorname{div}_p e = -\mu \delta(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ferner gilt $\operatorname{div} \hbar = 0$. Die Gleichungen werden gelöst durch den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} e_z = \hbar_z = 0, \\ e_x = -\hbar_y = -\frac{\mu x}{2\pi(x^2+y^2)} \delta(z), \\ e_y = \hbar_x = -\frac{\mu y}{2\pi(x^2+y^2)} \delta(z). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$\delta(x)$ bedeutet hier die Diracsche δ -F \ddot{u} einer Variablen.
Die gl (22) geben das korrespondenzmässige Analogon zum
quanten theoretischen Eigenfeld des Elektrons; es scheint
zunächst weitgehend verschieden vom klassischen Eigen-
feld $\Phi = -\mu r / 4\pi r^3$. Es läßt sich aber leicht zeigen
— worauf mich Herr Beck freundlicherweise aufmerk-
sam machte —, daß man das Feld (22) aus dem Coulomb-
schen Felde erhalten kann, wenn man durch Lorentz-
transformation zu einem System übergeht, das sich mit
Lichtgeschwindigkeit in Richtung der z-Achse bewegt.*
Daß das Feld (22) eben einem mit Lichtgeschw. in Richtung
der z-Richtung bewegten Elektron entspricht, wird weiter
unten gezeigt werden.

Wir gehen nun zur quanten theoretischen Behandlung von (11),
(12) und (9) über. Dabei machen wir zunächst die (sicher
mizutreffende) Annahme, daß es Lösungen der Vakuum-
E.D. für den völlig leeren Raum gäbe; also F \ddot{u} ale
 $\Psi_p^0(\varphi_k)$, für die

$$\bar{H} \Psi_p^0 = G \Psi_p^0 = 0, \quad \text{div } e \cdot \Psi_p^0 = 0$$

wird. Für diese F \ddot{u} ale muß außerdem die Abhängigkeit
von p noch willkürlich sein, da keine Richtung im
leeren Raum ausgezeichnet ist.

Wir setzen also:

* Man führt die Transformation zunächst für eine Geschw. $v < c$
durch und geht zum Limes $v \rightarrow c$ über.

$$\Psi_{12}^0 = \Psi_{21}^0 = \Psi_{22}^0 = 0$$

und betrachten $\Psi_{11}^0(\varphi_k)$ als die Lösung, Ferner seien die folgenden Ableitungen eingeführt:

$$e_{z^0} = \eta_{z^0} = 0,$$

$$e_{x^0} = -\eta_{y^0} = -\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-q_1)}{(x-q_1)^2 + (y-q_2)^2} \delta(z-q_3),$$

$$e_{y^0} = \eta_{x^0} = -\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{(y-q_2)}{(x-q_1)^2 + (y-q_2)^2} \delta(z-q_3),$$

$$\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0, \quad \varphi_3^0 = -\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \delta(z-q_3) \log[(x-q_1)^2 + (y-q_2)^2]$$

$$\alpha^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0).$$

Dann behaupten wir, daß das Funktional

$$\Psi_{11} = e^{-i\int \alpha^0 \partial \alpha^0} \cdot \Psi_{11}^0(\varphi_k - \varphi_k^0) e^{i\varphi_3^0}, \quad (24)$$

$$\Psi_{12} = \Psi_{21} = \Psi_{22} = 0$$

eine Lösung der Gl. (9), (11) und (12) darstellt. Zunächst folgt aus (8), daß der Operator G_k auf die Funktionen φ_k, e, η und φ_k^0, e^0, η^0 wie $i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ wirkt. Also gilt:

$$G_1 \Psi_{11} = G_2 \Psi_{11} = 0; \quad G_3 \Psi_{11} = G_3^0 \Psi_{11} \quad (25)$$

Bei der Bildung von

$$(\sigma, \rho_2 e - \rho_3 \eta) \Psi_{11}$$

ist zu beachten, daß der Operator $\sigma \rho_2 e$, der für $\Psi_{11}^0(\varphi_k)$ dem Operator $\sigma \rho_3 \eta$ äquivalent war, bei Anwendung auf (24) zwei weitere Glieder erzeugt; seine Anwendung ist also äquivalent der Multiplikation mit

$$(\sigma, p_3(hy - h_y^0) + p_2 e^0).$$

Das zweite Glied rührt von dem Exponentialausdruck in (24) her. Es wird also

$$(\sigma, p_2 e^0 - p_3 h_y) \Psi_p = (\sigma, p_2 e^0 - p_3 h_y^0) \Psi_p = 0. \quad (26)$$

Die Gültigkeit von (12) folgt aus (25) und (26). Schließlich ist auch

$$[\text{div}_p e + \mu \delta(P - P_0)] \Psi = 0 \quad (27)$$

nach (21) und (22).

Eine genau analoge Rechnung kann man aufstellen, wenn der Spin in der negativen z -Richtung orientiert ist. Durch Lorentztransformation kann man dann zur allgemeinsten Lösung für das kräftefreie Elektron übergehen.

Aus Lösungen vom Typus (24), die stationären Zuständen entsprechen, kann man durch Superposition auch Wellenpakete aufbauen und damit dem Eigenfeld (23) des Elektrons eine anschaulichere Bedeutung geben. Wir fügen etwa noch ein äußeres Magnetfeld der Stärke H in Richtung der negativen z -Achse zum System und setzen dementsprechend an Stelle der Größen Φ_1, Φ_2, Φ_3 die Werte $+\frac{1}{2} H \cdot y + \Phi_1$; $-\frac{1}{2} H x + \Phi_2$; Φ_3 ein. Die Lösung der Differentialgleichungen für ein äußeres ^{Dirac} Magnetfeld ist schon von Rabi* durchgeführt worden.

In genauere Analogie zu diesen Rechnungen von Rabi

* g. Rabi, 49, 507, 1928.

findet man z. B., daß unter denselben Bedingungen, unter denen (24) richtig ist, das Funktional

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \Psi_{11} &= e^{-i\int \alpha e^{\beta} dt} \cdot \Psi_{11}^0 (\varphi_{11} - \varphi_{11}^0) e^{-wH(q_1^2 + q_2^2) + iG_3^0 q_3} \\ \Psi_{12} &= \Psi_{21} = \Psi_{22} = 0 \end{aligned} \right.$$

einen stationären Zustand im Magnetfeld repräsentiert. (Hierin ist $w = \frac{\pi e}{2hc}$ gesetzt.) Durch Superposition gewinnt man das folgende Wellenpaket:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \Psi_{11} &= e^{-i\int \alpha e^{\beta} dt} \cdot \Psi_{11}^0 (\varphi_{11} - \varphi_{11}^0) e^{-wH(q_1^2 + q_2^2) - \frac{(q_3 - ct)^2}{\Delta q_3^2}} \\ \Psi_{21} &= \Psi_{12} = \Psi_{22} = 0. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet Δq_3 die Ausdehnung des Pakets in der z -Richtung. Gl. (29) stellt einen Vorgang dar, d. bei dem sich ein Wellenpaket konstanter Größe mit Lichtgeschw. in der positiven z -Richtung bewegt. Das dazugehörige el., mag. Feld ist in weitem Abstände vom Paket im wesentlichen durch (23) gegeben, es ist also nur in den Ebenen $|z - ct| \lesssim \Delta q_3$ merklich von Null verschieden.

Das Ein-Elektronenproblem ließe sich also korrekt ohne unendliche Selbstenergie behandeln, wenn da es Lösungen der Vakuumel. dyn. ohne Nullpunktenergie gäbe. Leider existieren solche Lösungen nicht. Allerdings kann man die Nullpunktenergie der Strahlung nach Landau und Peierls* durch formale Kunstbegriffe beseitigen.

* 62, 188, 1930.

~~$$H_s = \frac{1}{8\pi} \int M M dV$$~~

Dabei geht aber die einfache Form der Hamiltonschen F_H (14) verloren* und eine Anwendung dieser Kunstbegriffe auf das Einelektronenproblem erweist sich als unmöglich. Eine Lösung der Grundgleichungen (9), (11) und (12) ist also einstweilen nicht gefunden; es ist auch nicht wahrscheinlich, dass man ohne erhebliche Abänderungen der Quantentheorie der Wellenfelder zu einer Lösung gelangen wird. Der Zweck dieser Arbeit war, zu zeigen, dass die Schwierigkeiten der Feldtheorie nicht unmittelbar von der unendlichen Selbstenergie des Elektrons herrühren, dass vielmehr die Grundlagen der Feldtheorie noch einer Abänderung bedürfen.

©2022 THAL, IHP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Eine Bemerkung zu Einsteins neuer Formulierung des
 allgemeinen Relativitätssprinzips.

E. Wigner (Zs. 53, 592, 1929)

§ 1. In einer vor kurzem erschienenen Note* gibt A. Einstein eine Methode zu gleichzeitiger Beschreibung des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes an. Zur Charakterisierung der Metrik benutzt er dabei nicht den metrischen Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$, sondern führt in jedem Punkte der vierdimensionalen Welt ein infinitesimales Lorentzsches** Koordinatensystem ein. Die kovarianten Komponenten der vier Achsen ($a = 0, 1, 2, 3$) dieses Koord. systems in zugrunde gelegten Gaußschen System bezeichnet er mit $h_{\mu a}$, die kontravarianten mit $h^{\mu a}$ ***. Die kontravarianten Gaußschen Komponenten v^{μ} eines Vektors mit den Komponenten v_a im Lorentzsystem sind dann

$$v^{\mu} = h^{\mu a} v_a, \quad (1)$$

die Länge des Vektors v ist

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = g_{\mu\nu} h^{\mu a} h^{\nu b} v_a v_b = L_{ab} v_a v_b. \quad (2)$$

Dabei ist definitionsgemäß:

$$L_{ab} = \begin{cases} 0 & \text{für } a \neq b \\ 1 & \text{'' } a = b = 0 \\ -1 & \text{'' } a = b \neq 0. \end{cases}$$

Es gibt also für die Matrizen $g = (g_{\mu\nu})$, $\bar{h} = (h^{\mu a})$, $L = (L_{ab})$

$$\bar{h} g \bar{h} = L. \quad (3)$$

* Ber. Ber. 1928.

** Einstein verwendet zunächst ein infinitesimales euklidisches Koord. sys. Es ist aber - um vom relativistischen i frei zu kommen - für uns zweckmäßiger, sofort ein Lorentzsches System zu benutzen. Die Entfernung zweier Weltpunkte können wir dann $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 + dz^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ setzen, indem wir die Lichtges. $c=1$ annehmen. Auch die nicht q.m. Gleichungen sind dann alle

Die kontravarianten Komp. von v_a sind

$$v_\mu = h_{\mu a} v_a = g_{\mu\nu} v^\nu = g_{\mu\nu} h^{\nu a} v_a, \quad (4)$$

und es ist weiter $\underline{h} = (h_{\mu a})$

$$\underline{h} = \underline{g} \underline{h} ; \quad \underline{h}' \underline{h} = L ; \quad \underline{h}' = L \underline{h}^{-1} \quad (5)$$

Die transponierte der letzten Gl. ist

$$\underline{h}' = \underline{h}' \underline{g} ; \quad \underline{h}' \underline{h} = L ; \quad \underline{h} = \underline{h}'^{-1} L. \quad (6)$$

Damit erhalten wir, da $L = L^{-1}$ ist,

$$\underline{h}' \underline{g} \underline{h} = L \underline{h}' \underline{g} \underline{h}'^{-1} L = L ; \quad \underline{g} = \underline{h} L \underline{h}' \quad (7)$$

Ebenso ist $\underline{\bar{g}} = (g^{\mu\nu})$,

$$\underline{\bar{g}} = \underline{\bar{g}}^{-1} = \underline{h} L \underline{h}'. \quad (8)$$

Es ist klar, daß die metrische Form $g_{\mu\nu}$ die Komponenten $h_{\mu a}$ des infinitesimalen Lorentz'schen Koord. sys. nicht vollkommen bestimmt, es bleibt in jedem Punkte der Welt noch eine beliebige Lorentztransformation frei. Dies äußert sich darin, daß man in allen bisherigen Gl. auch $\underline{h} T$ für \underline{h} schreiben kann (wenn $T L T^{-1} = L$, d. h. T eine zwar von Weltpunkt zu Weltpunkt verschiedene, aber überall Lorentz'sche Transf. ist; es ist dann auch $T^{-1} L T = L$), \underline{g} bleibt dadurch ungedändert. Trotzdem nimmt A. Einstein weiterhin, daß die $h_{\mu a}$ bis auf eine einzige raumunabhängige Lorentztransf. rein reell. Auch die $g_{\mu\nu}$ können — soweit keine elektromag. Potentiale da sind — reell geschrieben werden.

*** Die Indizes a, b beziehen sich dann — wie bei A. Einstein — auf die Achsen des Lorentz'schen, alle anderen auf die Achsen des Gauß'schen Koordinatensystems.

sinnvoll sind, indem sie nicht nur die metrische Form, sondern auch die elektromag. Potentiale Φ_μ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\mu &= C \Lambda_{\mu\alpha}^\alpha; & \Lambda_{\mu\alpha}^\beta &= \frac{1}{2} (\Delta_{\mu\alpha}^\beta - \Delta_{\alpha\mu}^\beta); \\ \Delta_{\mu\alpha}^\beta &= h_\alpha^\beta \frac{\partial h_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \text{ Lab} \end{aligned} \right\} (9)$$

bestimmen.* weiter konnte Einstein aus einigen Wirkungsprinzipien in erster Näherung (d.h. wenn h nahezu die Einheitsmatrix ist) einerseits die Gl. der älteren Gravitationstheorie, andererseits die Maxwell'schen Gl. für das Vakuum ableiten.

§ 2. Vorliegende Bemerkung hat die Absicht, die soeben dargestellte Theorie auf die Dirac'schen Gl. des Dreielektro-ns anzuwenden. Bisher standen der allgemeine relat. Verallgem. der Dirac'schen Theorie ernste Schwierigkeiten im Wege***

Vom physikalischen Standpunkt ist die Einführung eines lokalen Lorentz'schen Koord. sys. in der Dirac'schen Theorie durchaus verminftig. Die Wahrscheinlichkeiten etwa für die Einstellung des Elektrons in die X- oder -X-Richtung sind nur dann unabhängig von den Wahrsch. für die Einstellung in die Y- oder -Y-Richtung, wenn diese Richtungen aufeinander senkrecht stehen. Durch diese und ähnliche Betrachtungen wird man bald auf die Zweckmäßigkeit der Einführung eines lokalen Koordinaten systems geführt. Unsere Vorstellung ist nun die, daß die relative Orientierung dieser lokalen Koord.-systeme zueinander durch das elektromag. Feld mitbestimmt ist.

* $\Delta_{\mu\alpha}^\beta$ ist kein Tensor. Die Größe C ist eine (sehr große) Konstante, im wesentlichen die reziproke Gravitationskonstante.

** Dirac; --, Neumann: Zs 48, 868, 1928.

Die Bewegungsgleichung des Elektrons ist dann

$$\sum_{k,a,b} \frac{1}{2} \left[\gamma_a h_b^k L_{ab} (p_k + e \Phi_k) + (p_k + e \Phi_k) \gamma_a h_b^k L_{ab} \right] \psi = m \psi, \quad (10)$$

wo links an Stelle des einfachen Ausdrucks bei Dirac der symmetrisierte treten mußte, weil p_k und h_b^k nicht vertauschbar ist sind. Führen wir an Stelle von p_k die Kovariante Diff. $\frac{\hbar}{2\pi i} \nabla_k$ ein, so erhalten wir, wenn wir für die Determinante $|h_{ka}| = -1$

$$= \sqrt{-1 \det} \text{ setzen und alle Differentiationen ausführen,}$$

$$\sum_{k,a,b} \left[\gamma_a h_b^k L_{ab} \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x^k} + e \Phi_k \right) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{2H} \gamma_a \frac{\partial H h_b^k}{\partial x^k} L_{ab} \right] \psi = m \psi, \quad (11)$$

wo, wie in (10), für die γ die Gl.

$$\frac{1}{2} (\gamma_a \gamma_{a'} + \gamma_{a'} \gamma_a) = L_{aa'} \quad (12)$$

gelten. Die Matrizen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind also hermitesch schieb, die Matrix γ_0 symmetrisch. Man überzeugt sich leicht, daß (10) oder (11) „drehungsvariant“ ist, indem man $\sum h_c^k T_{cb}$ für h_b^k einführt und $T L T' = L = T' L T$ beachtet. Dabei transformieren sich die vier Komponenten von ψ untereinander genauso, wie die vier Komp. des gewöhn. Diracschen ψ bei Drehungen des Raumes sich transformieren. Die Invarianz

*** Die Schwierigkeit beruht math. darauf, daß die zweidim. Darstellung der Lorentzgruppe sich zu keiner Darstellung des affinen Raumes erweitern läßt. Diese Schwier. kommt in der Arbeit von H. Petrove, ZS.f. Phys. 50, 336, 1928, darin zum Vorschein, daß eine eindeutige Feststellung der Koef.-in einer

gegenüber allgemeinen Transformationen des Gaußschen Koordinatensystems folgt, wenn man annimmt, daß Ψ eine Invariante ist. Dann ist $\frac{\partial \Psi}{\partial x^k}$ ein Vektor, $h_b^k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k}$ wieder ein Skalar. Ebenfalls ein Skalar ist $\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x^k} h_b^k$, die Divergenz von h_b .

