

N223

BOX43

**PRACTICAL
NOTE-BOOK**

Quartenelektrodynamik
III



LK4

新集録

180 170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

INDEX

PAGE

PAGE

大阪帝國大學理學部物理學教室
湯川秀樹

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室
Nullpunktsenergie der Strahlung u. d. Quantentheorie
der Gravitation.

Von G. Solomon in Paris, zurzeit in Zürich
ZS. f. Phys. 71, S. 162, 1931 (Eingegangen am 27 Mai 1931.)

1. Einleitung. Die unendliche Nullpunktsenergie der elektromagnetischen Strahlung kann man bekanntlich durch einfache Kunstbegriffe beseitigen. Als solchen habe ich jüngst mit L. Rosenfeld¹⁾ in enger Verbindung mit einer Arbeit von Landau und Peierls²⁾ einen Formalismus vorgeschlagen, der durch ~~Abänderung~~ Änderung der klassischen hamiltonischen Funktion das Verschwinden der Nullpunktsenergie bewirkt. Diese Theorie ergibt die richtigen Maxwell'schen Gleichungen sowie die berühmten Einsteinschen Schwankungsgesetze. Im folgenden soll eine Anwendung dieser Theorie auf die Frage der gravitationellen Energie der Strahlung entwickelt werden.

2. Elektrodynamik ohne Nullpunktsenergie. Der Klarheit halber wollen wir kurz die fundamentalen Gleichungen der Theorie wiederholen.

Das elektromagnetische Feld wird durch drei komplexe Größen F_α ($\alpha = 1, 2, 3$) beschrieben. Neben diesen Größen führen wir natürlich die adjungierten Größen F_α^\dagger ein. Nun ist die Lagrange'sche Funktion des elektromagnetischen Feldes definiert durch

$$2L = \dot{F}_\alpha \frac{F_\alpha^\dagger}{\sqrt{\Delta}} - F_\alpha F_\alpha^\dagger,$$

wo \dot{F}_α die Ableitung der F_α nach ct , $\sqrt{\Delta}$ den von Landau und Peierls definierten Operator bezeichnet. Es wird hier und im folgenden in bezug auf den stummen Index α summiert.

1) Rosenfeld u. Solomon, Die Naturwiss. 19, 376, 1931; Journ. de Phys. 2,

139, 1931
2) L. Landau u. R. Peierls, ZS. f. Phys. 62, 198, 1930.

Das zu F_α konjugierte Moment ist

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{F}_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{F_\alpha}{\sqrt{\Delta}}$$

Daraus folgt für die Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2} F_\alpha F_\alpha^\dagger \quad (1)$$

Als Vertauschungsrelationen haben wir

$$\left. \begin{aligned} [F_\alpha^\dagger(Q), F_\beta(Q')] &= 2 \frac{hc}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \sqrt{\Delta_Q} \delta(Q-Q'), \\ [F_\alpha(Q), F_\beta(Q')] &= 0, \quad [F_\alpha^\dagger(Q), F_\beta^\dagger(Q')] = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Aus ihnen kann man folgenden Hamiltongleichungen ableiten:

$$\left. \begin{aligned} \dot{F}_\alpha &= \sqrt{\Delta} F_\alpha, \\ \dot{F}_\alpha^\dagger &= -\sqrt{\Delta} F_\alpha^\dagger. \end{aligned} \right\} (3)$$

Diesen Gleichungen muß man die Nebenbedingung

$$\text{div } F = \text{div } F^\dagger = 0 \quad (4)$$

hinzufügen.

Wenn man nun eine zyklische Bedingung für die F_α fordert, bekommt man für diese Größen die Entwicklungen

$$F_\alpha = f_\alpha^{(s)} w_s, \quad F_\alpha^\dagger = f_\alpha^{+\dagger(s)} w_s^* \quad (5)$$

wo die w_s und w_s^* die folgenden c-Zahlfunktionen sind:

$$w_s = L^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i\pi}{L} \vec{k}^{(s)} \cdot \vec{r}}, \quad w_s^* = L^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{2\pi i}{L} \vec{k}^{(s)} \cdot \vec{r}} \quad (6)$$

Hierin ist L die Periode der zyklischen Bedingungen.

$\vec{k}^{(s)}$ ist der Fortpflanzungsvektor der ebenen Welle, \vec{r} der Ortsvektor

(x, y, z). Ferner sind die $f_\alpha^{(s)}$ und $f_\alpha^{+\dagger(s)}$ g-Zahlkoeffizienten.

Sei nun $D^{(s)}$ die Drehung, welche den Vektor $\vec{k}^{(s)}$ in die z-Achse überführt. Man kann natürlich diese Drehung durch eine

unitäre Matrix $D_{\alpha\lambda}^{(s)}$ darstellen. Bei dieser Drehung transformieren sich die $f_{\alpha}^{(s)}$ und $f_{\alpha}^{+(s)}$ in neue Größen $b_{\lambda}^{(s)}$ und $b_{\lambda}^{+(s)}$ mittels

$$f_{\alpha}^{(s)} = D_{\alpha\lambda}^{(s)} b_{\lambda}^{(s)}, \quad f_{\alpha}^{+(s)} = D_{\alpha\lambda}^{+(s)} b_{\lambda}^{+(s)} \quad (7)$$

Mit diesen Entwicklungskoeffizienten erhält man für das räumliche Integral der rel. mg. Energiedichte, d.h. für die Gesamtenergie

$$\bar{H} = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{(s)} b_{\alpha}^{+(s)}$$

Nun schreiben wir sich die V. R. folgendermaßen:

$$(9) \quad [b_{\alpha}^{(s)}, b_{\beta}^{(s)}] = 0, \quad [b_{\alpha}^{+(s)}, b_{\beta}^{+(s)}] = 0, \quad [b_{\alpha}^{(s)}, b_{\beta}^{+(s)}] = 2\delta_{\alpha\beta} \hbar \nu^{(s)},$$

wobei

$$\nu^{(s)} = \frac{c}{2L} |k^{(s)}|$$

ist.

Berücksichtigt man die Nebenbedingung (4), so sieht man, daß $b_3^{(s)}$ und $b_3^{+(s)}$ gleich Null ist sind; sie entsprechen nämlich einem reinen elektrostatischen Felde. Die beiden anderen Paare, $b_1^{(s)}, b_1^{+(s)}$; $b_2^{(s)}, b_2^{+(s)}$, entsprechen den beiden möglichen Polarisationen der Lichtquanten.

Nach (9) kann man die kanonische Transformation

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha}^{(s)} &= \sqrt{2\hbar\nu^{(s)}} M_{s,\alpha}^{1/2} e^{i\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\alpha}^{(s)}} \\ b_{\alpha}^{+(s)} &= \sqrt{2\hbar\nu^{(s)}} e^{-i\frac{2\pi i}{\hbar} \Theta_{\alpha}^{(s)}} M_{s,\alpha}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

eingeführen, wo $M_{s,\alpha}$ die Anzahl der Lichtquanten von der Frequenz $\nu^{(s)}$ und Polarisation α ($\alpha=1, 2$) ist; $\Theta_{\alpha}^{(s)}$ ist die zu $M_{s,\alpha}$

konjugierte Winkelvariable. Mit diesen neuen Veränderlichen nimmt \bar{H} die Form an:

$$\bar{H} = \sum_s (M_{s,1} + M_{s,2}) h\nu^{(s)}. \quad (11)$$

Wie man sieht, ist die Nullpunktenergie der Strahlung eliminiert.

Bis jetzt haben wir kein Wort über eine mögliche Korrespondenz zwischen unseren Feldgrößen F_α und den gewöhnlichen elektrischen und magnetischen Feldern gesagt. Unsere Theorie kann sehr wohl ohne diese Korrespondenz durchgeführt werden. Der Anschaulichkeit halber wollen wir jedoch diese Korres. anführen¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \vec{E} + i \frac{\text{rot } \vec{H}}{i\sqrt{\Delta}} \\ \vec{F}^\dagger &= \vec{E} - i \frac{\text{rot } \vec{H}}{i\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke für die Feldgrößen F ist es leicht zu sehen, daß einerseits die Hamiltonischen Gl. (3) mit den Maxwellgl. identisch sind, und anderseits, daß die V.R. (2) sich in die Heisenberg-Paulischen transformieren lassen. Die Hamiltonfkt. \bar{H} weicht aber von der klassischen ab durch ein charakteristisches Glied, welches der Nullpunktenergie entspricht.