Aus diesen Eigenschaften des Ψ , sowie aus den Ausführungen am Ende des § 1 folgt schon, daß $(\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3), \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3))$ die Wahrsch. bedeutet, daß das Elektron zur Zeit x_0 im Volumen Δ um den Punkt x_1, x_2, x_3 sei. Konstruieren wir eine Fläche von der Größe $\frac{1}{\Delta x_0}$ senkrecht zur x_0 -Achse im Punkte x_1, x_2, x_3 , so ist

$$(\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3), \gamma_0 \gamma_a \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3))$$

die Wahrs., daß das Elektron diese Fläche in der Zeit zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x_0$ von großen x_a kommend trifft, minus die Wahrs., daß es sie von kleinen x_a kommend ~~trifft~~ trifft. Da zum doppelten Eigenwert $+1$ der Matrix $\gamma_0 \gamma_a$ der Einzeloperator $\frac{1 + \gamma_0 \gamma_a}{2}$ gehört, ist $(\Psi, \frac{1 + \gamma_0 \gamma_a}{2} \Psi)$ die Wahrscheinlichkeit, daß diese Fläche vom Elektron von der Seite der großen x_a getroffen wird $(\Psi, \frac{1 - \gamma_0 \gamma_a}{2} \Psi)$ die Wahrs., daß sie von kleinen x_a kommend getroffen wird. Alle Aussagen der gewöhnlichen Diracschen Theorie gelten im lokalen Koord. system. Nunmehr sind die Komp. des Viererstromes im Gaußschen Koord. sys.

Gleichung nicht möglich erscheint, daß man hierzu viel mehr die neue Einsteinsche Theorie heranziehen müßte. Daß diese Schwierigkeit besteht, hat schon H. Jetrode klar erkannt.

$$J^k = (\Psi, h_b^k \gamma_a \delta_a \text{Lab} \Psi). \quad (13)$$

Die Divergenz des Stromes berechnet sich

$$\begin{aligned} \text{Div} J^k &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Psi, H h_b^k \text{Lab} \delta_a \delta_a \Psi) \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^k}, \gamma_a \delta_a h_b^k \text{Lab} \Psi \right) + \left(\Psi, \gamma_a \delta_a \frac{1}{H} \frac{\partial H h_b^k}{\partial x^k} \text{Lab} \Psi \right) \\ &\quad + \left(\Psi, \gamma_a \delta_a h_b^k \text{Lab} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} \right) \\ &= 2 \text{Realteil} \left[\left(\Psi, \gamma_a \delta_a h_b^k \text{Lab} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \gamma_a \delta_a \frac{1}{H} \frac{\partial H h_b^k}{\partial x^k} \text{Lab} \Psi \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

da $\gamma_a \delta_a$ für alle a hermitisch sind und alle h_b^k rein reell, multiplizieren wir (11) mit $\gamma_a \frac{2\pi i}{h}$ und setzen in (14) ein, so erhalten wir

$$\text{Div} J^k = 2 \text{Realteil} \left[\left(\Psi, \gamma_a \frac{2\pi i}{h} m \Psi - \gamma_a \delta_a \frac{2\pi i e}{h} h_b^k \text{Lab} \Phi_k \Psi \right) \right] \quad (15)$$

Der Ausdruck rechts in (15) verschwindet aber, weil sowohl $\gamma_a \frac{2\pi i}{h} m$, als auch alle $\gamma_a \delta_a \frac{2\pi i e}{h} h_b^k$ schiefsymmetrisch, ihre Bilinearform in (15) also rein imaginär ist. Es ist also

$$\text{Div} J^k = 0. \quad (16)$$

Hätten wir (10) nicht entsprechend der Unvertauschbarkeit von p und der h_a^k symmetrisiert, so wäre es nicht möglich, einen divergenzfreien Strom zu definieren.

Auf physikalische Folgerungen aus (1) möchte ich hier nicht eingehen. Es sollte nur gezeigt werden, daß die Diracsche Theorie des Dreielektrons mit Hilfe der neuen Einsteinschen Theorie in einfacher und natürlicher Weise verallgemeinert werden kann.

©2022 NUAL, NUP, Kyoto University
 京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Über die Gravitationswirkungen des Lichtes

Von L. Rosenfeld. 2s 65, 589, (1930).

Das Auftreten einer unendlich großen Selbstenergie des Elektrons bereitet bekanntlich* der Q, E, D. ernste Schwierigkeiten. Heisenberg hat die Frage aufgeworfen, ob nicht etwa schon unabhängig von jedem materiellen Einfluß, bei den Gravitationswirkungen des Lichtes, analoge Verhältnisse herrschen. Die Antwort läßt sich nicht ohne weiteres durch Vergleich mit dem Verhalten des Elektrons erraten, da hier die Retardierung nicht vernachlässigt werden darf. Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung dieser Frage,

1. Das von einem elektromagnetischen Felde erzeugte Gravitationsfeld in erster Näherung** Bezeichnet $\kappa = 8\pi f/c^4$ die Einsteinsche Gravitationskonstante ($f =$ Newtonsche Konst.) so wollen wir annehmen, daß die in Betracht kommenden Gravitationsfelder so wenig von dem Minkowskischen abweichen, daß wir sie nach Potenzen von $\varepsilon = \sqrt{\kappa}$ entwickeln können und nur die in ε linearen Glieder zu berücksichtigen brauchen. In kartesischen Koord. $x^1, x^2, x^3, x^4 = ict$ können wir also schreiben:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon \gamma_{ik}. \quad (1)$$

Sehen wir $\gamma = \sum_i \gamma_{ii}$ (2)

und $\gamma_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \gamma$, (3)

woraus umgekehrt $\gamma' = \sum_i \gamma'_{ii} = -\gamma$, (4)

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \gamma' \quad (5)$$

* H.P. Opp. 35, 461, Waller 62, 693. ** Einstein: Ber. Ber. 1918, S. 154. oder

folgt, so legen wir das Koord. sys. fest durch die Forderung*

$$\frac{\partial \chi_{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (6)$$

Das vom El. Mg. Feld F_{ik} mit dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$S_{ik} = F_{ir} F_{kr} - \frac{1}{4} \delta_{ik} F^2, \quad (7)$$

$$F^2 = F_{rs} F_{rs},$$

erzeugte Grav. feld wird gegeben durch die Gl.

$$\sum_r \frac{\partial^2 r_{ik}}{(\partial x^r)^2} = -2 \varepsilon S_{ik} \quad (8)$$

Infolge von $\sum_i S_{ii} = 0$ ist übrigens

$$\sum_i \frac{\partial^2 \gamma_i}{(\partial x^i)^2} = 0, \quad (9)$$

so daß wir statt (8) auch

$$\sum_r \frac{\partial^2 \delta_{ik}}{(\partial x^r)^2} = -2 \varepsilon S_{ik} \quad (10)$$

schreiben können.

Dazu kommen die durch die Grav. glieder etwas modif. Maxwell'schen Gl., die wir nicht explizit hinschreiben brauchen.

Die entsprechende Lagrangefunktion lautet:

$$L = -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} \frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} \frac{\partial \gamma'_{rs}}{\partial x^i} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \gamma'_{rs} S_{rs}. \quad (11)$$

Daraus folgt für die Hamilton's, die wir in den Variablen

5.736 * Die übliche Regel vom Weglassen des Summenzeichen wird überall befolgt, wo sie die Deutlichkeit nicht beeinträchtigt.

g, g' (und nicht g, p) schreiben:

$$H = H_L + H_G + W, \quad (12)$$

wobei H_L die gewöhnliche el. mg. Energiedichte $\frac{1}{2}(E^2 + H^2)$,
 H_G den reinen Grav.anteil

$$H_G = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial r_s}{\partial x^i} \frac{\partial r'_s}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial r'_i}{\partial x^i} \frac{\partial r'_i}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial r'_s}{\partial x^4} \frac{\partial r'_s}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial r'_i}{\partial x^4} \frac{\partial r'_i}{\partial x^4} \right), \quad (13)$$

und W den Wechselwirkungsanteil

$$W = \frac{\epsilon}{2} (-\delta'_{rs} S_{rs} + 2\delta'_{45} S_{45} + 2\delta'_{is} F_{4i} F_{45} + \frac{1}{2} \delta'_{44} F - \gamma' F_{4i} F_{4i}) \quad (14)$$

darstellt*.

Bei der Quantelung der δ_{ik} wollen wir die Nebenbedingung (6) nach der „Fermischen Methode“* berücksichtigen. D. h. wir geben uns diese Bedingung sowie ihre zeitliche Ableitung auf einem Schnitt $t = \text{const}$ vor, dabei ist zu beachten, daß sie nicht als q -Zahlrelationen aufgefaßt werden dürfen. Es ist dann leicht zu sehen, mit Rücksicht auf den Erhaltungssatz $\delta S_{ik} / \delta x^k = 0$, daß sich die betrachteten Nebenbedingungen auf Grund der Feldgl. (8) mit der Zeit fort fort pflanzen.

Das el. mg. Feld (0ter Näherung) behandeln wir nach der zweiten H.P. Methode*; da wir keine Materie in Betracht ziehen, haben wir es nur mit den transversalen Eigenschw. zu tun; wir zerlegen die Feldstärken nach fortschreitenden Wellen; als Randbedingung wählen wir eine
 * Dabei ist \mathbb{E}_4 gleich Null gewählt, H.P. II.

zyklischen Bedingung mit der Periode L und lassen zum
 Schluß L gegen unendlich streben^{**}, wir sehen also

$$(15) \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{K}{L}} e^{i\mathbf{k}\lambda} \left(A_{\mathbf{k}\lambda} e^{\frac{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{L}} - A_{-\mathbf{k}\lambda} e^{-\frac{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{L}} \right), \\ H &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{K}{L}} \mathbf{b}^{\mathbf{k}\lambda} \left(A_{\mathbf{k}\lambda} e^{\frac{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{L}} - A_{-\mathbf{k}\lambda} e^{-\frac{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{L}} \right); \end{aligned} \right.$$

dabei ist der Normierungsfaktor $\alpha = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{ch}{2}}$; der
 Index $\lambda = 1, 2$ bezeichnet die beiden zueinander senkrecht
 en Eigenschwingungen mit dem Ausbreitungsvektor \mathbf{k} , von
 Betrage $k = |\mathbf{k}|$; $\mathbf{e}^{\mathbf{k}\lambda}$ und $\mathbf{b}^{\mathbf{k}\lambda}$ sind zueinander und \mathbf{k}
 senkrechte Einheitsvektoren, und zwar ist $\mathbf{b}^{\mathbf{k}\lambda} \times \mathbf{k} = \mathbf{k}/k$, ferner
 $\mathbf{e}^{-\mathbf{k}, \lambda} = \mathbf{e}^{\mathbf{k}, \lambda}$ $\mathbf{b}^{-\mathbf{k}, \lambda} = -\mathbf{b}^{\mathbf{k}, \lambda}$; endlich hängen die
 Amplituden A mit den Anzahl- und Phasenvariablen
 folgendermaßen zusammen:

$$\left. \begin{aligned} A_{\mathbf{k}\lambda} &= e^{-\frac{2\pi i}{L} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}\lambda} N_{\mathbf{k}\lambda}^{1/2} \\ A_{-\mathbf{k}-\lambda} &= N_{\mathbf{k}\lambda}^{1/2} e^{\frac{2\pi i}{L} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}\lambda} \end{aligned} \right\} (16)$$

Der Übersichtlichkeit halber wird wir oft im folgenden einen
 Zustand $(\mathbf{k}_r, \lambda_r)$ durch den Buchstaben r bezeichnen und
 dementsprechend $A_{\mathbf{k}_r, \lambda_r} \equiv A_r$, $A_{-\mathbf{k}_r, -\lambda_r} \equiv B_r$ setzen

Ferner führen wir noch folgenden Abkürzungen ein:

$$I_{\pm 5}(rs) = \frac{1}{L} e^{\frac{2\pi i}{L} (\mathbf{k}_r \pm \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}} \quad (17a)$$

** Landau u. Peierls 62, 197.

$$\begin{aligned}
 I_{\pm 6}(rs) &= \frac{1}{L^3} \frac{e^{\frac{2\pi i}{L}(k_r \pm k_s)x}}{|k_r \pm k_s|^2 - (k_r \pm k_s)^2} \frac{L^2}{2\alpha} \\
 &= \pm \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{k_r k_s (\cos \Theta_{rs} - 1)} I_{\pm 5}(rs) \\
 &\quad \left(\cos \Theta_{rs} = \frac{k_r k_s}{|k_r \pm k_s|} \right),
 \end{aligned}
 \tag{17b}$$

$$I_{\pm i}(rs) = \frac{\partial I_{\pm 6}(rs)}{\partial x^i} = \frac{2\pi i}{L} (k_r \pm k_s)_i I_{\pm 6}(rs) \quad (i=1,2,3)$$

$$I_{\pm 4}(rs) = -\frac{2\pi}{L} (k_r \pm k_s) I_{\pm 6}(rs)$$

$$I_{\pm 4}^*(rs) = \frac{2\pi}{L} (k_r \pm k_s) I_{\pm 6}^*(rs)$$

(x^* = komp. konj. von x),

Diese Erklärungen gelten nur, so lange k_r nicht $\parallel k_s$ ist; wie wir sehen werden, scheidet dieser singuläre Fall von selbst im Laufe der folgenden Rechnungen aus. Schließlich definieren wir noch den Tensor S_{ik}^{rs} durch folgende Gl.:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & -S_{44}^{rs} \equiv \omega = \frac{1}{2} \sum (\epsilon_i^r \epsilon_i^s + \eta_i^r \eta_i^s), \\
 & S_{il}^{rs} = \delta_{il} \omega - \frac{1}{2} (\epsilon_i^r \epsilon_l^s + \eta_i^r \eta_l^s) - \frac{1}{2} (\epsilon_i^s \epsilon_l^r + \eta_i^s \eta_l^r), \\
 & S_{i4}^{rs} = S_{4i}^{rs} = \frac{i}{2} [(\epsilon^r \times \eta^s)_i + (\epsilon^s \times \eta^r)_i] \quad (i=1,2,3)
 \end{aligned}$$

Nach (15) und (7) haben wir mit diesen Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 S_{ik} = \alpha^2 \sum_{rs} \frac{k_r k_s}{L^2} S_{ik}^{rs} \{ & A_r A_s I_{+5}(rs) + B_r B_s I_{+5}^*(rs) \\
 & - A_r B_s I_{-5}(rs) - B_r A_s I_{-5}^*(rs) \} \tag{19}
 \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, daß nur das durch das Lichtfeld (19) erzeugte grav. Feld vorhanden ist, so wird es mit Rücksicht auf die Phasen der A, B und auf die zyklische Randbed. gegeben durch folgende Lösung von

$$(10): \quad \gamma_{ik} = \varepsilon \alpha^2 \sum_{rs} \sqrt{\frac{k_r k_s}{L^2}} S_{ik}^{rs} \{ A_r A_s I_{+6}(rs) + B_r B_s I_{+6}^*(rs) - A_r B_s I_{-6}(rs) - B_r A_s I_{-6}^*(rs) \};$$

diese auch für g -Zahlen gültige Lösung erfüllt die Nebenbed. (6) wegen des Erhaltungssatzes

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x^k} = 0;$$

ferner sieht man leicht ein, daß

$$\lim_{L \rightarrow \infty} I_{-6}(rs) = 0 \quad (21)$$

ist, wenn man bedenkt, daß es das (retardierte) Potential einer Bewegung von konstanter, im Limes überall verschwindender Dichte $\frac{1}{L^3}$ darstellt.

2. Berechnung der Grav. energie. Da das Grav. Feld (20) von der ersten Ordnung in ε ist, so ist die Grav. energie $\int (H_G + W) dV$ nach (13) und (14) von der Ordnung ε^2 . Die im Sinne der Störungsrechnung richtige Störung (zweiter Ordnung) der Energie $\overline{H}_L = \sum_r (N_r + \frac{1}{2}) h \nu_r$ eines durch die Zahlen N_r der Lichtquanten von der Art r ($\nu_r = \frac{k_r c}{L}$) charak-

teristische ierten Zustandes des Lichtfeldes bekommt man also, indem man in $H_0 + W$ für die γ_{ik} die Ausdrücke (20) einsetzt und das zum betreffenden Zustand zugehörige Diagonalglied berechnet.

Eine Vereinfachung tritt dabei zunächst dadurch ein, daß für das Feld (20) $\gamma = -\gamma' = 0$ und mithin $\gamma'_{ik} = \gamma_{ik}$ ist. Die übrigbleibenden Glieder haben die Form

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \alpha^4 \sum_{rs, mn} \sqrt{\frac{k_r k_s k_m k_n}{L^4}} S_{ik}^{rs} S_{ik}^{mn} \int \{ A_r A_s I_{+\tau}(rs) \\ & + B_r B_s I_{+\tau}^*(rs) - A_r B_s I_{-\tau}(rs) - B_r A_s I_{-\tau}^*(rs) \} \\ & \cdot \{ A_m A_n I_{+\rho}(mn) + B_m B_n I_{+\rho}^*(mn) - A_m B_n I_{-\rho}(mn) \\ & - B_m A_n I_{-\rho}^*(mn) \} dT \quad (\rho, \tau = 1, 2, \dots, 6) \quad (22) \end{aligned}$$

oder eine ähnliche, wo $S_{ik}^{rs} S_{ik}^{mn}$ zu ersetzen ist durch

$$S_{ik}^{rs} S_{ik}^{mn} = \frac{1}{2} S_{ik}^{rs} (e_i^{rn} e_k^{ms} + e_i^{rn} e_k^{ms}), \quad (23)$$

bzw. $(h_r^r h_s^s + e^r e^s) (h_m^m h_n^n - e^m e^n). \quad (23')$

Im Integrand von (22) enthalten nur Produkte mit zwei Faktoren A und zwei Faktoren B mit denselben Indizes Diagonalglieder. Wenn man noch (21) berücksichtigt, reduziert sich (22) auf

$$\varepsilon^2 \alpha^4 \sum_{rs} \frac{k_r k_s}{L^2} \sum_{ik} (S_{ik}^{rs})^2 \int dT \{ 2 A_r A_s B_r B_s I_{+\tau}(rs) I_{+\rho}(rs) \}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 B_r B_s A_r A_s I_{+r}^*(r_s) I_{+p}(r_s) + A_r A_s B_s A_s B_r I_{-r}(r_s) I_{-p}(r_s) \\
 & + A_r B_s B_r A_s I_{-r}(r_s) I_{+p}^*(r_s) + B_r A_s A_r B_s I_{-r}^*(r_s) I_{-p}(r_s) \\
 & + B_r A_s B_s A_r I_{-r}^*(r_s) I_{-p}^*(r_s) \}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

Um nun die Ausdrücke $\sum_{i,k}^{rs} (S_{ik}^{rs})^2$ und (23) bequem auszuwerten, bemerken wir, daß sie kovariant gegen Drehungen sind. Wählen wir also η^s, e^s, k_s als Achsenkreuz $Oxyz$, so reduziert sich der Tensor S_{ik}^{rs} nach (18) zu

$$\left\{ \begin{array}{cccc}
 \frac{1}{2} (\Theta_2 - \eta_1) & , & -\frac{1}{2} (\Theta_1 + \eta_2) & , & -\frac{1}{2} \eta_3 & , & \frac{i}{2} \eta_3 \\
 -\frac{1}{2} (\Theta_1 + \eta_2) & , & -\frac{1}{2} (\Theta_2 - \eta_1) & , & -\frac{1}{2} e_3 & , & \frac{i}{2} e_3 \\
 -\frac{1}{2} \eta_3 & , & -\frac{1}{2} e_3 & , & \frac{1}{2} (\Theta_2 + \eta_1) & , & -\frac{i}{2} (\Theta_2 + \eta_1) \\
 \frac{i}{2} \eta_3 & , & \frac{i}{2} e_3 & , & -\frac{1}{2} (\Theta_2 + \eta_1) & , & -\frac{1}{2} (\Theta_2 + \eta_1)
 \end{array} \right.$$

woraus folgt, unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen, für

$$\sum_{i,k} (S_{ik}^{rs})^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_s}{k}\right)^2$$

$$\sum_i (S_{i4}^{rs})^2 = \frac{1}{2} S_{ik}^{rs} (e_i^r e_k^s + e_i^s e_k^r) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k_s}{k}\right)^2,$$

d.h. wenn man zum ursprünglichen Koord. syst. zurückkehrt,

$$(25) \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i,k} (S_{ik}^{rs})^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta_{rs})^2, \\
 \sum_i (S_{i4}^{rs})^2 = \frac{1}{2} S_{ik}^{rs} (e_i^r e_k^s + e_i^s e_k^r) = \frac{1}{4} (1 - \cos \Theta_{rs})^2
 \end{array} \right.$$

Was den Ausdruck (23') betrifft, wollen wir zunächst fest-
 setzen, daß bei festem Achsenkreuz $\eta^s, \epsilon^s, \kappa_s$ und
 festem λ_s , die (bisher will kürzliche) Richtung von ϵ^r
 bzw. η^r jeweils mit der Schnittlinie der Ebenen (ϵ^s, η^s)
 und (ϵ^r, η^r) zusammenfällt, je nachdem $\lambda_r = \lambda_s$ ist
 oder nicht; dementsprechend setzen wir

$$\epsilon^r \epsilon^s = \cos \varphi_{rs}, \quad \text{wenn } \lambda_r = \lambda_s;$$

dann wird bei gegebenem κ_r

$$\begin{aligned} (\eta^r \eta^s)^2 - (\epsilon^r \epsilon^s)^2 &= -\cos^2 \varphi_{rs} \sin^2 \Theta_{rs}, \quad \text{wenn } \lambda_r = \lambda_s, \text{ (yes)} \\ (\eta^r \eta^s)^2 - (\epsilon^r \epsilon^s)^2 &= +\sin^2 \varphi_{rs} \sin^2 \Theta_{rs}, \quad \text{wenn } \lambda_r \neq \lambda_s. \end{aligned}$$

Jetzt sieht man, wie die Singularitäten in den $I_{\pm g}(rs)$
 für $\Theta_{rs} = 0$ durch die Faktoren (25), (25') aufgehoben werden.

Für den von H_G herrührenden Anteil der Störungsenergie
 bekommt man nach (13), (24), (25')

$$\begin{aligned} H_G &= \frac{e^2 \alpha^4}{32 \pi^2 L^3} \sum_{rs} \left\{ (\cos \Theta_{rs} - 1) \left\{ 2 A_r A_s B_r B_s + 2 B_r B_s A_r A_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (A_r B_s A_s B_r + A_r B_s B_r A_s + B_r A_s A_r B_s + B_r A_s B_s A_r) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_r + k_s)^2}{k_r k_s} \left\{ 2 A_r A_s B_r B_s + 2 B_r B_s A_r A_s \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_r - k_s)^2}{k_r k_s} \left\{ (A_r B_s A_s B_r + A_r B_s B_r A_s + B_r A_s A_r B_s + B_r A_s B_s A_r) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

oder nach gesondelter Behandlung der Glieder mit $r = s$,

$$\begin{aligned} H_G &= \frac{e^2 \alpha^4}{16 \pi^2 L^3} \sum_{rs} \left[(\cos \Theta_{rs} + 1) (A_r B_r - B_r A_r) (A_s B_s - B_s A_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_r^2 + k_s^2}{k_r k_s} (A_r B_r + B_r A_r) (A_s B_s + B_s A_s) \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\varepsilon^2 \alpha^4}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{L^3} \sum_r [(A_r B_r + B_r A_r)^2 + (A_r B_r - B_r A_r)^2 - 2A_r^2 B_r^2 - 2B_r^2 A_r^2],$$

oder schließlich gemäß (16)

$$\overline{H}_G = \frac{\varepsilon^2 \alpha^4}{16\pi^2} \frac{1}{L^3} \sum_{rs} (\cos \Theta_{rs} + 1) + \frac{\varepsilon^2 \alpha^4}{4\pi^2} \sum_r \frac{1}{L^3} + \frac{\varepsilon^2 \alpha^4}{16\pi^2} \frac{1}{L^3} \sum_{rs} \frac{k_r^2 + k_s^2}{k_r k_s} (2N_r + 1)(2N_s + 1), \quad (26)$$

Durch eine analoge, von (14), (24), (25) und (25') ausgehende Rechnung findet man, wenn man noch berücksichtigt, daß die Mittelwerte von $\cos^2 \varphi_{rs}$ und $\sin^2 \varphi_{rs}$ gleich sind, daß der Wechselwirkungsanteil \overline{W} gleich Null ist. Mithin bleibt für die gesuchte Störungsenergie der Ausdruck (26).

Müßten wir es mit einem klassischen Wellenpaket zu tun, so wären in (26) die $(2N+1)$ durch $2N$ zu ersetzen und die erste Zeile zu streichen, und wir bekämen für die Grav.energie einen endlichen Wert. Quantenmechanisch hingegen finden wir einen wegen des Auftretens von Schwingungen mit beliebig kurzer Wellenlänge unendlich großes Zusatzglied, welches übrigens noch da sein bestehen bleibt, wenn man in (19) $A_r B_s$ durch $B_s A_r$ ersetzt, um die Nullpunktenergie der Strahlung zu beseitigen. Dieses unendliche Glied setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

einem von den Lichtquantenzahlen ~~pro~~ unabhängigen und einem ebenfalls unendlichen, zu den Lichtquantenzahlen proportionalen Anteil.

Man kann die unendlichen Faktoren von der Gestalt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \int k^u dk_1 dk_2 dk_3 \quad (u=1, 2, 3)$$

auf eine andere, lehrreiche Form bringen, die zugleich zeigt, daß der Übergang zum Limes $L = \infty$ unwesentlich ist. Den Normierungsfaktor $1/L^3$ kann man nämlich schreiben, wenn $u(k, r)$ eine normierte Eigenfunktion darstellt,

$$\frac{1}{L^3} = u(k, r) u^*(k, r) = \int u(k, r) u^*(k, r') \delta(r - r') dV';$$

dann ist

$$\frac{1}{L^3} \int k^u dk_1 dk_2 dk_3 = \int \delta(r - r') dV' \int k^u u(k, r) u^*(k, r') \times dk_1 dk_2 dk_3;$$

wegen $\delta(r - r') = \int u(k, r) u^*(k, r') dk_1 dk_2 dk_3$ ist, mit einer Beziehung von Landau und Peierls (S 189)

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^3} \int k^u dk_1 dk_2 dk_3 &= \int \delta(r - r') dV' (-\Delta_r)^{u/2} \delta(r - r') \\ &= [(-\Delta_r)^{u/2} \delta(r - r')]_{r=r'} \end{aligned}$$

man kann also auch sagen, daß die Unendlichkeit darauf beruht, daß man einem Lichtquant keinen endlichen Radius zuschreiben kann. Die Analogie mit dem Fall

des Elektrons braucht kaum betont zu werden,

3. Übergangsprozesse erster Näherung. Um nun die durch die Wechselwirkung W hervorgebrachten Übergänge zu übersehen, wollen wir zunächst neben den Lichtwellen (15) auch reine Gravitationswellen im Vakuum. Mit Rücksicht auf die Nebenbedingung (6) lassen sie sich durch die Komponenten $\gamma_{11} - \gamma_{22}$ bzw. γ_{12} beschreiben, wenn der Ausbreitungsvektor als z -Achse gewählt ist. Wir können dann noch $\gamma_{11} = -\gamma_{22}$ setzen, um die Vereinfachung $\gamma = 0$ zu erreichen. Für ein beliebiges Paket solcher Wellen haben wir dann

$$\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \delta_{i4} = 0; \quad (27)$$

die übrigen $\delta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) lauten, wenn $\{D_{\alpha\beta}^{(r)}\}$ diejenige Drehung darstellt, welche den Ausbreitungsvektor k_r in die z -Richtung überführt,

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} = & \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\hbar c}{L^3}} \sum_{k_r} \sqrt{\frac{L}{k_r}} \left\{ \frac{1}{2} (D_{\mu 1}^{(r)} D_{\nu 1}^{(r)} - D_{\mu 2}^{(r)} D_{\nu 2}^{(r)}) \right. \\ & \times \left(F_{k_r}^+ e^{\frac{2\pi i k_r r}{L}} + F_{-k_r}^+ e^{-\frac{2\pi i k_r r}{L}} \right) + \frac{1}{2} (D_{\mu 1}^{(r)} D_{\nu 2}^{(r)} + D_{\mu 2}^{(r)} D_{\nu 1}^{(r)}) \\ & \left. \times \left(G_{k_r}^+ e^{\frac{2\pi i k_r r}{L}} + G_{-k_r}^+ e^{-\frac{2\pi i k_r r}{L}} \right) \right\}; \quad (28) \end{aligned}$$

dabei ist, wenn $M_{k_r, 1}$, $M_{k_r, 2}$ die Anzahlen von Grav. quanten der ersten bzw. zweiten Art in der Richtung k_r bezeichnen

$$(29) \quad F_{k_r}^+ = e^{\frac{2\pi i \omega}{L} \otimes k_r, 1} M_{k_r, 1}^{1/2} \quad F_{-k_r}^+ = M_{k_r, 1}^{1/2} e^{\frac{2\pi i \omega}{L} \otimes k_r, 1}$$

$$(29) \quad G_{kr} = e^{-\frac{2\alpha i}{\hbar} \Theta_{kr,2}} M_{kr,2}^{1/2} \quad G_{-kr} = M_{kr,2}^{1/2} e^{\frac{2\alpha i}{\hbar} \Theta_{kr,2}}$$

Die Energie dieser Grav. wellen ist nach (13)

$$HIG = \sum_{kr} \left\{ \left(M_{kr,1} + \frac{1}{2} \right) + \left(M_{kr,2} + \frac{1}{2} \right) \right\} \hbar \nu_r. \quad (30)$$

Gemäß (14), welches sich hier wegen (29) auf

$$W = \varepsilon \gamma_{\mu\nu} \left(T_{\mu\nu} T_{4\nu} - \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \right) \quad (31)$$

reduziert, kommen in erster Näherung (d.h. mit einer ε^2 proportionalen Wahrscheinlichkeit) nur solche Übergänge vor, an denen ein Gravitationsquant und zwei Lichtquanten teilnehmen. Berücksichtigen wir (auf Grund wohl bekannter Überlegungen) nur diejenigen Prozesse, die unter Erhaltung der Gesamtenergie stattfinden, so muß gelten, da auch der Gesamtimpuls erhalten bleibt,

$$\begin{aligned} k_r &= k_s + k_t \\ K_r &= K_s + K_t \end{aligned}$$

woraus folgt, daß die drei am Prozeß beteiligten Quanten dieselbe Richtung haben müssen.

Bezeichnen wir mit t den Zustand des Gravitationsquants, mit r und s diejenigen der Lichtquanten, so sind nach (31) die Übergangswahr. pro Zeiteinheit von der Gestalt

$$\varepsilon^2 c^4 \hbar \frac{k_r k_s}{k_t} \frac{1}{\hbar} W_{rst} f(N_r, N_s, N_t); \quad (32)$$

dabei ist $f(N_r, N_s, N_t)$ das übliche Produkt von

Faktoren $N_r, N_s, M_t; N_{r+1}, N_{s+1}, M_{t+1}; N_{r+2}, N_{s+2}$,
jedoch dem Prozeß; wenn ferner Θ der Winkel
zwischen der Polarisationsrichtung \mathcal{E}^v des Lichtquants γ
und der ausgezeichneten y -Richtung in der Wellenebene
des Grav. quants bedeutet, so ist

$$W_{rst} = \frac{1}{4} \cos^2 2\Theta \text{rst},$$

wenn entweder das Gravitationsquant von der ersten
Art und die beiden Lichtquanten gleich polarisiert
($\lambda_r = \lambda_s$) sind, oder das Grav. Quant von der zweiten Art
und die beiden Lichtquanten verschieden polarisiert
($\lambda_r \neq \lambda_s$) sind,

$$W_{rst} = \frac{1}{4} \sin^2 2\Theta \text{rst},$$

in den beiden anderen möglichen Fällen.

Die Übergangsprozesse selber lassen sich folgendermaßen beschreiben:

1. Verschwinden eines Gr. quants. und Entstehen zweier (verschiedener oder gleicher) Lichtquanten;
2. Vers. zweier L. G. und Ents. eines G. G.
3. Vers. zweier L. G. und Ents. eines anderen L. G. G. und eines G. G.
(Frequenzverkleinerung eines Lichtquants!);
4. Vers. eines L. G. und eines G. G. und Ents. eines anderen L. G. (Frequenzvergrößerung eines L. G.!).

Denken wir uns also einen anfangs nur von Strahlung
gefüllten Hohlraum (ohne Kohlenstäbchen!), so genügen
schon die Grav. Wirk. erster Näherung zwischen den

Lichtquanten, um das Plancksche Gleichgewicht (mit $h\nu$ zu $\frac{1}{2}kT$ proportionalen Geschwind.) herzustellen.

Herrn Prof. Pauli etc, Zürich, etc, 14. August 1930.

Nachtrag bei der Korrektur.