Bevor wir die gravitative Energie des Lichtes nach dieser Theorie berechnen, müssen wir die Lorentzinvarianz unseres

¹⁾ Man beachte, daß der Operator $\sqrt{\Delta}$ rein imaginär ist!

Verfahrens näher untersuchen.

3. Lorentzinvarianz der obigen Theorie. Wir können die Hamiltonsgl. in die Form

$$\frac{\partial(i\vec{F})}{\partial x_4} = \sqrt{\Delta} \vec{F} = -\frac{\text{rot rot } \vec{F}}{\sqrt{\Delta}}$$

bringen, wo wir $x_4 = ict$ setzen. Mehrexplizit schreiben wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\text{rot}_3 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\text{rot}_2 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) + \frac{\partial(i\vec{F}_1)}{\partial x_4} &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{rot}_3 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\text{rot}_1 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) + \frac{\partial(i\vec{F}_2)}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{rot}_2 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\text{rot}_1 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \right) + \frac{\partial(i\vec{F}_3)}{\partial x_4} &= 0, \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (i\vec{F}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (i\vec{F}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (i\vec{F}_3) \quad \Rightarrow \quad = 0$$

Daraus folgt, dass die Größen

$$\left. \begin{aligned} M_{14} &= i\vec{F}_1, & M_{24} &= i\vec{F}_2, & M_{34} &= i\vec{F}_3 \\ M_{23} &= \frac{\text{rot}_1 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}}, & M_{31} &= \frac{\text{rot}_2 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}}, & M_{12} &= \frac{\text{rot}_3 \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \right\} (14)$$

einen Sechsektor M bilden, der dem Feldvektor der klassischen Theorie ganz entspricht. Neben diesem Vektor definieren wir natürlich, um hermitesche Ausdrücke bilden zu können, den adjungierten Sechsektor M^+ durch

$$\left. \begin{aligned} M_{14}^+ &= -i\vec{F}_1^+, & M_{24}^+ &= -i\vec{F}_2^+, & M_{34}^+ &= -i\vec{F}_3^+, \\ M_{23}^+ &= -\frac{\text{rot}_1 \vec{F}^+}{\sqrt{\Delta}}, & M_{31}^+ &= -\frac{\text{rot}_2 \vec{F}^+}{\sqrt{\Delta}}, & M_{12}^+ &= -\frac{\text{rot}_3 \vec{F}^+}{\sqrt{\Delta}}. \end{aligned} \right.$$

Wie in der klassischen Theorie kann man nun zeigen, daß die Hamiltongleichungen (13) invariant gegenüber einer Lorentz-Transform. sind, wie auch zu erwarten war, da sie mit den Maxwellgl. eng verknüpft sind. Wir sehen auch, daß sich die F wie das elektrische Feld, die $\frac{\text{rot } F}{\sqrt{S}}$ wie das magn. Feld transformieren.

4. Der Maxwell'sche Tensor. Die Analogie zwischen dem Sechservektor M und dem Feldvektor der klassischen Theorie legt uns für den Maxwell'schen Tensor folgenden Ansatz nahe:

$$2T = M \times M^T. \quad (15)$$

Es ist gemäß (12) leicht zu sehen, daß der Tensor T identisch ist mit dem klassischen, wenn man von der Nichtvertauschbarkeit der Felder absieht. Insbesondere ist T_{44} identisch mit H . T_{i4} ($i=1, 2, 3$) identisch mit dem Poynting'schen Vektor. Wenn man aber die Nichtvertauschbarkeit berücksichtigt, erhält man als Zusatzglieder in T Klammerausdrücke, die der Nullpunktsenergie entsprechen. Da in (15) M^T rechts von M steht, sind wir sicher, daß keine Glieder der Form $N_s(N_t+1)$ in T vorkommen. Solche Glieder sind es nämlich, die zu Nullpunktsenergie Anlaß geben. In unserem Ausdruck (15) treten nur Glieder der Form $N_s N_t$ auf.

Andererseits ist dieser Tensor nicht symmetrisch. Analoges kommt bekanntlich in der Dirac'schen Theorie des Elektrons

vor, welche mit bekanntlich in der Dira unserer Theorie eine große formale Analogie aufweist. Natürlich darf man nicht durch $M \cdot M^\dagger + M^\dagger M$ symmetrisieren; denn so bekämen wir wieder die unendliche Nullpunktsenergie. Vielmehr muß man nach den Komponentenindizes symmetrisieren, wie im folgenden näher aufgeführt wird.

Für die Anwendungen ist es nicht möglich, den Maxwell'schen Tensor eine mehr explizite Form zu geben. Es sei $\vec{\eta}^{s,\lambda}$ ein unitärer Vektor, mit den Komponenten $\eta_\alpha^{s,\lambda}$, definiert durch

$$\eta_\alpha^{s,\lambda} = D_{\alpha,\lambda}^{(s)} \quad (\lambda = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Dann ist nach (5) und (7)

$$\vec{F} = \vec{\eta}^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} w_s.$$

Wir betrachten nun z. B. die erste Komponente von $\text{rot } F$:

$$\begin{aligned} -\text{rot}_1 (\vec{\eta}^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} w_s) &= -\frac{\partial}{\partial x_2} (\vec{\eta}_3^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} w_s) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\vec{\eta}_2^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} w_s) \\ &= -\eta_3^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} \frac{\pi i}{L} k_2^{(s)} w_s + \eta_2^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} \frac{\pi i}{L} k_3^{(s)} w_s. \end{aligned}$$

Definieren wir also einen neuen Vektor $\vec{\chi}^{s,\lambda}$ mit den

Komponenten $\chi_\alpha^{s,\lambda}$ durch

$$\vec{\chi}^{s,\lambda} = \left[\vec{\eta}^{s,\lambda} \cdot \frac{\vec{R}^{(s)}}{|\vec{K}^{(s)}|} \right] \quad (17)$$

dann wird

$$-\text{rot}_1 F = \frac{\pi i}{L} \chi_1^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} |K^{(s)}|.$$

Diese letzte Relation kann auch vektoriell:

$$-\frac{\text{rot } F}{\sqrt{S}} = \vec{\chi}^{s,\lambda} b_\lambda^{(s)} w_s$$

geschrieben werden. Zusammenfassend haben wir für die Größen \vec{F} und $\frac{\text{rot } \vec{F}}{\sqrt{\Delta}}$ folgende Entwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{s,\lambda} \eta^{s,\lambda} b_{\lambda}^{(s)} w_s, \\ -\frac{\text{rot } \vec{F}}{\sqrt{\Delta}} &= \sum_{s,\lambda} \chi^{s,\lambda} b_{\lambda}^{(s)} w_s. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Diese Entwicklungen sind im Einklang mit der Deutung des Feldvektors M , ganz analog denjenigen von E und H . Wenn wir diese Entwicklungen in dem Ausdruck für den Maxwell'schen Tensor (15) einführen, so begegnen wir folgendem aus den η und χ gebildeten Tensor:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} -\beta_{44}^{r,\lambda; s,\mu} &= w \left[\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\eta_{\alpha}^{r,\lambda} \eta_{\alpha}^{s,\mu} + \chi_{\alpha}^{r,\lambda} \chi_{\alpha}^{s,\mu}) \right] \\ \beta_{ij}^{r,\lambda; s,\mu} &= \delta_{ij} w - \frac{1}{4} (\eta_i^{r,\lambda} \eta_j^{s,\mu} + \chi_i^{r,\lambda} \chi_j^{s,\mu}) - \frac{1}{4} \\ &\quad \times (\eta_i^{s,\mu} \eta_j^{r,\lambda} + \chi_i^{s,\mu} \chi_j^{r,\lambda}) \\ \beta_{i4}^{r,\lambda; s,\mu} &= \beta_{4i}^{r,\lambda; s,\mu} = \frac{i}{4} ([\vec{\eta}^{r,\lambda} \cdot \vec{\chi}^{s,\mu}]_j + [\vec{\eta}^{s,\mu} \cdot \vec{\chi}^{r,\lambda}]_j)_{i,j=1,2,3} \end{aligned} \right.$$