Statt wie im § 2 als Anfangszustand Lichtquanten mit genau bekanntem Impuls zu nehmen, kann man auch die Berechnung des Mittelwertes von $HG + W$ für das allgemeinste Wellenpaket durch führen.

Die Anfangsverteilung des Zustandes r sei charak. durch eine (komplexe) Eigenf. $\varphi_r(N_r)$ mit der Bedingung: $\sum_{N_r=0}^{\infty} |\varphi_r(N_r)|^2 = 1$ der Ausgangspunkt ist dann definiert durch die Angabe willkürlicher $\varphi_r(N_r)$ für alle r , mit der einzigen Einschränkung, daß die Gesamtzahl N der L.G. eine gegebene Konst. ist:

$$\sum_r \sum_{N_r} N_r |\varphi_r(N_r)|^2 = N; \quad \varphi_r(N_r) = 0 \text{ für } N_r > N$$

Wir haben dann zu berechnen: Mittelwert von $(HG + W)$

$$= \sum_{N_0, N_1} \varphi_0^*(N_0) \varphi_1^*(N_1) \cdots (HG + W) \varphi_0(N_0) \varphi_1(N_1) \cdots$$

Für $N=0$ (kein L.G.) bekommen wir natürlich dasselbe Resultat wie im § 2. Betrachten wir nun den Fall eines

L.G., d. h. $\varphi_r(N_r) = 0$ für $N_r > 1$
 $|\varphi_r(N_r=0)|^2 = |\varphi_r(N_r=1)|^2 = 1 \quad \sum_r |\varphi_r(N_r=1)|^2 = 1.$

Zunächst kommen in Betracht die Diagonalglieder (28); der Beitrag dieser Glieder ist wiederum unendlich, wie im § 2, ferner können, wie man leicht überlegt, die anderen Glieder nur endliche Beiträge liefern.

Über Gravitationswellen.

Von A. Einstein

(Ber. Ber. 5154, 1918)

§ 1. Lösung der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes durch retardierte Potentiale.

Wir gehen aus von den für ein beliebiges Koord.-system gültigen Feldgl. †

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \frac{\mu \nu}{\alpha} \right\} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left\{ \frac{\mu \alpha}{\alpha} \right\} + \sum_{\alpha \rho} \left\{ \frac{\mu \alpha}{\rho} \right\} \left\{ \frac{\nu \rho}{\alpha} \right\} - \sum_{\alpha \rho} \left\{ \frac{\mu \nu}{\alpha} \right\} \left\{ \frac{\alpha \rho}{\rho} \right\} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T). \quad (2)$$

$T_{\mu\nu}$ ist der Energietensor der Materie, T der zugehörige Skalar $\sum_{\alpha \rho} g^{\alpha\rho} T_{\alpha\rho}$. Bezeichnen (Sensen wir

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})$$

und bezeichnet man als kleine Größen n ter Ordnung solche, welche in den $\gamma_{\mu\nu}$ vom n ten Grade sind, so erhält man, indem man sich bei der Berechnung beider Seiten der Gleichung (2) auf die Glieder der niedrigsten Ordnung beschränkt, das System of von Näherungsgl.

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\alpha}} \right) = 2\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha} \right). \quad (2a)$$

Durch Multiplikation dieser Gl. mit $-\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}$ und Summation über μ und ν erhält man nun zunächst (bei geänderter Bezeichnung der Indizes) die skalare Gl.
† Nehmen wir die Zeitvariable x_4 rein imaginär, d. h. $x_4 = it$, wobei t die "Lichtzeit" bedeutet.

$$\sum_{\alpha \rho} \left(-\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\rho^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\rho}}{\partial x_\alpha \partial x_\rho} \right) = \kappa \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}.$$

Addiert man die mit $\delta_{\mu\nu}$ multiplizierte Gl zu Gl (2a), so hebt sich zunächst das zweite Glied der rechten Seite der letzteren Gl. weg. Die linke Seite läßt sich übersichtlich schreiben, wenn man statt $\delta_{\mu\nu}$ die Funktionen $\gamma'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha}$ (3)

einführt. Die Gl. nimmt dann die Form an:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} + \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\alpha}}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Diese Gl. aber kann man dadurch bedeutend vereinfachen, daß man von den $\gamma'_{\mu\nu}$ verlangt, daß sie außer den Gl. (4) den Bel. $\sum_{\alpha} \frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0$ (5)

genügen sollen.

Es erscheint zunächst sonderbar, daß man 10 Gl (4) für die 10 Funktionen $\gamma'_{\mu\nu}$ willkürlich noch 4 weitere soll an die Seite stellen können, ohne daß eine Übereinstimmung einträte. Die Berechtigung dieses Vorgehens erhellt aber aus folgendem. Die Gl. (2) sind bezüglich beliebiger Substi. kovariant, d.h. sie sind erfüllt

Über die Fortpflanzung von Lichtwellen
in der H. P. schen Formulierung der Q. F. D.,
Von Seikai Kikuchi Zs.f. Phys. 66, 1930,
S. 558-571

六
八
十
三
六

§ 1. Daß ein Lichtsignal niemals mit einer Geschwindigkeit größer als c ausgesandt wird, ist schon in der H. P. schen Formulierung der Elektrodynamik implizite enthalten. Diese Tatsache soll hier explizite abgeleitet werden, indem man das folgende Problem löst: Zur Zeit $t=0$ befindet sich ein angeregtes Atom an irgendeiner Stelle P des Hohlraumes, in dem keine Lichtquant vorhanden sein soll. Nun betrachtet man eine andere Stelle P' des Hohlraumes und fragt: Wie verändert sich der Erwartungswert der Energiedichte des Wellenfeldes an dieser Stelle mit der Zeit. Wenn der fragliche Wert bis zur Zeit $t = R_0/c$ Null bleibt, und von da ab einen von Null verschiedenen Wert annimmt, dann ist damit bewiesen, daß das Lichtsignal sich niemals mit einer Geschwindigkeit fort pflanzt, welche größer als c ist. R_0 ist dabei der Abstand PP' .

Nun wird der Erwartungswert der Energiedichte des Wellenfeldes in P' nach der Quantenmechanik gegeben durch

$$A = \sum \bar{\varphi}(q_i; p_{M_{11}}, q_{r3}, t) H \varphi(q_i; p_{M_{11}}, q_{r3}, t) \quad (1)$$

H ist der Operator, der der Energiedichte des Hohlraumes in P entspricht und durch $\frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$ gegeben ist, E und H sollen dabei als q -Zahlen aufgefaßt werden. $\varphi(q_i; p_{M_{11}}, q_{r3}, t)$

bezeichnet die von H. u. P. eingeführte Wellenfunktion, wobei q die Koordinaten des Elektrons bedeuten; φ ist die Spinvariable, $M_{r\lambda}$ sind die Besetzungszahlen der Schwingung des Hohlraumes, und schließlich Q_{r3} die Variablen, die den Zustand des longitudinalen Feldes des Hohlraumes bezeichnen. Die Summation soll über alle möglichen Eigenwerte der Variablen erstreckt werden. Wenn die Eigenwerte kontinuierlich sind, wird die Summe durch ein Integral ersetzt.

Nach Oppenheimer* kann man φ in der Form

$$(2) \quad \varphi(q_i | M_{r\lambda} Q_{r3} t) = e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_r v_0^r Q_{r3}} \Phi(q_i | M_{r\lambda} t)$$

schreiben. Dabei ist

$$v_0^r = \frac{2c}{\pi} \sqrt{\frac{1}{V L^3}} \sin \frac{2\pi V r}{c} \varepsilon_{r1} x \sin \frac{2\pi V r}{c} \varepsilon_{r2} y \times \sin \frac{2\pi V r}{c} \varepsilon_{r3} z \quad (3)$$

und Φ erfüllt die folgende Gleichung.

$$(4) \quad \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + H_0 + \sum M_{r\lambda} \hbar \nu_r \right) \Phi(q_i | M_{r\lambda} t) = -ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \sum_{r\lambda k\sigma} v_k^{r\lambda} (q_i) \alpha_{\rho\sigma}^k [(M_{r\lambda} + 1)^{\frac{1}{2}} \Phi(q_i | M_{r\lambda} + 1) - M_{r\lambda}^{\frac{1}{2}} \Phi(q_i | M_{r\lambda} - 1)] - [\sum \pi \nu_r e^2 (v_0^r(q_i))^2] \Phi(q_i | M_{r\lambda}).$$

Dabei ist
$$H_0 = \sum_{k\sigma} \left[\left(\frac{\hbar c}{2\pi i} \alpha_{\rho\sigma}^k \frac{\partial}{\partial q_k} + e \Phi_k^0 \right) + (m c^2 \alpha_{\rho\sigma}^k + e \Phi_k^0) \right]. \quad (5)$$

* Phys. Rev. 35, 461, 1930.

Dies ist die Hamiltonische Funktion für ein Elektron im Feld Φ_0 ohne Wechselwirkung mit dem Hohlraum, $V_k^{r\lambda}$ ist gegeben durch

$$V_1^{r\lambda} = c \sqrt{\frac{2}{V_r}} \sqrt{\frac{8}{L^3}} f_k^\lambda \cos \frac{2\pi V_r}{c} \epsilon_1 x_1 \sin \frac{2\pi V_r}{c} \epsilon_2 x_2 \times \sin \frac{2\pi V_r}{c} \epsilon_3 x_3, \quad (6)$$

Die zwei anderen Gleichung für $V_2^{r\lambda}$, $V_3^{r\lambda}$ gehen aus dieser durch zyklische Vertauschung der Indizes hervor. Dabei ist $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ und f_k^λ die Matrix:

$$\begin{array}{c|ccc} \hbar^{-1} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \epsilon_2 / \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} & \epsilon_2 \epsilon_3 / \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} & \epsilon_1 \\ 2 & -\epsilon_1 / \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} & \epsilon_1 \epsilon_3 / \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} & \epsilon_2 \\ 3 & 0 & -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} & \epsilon_3 \end{array} \quad (7)$$

Das letzte Glied von (4) gibt die Selbstenergie des Elektrons an und wird bekanntlich unendlich. Dieser Umstand ist eine der Hauptschwierigkeiten der Theorie. Bei der Anwendung wie sie hier gemacht wird, spielt jedoch dieses Glied offenbar keine Rolle und man kann es einfach weglassen.

$T \rightarrow V$ Bei der Ausrechnung der Summe A soll man nun für Φ die Lösung von (4) mit der geeigneten Anfangsbedingung einsetzen.

Die Anfangsbedingung lautet: Φ verschwindet, wenn nicht alle $M_{r\lambda}$ Null sind; wenn die $M_{r\lambda}$ Null sind, gilt $[\Phi(q; p, 0, t)]_{t=0} = U_p^s(q).$

$u_p^s(q_i)$ ist dabei die Eigenfunktion des Atoms mit dem Eigenwert E_{s_i} . Es gilt nämlich

$$(H_0 - E_{s_i}) u_p^s(q_i) = 0. \quad (8)$$

Um die Lösung Φ für eine beliebige Zeit zu finden, entwickelt man Φ nach den Eigenfunktionen der D.Gl.

$$(H_0 - E) u_p(q_i) = 0$$

Man setzt also

$$\Phi(q_i; p, M, \lambda, t) = \sum_l A_{sl}(M, \lambda, t) u_p^{sl}(q_i) \quad (9)$$

Man setzt weiter

$$A_{sl}(M, \lambda, t) = a_{sl}(M, \lambda, t) e^{-\frac{2\pi i}{h} (\sum M_{rx} h \nu_r + E_{sl}) t}$$

und setzt dies in die Gl (4) ein. So bekommt man

$$\begin{aligned} & \sum_l \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial a_{sl}(M, \lambda, t)}{\partial t} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} (\sum M_{rx} h \nu_r + E_{sl}) t} u_p^{sl}(q_i) \\ &= -i e \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \sum_{r\lambda k\sigma} v_k^{r\lambda}(q_i) \alpha_{p\sigma}^k [(M_{rx} + 1)^{1/2} \sum_l A_{sl}(M_{rx} + 1) u_{\sigma}^{sl}(q_i) \\ & \quad - M_{rx}^{1/2} \sum_l A_{sl}(M_{rx} - 1) u_{\sigma}^{sl}(q_i)] \end{aligned} \quad (10)$$

Man entwickelt $\sum_{k\sigma} v_k^{r\lambda} \alpha_{p\sigma}^k u_{\sigma}^{sl}(q_i)$ nach $u_p^{s'l}(q_i)$:

$$\sum_{k\sigma} v_k^{r\lambda} \alpha_{p\sigma}^k u_{\sigma}^{sl}(q_i) = \sum_{l'} C_{s'sl}^{rx} u_p^{s'l}(q_i), \quad (11)$$

$$C_{s'sl}^{rx} = \int \sum_{k\sigma} u_p^{s'l} \alpha_{p\sigma}^k \overline{u_{\sigma}^{sl}} v_k^{r\lambda} dV. \quad (12)$$

Man setzt (11) in (10) ein, und setzt die Koeffizienten jedes Gliedes $u_p^s(q_i)$ auf beiden Seiten gleich. So bekommt man eine Serie von Gl. für die $a_s(M, \lambda)$:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial a_{s_2}(M_{r\lambda})}{\partial t} &= -ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \sum_{r\lambda} C_{s_2, s_2}^{r\lambda} [(M_{r\lambda}+1)^{1/2} a_{s_2}(M_{r\lambda}+1) \\ &\times e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{s_2} + \hbar\nu_r - E_{s_2})t} - M_{r\lambda} a_{s_2}(M_{r\lambda}-1) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{s_2} - \hbar\nu_r - E_{s_2})t}] \end{aligned} \right.$$

Die Anfangsbedingung für die a_{s_2} lautet in diesem Falle
 $[a_{s_2}(M_{r\lambda}t)]_{t=0} = 0,$

ausgenommen $a_{s_1}(0)$, welche gleich Eins ist. Dann bekommt man aus (13) in erster Näherung

$$(13') \left\{ \begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} a_{s_1}(0) &= -ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \sum_{r\lambda} C_{s_2, s_2}^{r\lambda} a_{s_2}(1_{r\lambda}) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{s_2} + \hbar\nu_r - E_{s_2})t} \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} a_{s_2}(1_{r\lambda}) &= ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} C_{s_1, s_2}^{r\lambda} a_{s_1}(0) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{s_1} - \hbar\nu_r - E_{s_2})t} \end{aligned} \right.$$

Die Lösung von (13) ist zuerst von Dirac^{*} angegeben worden. Seine Lösung gilt aber nur für den Fall, daß die verstrichene Zeit sehr kurz ist, so daß $a_{s_1}(0, t)$ noch nicht merklich von Eins verschieden ist. Vor kurzem ist die noch allgemeinere Lösung, die fast für den ganzen Emissionsprozess gültig ist, von Weisskopf und Wigner^{**} angegeben worden, indem sie für $a_{s_1}(0, t)$ von vornherein $e^{-2\pi\Gamma t}$ gesetzt haben. Aus (13') folgt dann

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} a_{s_2}(1_{r\lambda}) = ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} C_{s_1, s_2}^{r\lambda} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{s_1} - \hbar\nu_r - E_{s_2})t - 2\pi\Gamma t}$$

und infolgedessen

* Dirac, 114, 243.

** Zs. 63, 54, 1930.

$$a_{se}(Trx) = ie \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \frac{1}{\hbar} C_{s,se}^{r\lambda} e^{\frac{-2\pi i (v_{s,se} - v_r - i\Gamma)t}{\hbar} - 1} \quad (14)$$

Man kann Γ so bestimmen, daß (14) mit $a_s(0, t) = e^{-2\pi\Gamma t}$ die erste Gl (13') erfüllt, ^{***}

Die $a_{se}(Mrx)$, bei denen mehr als ein Lichtquant vorhanden ist, sind von kleiner Größenordnung als diejenigen, die in (14) gegeben sind, und sie werden in der folgenden Rechnung vernachlässigt. Schließlich ist also $\varphi(q_i | Mrx Q_{rs}, t)$

durch
$$e^{\frac{-2\pi i}{\hbar} \sum_r v_r Q_{rs}} \sum_{se} A_{se}(Mrx) u_p^{se}(q_i) \quad (15)$$

gegeben, wobei

$$A_{se}(Mrx) = a_{se}(Mrx) e^{\frac{-2\pi i}{\hbar} (E_{se} + \sum Mrx \hbar v_r) t}$$

ist und $a_{se}(Mrx)$ einerseits nach (14) gegeben ist.

§ 2. Bevor wir auf die Ausrechnung der Summe A eingehen, müssen wir den Operator H näher betrachten.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \\ &= \frac{1}{16\pi} \sum_{ik} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + 2\pi c^2 \sum_k \Pi_k^2. \end{aligned}$$

Man entwickelt Φ_i und Π_i nach $v_i^{r\lambda}$:

$$\Phi_i = \sum_{r\lambda} Q^{r\lambda} v_i^{r\lambda}, \quad \Pi_i = \sum_{r\lambda} \frac{v_r}{2c^2} P^{r\lambda} v_x^{r\lambda}.$$

Dabei sollen die $v_i^{r\lambda}$ als c-Zahlen und die $Q^{r\lambda}, P^{r\lambda}$ als

^{***} Γ ist dabei von kleiner Größenordnung als $v_{s,se}$ und infolgedessen sind nur diejenigen $a_{se}(Trx)$ beträchtlich groß, bei denen v_r nicht merklich von $v_{s,se}$ verschieden ist.

Operatoren aufgefasst werden.

$$\left. \begin{aligned} Q^{r\lambda} &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} (M_{r\lambda}^{1/2} \Delta^{-1} - \Delta^{+1} M_{r\lambda}^{1/2}) \\ P^{r\lambda} &= \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} (M_{r\lambda}^{1/2} \Delta^{-1} + \Delta^{+1} M_{r\lambda}^{1/2}) \end{aligned} \right\} \text{für } \lambda=1, 2, (16)$$

wobei $\Delta^{r\lambda \pm 1}$ der Operator ist, der auf die Funktion von $M_{r\lambda}$ angewandt wird und $M_{r\lambda}$ um eines vermehrt bzw. verringert.

Für $\lambda=3$ gilt

$$Q_{r3} = Q_{rs} X, \quad P_{r3} = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial Q_{r3}} \quad (16')$$

Nun wird

$$H = \left[\frac{1}{16\pi} \sum_{r'\lambda'} Q^{r'\lambda'} Q^{r''\lambda''} \sum_{ik} \left(\frac{\partial U_i^{r'\lambda'}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k^{r'\lambda'}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial U_i^{r''\lambda''}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k^{r''\lambda''}}{\partial x_i} \right) + \sum_{r'\lambda'} \frac{\pi v_r v_{r'}}{2c^2} P^{r'\lambda'} P^{r''\lambda''} \sum_k v_k^{r'\lambda'} v_k^{r''\lambda''} \right] = H_1 + H_2 + H_3 + H_4, (17)$$

dabei ist

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \sum_{r'\lambda'} B_{r'\lambda'} v_r v_{r'} P^{r'\lambda'} P^{r''\lambda''} \\ H_2 &= \sum_{r'\lambda'} A_{r'\lambda'} Q^{r'\lambda'} Q^{r''\lambda''} \\ H_3 &= \sum_{r'\lambda'} B_{r'\lambda'} v_r v_{r'} P^{r'\lambda'} P^{r''\lambda''} \\ H_4 &= \sum_{r'\lambda'} B_{r'\lambda'} v_r v_{r'} P^{r'\lambda'} P^{r''\lambda''} \\ A_{r'\lambda'} &= \sum_{ik} \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial U_i^{r'\lambda'}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k^{r'\lambda'}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial U_i^{r''\lambda''}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k^{r''\lambda''}}{\partial x_i} \right) \\ B_{r'\lambda'} &= \frac{\pi}{2c^2} \sum_k v_k^{r'\lambda'} v_k^{r''\lambda''} \end{aligned} \right\} (17)^*$$

Q_{r3} kommt in dem Operator H nicht vor.

* Im folgenden nimmt λ nur die Werte 1 und 2 an.

§3. Wir teilen A in die vier Teile A_1, A_2, A_3, A_4 , die je von H_1, H_2, H_3, H_4 herrühren. Es wird sich später herausstellen, daß A_1 dem elektrischen Teil der Energiedichte der Strahlung, A_2 dem magnetischen Teil derselben korrespondenzmäßig entspricht, und weiter, daß A_4 vom Coulombschen Felde des Elektrons herrührt, und A_3 die Interferenzenergie zwischen den elektrischen Vektoren bedeutet, die einerseits von der Strahlung, anderseits vom Dipolmoment des Atoms herrühren.

Wir betrachten beispielsweise A_1 ausführlich.

Es ist

$$H_1 \varphi = e \frac{-2\pi i}{h} e \sum_r v_r^r Q_{rs} \sum_{\mu} u_{\mu}^{s\ell} (q_i) H_1 A_{s\ell}(M_{r\lambda})$$

$$\text{und } H_1 A_{s\ell}(M_{r\lambda}) = \sum_{r'\lambda'r''} \left[\frac{h}{4\pi} M_{r'\lambda'}^{1/2} M_{r''\lambda''}^{1/2} (v_{r'} v_{r''}) B_{r''\lambda''}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'-1}, M_{r''\lambda''-1}) \right.$$

$$(18) \quad + \frac{h}{4\pi} (M_{r'\lambda'+1})^{1/2} M_{r''\lambda''}^{1/2} (v_{r'} v_{r''}) B_{r''\lambda''}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'+1}, M_{r''\lambda''-1}) \\ + \frac{h}{4\pi} (M_{r'\lambda'}^{1/2}) (M_{r''\lambda''+1})^{1/2} v_{r'} v_{r''} B_{r''\lambda''}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'-1}, M_{r''\lambda''+1}) \\ + \frac{h}{4\pi} (M_{r'\lambda'+1})^{1/2} (M_{r''\lambda''+1})^{1/2} v_{r'} v_{r''} B_{r''\lambda''}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'+1}, M_{r''\lambda''+1})$$

$$(19) \quad + \sum_{r'\lambda'} \left[\frac{h}{4\pi} M_{r'\lambda'}^{1/2} (M_{r'\lambda'-1})^{1/2} v_{r'}^2 B_{r'\lambda'}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'-2}) \right. \\ + \frac{h}{4\pi} (2M_{r'\lambda'+1}) v_{r'}^2 B_{r'\lambda'}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'})$$

$$\left. + \frac{h}{2\pi} (M_{r'\lambda'+1})^{1/2} (M_{r'\lambda'+2})^{1/2} v_{r'}^2 B_{r'\lambda'}^{r'\lambda'} A_{s\ell}(M_{r'\lambda'+2}) \right].$$

Man multipliziert nun (18) von links mit $\bar{\varphi}$ und summiert bzw. integriert über die Eigenwerte von allen Variablen. Man sieht leicht, daß der exponentielle Faktor $e^{-\frac{2\pi i}{h} \sum v_0^r \theta_{r,s}}$ wegfällt und daß der Summand kein $\theta_{r,s}$ mehr enthält. Zunächst kann man leicht über q_i und p integrieren, indem man von dem Umstand

$$\sum_p \int \bar{u}_p^{se} u_p^{se'} dv = \delta_{se'}$$

Gebrauch macht.

Einfachheits halber nehmen wir dabei an, daß es nur ein E_{s_2} gibt, sagen wir E_{s_0} , das tiefer liegt als E_{s_1} . Also ist s_0 der Grundzustand des Atoms und s_1 der zweitiefste. Dann wird die Rechnung bei der Summation über s_2 sehr vereinfacht, indem man den Umstand benützt, daß nur Glieder der Form $a_{s_0}(1r\lambda)$ wegen des Resonanznenners $\nu_{s_1 s_0} - \nu_{r'} - iP$ beträchtlich groß werden, und daß die anderen, z. B. $a_{s_2}(1r\lambda)$ usw. dem gegenüber vernachlässigt werden können. So bekommt man (18) und (19)

$$A_1 = \sum_{r'\lambda'r''\lambda''} \frac{h}{2\pi} a_{s_0}(1r'\lambda') \nu_{r'} \nu_{r''} B_{r''\lambda''}^{r'\lambda'} a_{s_0}(1r''\lambda'') e^{-2\pi i(\nu_{r'} - \nu_{r''})t}$$

$$= \sum \frac{e^{-i}}{8\pi^2} \nu_{r'} \nu_{r''} \frac{\pi}{2c^2} \sum_k \nu_k^{r'\lambda'} \nu_k^{r''\lambda''} C_{s_1 s_0}^{r'\lambda'} \overline{C_{s_1 s_0}^{r''\lambda''}} \frac{e^{-2\pi i \nu_{r'} t} - 1}{\gamma_{r'}} \cdot \frac{e^{-2\pi i \nu_{r''} t} - 1}{\gamma_{r''}}$$

x e

wobei

$$\gamma_{r'} = \nu_{s_1 s_0} - \nu_{r'} - iP$$

ist, Also ist

$$A_1 = \frac{1}{8\pi} \sum_K F_K(x,y,z,t) \overline{F_K(x,y,z,t)}$$

$$F_K(x,y,z,t) = \sum_{r,\lambda} \frac{e}{\sqrt{2c}} v_{r,\lambda} c_{s_i, s_0}^{r,\lambda} \frac{e^{-2\pi i r_{r,t}} - 1}{\gamma_r} e^{-2\pi i v_{r,t}} \quad (21)$$

Dabei sind x, y, z die Koordinaten des Punktes P' . Wenn man für $c_{s_i, s_0}^{r,\lambda}$ den Ausdruck (12) einsetzt, so bekommt man

$$\begin{aligned} & \overline{F_K(x,y,z,t)} \\ &= \frac{e}{\sqrt{2c}} \int \sum_{i, r,\lambda} v_{r,\lambda} v_{K P'}^{r,\lambda} (v_i^{r,\lambda} \bar{u}_p^{s_i} \bar{u}_p^{s_0}) dV_{Pa} \frac{e^{-2\pi i r_{r,t}} - 1}{\gamma_r} \\ & \quad \times e^{-2\pi i v_{r,t}} \end{aligned}$$

Man führt die Summation zuerst über i und λ aus. Aus (6) und (7) ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z,t) &= \frac{16ce}{\sqrt{2L^3}} \left[\int V_{1P'}^{r'} V_{1Pa}^{r'} \beta_1 \right. \\ & \left. + \frac{c^2}{4\pi^2 v_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} V_{1P'}^{r'} V_{1Pa}^{r'} \beta_1 + \frac{\partial}{\partial y} V_{2P'}^{r'} V_{2Pa}^{r'} \beta_2 + \frac{\partial}{\partial z} V_{3P'}^{r'} V_{3Pa}^{r'} \beta_3 \right) \right. \\ & \left. \times dV_{Pa} \frac{e^{-2\pi i r_{r,t}} - 1}{\gamma_r} e^{-2\pi i v_{r,t}} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_i &= \bar{u}_p^{s_i} \bar{u}_p^{s_0}, \\ V_i^{r'} &= \cos \frac{2\pi v_i^{r'}}{c} \varepsilon_{r'1} x \sin \frac{2\pi v_i^{r'}}{c} \varepsilon_{r'2} y \sin \frac{2\pi v_i^{r'}}{c} \varepsilon_{r'3} z \end{aligned}$$

usw. ist. (Für F_2 und F_3 zyklische Vertauschung von Indizes 1, 2 und 3.) Betrachten wir nun die folgende Summe S' :

$$S = \sum_{\gamma} V_{IP'}^{\gamma} \cdot V_{IP_a}^{\gamma} \frac{e^{-2\pi i \gamma r t} - 1}{\gamma_{\gamma}} e^{-2\pi i \gamma_{\gamma} t}$$

S ist eine Funktion der Koordinaten des Punktes P' und der Zeit. Die zeitliche und räumliche Abhängigkeit von T_n und folglich auch A_1 ist lediglich durch diese Summe bestimmt. Wenn z. B. S, $\frac{\partial S}{\partial x}$ usw. verschieden ^{wenn}, so verschwinden auch T_n und A_1 .

Wir wollen nun die Summe S ausrechnen.

Nun ist

$$\begin{aligned} V_{IP'}^{\gamma} \cdot V_{IP_a}^{\gamma} &= \cos \frac{2\pi \gamma r}{c} \epsilon_{r1} x \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r1} x_a \sin \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r2} y \sin \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r2} y_a \sin \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r3} z \sin \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r3} z_a \\ &= \frac{1}{8} \left(\cos \frac{2\pi \gamma r}{c} \epsilon_{r1} (x-x_a) + \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r1} (x+x_a) \right) \left(\cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r2} (y-y_a) \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r2} (y+y_a) \right) \left(\cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r3} (z-z_a) - \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r3} (z+z_a) \right) \end{aligned}$$

Also besteht $V_{IP'}^{\gamma} V_{IP_a}^{\gamma}$ aus acht Gliedern. Von diesen betrachtet man zuerst nur das Glied

$$\frac{1}{8} \cos \frac{2\pi \gamma r}{c} \epsilon_{r1} (x-x_a) \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r2} (y-y_a) \cos \frac{2\pi \gamma}{c} \epsilon_{r3} (z-z_a)$$

Die anderen Glieder liefern, wie Breit* gezeigt hat denjenigen Teil der Energie, der von der Wechselwirkung des Punktes P' mit dem Spiegelbild des Atoms an der Wand herrührt. Dies kann man auch leicht der folgenden Rechnung entnehmen, bei denen nur das angegebene Glied berücksichtigt wird.

Also ist

* Phy Rev 34, 553, 1929

$$S = \sum \frac{1}{r} \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r1} (x-x_\alpha) \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r2} (y-y_\alpha) \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r3} (z-z_\alpha) \frac{e^{-2\pi i \delta_r t} - 1}{r} e^{-2\pi i \nu t}$$

Man kann leicht sehen, daß man anstatt über r zu summieren, auch über r integrieren darf. Man führt die Variablen ϑ , Θ und φ auf folgende Weise ein.

$$r = \rho, \quad \varepsilon_{r1} = \cos \Theta, \quad \varepsilon_{r2} = \sin \Theta \cos \varphi, \quad \varepsilon_{r3} = \sin \Theta \sin \varphi.$$

Dann wird

$$S = \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho U(\rho) \sin \Theta \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r1} (x-x_\alpha) \times \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r2} (y-y_\alpha) \cos \frac{2\pi\nu r}{c} \varepsilon_{r3} (z-z_\alpha) \frac{e^{-2\pi i \delta_r t} - 1}{c} e^{-2\pi i \nu t}$$

wobei $U(\rho) d\rho$ die Zahl diejenigen Eigenschwingungen des Hohlraumes ist, deren r zwischen ρ und $\rho + d\rho$ liegt.

Es gilt dann $U(\rho) = \frac{4\pi L^3 \rho^2}{c^3}$. Man führt zuerst die Integration über Θ und φ aus. Nach unständlichen, aber elementaren Rechnungen bekommt man

$$S = \frac{\pi}{16} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi\rho}{c} R}{\frac{2\pi\rho}{c} R} \frac{e^{-2\pi i \delta_r t} - 1}{r} e^{-2\pi i \nu t} U(\rho) d\rho$$

Dabei ist $R = \sqrt{(x-x_\alpha)^2 + (y-y_\alpha)^2 + (z-z_\alpha)^2}$.

Nun ist $r_\rho = v_{s,50} - \rho - i\Gamma$, wobei Γ von kleiner Größenordnung als $v_{s,50}$ ist. Folglich hat der Integrand wegen des Faktors $\frac{\sin \frac{2\pi\rho}{c} R}{r_\rho}$ ein sehr steiles Maximum.

an der Stelle $p = v_{s,50}$, vorausgesetzt, dass $\frac{2\pi v_{s,50}}{c} R$ sehr groß ist, d. h. R sehr viel größer ist als die Wellenlänge. Nur die Umgebung der Stelle $p = v_{s,50}$ liefert also einen beträchtlichen Beitrag zu S . Darum kann man ruhig das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken und den Faktor $U(p)/2\pi p$, der viel langsamer veränderlich ist als die anderen, durch $U(v_{s,50})/2\pi v_{s,50}$ ersetzen und vor das Integralzeichen ziehen*.

Also gilt

$$S = \frac{\pi L^3 v_{s,50}}{8 c^2 R} e^{-2\pi i (v_{s,50} - iE)t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{2\pi R}{c} p \frac{1 - e^{2\pi i (v_{s,50} p - iE)t}}{v_{s,50} - p - iE} dp.$$

Nun betrachtet man das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{2\pi R}{c} p \frac{1 - e^{2\pi i (v_{s,50} p - iE)t}}{v_{s,50} - p - iE} dp$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{\frac{2\pi i R}{c} p} - e^{-\frac{2\pi i R}{c} p} - e^{2\pi i \left\{ \left(\frac{R}{c} - t \right) p + (v_{s,50} - iE)t \right\}} + e^{-2\pi i \left\{ \left(\frac{R}{c} + t \right) p - (v_{s,50} - iE)t \right\}} \right] \frac{dp}{v_{s,50} - p - iE} \quad (23)$$

Das Integral der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha ip + \beta}}{v_{s,50} - p - iE} dp$ können man kann

durch komplexe Integration ausrechnen, indem man den Weg I oder II wählt (Fig. I), je nachdem der Real teil von α größer oder kleiner als Null ist, im ersten Falle

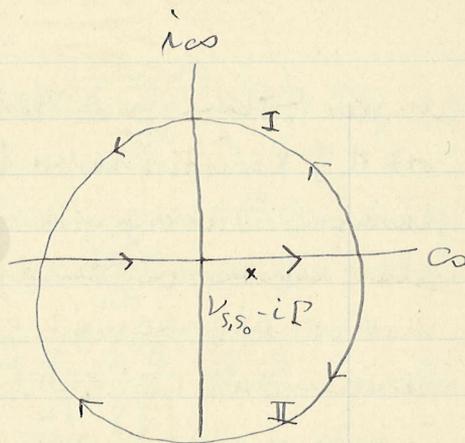
wird es $2\pi i e^{\alpha i(\nu_{s,s_0} - iP) + \beta}$.