Hierin ist die Symmetrisierung nach den Indizes i, j schon vorgenommen. Mit diesem Tensor $\beta_{ij}^{r,\lambda; s,\mu}$ schreibt sich endlich der Tensor T_{ij} folgendermaßen:

$$T_{ij} = \beta_{ij}^{r,\lambda; s,\mu} b_{\lambda}^{(r)} b_{\mu}^{(s)} w r w_s^* \quad (20)$$

5. gravitative Energie des elektromagnetischen Feldes in zweiter Näherung. Nun können wir die Energie des durch das elektromagnetische Feld erzeugten Gravitationsfeldes

berechnen. Diese Aufgabe wurde schon unter Zu-
 grundlegung der gewöhnlichen Q.F.D. von Rosenfeld¹⁾
 gelöst; die folgenden Rechnungen verlaufen den Rosen-
 feldschen ganz analog.

Wir betrachten ein von dem Minkowskischen wenig
 verschiedenes Feld:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \epsilon \delta_{ik},$$

wo $\epsilon = \sqrt{\kappa}$ (κ ist die Einsteinsche Gravitationskonstante).
 Dann schreiben sich die Einsteinschen Gravitationsgl.

$$\sum_k \frac{\partial^2 \delta_{ik}}{(\partial x^k)^2} = -2\epsilon T_{ik}, \quad (21)$$

Diese Gl. kann man leicht aus der Hamiltonfunktion

$$(22) \quad H = \frac{1}{2} \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \frac{1}{8} \frac{\partial \delta_{rs}}{\partial x^i} \frac{\partial \delta_{rs}}{\partial x^i} - \frac{1}{4} \frac{\partial \delta_{rs}}{\partial x^i} \frac{\partial \delta_{rs}}{\partial x^i} - \frac{\epsilon}{2} \delta_{rs} T_{rs}$$

ableiten, wenn man berücksichtigt, daß T_{ik} den Er-
 haltungssatz

$$\frac{\delta T_{ik}}{\delta x^i} = 0$$

erfüllt.

Nun kann man (21) leicht integrieren:

$$(23) \quad \gamma_{ik} = - \frac{\epsilon L^2}{\pi^i} \sum_{rs \lambda \mu} \left(\delta_{ik}^{rs} \right)_{\substack{r \lambda, s \mu \\ b_{\lambda}^{(r)} b_{\mu}^{(s)}}} \frac{w_r w_s^*}{|K^{(r)} K^{(s)}| (\cos \Theta_{rs} - 1)},$$

wo Θ_{rs} den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{K}^{(r)}$ mit $\vec{K}^{(s)}$
 bezeichnet:

¹⁾ Rosenfeld, Zs.f. Phys. 65, 589, 1930.

$$\cos(\Theta)_{rs} = \frac{\vec{k}^{(r)} \cdot \vec{k}^{(s)}}{|\vec{k}^{(r)}| |\vec{k}^{(s)}|}$$

Da γ_{ik} von erster Ordnung in ϵ ist, wird

$$H = \frac{1}{2} \overline{\tau_{ab} \tau_a^\dagger} = H - \sum_{r,\lambda} M_{r\lambda} h_{r\lambda}^{(r)}$$

von zweiter Ordnung in ϵ sein. Man bekommt nun die
 Näherung zweiter Ordnung, wenn man (25) in (22) ein-
 führt und die Diagonalglieder berechnet. So bekommt
 man für das zweite und dritte Glied von H:

$$M_{rs} = \frac{1}{8} \sum_{jki} \frac{4\epsilon^2 L^2}{\pi^2} \sum_{r,\lambda; s,\mu} \sum_{r',\lambda'; s',\mu'} \beta_{jk}^{r,\lambda; s,\mu} \beta_{jk}^{r',\lambda'; s',\mu'} b_\lambda^{(r)} b_\mu^{(s)} b_{\lambda'}^{(r')} b_{\mu'}^{(s')}$$

$$\times \frac{w_r w_s^* w_{r'} w_{s'}^* (k_i^{(r)} - k_i^{(s)}) (k_i^{(r')} - k_i^{(s')})}{|\vec{k}^{(r)}| |\vec{k}^{(s)}| |\vec{k}^{(r')}| |\vec{k}^{(s')}| (\cos(\Theta)_{rs} - 1) (\cos(\Theta)_{r's'} - 1)}$$

$$- \frac{1}{8} \sum_{j'k} \frac{4\epsilon^2 L^2}{\pi^2} \sum_{r,\lambda; s,\mu} \sum_{r',\lambda'; s',\mu'} \beta_{j'k}^{r,\lambda; s,\mu} \beta_{j'k}^{r',\lambda'; s',\mu'} b_\lambda^{(r)} b_\mu^{(s)} b_{\lambda'}^{(r')} b_{\mu'}^{(s')}$$

$$\times \frac{w_r w_s^* w_{r'} w_{s'}^* (|\vec{k}^{(r)}| - |\vec{k}^{(s)}|) (|\vec{k}^{(r')}| - |\vec{k}^{(s')}|)}{|\vec{k}^{(r)}| |\vec{k}^{(s)}| |\vec{k}^{(r')}| |\vec{k}^{(s')}| (\cos(\Theta)_{rs} - 1) (\cos(\Theta)_{r's'} - 1)}$$

Um die Diagonalglieder dieses Ausdrucks zu erhalten, muß
 man $r=s$, $r'=s'$, oder $r=s'$, $s=r'$ setzen. Im ersten Falle
 sieht man leicht, daß die entsprechenden Raumintegrale
 gleich Null sind. Der zweite Fall ist der einzig mögliche.
 Es kommt auf die Summe $\sum_{\vec{k}} (\beta_{jk}^{r,\lambda; s,\mu})^2$ an; da sie kovariant
 gegenüber Drehungen ist. So bekommt man, wenn man die
 Achsenkreuze $Oxyz$ und $X^{r,\lambda}$, $\vec{\eta}^{r,\lambda}$, $\vec{k}^{(r)}$ zusammenfallen

läuft?

$$\sum_{\nu, \lambda} (\beta_{\nu, \lambda}^{r, \lambda; s, \mu})^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos \Theta) r s, \quad \sum_i (k_i^{(\nu)} - k_i^{(s)})^2$$

Nach (10) bekommt man für \overline{H}_G :

$$\overline{H}_G = \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{32 \pi^2 L^3} \sum_{\nu, \lambda, \mu} M_{\nu, \lambda} (M_{s, \mu} + 1) \frac{(k^{(\nu)} - k^{(s)})^2}{|k^{(\nu)}| |k^{(s)}|}$$

$$= \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{32 \pi^2 L^3} \sum_{\nu, \lambda, \mu} M_{\nu, \lambda} (M_{s, \mu} + 1) \frac{|k^{(\nu)}|^2 + |k^{(s)}|^2 - |k^{(\nu)} - k^{(s)}|^2}{|k^{(\nu)}| |k^{(s)}|} (1 - \cos \Theta)$$