Wir kommen nun zum Integral I zurück. Wenn $R/c > t$ ist, dann verschwindet das erste und dritte Glied und es heben sich das zweite und vierte gegeneinander auf und wir erhalten im ganzen

Null. Also verschwindet S , $\frac{\partial S}{\partial x}$ usw. für diese Zeit und infolgedessen verschwinden F_K und A_1 für eine Zeit kleiner als R/c , wobei R_0 der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Atoms und P bezeichnet. Es ergibt sich natürlich eine gewisse Unbestimmtheit für diesen Zeitpunkt entsprechend der Größe des Atoms.

Auf genau dieselbe Weise kann man zeigen, daß auch A_2 für diese Zeit verschwindet. Damit ist der Beweis erbracht, daß das Lichtsignal sich niemals mit einer Geschwindigkeit fortpflanzt, die größer als c ist.

* Da der hiermit verursachte Fehler von der Größenordnung $(\lambda/R)^2$ ist, ist die folgende Rechnung nur in den Gliedern von der Größenordnung (λ/R) richtig, d.h. der Abstand zwischen dem Atom und dem Aufpunkt muß so groß sein, daß man Glieder von der Größenordnung λ^2/R^2 gegenüber λ/R vernachlässigen darf. Weil $\lambda \geq d$ (d bedeutet die Größe des Atoms), kann man dann auch Glieder der Ordnung d^2/R^2 gegen solche der Ordnung d/R streichen. Auf diesen Punkt können wir wieder zurück bei der Diskussion von A_4 .



§4. Wir wollen im weiteren den Wert von A_1 bzw. A_2 für die Zeit $t > R_0/c$ untersuchen. Für $t > R_0/c$ bleibt das dritte Glied in (23) übrig und man bekommt

$$I = -\frac{\partial u_i}{\partial z} e^{2\pi i (v_{s,s_0} - iP) \frac{R}{c}}$$

Absort $S = \frac{\pi^2 L^3 v_{s,s_0}}{8c^2 R} e^{-2\pi i v_{s,s_0} (t - \frac{R}{c})} e^{-(t - \frac{R}{c})P};$

aus (21) und (22) erhält man

$$F_1(x,y,z,t) = \frac{16}{\sqrt{2}} \frac{ec}{L^2} \int [S p_1 + \frac{c^2}{4\pi^2 v_{s,s_0}^2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} S p_1 + \frac{\partial}{\partial y} S p_1 + \frac{\partial}{\partial z} S p_1)] \times dV_a. \quad (24)$$

Bei der Differentiation von S nach x, y, z berücksichtigen wir nur diejenigen Glieder, die von der Größenordnung von $1/R$ sind, und betrachten den Faktor $e^{-(t - \frac{R}{c})P}$ als konstant, da P viel kleiner ist als v_{s,s_0} . Man bekommt dann in dieser

Näherung

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{4\pi^2 v_{s,s_0}^2} \frac{\partial S}{\partial x^2} &= \frac{\pi^2 L^3}{8c^2} v_{s,s_0} e^{-2\pi i v_{s,s_0} (t - \frac{R}{c})} e^{-(t - \frac{R}{c})P} \frac{(x-x_0)^2}{R^2} \frac{e^{\frac{2\pi i v_{s,s_0} R}{c}}}{R} \\ \frac{c^2}{4\pi^2 v_{s,s_0}^2} \frac{\partial S}{\partial x \partial y} &= \frac{\pi^2 L^3}{8c^2} v_{s,s_0} e^{-2\pi i v_{s,s_0} (t - \frac{R}{c})} e^{-(t - \frac{R}{c})P} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{R^2} \frac{e^{\frac{2\pi i v_{s,s_0} R}{c}}}{R} \end{aligned} \right.$$

Aus (24) und (25) ergibt sich

$$F_1(x,y,z,t) = \frac{\sqrt{2}}{c} e^{\pi^2} v_{s,s_0} e^{-2\pi i v_{s,s_0} t} e^{-2\pi (t - \frac{R}{c})P}$$

$$(27) \quad A_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{16\pi^4 V_{s_1 s_0}^4}{R_0^3 c^4} \left\{ |D_{x_0} - v_{0x}(R_0 D)|^2 + |D_y|^2 + |D_z|^2 \right\}.$$

Nach einige Umbormungen kann man leicht sehen, daß A_1 der Wahrscheinlichkeit des Überganges von s nach s_0 unter der Ausstrahlung eines Lichtquants in der Richtung v_0 direkt proportional ist.

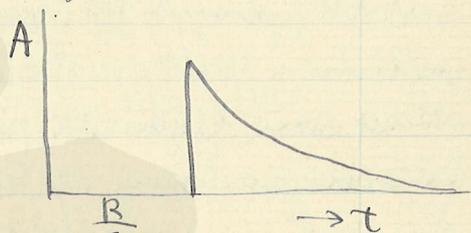
Wenn man (26) mit (27) mit Formel des klassischen elektromagnetischen Feldes eines harmonisch schwingenden Dipols mit dem imaginären Moment D vergleicht, so wird $|F_k|$ korrespondenzmäßig der k -Komponente F_k der elektrischen Feldstärke entsprechen, welche ja $1/R_0$ proportional ist. A_1 entspricht dann dem Teil der Energiedichte, der von F_k herrührt.

Die anderen Terme von F_k , die $1/R_0^2$ bzw. $1/R_0^3$ proportional sind, kann man auch den Entsprechenden Termen der klass. El. Dyn. zuordnen. Es hat aber nicht viel Zweck, dies näher zu untersuchen, da man schon bei der Ausrechnung von A_1 angenommen hat, daß $R \gg \lambda$ ist, und man die Glieder der Größenordnung $1/R_0^2$ bzw. $1/R_0^3$ vernachlässigt hat. Was A_2 betrifft, so läßt sich diese Glied auf genau dieselbe Weise behandeln, und es ergibt sich schließlich

$$A_2 = \frac{1}{8\pi} \frac{16\pi^4 V_{s_1 s_0}^4}{c^4 R_0^2} |(D \cdot v_0)|^2.$$

P_{22} entspricht dem magnetischen Teil der Strahlen des schwingenden Dipols mit dem Moment D . Man kann leicht zeigen, daß die Zahlenwerte von A_1 und A_2 gleich sind.

Der zeitliche Verlauf des Erwartungswertes ist in Fig. 2 schematisch angegeben. Bis zur Zeit $t = \frac{R}{c}$ bleibt er Null, und zu dieser Zeit nimmt er plötzlich einen von Null verschiedenen Wert an, um dann wegen des Abklingungsfaktors $e^{-2\pi(t - \frac{R}{c})/\tau}$ in D exponentiell abzunehmen.



Auf diese Art kann man den Begriff der Länge des Wellenzuges oder der Kohärenzlänge, der in der früheren Theorie nur korrespondenzmäßig definierbar war, exakt beschreiben, und der Zusammenhang mit der Lebensdauer des Atoms ist hiermit quantentheoretisch abgeleitet.

Man kann das Problem auch folgendermaßen behandeln: anstatt den Erwartungswert A zu betrachten, nimmt man an, daß in P' ein zweites Atom vorhanden ist das sich zur Zeit $t=0$ im Grundzustand befindet. Man untersucht dann, wie der zeitliche Verlauf der Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das zweite Atom angeregt ist und kein Lichtquant sich im Hohlraum befindet. Dann muß man

von einer Gleichung ausgehen, die noch allgemeiner als (4) ist. Man würde aber wieder der Summe (23) begegnen und das Resultat bekommt, daß die fragliche Wahrsch. bis zur Zeit $t = R_c$ Null bleibt, und daß sie von dieser Zeit ab zunimmt und schließlich einem von Null verschiedenen endlichen Wert zustrebt. Diese Behandlung ist noch nicht den Einwände ausgesetzt, die sich für die Durchführung rechnerisch des Erwartungswertes für E aus der Nullpunktsenergie ergeben könnten.

§ 5. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß die A_3 und A_4 mit der Energie der Lichtquanten nichts zu tun haben. Wir betrachten zuerst A_4 . Aus (16') und (17') folgt;

$$\begin{aligned}
 H_4 \varphi &= \sum_{r'r''} B_{r'r''}^{r'3} V_r V_{r''} P^{r'3} P^{r''3} \varphi \\
 &= \sum_{r'r''} e^2 B_{r'r''}^{r'3} V_r V_{r''} U_0^{r'} U_0^{r''} \sum_{s_2} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_r v_0^{rs} Q_{rs}} A_{s_2} (M_{rs})^{s_2} u_{s_2}.
 \end{aligned}$$

Man multipliziert mit $\bar{\varphi}$ von links und summiert über die Eigenwerte der Variablen. Nach einiger Umformung bekommt man

$$\begin{aligned}
 (28) \quad A_4 &= \frac{\pi e^2}{2c^2} \sum_{r''} \sum_{t_2} \sum_{r'} V_r U_k^{r'3} d_{s_2 t_2}^{r'} a_{s_2}^{(0)} \sum_{r''} V_{r''} U_k^{r''3} \overline{d_{s_2 t_2}^{r''}} \overline{a_{s_2}^{(0)}} \\
 &+ \frac{\pi e^2}{2c^2} \sum_{r''} \sum_{k} \sum_{t_2} \sum_{r'} V_r U_k^{r'3} d_{s_0 t_2}^{r'} a_{s_0}^{(1, r' \lambda)} \sum_{r''} V_{r''} U_k^{r''3} \overline{d_{s_0 t_2}^{r''}} \overline{a_{s_0}^{(1, r'' \lambda)}}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist
$$d_{s_2 t_2}^{r'} = \sum_p \int \bar{u}_p^{s_2} u_p^{t_2} v_0^{r'} dv.$$

Betrachten wir nun die Summe $\sum_r v_r U_r^{r3} d_{sete}^r$:

$$\sum_r v_r U_r^{r3} d_{sete}^r = -\frac{4c^3}{\pi^2 L^3} \frac{\partial}{\partial x} \int V_{op}^r V_{opa}^r \bar{u}_p^{se} u_p^{te} dV_{pa}$$

für $L \rightarrow \infty$ bekommt man

$$\begin{aligned} \sum_r v_r U_r^{r3} d_{sete}^r &= \frac{c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{R} \bar{u}_p^{se} u_p^{te} dV_{pa} \\ &= \frac{c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_0} \int \bar{u}_p^{se} u_p^{te} dV_{pa} + \frac{c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_0^2} (W_0 \xi) \bar{u}_p^{se} u_p^{te} dV_{pa} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Dabei bezeichnet ξ den Radiusvektor vom Kern zum Elektron. Aus (28) und (29) sieht man leicht ein, daß A_4 aus Gliedern besteht, welche höheren Potenzen als R^3 umgekehrt proportional sind. Solche Glieder, welche $1/R_0^4$ proportional sind, bekommt man bei der Summation über te , wenn $te = s_0$ oder s , ist. In diesem Falle bekommt man

$$A_4 = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{R_0^4}$$

Das ist gleich der Energiedichte, die vom Coulombschen Kraftfeld des Elektrons herrührt. Die weiteren Glieder sind $1/R_0^5$ und $1/R_0^6$ usw. proportional und rühren von den Dipolmomenten und höheren Momenten des Atoms her.

Daß die Glieder, die in A_4 eingehen, nicht retardiert

erscheinen, rührt davon her, daß man per definitionem als Coulombschen Teil des Feldes den bezeichnet, der auftreten würde, wenn die momentane Ladungsverteilung dauernd vorhanden wäre. Daß sich auch in dem Bereich $R \lesssim \lambda$, in dem die Coulombkräfte wesentlich sind, Störung mit Lichtgeschw. fortzupflanzen, könnte man erst nachrechnen, wenn man die Rechnung für A_1 und A_2 im Bereich $R \lesssim \lambda$ exakt durchgeführt. Unsere Behandlung gilt nur für $R \gg \lambda$, wo die Coulombkräfte irrelevant sind.

A_3 kann man ganz analog behandeln. Es enthält die Glieder, die höheren Potenzen als R^3 umgekehrt proportional sind, und besteht aus dem Skalarprodukt der beiden elektrischen Vektoren, deren einer vom Dipolmoment bzw. von höheren Momenten, deren anderer vom el. Vektor der Strahlung herrührt. A_3 liefert also die Interferenzenergie zwischen dem el. Vektor der von Strahlung und Dipolmoment (bzw. von höheren Momenten).

Es ist also klar, daß A_3 und A_4 mit der Energie der Lichtquanten nichts zu tun haben und für $R \gg \lambda$ gegenüber A_1 und A_2 vernachlässigt werden können.

Dank. --- Prof. Heisenberg meinen herzlichsten

Annalen der Physik 159, (3 Folge), 1951

Bemerkungen zur Strahlungstheorie
Von W. Heisenberg

Die Diracsche Theorie der Strahlung gibt von der Absorption, Emission und Dispersion von Strahlung durch Atome befriedigend Rechenschaft, die Q.E.D. gestattet darüber hinausgehend auch eine befriedigende Behandlung der Interferenzerscheinungen. Obwohl nun die Resultate der Theorie in den meisten Fällen mit dem übereinstimmen, was man nach dem Korrespondenzprinzip von vornherein erwartet, so sind die Rechnungen, die zu diesem Ziel führen, doch bisher ziemlich umständlich und die einfachsten Konsequenzen der klassischen Strahlungstheorie lassen sich nur auf dem Umwege über eine recht unübersichtliche Schrödingergleichung in einem unendlich-dimensionalen Raum ableiten.

Im folgenden soll eine Methode zur Behandlung von Strahlungstheorie^{problemen} beschrieben werden, die sich viel enger als die bisherigen an die anschaulichen Vorstellungen der klassischen Theorie und der Wellenmechanik anschließt und die deshalb in den meisten Fällen, ohne Umwege, das korrespondenzmäßig zu erwartende Resultat liefert.¹⁾

Bei dieser Behandlungsweise soll nicht von der Hamiltonfunktion oder der entsprechenden Schrödingergleichungen im Konfigurationsraum ausgegangen werden, sondern von den Bewegungsgleichungen, d.h. von den Maxwell'schen und den Diracschen Wellengleichungen. Diese Differentialgleichungen

¹⁾ Vgl. die Untersuchungen von O. Klein, Zs. f. Phys. 41, S. 407, 1927. Eine den folgenden Rechnungen ähnliche Methode ist von L. Rosenfeld, Zs. 65, S. 589, 1930. Zs. zur Behandlung der Gravitationswirkungen des Lichtes verwendet worden.

werden explizit integriert, nachdem der Wert der Wellenfunktionen (\mathbf{E} , \mathbf{H} und Ψ_0) zur Zeit $t=0$ als gegeben angenommen wird; dabei ist zu beachten, daß die Wellenfunktionen zur Zeit $t=0$ nichtkommutative Größen sind. Diese Nichtvertauschbarkeit der Anfangswerte von \mathbf{E} , \mathbf{H} und Ψ_0 stört jedoch solange bei der Integration nicht, als man die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung als klein annimmt und nur lineare Glieder in dieser Wechselwirkung berücksichtigt. Die Vernachlässigung höherer Glieder ist übrigens notwendig, um den bekannten Schwierigkeiten der Q.E.D. (unendliche Selbstenergie) zu entgehen.

§ 1. Betrachten wir also zunächst die Veränderung des Atoms unter Einfluß äußerer Strahlung. Dabei nehmen wir zuerst zur Vereinfachung an, daß die Wechselwirkung der Elektronen im Atom vernachlässigt werden kann. Dann wird im ungestörten System die Diracsche Wellenfunktion in der Form geschrieben werden können

$$(1) \quad \psi(\mathbf{r}, \sigma) = \sum a_n u_n(\mathbf{r}, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t}$$

wobei $\mathbf{r}(x, y, z)$ die Koordinaten, σ die Spinvariable, also der Index der Wellenfunktion bedeutet. Die a_n sind Operatoren der Form

$$(2) \quad a_n = \Delta_n N_n \quad ; \quad a_n^* = N_n \Delta_n,$$

wobei der Operator Δ_n die Variable N_n in $1 - N_n$ verwandelt

(Fermi-Statistik!). n_n bedeutet also anschaulich die Anzahl der Elektronen im Zustand n , oder auch die Intensität der Eigenschwingung u_n und hat die Eigenwerte 0 und 1. Die n_n sind im ungestörten System zeitlich konstant, außerdem können wir annehmen, dass die Werte von N_n im ungestörten System bekannt seien.