Nun kann man für den letzten Teil von (2c)

$$\overline{H}_G = \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{4 \pi^2 L^3} \sum M_{\nu, \lambda} = - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\nu, s} \int \gamma_{\nu s} T_{rs} dv$$

$$= - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \int \sum_{\nu, \lambda, \mu} \sum_{\nu', \lambda', \mu'} \beta_{\nu, \lambda; s, \mu}^{r, \lambda; s, \mu} \beta_{\nu', \lambda'; s', \mu'}^{r', \lambda'; s', \mu'} \begin{pmatrix} \cos \Theta + \cos \Theta' & b_\lambda & b_\lambda' & b_\lambda & b_\lambda' \\ b_\lambda & b_\lambda & b_\lambda' & b_\lambda & b_\lambda' \\ b_\lambda' & b_\lambda' & b_\lambda & b_\lambda' & b_\lambda & b_\lambda' \end{pmatrix} \times \frac{w_\nu w_s^* w_{\nu'} w_{s'}^*}{|k^{(\nu)}| |k^{(s)}| (\cos \Theta + \cos \Theta')} dv$$

schreiben. Indem man auch nur die Diagonalglieder $\nu = s', s = \nu'$ berücksichtigt, erhält man:

$$\overline{H}_G = \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{4 \pi^2 L^3} \sum_{\nu, \lambda, \mu} M_{\nu, \lambda} (M_{s, \mu} + 1) (1 - \cos \Theta),$$

woraus folgt, daß die gesamte gravitationelle Störung der rein elektromagnetischen Energie $\sum_{\nu, \lambda} M_{\nu, \lambda} h \nu^{(\nu)}$

$$(2d) \quad \overline{H}_G + \overline{H}_I = \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{16 \pi^2 L^3} \sum_{\nu, \lambda, \mu} M_{\nu, \lambda} (M_{s, \mu} + 1) \frac{|k^{(\nu)}|^2 + |k^{(s)}|^2}{|k^{(\nu)}| |k^{(s)}|}$$

beträgt.

Nach der H. P. schen Theorie hat Rosenfeld folgenden Ausdruck

gefunden:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} H_G + H_I &= \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{64\pi^2 L^3} \sum_{rs} (\cos \Theta_{rs} + 1) + \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{16\pi^2} \sum_r \frac{1}{L^3} \\ &+ \frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{64\pi^2 L^3} \sum_{rs\lambda\mu} \frac{|k^{(r)}|^2 + |k^{(s)}|^2}{|k^{(r)}| \cdot |k^{(s)}|} (2M_{r,\lambda} + 1) (2M_{s,\mu} + 1). \end{aligned} \right.$$

Durch Vergleich mit unserer Endformel (24) sehen wir, daß in unserer Theorie die Glieder der ersten Zeile fortfallen; sie rühren weiteremal her von der unendlichen Nullpunktenenergie der Strahlung. Ferner aber muß man das in der zweiten Zeile auftretende Produkt

$$(2M_{r,\lambda} + 1) (2M_{s,\mu} + 1) = 4M_{r,\lambda} M_{s,\mu} + 2M_{r,\lambda} + 2M_{s,\mu} + 1,$$

mit dem in (24) vorkommenden

$$4M_{r,\lambda} M_{s,\mu} + 4M_{r,\lambda}$$

vergleichen; wieder ist hier das von der Anzahl der Lichtquanten unabhängige Glied verschwunden.

Natürlich ist wie in der Rosenfeld'schen Arbeit die Wechselwirkungsenergie eines einzelnen Lichtquants mit dem Gravitationsfeld unendlich, da sie

$$\frac{\varepsilon^2 c^4 h^2}{16\pi^2 L^3} \sum_{s,\mu} \frac{|k^{(s)}|^2 + |k^{(s)}|^2}{|k^{(s)}| \cdot |k^{(s)}|}$$

beträgt.

So haben wir gezeigt, daß diese prinzipielle Schwierigkeit der Feldquantenmethode gar nichts mit der Nullpunkts-

Energie der Strahlung zu tun hat. Diese Nullpunktsenergie
liefert nämlich nur additive Glieder und spielt bei
der Wechselwirkung mit der verschiedensten ~~Art~~ anderen
(materiellen oder gravitationellen) Welle keine Rolle.
Das Hauptproblem der Quantentheorie besteht also nicht
in der Beseitigung dieser unendlichen additiven Energie
(wahrscheinlich auch nicht der elektrostatischen Selbst-
energie des Elektrons), sondern in einer korrekten
Formulierung der Wechselwirkung.

Für viele freundliche Ratschläge bin ich Herrn
Dr. L. Rosenfeld Dank schuldig.
Zürich, 24. Mai 1931.

©2022 IHAL, IHP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

On the Mass of the Proton

By Sir Arthur Eddington, F.R.S.

(Received Nov. 3, 1931.)

1. This paper develops, and to some extent amends, the theory of the relation of the proton to the electron suggested in a "Preliminary Note on the Masses of the Electron, the Proton, and the Universe."* As explained in that note, my discussion of the constant 137 opened out into a wider investigation embracing other natural constants, and it seemed necessary to pursue this before attempting to perfect the theory of 137.

The first result of this extension is contained in a paper on "The Value of the Cosmical Constant."† This is primarily a theory of the mass of an electron; it is satisfactorily confirmed by the observed velocities of recession of the spiral nebulae, and I think it must be substantially true. But the acceptance of this theory of the electron has the consequence that the relation between the electron and the proton cannot come about quite in the way I had previously had in mind. Indeed, my first impression was that it closed the door to any symmetrical kind of relation between the electron and proton. For my own part, I think it most unlikely that there is any fundamental difference in the intrinsic nature of protons and electrons, and I should regard it as a serious objection to the theory of cosmical constant if it insisted on such a difference. It is therefore important to show that there is an opening by which the proton is easily brought into

* Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 27, p. 15 (1931).

† Proc. Roy. Soc. vol. 135, p. 605 (1931). I regret that there is an error in the

The same scheme.

The difficulty, as it first appeared, may be stated as follows. According to the theory of cosmic constants, we can calculate from the observed recession of remote objects (spiral nebulae) the mass-term occurring in the fundamental wave equation. The mass turns out to be the mass of an electron. Why an electron rather than a proton? The theory employed is purely geometrical, so that it is difficult to see how it can acquire a bias towards one kind of charge unless the relation of an electron to space-time is actually of a simpler kind than that of a proton. The intention of the present paper is to answer the question by showing that a reasonable development of the geometrical theory enables us to calculate the mass of the proton as well as that of the electron from the recession of the spiral nebulae in a way which removes all suggestion of bias towards the electron. It appears that the mass term originally calculated was strictly M_p/M_e , which is symmetrical with respect to the proton and electron, though it is almost indistinguishable from the mass m of the electron.

2. Dirac's equation for a single electron, written in my usual notation is
$$\frac{i\hbar}{2\alpha} \left(E_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + E_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + E_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) + mc \psi = 0, \quad (2.1)$$

brief "digression" on the proton on p. 853. In the second eq. in (12) the coefficient 10 is incorrect and this renders the digression pointless.

where $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4$ are anticommuting square roots of -1 ,
 so that $\bar{E}_\mu^2 = -1$ $\bar{E}_\mu \bar{E}_\nu + \bar{E}_\nu \bar{E}_\mu = 0$, (2.2)

Consider an elementary solution consisting of plane wave in
 the direction

$$s = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4,$$

l_1, l_2, l_3, l_4 being direction cosines. Let

$$\bar{E}_s = l_1 \bar{E}_1 + \dots + l_4 \bar{E}_4,$$

so that by (2.2) $\bar{E}_s^2 = -1$ (2.3)

Then (2.1) reduces to

$$(i \bar{E}_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2\alpha m c}{\hbar}) \psi = 0, \quad (2.4)$$

According to the theory of the cosmical constant (loc. cit., §8, eq. (10))

$$\frac{2\alpha m c}{\hbar} = \frac{\sqrt{N}}{R},$$

where α is the fine structure constant 137, N the total no. of
 electrons (or protons) in the universe, and R the equilibrium radius
 of the universe. Write

$$ds = R d\chi_s = (R/\sqrt{N}) d\theta_s$$

Then (2.4) becomes $\{\alpha (i \bar{E}_s \frac{\partial}{\partial \theta_s}) + 1\} \psi = 0$, (2.6)

3. The angle $d\chi_s = ds/R$ would seem to be the natural reckoning
 of ds , avoiding the introduction of an arbitrary and irrelevant
 unit such as the standard metre. But this may seem to be
 taking the geometrical representation of world-curvature

too literally, and, moreover, it is not immediately obvious why the equilibrium radius of the world should be the natural unit. We can, however, see in another way that dx_s is the fundamental reckoning, the radius R has a general importance because it is equal to $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, where λ is the cosmical constant. Hence

$$dx_s^2 = \lambda ds^2 = \lambda g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

the law of gravitation being $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$. In the affine field-theory $R_{\mu\nu}$ is the fundamental in-tensor and $R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ is the affine invariant associated with a displacement.*

Thus in using dx_s as the measure of a displacement we not only avoid introducing an arbitrary unit of length but avoid all reference to Riemannian metric. This is an important condition, for clearly the few definitions and conventions of macroscopic (Riemannian) measurement of space ~~and~~ should arise out of the microscopic equations of electrons and protons and not be assumed in formulating them. The fact that (2.6) involves only the affine invariant (independent of gauge) strengthens our belief that it is approaching something really fundamental.

From an analytical standpoint the essential ~~standpoint~~ relation between a proton and electron should be most clearly exhibited if we treat the simplest possible "universe"

* Seeington "Math. Theo. of Rel.," § 95.

consisting of one proton and one electron. In that case $N=1$ and $dO_s = dx_s$, so that dO_s is the affine measure of the displacement. But from a physical standpoint this may be an over-simplification, since many of the ordinary physical concepts become indefinable in so simple a universe. We can at any stage return to a more comprehensible universe with N protons and N electrons by the transformation $dO_s = \sqrt{N} dx_s$, so that $dO_s^2 = N R_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. This means that when, instead of referring to a unique electron, we can only refer to "one of N indistinguishable electrons", or, geometrically, when besides giving a point position in a co-ordinate system we attach to it one of N possible labels, the affine invariant $R_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ is replaced by $N R_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$.

4. The constant α in (2.6) is the only numerical factor in the equation and it ought not to be difficult to discern its origin in the geometry of the problem. My series of investigations originated in the belief that α represents the number of relativity rotations or degrees of freedom of the system,[†] and this interpretation has been adhered to in all subsequent developments. A system of two charges has 136 relativity rotations of the ordinary type together with an additional rotation representing change of gauge. Thus in the problem of interaction of two charges whose positions are referred

[†] 'Proc. Roy. Soc.', A. Vol. 124, p. 358 (1929)

to Riemannian space, $\alpha = 137$ in close agreement with experiment, I have not yet gone into the matter thoroughly, but, so far as I can see, the rotation corresponding to gauge transformation is not concerned in (2.6); we have already seen that it is a purely affine equation which does not introduce gauging or Riemannian geometry. I take, therefore, $\alpha = 136$ as the appropriate value in (2.6). It is quite possible that a factor $137/136$ will be introduced later on in transforming the results for affine space into our practical reckoning in metrical space; so that, if we had nothing further to learn from the discussion of the affine equation, we might as well transform it to practical reckoning straight away by writing $\alpha = 137^*$. But our aim here is to study the fundamental relations, and it would be fatal to this purpose to introduce the "packing factor," $136/137$ out of its proper order in the sequence of development.

We use the number of relativity rotations of two charges primarily because this is obviously appropriate to the "universe" consisting of one proton and one electron that is being considered. But the same number has a much wider application owing to the fact that the basis of affine geometry is an elementary displacement $d\mu$. Such a displacement is a relation between two points, and a point only comes into consideration

* For this reason 137 seems to be the right value (or very nearly the right value) to use in the theory of the cosmical constant, as implied by my paper.

as being the possible seat of electric charge. Thus α as it occurs in microscopic physics is essentially a relation between two charges, and has the degrees of freedom of a system of two charges ~~but~~ directly associated with it.

Inserting $\alpha = 136$ in (2,6), we have

$$\{136 (iE_5 \partial/\partial \theta_5) + 1\} \psi = 0 \quad (4.1)$$

5. Instead of Dirac's linear Hamiltonian we often use a quadratic Hamiltonian of Schrödinger's type. The quadratic Hamiltonian is

$$\frac{1}{2\mu} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) \quad (5.1)$$

The constant μ is not of absolute importance until we decide the arbitrary factor contained in the wave equation. For plane wave in the direction s , the second order wave eq. reduces to

$$\left(\beta \frac{\partial^2}{\partial \theta_s^2} + 1 \right) \psi = 0, \quad (5.2)$$

where we use natural measure $d\theta$ s as before and β is a positive numerical coefficient.

In the second order wave eq. ψ may be a single quantity or a group of components, but in the latter case the components do not interact with one another or "rotate" and they effectively behave as a single quantity. The 136 rotations of Dirac's ψ (which has 16 components) are not involved. In fact the electrical characteristics of the particle are ignored altogether and we pretend to deal with electrical problem by inserting empirical terms to represent the mechanical energy introduced.

may say that Schrödinger's form of eq. refers to "mechanical particles" without any electrical properties*.

An eq. of the form (5.2) can be deduced immediately from (4.1), I wish, however, to discuss the eq. on its own merits as not in any way connected with electrical particles, but describing an ideal neutron or mechanical particle. Following the same rule as in determining α , we must take β to be the number of relativity rotations or degrees of freedom which arise in a theory of mech. particles. The question is perhaps more ambiguous than in §4, but the possible alternative suggestions all seem to lead to $\beta = 10$. The 136 degrees of freedom were associated with a displacement whose extremities were considered to be the sites of electrical particles; if we substitute mechanical particles, displacement appears in its ordinary aspect as a relation which is wholly representable in Riemannian space-time. As is well-known, Riemannian geometry comprises mechanics so that the mechanical relation expressed by displacement is equivalent to the geometrical relation. A geometrical displacement (in Riemannian geometry) has 10 degrees of freedom, viz., 6 rotations and 4 translations; the latter are equivalent to rotations in the direction of a fifth dimension, regard being had to the curvature of space-time. Alternatively, since (5.2) is a second order equation,

* In so far as the interaction of electrical particles are replaced by a mechanical energy, they can be dealt with by a purely mechanical eq. Thus Schröd's eq is *

we ought perhaps to take the degrees of freedom of ds^2
 $= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. This admits 10 independent variations $\delta g_{\mu\nu}$.
Arguments might perhaps be added in favour of $\beta = 6$, i.e.,
the number of relativity rotations of an Einstein spherical
world. Undoubtedly a fuller investigation will be neces-
sary to justify fully our assumption that $\beta = 10$; but that
may well be postponed.

Our ideal neutron accordingly obeys the eq.

$$\left(10 \frac{\delta^2}{\delta t^2} + 1\right) \psi = 0. \quad (5.3)$$

By comparison with (4.1) we see that its proper mass
is $136/10$ times that of the particle there described,
viz., the electron. This makes the mass of the ideal
neutral particle very nearly \sqrt{Mm} where M and m
are the masses of the proton and electron.

I do not, of course, suggest that neutrons actually
exist. They appear as a half-way stage in passing from
geometry to physics, geometrical points being first replaced
by mech. neutrons which are afterwards to be modified
by electrical properties.

6. If we follow strictly the idea of the relation of the proton
and electron indicated in my "Preliminary Note," we regard (4.1)
and (5.3) as ~~not~~ really describing the same thing, the change of
mass in the ratio $136/10$ being a distortion introduced in

representing displacements with 136 degrees of freedom in a space-time admitting only 10. If we can describe an anisotropic entity whose mass simultaneously undergoes the opposite distortion $\sqrt{10}/136$, we can account for the proton, since the mass ratio of proton and electron is nearly $136^2/10$.

Unfortunately for this line of explanation, the masses m and \sqrt{MM} are found to occur the wrong way about. The fundamental microscopic equation (4.1) should have given the mass \sqrt{Mm} , which could then be distorted oppositely into M and m by our representation in space-time with their degrees of freedom. Actually (4.1) gives the mass m , as shown in my investigation of the cosmical constant. We must therefore seek a different kind of relation between the Hamiltonian of (4.1) and (5.3) if any part of the idea is to be retained.