Das störende äußere Strahlungsfeld sei aufgebaut aus Trigenfunktionen, die durch eine zyklische Bedingung mit der Periode L gewonnen werden:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{k}{L}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(b_{\mathbf{k}, \lambda}^+ e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}{L}} - b_{-\mathbf{k}, -\lambda}^- e^{-\frac{2\pi i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}{L}} \right) \\ H &= \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{k}{L}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \frac{k}{k} \right] \\ &\quad \times \left(b_{\mathbf{k}, \lambda}^+ e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}{L}} - b_{-\mathbf{k}, -\lambda}^- e^{-\frac{2\pi i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}{L}} \right) \end{aligned} \right.$$

³⁴⁰ Hierbei ist $\alpha = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{ch}{2}}$; der Index $\lambda = 1, 2$ unterscheidet die verschiedenen Polarisationsrichtungen der Strahlung vom Ausbreitungsvektor \mathbf{k} ; die $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ sind zwei zueinander und zu \mathbf{k} senkrechte Einheitsvektoren. Die $b_{\mathbf{k}, \lambda}$ sind im ungestörten System zeitlich konstant und können als Operatoren der Form

$$(4) \quad b_{\mathbf{k}, \lambda} = \Delta_{\mathbf{k}, \lambda}^+ M_{\mathbf{k}, \lambda}^{1/2}; \quad b_{-\mathbf{k}, -\lambda} = b_{\mathbf{k}, \lambda}^* = M_{\mathbf{k}, \lambda}^{1/2} \Delta_{\mathbf{k}, \lambda}^-$$

geschrieben werden, wobei $\Delta_{\mathbf{k}, \lambda}^+$ bzw. $\Delta_{\mathbf{k}, \lambda}^-$ die Variable $M_{\mathbf{k}, \lambda}$ in $M_{\mathbf{k}, \lambda} + 1$ bzw. $M_{\mathbf{k}, \lambda} - 1$ verwandelt, $M_{\mathbf{k}, \lambda} = b_{\mathbf{k}, \lambda}^* b_{\mathbf{k}, \lambda}$ bedeutet also anschaulich die Anzahl der Lichtquanten oder die

Intensität der Eigenschwingung für λ .

Die Diracgleichung für die Wellen negativer Ladung lautet

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar}{2mc} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} \Phi_0 \\ + \alpha_i \left(\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \Phi_i \right) + \alpha_4 \mu c \end{array} \right\} \psi = 0.$$

Setzt man für die Potentiale Φ_i die des ungestörten Systems ein, so soll die Gl. (5) in der vereinfachten Form

$$(5) \quad \left(-\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial t} - D \right) \psi^0 = 0$$

geschrieben werden. Als Störung betrachten wir nun etwa eine monochromatische ebene Welle aus den Formeln (3), da wir im Endresultat in der hier diskutierten Näherung die Gesamtstörung additiv aus den Einzelstörungen zusammensetzen können, (Den Index λ lassen wir also einstweilen weg.) Man findet eine Störungsgleichung der Form

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial t} - D \right) \psi^{(1)} \\ = i \left(b e^{\frac{2\pi i (kx - ct)}{L}} - b^* e^{-\frac{2\pi i (kx - ct)}{L}} \right) F \cdot \psi^{(0)}, \end{array} \right.$$

wobei F ein Operator ist, der auf den Diracschen Index wirkt und dessen Ausrechnung hier nicht weiter interessiert. Man kann nun in bekannter Weise nach Eigenfunktionen entwickeln

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^{(0)} = \sum a_n^{(0)} u_n e^{-\frac{2\pi i}{L} E_n t} \\ \psi^{(1)} = \sum a_n^{(1)} u_n e^{-\frac{2\pi i}{L} E_n t} \end{array} \right.$$

341 und erhält

$$(8) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial a_n^{(1)}}{\partial t} &= \sum_m i \left\{ b e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_n - E_m - h\nu)t} F_{nm} a_m^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - b^* e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_n - E_m + h\nu)t} F_{nm}^* a_m^{(0)} \right\} \end{aligned} \right.$$

wobei die F_{nm} und F_{nm}^* die Matrixelemente der ebenen Welle $e^{\pm \frac{2\pi i}{\hbar} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, multipliziert mit dem Operator \bar{V} , bedeuten. Die Integration ergibt in bekannter Weise

$$(9) \left\{ \begin{aligned} a_n^{(1)} &= -c \sum_m i \left\{ b \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_n - E_m - h\nu)t} - 1}{E_n - E_m - h\nu} F_{nm} a_m^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - b^* \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_n - E_m + h\nu)t} - 1}{E_n - E_m + h\nu} F_{nm}^* a_m^{(0)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Bis hierher ist die Rechnung nichts weiter, als eine Wiederholung der Schrödingerschen Dispersions-theorie. Bei der physikalischen Interpretation der Formeln (9) muß man jedoch beachten, daß die a^* , a und b nichtkommutative Variable sind.

Betrachten wir z. B. den Resonanzfall und fragen nach dem Erwartungswert von $a_n^{(1)*} a_n^{(1)}$ zur Zeit t , wenn im ungestörten System alle $a_m^{(0)}$ und $N_m^{(0)}$ verschwinden bis auf ein bestimmtes $a_m^{(0)}$ und $N_m^{(0)}$ ($N_m^{(0)} = 1$). (Wenn die $N_m^{(0)}$ verschwinden, so sind auch die $a_m^{(0)}$ sicher Null, nicht aber die $a_n^{(0)*}$).

Man muß hier zwei Fälle unterscheiden. Es sei zunächst $E_n > E_m$. Dann tritt ein verschwindender Resonanznenner im ersten Glied auf der rechten Seite von (9) auf, das zweite

2) Ann. 81, S. 109. 1926.

Glied kann gestrichen werden. Summiert man dann noch über sämtliche Eigenschwingungen $k\lambda$ des Hohlraums in der Umgebung der kritischen i $h\nu = E_n - E_m$, so findet man für $a_n^{(1)*} a_n^{(1)}$ einen Ausdruck der Form

$$\begin{aligned}
 (10) \quad a_n^{(1)*} a_n^{(1)} &= a_m^{(0)*} a_m^{(0)} \frac{\sum_{k\lambda} b_{k\lambda}^* b_{k\lambda}}{\sum_{\nu \in \Delta\nu}} \cdot B_n^{(1)} t \\
 &= t \cdot B_n^{(1)} N_m^{(0)} \frac{\sum_{k\lambda} M_{k\lambda}}{\sum_{\nu \in \Delta\nu}} = t \cdot B_n^{(1)} N_m^{(0)} f_\nu
 \end{aligned}$$

Hierbei ist die Summe über $k\lambda$ zu erstrecken über ein kleines Frequenzintervall $\Delta\nu$, das die kritische Frequenz umschließt; $\sum_{\nu \in \Delta\nu}$ bedeutet die Anzahl der Hohlraum-schwingungen im Intervall $\Delta\nu$ ($\sum_{\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} L^3$); P_ν die Energie dichte der Strahlung pro Volumen und Frequenzintervall $\Delta\nu$. Wenn umgekehrt $E_n < E_m$, so enthält das zweite Glied auf der rechten Seite von (9) den Resonanznenner und an Stelle von

$$\begin{aligned}
 (11) \quad a_n^{(1)*} a_n^{(1)} &= t \cdot a_m^{(0)*} a_m^{(0)} \frac{\sum_{k\lambda} b_{k\lambda}^* b_{k\lambda}}{\sum_{\nu \in \Delta\nu}} B_n^{(1)} \\
 &= t \cdot B_n^{(1)} N_m^{(0)} \frac{\sum_{k\lambda} (M_{k\lambda} + 1)}{\sum_{\nu \in \Delta\nu}} = t B_n^{(1)} N_m^{(0)} (P_\nu + \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu)
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) und (11) sind Operatorgleichungen. Wir interessieren uns für den Erwartungswert von $a_n^* a_n$ zur Zeit t , wobei wir wissen, daß zur Zeit $t=0$ nur der Zustand m angeregt war. Dieser Erwartungswert ist gegeben durch

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \overline{a_n^* a_n} &= \int \Psi^* a_n^* a_n \Psi \, d\tau \\ &= \int \Psi^* (a_n^{(0)*} + a_n^{(1)*}) (a_n^{(0)} + a_n^{(1)}) \Psi \, d\tau, \end{aligned} \right.$$

wobei Ψ die Schrödinger-Gleichungsfunktion des Ausgangszustandes bedeutet. Man erhält nach (10) und (11) unmittelbar

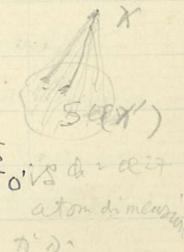
$$(13) \left\{ \begin{aligned} \overline{a_n^* a_n} &= t \cdot B_n^{(m)} N_m^{(0)} p_\nu; \text{ wenn } E_n > E_m \\ \overline{a_n^* a_n} &= t \cdot B_n^{(m)} N_m^{(0)} (p_\nu + \frac{8\pi \nu^2}{c^3} h\nu), \text{ wenn } E_n < E_m \end{aligned} \right.$$

wobei jetzt die $N_m^{(0)}$ und p_ν auf der rechten Seite die Zahlwerte dieser Größen im Ausgangszustand bedeuten. Der Erwartungswert der Intensität der Eigenschwingung n wächst also linear mit der Zeit an. Wenn $E_n > E_m$, so erfolgt dieses Anwachsen proportional der Intensität des auffallenden Lichtes; wenn $E_n < E_m$ ist, kommt hierzu wegen der Nichtvertauschbarkeit der b und b^* noch der von der spontanen Emission herrührende Beitrag.

§2. Es soll ferner die vom Atom emittierte Strahlung näher untersucht werden. Aus den Maxwell'schen Gleichungen erhält man, genau wie in der klassischen Theorie

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{rot} \int \frac{\mathbf{S}_t - \frac{\mathbf{r}}{c}}{r_{pp'}} \, dV_{p'} + \mathbf{H}_0 \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{E} = \text{grad} \int \frac{p_t - \frac{\mathbf{r}}{c}}{r_{pp'}} \, dV_{p'} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{S_t - \frac{\mathbf{r}}{c}}{r_{pp'}} \, dV_{p'} + \mathbf{E}_0$$



Hierin bedeuten \mathbf{J} und ρ den Vektor der Strom- und Ladungsdichte:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = e \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^* \psi_{\sigma} \\ S_i = e \sum_{\sigma\tau} \psi_{\sigma}^* \alpha_{\sigma\tau}^i \psi_{\tau} \end{array} \right.$$

H_0 und E_0 sind Lösungen der Maxwellgl. für den leeren Raum, die so gewählt sind, daß die vorgegebenen Wertverteilungen von \mathbf{E} und \mathbf{H} zur Zeit $t=0$ durch (14), angewandt auf das vorgegebene Schrödingerfunktional, richtig wiedergegeben werden. Wegen der Linearität der Gleichungen (4) kann man das Licht, das von einer bestimmten Schwingungsfrequenz der elektrischen Dichte herrührt, gesondert behandeln, wir fragen nach der Intensität dieses Lichtes.

Die Intensität einer Strahlung von der Frequenz ν muß man nach den Rechnungen von § 2 dem Ausdruck $\mathbb{H}^* \mathbb{H}$ proportional setzen, wenn die Strahlung selbst in der Form

$$i (\mathbb{H}^* e^{+2\pi i \nu t} - \mathbb{H} e^{-2\pi i \nu t})$$

gegeben ist; die Amplitude des Gliedes mit positiv imaginärem Exponenten steht in der Intensität links von der Amplitude des Gliedes mit negativ imaginärem Exponenten.

Setzen wir also fest $E_n > E_m$, so wird die Amplitude \mathbb{H} der Kombinationsdringung durch den Ausdruck

$$a_n a_m^* - a_m a_n^* e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_n - E_m) t}$$

344 mit Hilfe von Gl. (14) bestimmt. Die Intensität der emit.

$$a_m^* a_n \cdot a_n a_m^*$$

-tierten Strahlung ist also proportional $a_n^* a_n a_m a_m^*$.
 Rein formal sieht es hiernach so aus, als ob das Auftreten
 einer Strahlung von der Frequenz $h\nu = E_n - E_m$ davon ge-
 knüpft sei. Dass beide Eigenschwingungen des Atoms (n
 und m) angeregt sind, Wegen der Nichtvertauschbarkeit von a^*
 und a ist dieser Schluss jedoch nicht richtig, viel mehr
 wird die Intensität proportional

$$(16) \quad a_n^* a_n a_m^* a_m = N_n (1 - N_m).$$

Der Erwartungswert der Intensität ist also von Null ver-
 schieden, wenn im Zustand mit tieferer Energie $N_m = 0$ und
 im Zustand mit höherer $N_n = 1$, er verschwindet, wenn N_n
 und N_m beide gleich 1 sind.

Ganz analoge Resultate bekommt man für das vom Atom
 gestreute Licht. Wir setzen, um dies zu zeigen, die gestörten
 Werte der a_n aus (9) und (15) ein. Die Amplitude des ge-
 wöhnlichen (Rayleigh'schen) Streulichtes wird dann pro-
 portional $\sum_m s_m a_m^* a_m b$, wobei s_m den Streukoeffizienten
 des m -ten Zustandes bedeutet. Die Amplitude einer Raman-
 schwingung von der Frequenz $\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$ (wobei $\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$
 angenommen wird), wird proportional $a_n^* a_m b$, die der
 Frequenz $\nu + \frac{E_n - E_m}{h}$ wird proportional $a_n a_m^* b$. Für
 das Auftreten einer solchen Ramanlinie scheint formal
 wieder die gleichzeitige Anregung zweier Eigenschwingungen

$$b^* a_m \times a_n^* a_m b$$

notwendig; man erhält jedoch für die Intensitäten:

$$(19) \begin{cases} a_m^* a_m a_n^* a_n b^* b = N_m(1-N_n) M & \text{für } \nu - \frac{E_n - E_m}{h} \\ a_m a_m^* a_n a_n^* b^* b = N_n(1-N_m) M & \text{für } \nu + \frac{E_n - E_m}{h} \end{cases}$$

Die Ramanlinie der Frequenz $\nu - \frac{E_n - E_m}{h}$ wird also nur von einem Elektron im energetisch tieferen Zustand m , die der Frequenz $\nu + \frac{E_n - E_m}{h}$ nur von einem Elektron im energetisch höheren Zustand n ausgestrahlt. Der Ramaneffekt von der erstgenannten Art tritt auch bei Atomen im Normalzustand¹⁾ auf.

345 §3. Daß sich die Strahlung eines Atoms mit Lichtgeschw. fortpflanzt, ist bei der hier verwendeten Methode nach Gl. (14) beinahe selbstverständlich. Man muß nur beachten, daß aus dem Verschwinden des Erwartungswertes der Lichtintensität geschlossen werden kann, daß die Intensität sogar mit Sicherheit verschwindet, da die Intensität keine negativen Eigenwerte besitzt. Wenn dann im Ausgangszustand die Intensität überall Null ist und das Atom zur Zeit $t=0$ zu strahlen beginnt, so pflanzen sich nach (14) die Stellen, wo der Erwartungswert der Intensität von Null verschieden ist, mit Lichtgeschwindigkeit fort.

In ähnlicher Weise kann man Interferenzerscheinungen nach Gl. (14) genau wie in der klassischen Theorie behandeln.

2) Aus der vorliegenden Rechnung folgt auch unmittelbar, daß die Intensität des Ramaneffektes unabhängig ist von der Besetzungszahl des Zwischenzustandes, wie schon von Dirac (Proc 126, S. 360, 1930; a.a.O. S. 365) bemerkt wurde.

Wir nehmen nun an, daß nur ein einziges Atom vorhanden ist und δ bezeichnen die Anregungsstärke des Zustandes n wieder mit a_n . Dann gilt

$$(23) \quad \sum_n a_n^* a_n = 1$$

Ferner setzen wir

$$(24) \quad a_n^* a_n = N_n$$

und betrachten die a_n als Operatoren, die der Gl. (2) genügen. Die Größe Φ_n in (21) kann man dann als Maßgebend auffassen für die Wahrscheinlichkeit, daß N_n den Wert 1 hat und man kann von (21) wieder zu der Operatorgleichung übergehen:

$$(25) \quad \text{rot } i \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H} \mathbf{i}}{\partial t} = 4\pi e \sum_{nm} a_n^* a_m X_{nm}^i$$

Die Größen $e X_{nm}^i$ sind nach Gl. (22) die zu dem Übergang $n \leftrightarrow m$ gehörigen Schrödingerschen Stromdichte¹⁾, die mit den Anregungsstärken a_n^* und a_m multipliziert und addiert die gesamt Stromdichte ergeben.

Die weiteren Rechnungen vollziehen sich dann genau analog zu denen in § 2. Die von Schrödinger herrührende anschauliche Vorstellung, daß die Stromdichte, die man nach (22) aus den Atomeigenfunktionen berechnet, nach den Maxwell'schen Gleichungen Strahlung erzeugt, läßt sich also in Strenge aufrechterhalten, wenn man die Nicht-

1) S. Schrödinger, a.a.O.

kommutativität der Anregungsamplituden an berücksichtigt.

Durch die Nullpunktenergie der Strahlung können bei der vorliegenden Methode keine Schwierigkeiten entstehen, da der Energiebegriff in den Anwendungen der Methode gar nicht vorkommt.

(eingegangen 25. Februar 1931)

©2022 YHAL, YHP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Zur korrespondenzmäßigen Behandlung
der Linienbreite von L. Rosenfeld

(Zs. f. Phys. 71, p. 5, 273, 1931) (Eingegangen am 2. Juli 1931.)

Einleitung. Vor kurzem¹⁾ wurde erneut darauf hingewiesen, daß die Diracsche Quantelungsmethode des Strahlungsfeldes wegen des Auftretens von paradoxalen Konsequenzen in den bisherigen Näherungen den Charakter einer exakten Behandlungsweise nicht beanspruchen könnte. Gleichzeitig wurde betont, daß die neue Heisenbergsche Methode²⁾ zur Behandlung der Strahlungsprobleme als ein verfeinertes Korrespondenzverfahren anzusehen ist, das imstande ist, in wichtigen Fällen (Emission, Absorption, Dispersion) dieselben Dienste zu leisten wie die Diracsche Theorie. Bisher wurde nun das Problem der Strahlungsdämpfung nur auf Grund dieser letzteren Theorie behandelt³⁾, wobei die eben erwähnten Paradoxien bei konsequenter Weiterführung des Rechenverfahrens unvermeidlich zum Vorschein kommen. Im Hinblick auf diesen Sachverhalt dürfte es vielleicht nicht ohne Interesse sein, die Wirksamkeit der Heisenbergschen Methode auch an diesem Beispiel zu illustrieren.

Die quantentheoretische Deutung der natürlichen Linienverbreiterung läßt sich bekanntlich darin zusammenfassen, daß 1, jedem Term eine Breite zugeschrieben werden muß; 2, die Periode des Ausgangs- und des Endzustandes ist. Wie schon längst bemerkt⁴⁾

1) L. Rosenfeld, Zs. f. Phys. 70, 454, 1931.

2) W. Heisenberg, Ann. d. Phys. 9, 338, 1931.

3) Dirac, quantum mechanics, §60; vgl. J. Oppenheimer, Phys. Rev. 35, 402, 1930, V. Weisskopf u. E. Wigner, 63, 54, 1930; 65, 18, 1930; vgl. auch V. Weisskopf, Ann. 9, 23, 1931. L. Landau, 45, 430, 1917; F. Bloch, Phys. Zs. 29, 58, 1928. 1924.

4) Vgl. N. Bohr, Zs. f. Phys. 13, 150-152, 1923; N. Bohr, H. A. Kramers u. J. Slater, Phil. Mg. 67, 794

lassen sich diese Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe einfacher Korrespondenzbetrachtungen verstehen. Berechnet man zunächst klassisch die Form der Absorptionslinie, die vom Grundzustand ~~zu einem~~ ^{zu einem} bestimmten Zustand I führt, so stellt ~~llt~~ das Resultat nach korrespondenzmäßiger Umdeutung die Form des Terms T dar, da der Grundzustand scharf ist. Ferner deutet die Form der durch den spektroskopischen Summensatz die Annahme nahegelegt, daß die verschiedenen Übergänge, welche eine beliebige Linie ausbilden unabhängig voneinander erfolgen. Berechnet man auf Grund dieser Annahme und des eben gefundenen Ausdruckes für die Form der Terme die Gestalt der betrachteten Linie, so ergibt sich auf bekannte Weise das Summengesetz für die Linienbreite.

Wir zeigen jetzt, daß ein ähnlicher Gedankengang sich mit Hilfe der Heisenbergschen Methode formulieren läßt.

§ 1. Ansatz zur Behandlung nach der Heisenbergschen Methode. Wir betrachten ein Atom, dessen stationären Zustände unter Vernachlässigung der Strahlung scharfen Energiewerten E_n und Eigenfrequenzen

$$\nu_{nl} = \frac{1}{h} (E_n - E_l)$$

entsprechen. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden a_n für diese Zustände genügen den Differentialgleichungen

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \dot{a}_n = \sum_l H_{nl} e^{2\pi i \nu_{nl} t} a_l, \quad (1)$$

wobei H_{nl} ein Matrixelement der Wechselwirkungsenergie zwischen Atom und Strahlungsfeld darstellt.

Zerlegen wir dieses Feld wie üblich in fortschreitende Wellen mit zyklischer Bedingung, so können wir schreiben:

$$-\frac{2\pi i}{\hbar} H_{nl} = \beta \sum \frac{H_{nl}}{\sqrt{V\omega}} (e^{i\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{P}_{nl}^r) [b_{r,\lambda} e^{2\pi i \nu_{nl} t} + b_{r,\lambda}^{\dagger} e^{-2\pi i \nu_{nl} t}] \quad (2)$$

mit $\beta = \frac{2\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2L^3}}$; (3)

in dieser Formeln ist \mathbf{P}^r das mit dem räumlichen Phasenfaktor der r -ten Welle multiplizierte elektrische Moment des Atoms, während $b_{r,\lambda}$ und $e^{i\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}}$ Amplitude bzw. Polarisation λ ($\lambda=1, 2$) bezeichnen. Die g -Zahlen $b_{r,\lambda}$, $b_{r,\lambda}^{\dagger}$ sind mit den Anzahl- und Phasenvariablen durch die gewöhnlichen Beziehungen

$$b_{r,\lambda} = N_{r,\lambda}^{1/2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{r,\lambda}}, \quad b_{r,\lambda}^{\dagger} = e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{r,\lambda}} N_{r,\lambda}^{1/2} \quad (4)$$

verknüpft.

Was die Phasen $\Theta_{r,\lambda}$ betrifft, so sind sie bei „natürlicher“ Strahlung unbestimmt und alle physikalischen sinnvoller Größen müssen von ihnen unabhängig sein. Beschränken wir uns auf Größen, die höchstens linear in bezug auf die Strahlungsdichte sind, so kommen wir zu folgender allgemeinen Vorschrift: alle in den Rechnungen vorkommenden

1) Vgl. V. Weisskopf u. E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 55-57, 1930.

Ausdrücke, welche in den Amplituden quadratische Faktoren der Gestalt $b_{r,\lambda} b_{s,\mu}$, $b_{r,\lambda} b_{s,\mu}^+$, $b_{r,\lambda}^+ b_{s,\mu}$ oder $b_{r,\lambda}^+ b_{s,\mu}^+$ enthalten, sind durch ihre Phasenmittelwerte zu ersetzen.

In der q -Zahlsprache bedeutet dies aber, daß nur die in bezug auf die $N_{r,\lambda}$ diagonalen Glieder zu berücksichtigen sind. Nach (4) sind also alle Faktoren der angegebenen Form gleich Null zu setzen, mit Ausnahme von

$$\left. \begin{aligned} b_{r,\lambda} b_{r,\lambda}^+ &= N_{r,\lambda}, \\ b_{r,\lambda}^+ b_{r,\lambda} &= N_{r,\lambda} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

§2. Näherungslösung. Wir wollen uns jetzt (da es uns nur auf das Prinzipielle ankommt) auf die einfachste Annahme beschränken, daß nur der Übergang von einem einzigen Term, den wir E_1 nennen wollen, zum Grundterm E_0 mit merklicher Intensität vorkommt; d. h. wir vernachlässigen alle Matrixelemente P_{nl}^r außer $P_{01}^r = P_{10}^{r*}$. Schreiben wir noch zur Abkürzung ν_0 statt ν_{10} , so reduziert sich das Gleichungssystem (1) mit Rücksicht auf (2) auf:

$$(5) \quad \dot{a}_0 = -\rho \sum_{r,\lambda} \frac{\nu_0}{\sqrt{2\pi\nu}} (e^{r,\lambda} P_{01}^r) \left[b_{r,\lambda} e^{2\pi i(\nu^{(r)} - \nu_0)t} + b_{r,\lambda}^+ e^{-2\pi i(\nu^{(r)} + \nu_0)t} \right] a_1,$$

$$(6) \quad \dot{a}_1 = \rho \sum_{r,\lambda} \frac{\nu_0}{\sqrt{2\pi\nu}} (e^{r,\lambda} P_{01}^r)^* \left[b_{r,\lambda} e^{2\pi i(\nu^{(r)} + \nu_0)t} + b_{r,\lambda}^+ e^{-2\pi i(\nu^{(r)} - \nu_0)t} \right] a_0.$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, d. h. es gibt am Anfang ein angeregtes Atom. Die Gleichungen (5), (6) sollen dann den Übergang des Atoms zum Grundniveau unter

Spontane und erzwungene Ausstrahlung beschreiben.
 Für diesen Prozess erwarten wir eine Lösung von der Ge-
 stalt $a_1 = e^{-2\pi \Gamma t}$ (7)

Wir wollen jetzt verifizieren, dass ein Ansatz der Form
 (7) die Gleichungen (5) und (6) unter den angenommenen
 Anfangsbedingungen tatsächlich befriedigt; gleichzeitig
 wird sich der Wert von Γ als Funktion der Atomparameter
 ergeben.

Zunächst ergibt nach Einsetzen von (7) die Integration
 von (5):

$$a_0 = -\rho \sum_{r,\lambda} \frac{\nu_0}{\nu^{(r)}} (e^{r,\lambda} \mathbb{P}_{01}^r) \left\{ b_{r,\lambda} \frac{e^{2\pi i[(\nu^{(r)} - \nu_0) + i\Gamma]t} - 1}{2\pi i[(\nu^{(r)} - \nu_0) + i\Gamma]} - b_{r,\lambda} \frac{e^{-2\pi i[(\nu^{(r)} + \nu_0) - i\Gamma]t} - 1}{2\pi i[(\nu^{(r)} + \nu_0) - i\Gamma]} \right\}$$

setzen wir jetzt diesen Wert von a_0 in die rechte Seite von
 (6) ein, wobei natürlich überall auf die Reihenfolge der
 Faktoren zu achten ist, und berücksichtigen wir die
 Vorschrift über die Phasenmittelung, so wird Gleichung

$$(6): \quad 2\pi \Gamma = \rho^2 \sum_{r,\lambda} \frac{\nu_0^2}{\nu^{(r)}} (N_{r,\lambda} + 1) |e^{r,\lambda} \mathbb{P}_{01}^r|^2 \frac{1 - e^{-2\pi i[(\nu^{(r)} - \nu_0) + i\Gamma]t}}{2\pi i[(\nu^{(r)} - \nu_0) + i\Gamma]} - \rho^2 \sum_{r,\lambda} \frac{\nu_0^2}{\nu^{(r)}} N_{r,\lambda} |e^{r,\lambda} \mathbb{P}_{01}^r|^2 \frac{1 - e^{-2\pi i[(\nu^{(r)} + \nu_0) - i\Gamma]t}}{2\pi i[(\nu^{(r)} + \nu_0) - i\Gamma]}$$

(8) {

ersetzen wir nun die Summation über r, λ durch eine
 Integration, so haben wir zunächst den Dichtefaktor

$\frac{L^3}{c^3} v^2 dv d\Omega$ einzuführen. Nehmen wir ferner an, daß die ursprünglich vorhandene Strahlung unpolarisiert und isotrop mit der Dichte verteilt ist, so haben wir ferner $N_{r,\lambda}$ durch $\frac{c^3}{8\pi h\nu^3} f(\nu)$ zu ersetzen.

Wegen des Retardierungsfaktors in $(e^{r,\lambda} P_{01}^r)^2$ ist das erste Integral über ν ,

$$\int_0^\nu \left(\frac{c^3}{8\pi h\nu^3} f(\nu) + 1 \right) \nu d\nu (e^{r,\lambda} P_{01}^r)^2 \frac{1 - e^{-2\pi i t[(\nu - \nu_0) + i\Gamma]}}{2\pi i[(\nu - \nu_0) + i\Gamma]}$$

konvergiert¹⁾ und darf somit nach einer bekannten Überlegung^{2) 3)} näherungsweise ersetzt werden durch

$$\left(\frac{c^3}{8\pi h\nu_0^3} f(\nu_0) + 1 \right) \nu_0 (e^{r,\lambda} P_{01}^r)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\pi i t[(\nu - \nu_0) + i\Gamma]}}{2\pi i[(\nu - \nu_0) + i\Gamma]} d\nu$$

wo P_{01} das Matrixelement des elektrischen Moments bezeichnet. Das letzte Integral beträgt²⁾ $\frac{1}{2}$; ferner liefert die Richtungsintegration

$$\int d\Omega \sum_{\lambda} |e^{r,\lambda} P_{01}^r|^2 = 2\pi |P_{01}|^2 \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = \frac{8\pi}{3} |P_{01}|^2$$

Andererseits ist das zweite Integral in (8) gegen das erste zu vernachlässigen. Wenn man noch (3) beachtet, ergibt sich also schließlich aus (8);

$$L = \frac{4\pi^2}{3h c^3} \nu_0^3 \left(\frac{c^3}{8\pi h\nu_0^3} f(\nu_0) + 1 \right) |P_{01}|^2 \quad (9)$$

oder auch, wenn man die Einsteinschen Koeffizienten³⁾

1) Dirac, 114, 1719, 1927

2) Weisskopf u. Wigner, l.c. 63-64

3) Man beachte, daß das Moment P in Heavisideschen Einheiten ausgedrückt ist,

$$\left. \begin{aligned} A_{01} &= \frac{16\pi^3 \nu_0^3}{3hc^3} |\Pi P_{01}|^2, \\ B_{01} &= \frac{c^3}{8\pi h \nu_0^3} A_{01} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

einführt $\gamma = 4\pi \Gamma = A_{01} + B_{01} \rho(\nu_0). \quad (11)$

Es ist wesentlich, zu bemerken, daß aus Formel (11) (wie auch in allen anderen nach der Heisenbergschen Methode behandelten Fällen) jeder explizite Bezug auf die Lichtquantenvorstellung verschwunden ist. Man sieht also, daß in dieser Behandlungsweise die Quantelung der Strahlungsimplicituden einfach die Berücksichtigung der spontanen Strahlungsprozesse ermöglicht, während der Anschluß an die klassische Theorie im Sinne des Korrespondenzarguments von dieser Quantelung unabhängig ist, wodurch die Abwesenheit jeder Paradoxie der anfangs erwähnten Art gewährleistet wird.

§ 3. Fern- und Linienbreite. Aus Formeln (7) und (11) folgt nun ohne weiteres die Deutung von A_{01} , B_{01} als Übergangswahrscheinlichkeiten, und von γ als reziproke Lebensdauer oder Breite des Zustandes E_1 , entsprechend der einfachen Korrespondenzauffassung. Die Rechnung des vorigen Paragraphen stellt also eine Ableitung dieser letzteren aus der Schrödingerschen Gleichung dar, mit Hilfe der Heisenbergschen Methode.

Der Wert (11) von γ stimmt natürlich mit dem aus den anderen Theorien abgeleiteten überein. Gewöhnlich bezeichnet man als natürliche Breite diejenige, welche nur durch spontane Ausstrahlung, d.h. für $\rho(\nu) = 0$ hervorgerufen wird.

Wie schon erwähnt, ist die Größe γ auch die Breite der Linie $E_1 \rightarrow E_0$. In dem allgemeineren Falle, wo mehrere angeregte Zustände $E_n (n=1, 2, \dots)$ vorhanden sind, bekommt man in guter Näherung für die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$a_n = \dot{a}_n e^{-\frac{1}{2}\gamma_n t} \quad (12)$$

wo die Breiten γ_n gleich sind den Summen der Übergangswahrscheinlichkeit vom betrachteten Niveau zu allen tieferen i

$$\gamma_n = \sum_m A_{nm} \quad (E_m < E_n)$$

An Hand der Formel (12) läßt sich nun die Frage der Linienbreite im allgemeinen Falle ohne weitere Annahme erledigen. Gemäß der Korrespondenzmethode ist nämlich in erster Näherung die Intensität der dem Übergang $E_n \rightarrow E_m$ entsprechenden Strahlung gleich der klassischen berechneten Ausstrahlung eines Dipols mit der Amplitude

$$a_n a_m^* \mathcal{D}_{nm} e^{2\pi i \nu_{nm} t} = \dot{a}_n \dot{a}_m^* \mathcal{D}_{nm} e^{2\pi i \nu_{nm} t - \frac{1}{2}(\gamma_n + \gamma_m)t}$$

die Spektralverteilung der letzteren ist aber bekanntlich

gegeben durch

$$I(\nu) \sim |P_{nm}|^2 \frac{1}{\frac{1}{4}(\gamma_n + \gamma_m)^2 + [2\pi(\nu - \nu_{nm})]^2};$$

daraus folgt die Deutung der Summe

$$\gamma = \gamma_n + \gamma_m$$

als Breite der betrachteten Linie.

Professor Bohr danke ich herzlich für viele anregende Diskussionen.

Kopenhagen, Institut for teoretisk Fysik, Juni 1932.