If one Hamiltonian is not a replacement of the other the natural suggestion is that both represent energy that must be included in the equation. By (2.3) $(iE_S)^2 = 1$; hence the proposed combination of (4.1) and (5.3) can be written

$$\left\{ 10 (iE_S \frac{\partial}{\partial t})^2 + 136 (iE_S \frac{\partial}{\partial t}) + 1 \right\} \psi = 0. \quad (6.1)$$

The suggestion proves to be immediately successful, and perhaps no other defence is needed. We shall, however, consider what is implied in adding the two Hamiltonians.

It clearly means that the relation of the electrical system to space-time gives it 10 external degrees of freedom with additional energy corresponding thereto. (We had previously been supposing that these were merely a distorted representation of the 136 internal degrees of freedom — an idea which had some plausibility of because certain internal rotations of the system are equivalent to rotations of the co-ordinate frame.) This recalls our earlier remark that the universe consisting of one proton and one electron is an over-simplification. It contains just enough differentiation to provide two ends to a displacement, but nothing external to relate the displacement to. When more charges are present a displacement, besides involving the electrical relations of the two particles at its ends, also involves the relations of these to the averaged states of the other particles in the universe, and it is because of these external relations that there is a meaning in representing it as having a position and direction in macroscopic space-time. The space-time field (or inertial field) is the smoothed equivalent that we have substituted for the averaged effect of the unspecified particles in the universe*.

* When resolved into factors (6.1) becomes

* 'Proc. Roy. Soc.,' A, vol. 133, p. 606 (1931)

$(135.9264 i E_s \frac{\partial}{\partial t} + 1)(0.0735692 i E_s \frac{\partial}{\partial t} + 1) \psi_{20} \tag{7.1}$
which yields two alternatives

$$(135.9264 i E_s \frac{\partial}{\partial t} + 1) \psi_{20}, \tag{7.21}$$

$$(0.0735692 i E_s \frac{\partial}{\partial t} + 1) \psi_{20}. \tag{7.22}$$

The first is almost the same as (4.1), so that we may take it to be the wave equation for an electron, (4.1) being a less accurate approximation. The second equation corresponds to a particle of mass greater than that of the electron in the ratio $135.9264 : 0.0735692$, or 1847.60 . This agrees closely with the proton.

Accordingly (6.1) appears to be the wave equation which is satisfied by electrons and protons. It should be noted that it is the equation for an electron or proton, not an electron and proton.

8. It remains for us to show that the charges of two kinds of particles satisfying (6.1) have opposite sign. To test this we have to introduce an electromagnetic field, which will be represented by an additional term in the eq. We shall assume (as a definition of a macroscopic electromagnetic field) that this additional term is of the same form as in Dirac's and Schrödinger's equations, viz., it does not involve $\frac{\partial}{\partial t}$ or $\frac{\partial}{\partial x}$ though (in Dirac's theory) it may contain matrices. The field is accordingly introduced

by altering the third term from 1 to $1 + T$,

Since the 1st two coefficients of the quadratic are unaltered the sum of the roots is unaltered. Accordingly, the sum of the masses or energies of the two possible particles is not altered by an electric field. If the field adds an energy $e\phi$ to the proton it adds an equal and opposite energy $-e\phi$ to the electron. More generally when T involves matrices, the addition to the roots will involve matrices and be interpreted as additional momenta as well as energy; but the additionⁿ is always equal and opposite for the electron and proton. This is just what is meant when we say that their charges are equal and opposite.

9. The value 1847.6 of the mass-ratio which is here obtained is closer to the observational determinations than the value 1849.6 given in my "Preliminary Note". A recent discussion by W. N. Bond[†] gives 1846.6 ± 0.5 as the observational value; but many physicists incline to a value several units smaller. I do not think the question of exact agreement is very important at this stage of the theory.

Taking together this theory of the proton and the theory of the cosmical constant, the only numerical coefficients employed are the freedom-numbers 136 and 10. The eq. throughout are of

the simplest type and all linear measure is expressed in terms of the fundamental affine invariant, The equations yield a ratio of the masses of the electron and proton which is at any rate within 0.3 percent of the observational value. They give also the absolute masses (in natural units) in agreement with observation; in this case there is only a rough test of agreement since the observational value has a probable error of the order 10 per cent., but the extreme magnitude of the quantity to be checked (about 10^{39}) makes even the rough agreement a rather severe test.

Although we do not enter here into the theory of the occurrence of freedom-numbers in the eq., it is to be noted that their use is not an ad hoc principle invented for the present discussion. The freedom-number was introduced and provisionally accounted for in my earlier papers; it was first suggested by two quite independent constants, viz. the fine-structure constant and the packing-fraction. The discovery of additional instances of the appearance of freedom-numbers should facilitate the investigation of the precise theory underlying them.

Summary

Das heißt, daß man bei unmittelbarer Wiederholung derselben Messung mit Sicherheit dasselbe Resultat erhält. In dieser Form ist die Voraussetzung jedoch in den meisten Fällen physikalisch unrichtig, wie wir später genauer zeigen werden; sie ist auch in dieser scharfen Form für die Wellenmechanik gar nicht erforderlich. Wesentlich ist vielmehr nur, daß für jedes System voraussagbare Messungen existieren. Darunter verstehen wir Messungen, bei denen für jeden Wert des Meßresultats ein Zustand des Systems existiert, in dem diese Messung mit Sicherheit das betreffende Resultat ergibt. Wäre diese Voraussetzung nämlich nicht erfüllt, so ließe sich auch der Zustand, in dem das System nach einer Messung zurückbleibt, niemals durch eine ψ -Funktion beschreiben. Das kann man auf die folgende Weise einsehen: Wir können den Zustand von System und Meßapparat zusammen durch eine Wellenfunktion beschreiben, die vor der Messung in ein Produkt $\psi \cdot \varphi$ zerfällt. ψ ist hierbei die zunächst willkürliche Wellenfunktion des Systems, φ die bekannte des Meßapparats. Nach der Wechselwirkung wird die Wellenfz im allgemeinen kein Produkt mehr sein. Zerlegen wir sie nach den Eigenfz'en des Meßapparats in der Form $\sum \psi_n \varphi_n$, so beschreibt ψ_n den Zustand, in dem das System nach der Messung zurückbleibt. Im allgemeinen hängt die Form ψ_n von der Form von ψ ab. Wollen wir auf

Grund der Beobachtung des Meßapparats allein auf die Wellenfz des System schließen, so muß aber ψ_n bis auf einen konstanten Faktor von ψ unabhängig sein, d. h. $\psi_n = a_n u_n$, wobei u_n auf 1 normiert ist. Aus der Linearität der Wellengleichung folgt, daß a_n linear von ψ abhängt, d. h. in der Form $\int \psi v_n^* dx$ geschrieben werden kann, wobei v_n irgendeine von dem Messungsprozess abhängige Funktion ist. $|a_n|^2$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Messung das n -te Resultat ergibt. Die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten muß gleich 1 sein, d. h. $\sum |a_n|^2 = 1$, unabhängig von ψ (sobald nur ψ normiert ist):
$$\sum a_n a_n^* = \int a_n v_n \psi^* dx.$$

Dieser Ausdruck soll also immer dann gleich 1 sein, wenn $\int \psi \psi^* dx = 1$, d. h. es muß
$$\sum a_n v_n = \psi.$$

sein. (Die v_n bilden ein vollständiges Orthogonalsystem) Hieraus folgt aber, daß die Messung voraus sagbar ist, indem wir für ψ speziell eines der v_n wählen, wobei man dann nur eines der a_n von Null verschieden ist. Die Wiederholbarkeit der Messung würde bedeuten, daß die v_n mit den u_n identisch sind, was aber im allgemeinen nicht erfüllt ist.†

† Bei einer Messung, die in kurzer Zeit vor sich geht, können man, wie man leicht nachweist, die u_n mit ^{den} v_n nur dann identisch sein, wenn der zugehörige Operator mit der Wechselwirkungsenergie zwischen System und

Apparat vertauschbar ist. In der Wellenmechanik
läßt sich aber die Wellenf \ddot{u} des Systems durch keine Messung bestimmen,
so kann sie auch keinen physikalischen Sinn haben. Der Gebrauch
von Wellenf \ddot{u} en wä r en dann um nichts besser als der Gebrauch etwa
des Bahnbegriffs im quantenmechanischen Gebiet. Die Existenz
voraussagbare Messungen ist so mit eine absolut notwendige
Voraussetzung der Wellenmech.

Daß die Voraussetzung der Wiederholbarkeit im allgemeinen un-
erfüllbar ist, sieht man besonders klar, wenn man die zu der
Messung notwendige Zeit in Betracht zieht. Diese Zeit wird
durch die Relation $\Delta E \Delta t > h$ begrenzt, die schon sehr
oft aufgestellt, aber nur von Bohr* (l.c.) richtig interpretiert
wurde. Diese Relation bedeutet evidenterweise nicht, daß die
Energie nicht zu einer bestimmten Zeit genau bekannt sein
kann (sonst hätte der Energiebegriff überhaupt keinen Sinn), sie
bedeutet aber auch nicht, daß die Energie nicht innerhalb
einer kurzen Zeit mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden
kann. Man muß vielmehr die Änderung berücksichtigen, die
der Meßprozess auch im Falle einer voraussagbaren Messung
Apparat vertauschbar ist. In der Wellmech. (d.h. bei Vernachlässigung der Relat.)
ist diese Weds. Wirt. Energie immer eine Koord. f \ddot{u} . Die einzige Größe, die der ein
wiederholbare Messung ist, ist also die Koordinate. Koordinatenmessungen
haben in Wirklichkeit auch immer diese Eigenschaft. Man sieht auch, daß
die u_n im allgemeinen gar keinen „Operator auf Diagonalform.“ Auch dieser
nicht orthogonal zu sein brauchen, d.h., die Messung bringt im allgemeinen gar

mit sich bringt, so daß also in der Zeit Δt keine Messung ausgeführt werden kann, für die Energieumschäfte in diesen beiden Zuständen kleiner als $h/\Delta t$ ist.

Dies folgt aus der Betrachtung des zeitlichen Ablaufs des Wechselwirkungsprozesses. Die Methode der Variation der Konstanten zeigt, daß die Übergänge innerhalb kurzer Zeiten keineswegs nur zwischen solchen Zuständen vor sich gehen, die der Bedingung $E + \varepsilon = E' + \varepsilon'$ genügen. (E, E' Energie des Systems vor und nach dem Übergang, $\varepsilon, \varepsilon'$ die jenen des Apparats.) Erst nach längerer Zeit werden diese Zustände durch Resonanz bevorzugt, indem die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit mit der Zeit stark anwachsen. Praktisch spielen nach der Zeit Δt nur solche Übergänge eine Rolle, für welche $|E + \varepsilon - E' - \varepsilon'| \approx \frac{h}{\Delta t}$ ist. Diese Tatsache widerspricht natürlich keineswegs der strengen Gültigkeit des Energiesatzes in der Wellenmech., sondern die Wechselwirkungsenergie zwischen System und Apparat ist eben um den betreffenden Betrag unbestimmt. Im günstigsten Falle, wo ε und ε' exakt bekannt sind, muß dann die Ungenauigkeit $\Delta(E - E') > \frac{h}{\Delta t}$ sein.

Diese Beziehung hat wichtige Folge für die Impulsmessung: Jede Impulsmessung besteht darin, daß man den Körper mit

→ physikalische Umstand wird gewöhnlich bei der Darstellung der Transf.-theorie nicht bemerkt.

einem anderen zusammenstoßen läßt. Bei der Messung einer Komponente des Impulses (am einfachsten zu realisieren durch Zusammenstoß mit einem ebenen Spiegel) ist der Impulssatz streng anzuwenden, der Energiesatz dagegen wegen der unbekannteren W.W. Energie nur bis auf $h/\delta t$. Zur Bestimmung des Teilchenimpulses P haben wir also die Gleichungen

$$p + P - p' - P' = 0,$$
$$|\epsilon + E - \epsilon' - E'| \sim \frac{h}{\delta t},$$

$p, p', \epsilon, \epsilon', d, h$, die Bewegung des Meßapparats vor und nach dem Zusammenstoß, können als bekannt angesehen werden. Dann folgt $\Delta P = \Delta P'$, und wegen $\Delta E = v \Delta P$:

$$(v - v') \Delta P > \frac{h}{\delta t}.$$

Mit jeder Impulsmessung ist somit eine bestimmte Impulsänderung (außer die Meßgenauigkeit begrenzenden unbestimmten Änderung) notwendig^{er} verbunden*. Dieser Umstand ist zuerst von Bohr (l.c.) erkannt worden. Die Nichtwiederholbarkeit der Impulsmessung in kurzer Zeit kommt dabei besonderes klar zum Vorschein. Impulsmessungen, die lange Zeit dauern, haben aber nur bei freien Teilchen überhaupt einen Sinn.

* Hierbei spielt es eine wesentliche Rolle, daß ϵ in der Natur nicht beliebige Hamilton H_0 realisiert werden können, sondern daß, wie oben erwähnt, die Wechsel W, F_{\parallel} immer eine F_{\perp} der Koordinaten und daher mit dem Impuls unvertauschbar ist. Würde man die Form der Hamilton H_0

3. Impulsmessung im relativistischen Falle. Wir wollen nun von der Relativität, d. h. von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit Gebrauch machen. Es existiert zwar noch keine widerspruchsfreie relativistische Q.T., es ist aber klar, daß die durch die allgemeinen Prinzipien der Wellmch. gegebenen Grenzen der Meßgenauigkeit auch hier sicher nicht überschritten werden können.

Die Tragweite der eben abgeleiteten Relation für die Impulsmessung wird durch die Relat. bedeutend erhöht. In der nichtrelativistischen Theorie konnte man die bestimmte Geschwindigkeitsänderung beliebig groß machen und somit auch in kurzer Zeit den Impuls beliebig genau zu messen. Berücksichtigen wir aber, daß die Geschwindigkeit c nicht überschritten kann, so ist $v - v'$ höchstens von der Größenordnung c , so daß nach (1) hier

$$\Delta p \Delta t > \frac{h}{c} \quad (2)$$

folgt.

Für die Zustand nach der Messung ist die Ungleichung (2) besonders leicht abzuleiten. Nimmt man nämlich an, daß vor der Messung der Ort des Teilchens bestimmt war, so hat man nach Ablauf einer Zeit Δt wegen der endlichen Grenzgeschwindigkeit noch immer eine Kenntnis des Ortes mit der Genauigkeit $c \Delta t$. Wäre nach Ablauf dieser Zeit der Impuls genauer als nach (2) bestimmt, so käme ein Widerspruch zu $\Delta p \Delta q > h$.

beliebig wählen können, so könnte man den Impuls in beliebig kurzer Zeit ohne Geschwindigkeitsänderung genau messen, wie man trivialerweise daraus erkennt, daß dann Koord. und Impuls gleichberechtigt sind.

Bei der Impulsmessung an einem geladenen Körper tritt zu der obigen Ungenauigkeit noch eine weitere Störung der Messung dadurch hinzu, daß der Körper bei der notwendigen endlichen Geschw.änderung Strahlung aussenden wird. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß die Geschw. des Körpers vor der Messung sicher klein gegen c ist. In diesem Falle ist es günstig, die Messung so einzurichten, daß auch nach der Messung die Geschw. noch wesentlich kleiner als c ist. Nähert man die Geschw. nämlich c , so gewinnt man nur sehr wenig in der Relation (3), verliert aber sehr viel an Genauigkeit durch die Abstrahlung. In diesem Falle darf man also mit der nichtrelat. Formel für die Strahlungsdämpfung rechnen. Die ausgestrahlte Energie ist dann

$$\frac{e^2}{c^3} \int \dot{v}^2 dt$$

(e Ladung des Körpers). Diese Abstrahlung hat offenbar ihren kleinsten Wert bei gleichförmiger Beschleunigung, also $\dot{v} = \frac{v' - v}{\Delta t}$, so daß die ausgestrahlte Energie mindestens gleich

$$\frac{e^2}{c^3} \frac{(v' - v)^2}{\Delta t}$$

wir δ . Diese unbestimmte Energieänderung haben wir bei der Energiebilanz noch zu berücksichtigen und daher entsteht für den Impuls noch die neue Ungenauigkeit

$$(v' - v) \Delta P > \frac{e^2}{c^3} \frac{(v' - v)^2}{\Delta t}$$

oder
$$\Delta p \Delta t > \frac{e^2}{c^3} (v' - v). \quad (3)$$

Für Elektronen besagt diese Ungleichung nichts Neues, da sogar im ungünstigsten Falle, wo $v - v' \sim c$ ist, aus ihr nur $\Delta p \Delta t > e^2/c^2$ folgt, was wegen e^2/hc schwächer als (2) ist. Für makroskopische Körper spielt die Relation aber eine Rolle. Wir erhalten aus ihr durch Multiplikation mit (2)

$$\Delta p \Delta t > \frac{h}{c} \sqrt{\frac{e^2}{hc}}. \quad (4)$$

In dieser Form werden wir die Relation später gebrauchen. Ungleichung (4) gilt natürlich unabhängig von der Methode, die man zur Messung benutzt, insbesondere auch dann, wenn die Messung gerade mit Hilfe der Ladung des Körpers geschieht, wie im Falle des Comptoneffekts. Auch in diesem Falle existiert nämlich außer der Comptonstrahlung, die man bei der Messung benutzt, noch eine weitere, unkontrollierbare Strahlung, die der oben diskutierten entspricht, und die sich ergibt, wenn man in der Störungsrechnung für die Wechselwirkung zwischen der Strahlung und dem Teilchen höhere Näherungen berücksichtigt.* (Beim gewöhnlichen Comptoneffekt an Elektronen spielt dieser Effekt wegen der Kleinheit von e^2/hc keine Rolle.)

4. Feldmessung. Die einfachste Methode, ein elektrisches Feld zu messen, besteht darin, daß man die Beschleunigung eines geladenen Probekörpers beobachtet. Um nicht durch magnetische Felder gestört zu werden, benutzen wir einen Körper mit sehr

großer Masse und sehr kleiner Geschwindigkeit. Der Impuls des Körpers vor der Messung sei bekannt, den Impuls nachher messen wir wieder mit der Genauigkeit Δp . Daraus können wir einen Rückschluss auf die elektrische Feldstärke mit der Genauigkeit

$$\epsilon \Delta E \Delta t > \Delta p \quad (5)$$

ziehen. Außerdem muß aber bei der Impulsmessung die Bedingung (4) erfüllt sein. Aus (4) und (5) folgt durch Multiplikation:

$$\Delta E > \frac{\sqrt{hc}}{(\Delta t)^2} \quad (6)$$

Für die magnetische Feldstärke erhält man durch die Betrachtung der Bewegung einer Magnetonadel leicht dasselbe Resultat:

$$\Delta H > \frac{\sqrt{hc}}{(\Delta t)^2} \quad (6a)$$

Wollen wir elektrische und magnetische Feldstärke zugleich messen, so haben wir außer den bisher diskutierten Umständen noch den Einfluß des vom geladenen Körper erzeugten Magnetfeldes auf die Nadel zu berücksichtigen, und umgekehrt. Dieses Magnetfeld ist aber von der Größenordnung

$$\Delta H > \frac{e}{(\Delta l)^2} \cdot \frac{v^2}{c} \quad (7)$$

(Δl Abstand zwischen Probekörper und Nadel). Multiplizieren wir diese Ungleichung mit (5) und (1), so folgt ($v=0$)

$$\Delta E \Delta H > \frac{hc}{(\Delta t)^2} \cdot \frac{1}{(\Delta l)^2} \quad (6b)$$

Diese Bedingung unterscheidet sich von dem Produkt von (6) und (6a) dadurch, daß im Nenner teilweise \cot durch Δl ersetzt ist.

Aus (6), (6a) und (6b) folgt, daß bei $\Delta t = c\sigma$ die Messung beliebig genau gemacht werden kann, und zwar von E und H zugleich. Statische Felder können somit im klassischen Sinne vollständig definiert werden*.

Bei Wellenfeldern (d. h. solchen Feldern, die von den felderzeugenden Körpern weiter als $c/\nu = \lambda$ entfernt sind) genügt es, (6) und (6a) zu benutzen, denn wegen der Kopplung von räumlichem und zeitlichem Verlauf erfährt man gar nichts mehr über das Feld, wenn man bei festem Δt die Ausdehnung des Messgebiets kleiner als $c\Delta t$ macht. Somit stören sich auch hier die Messungen von E und H nicht gegenseitig, und soweit die Feldstärken im Rahmen von (6) und (6a) überhaupt meßbar sind, sind sie auch gleichzeitig meßbar. Soweit sich also Feldstärken überhaupt definieren lassen, genügen sie der klassischen Theorie. Im quantenmechanischen Gebiet sind dagegen die Feldstärken gar keine meßbaren Größen**.

5. Messungen an Lichtquanten. Wir wollen nun zeigen, daß in einem Strahlungsfeld in kurzer Zeit keine Messungen mit

* Den Hinweis auf diesen Sachverhalt und überhaupt auf die wesentliche Rolle der Zeit verdanken wir Herrn Prof. N. Bohr.

** Die von Jordan u. Fock (Zs. f. Phys. 66, 206, 1930) für die Feldmessung mit einem Elektron gefundene Ungenauigkeit ist größer als (6) und beweist daher nur, daß ein Elektron ein ungeeignetes Mittel zur Feldmessung ist.

Sicherheit möglich sind, d.h. keine solchen Messungen, bei denen man aus jedem möglichen Meßresultat Schlüsse auf den Zustand des Systems ziehen kann. (Wir sehen also von solchen Messungen ab, wie z.B. eine Ortsmessung mit Hilfe eines Zusammenstoßes, der innerhalb der Beobachtungsdauer nicht mit der Wahrsch. 1 erfolgt, so daß man daraus, daß der Meßkörper abgelenkt wird, zwar schließen kann, daß der zu messende Körper sich an der betreffenden Stelle befand, aber daraus, daß er nicht abgelenkt wurde, gar nichts schließen kann.) Die zur Messung notwendige Zeit hängt von dem Zustand des System ab. Wenn die Energie des Strahlungsfeldes ungefähr bestimmt und gleich E ist, so ist diese Zeit, wie wir zeigen wollen, größer als h/E . Da das Feld aus Lichtquanten besteht, kann die größte bei der Fourierzerlegung des Feldes auftretende Frequenz höchstens E/h sein, wenn wir also Messungen in Zeiten ausführen, die klein gegen h/E sind, so befinden wir uns innerhalb der Schwingungsdauer, die Feldstärke darf somit während der Messung als konstant angesehen werden. Alle Messungen in ~~den~~ so kurzen Zeiten sind daher Feldmessungen und unterliegen der Ungenauigkeit (6). Damit also überhaupt ein Effekt nachweisbar ist, muß die Feldstärke wesentlich größer als $\sqrt{hc} / (cst)^2$ sein. Andererseits ist aber die kleinste vorkommende Wellenlänge

hc/E und folglich muß die Feldstärke, sofern sie an einem Punkte von Null verschieden ist, in einem ganzen Bereich von mindestens dieser Ausdehnung von Null verschieden sein. Folglich muß die gesamte Feldenergie mindestens von der Ordnung $E > E^2 \left(\frac{hc}{E}\right)^3 > \frac{(hc)^4}{E^2 (cot)^4}$ sein, d. h.

$$\Delta t > \frac{hc}{E}, \quad (8)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Messungen, die der Relation (8) widersprechen, sind also unmöglich.

Dieses Resultat gilt insbesondere natürlich auch dann, wenn das Strahlungsfeld aus einem einzigen Lichtquant besteht. Innerhalb der durch (8) bestimmten Zeit kann man also ein Lichtquant auf keine Weise nachweisen, insbesondere also auch seinen Ort nicht mit irgendeiner Genauigkeit bestimmen. Bei einer Ortsmessung wird also der Zeitpunkt, auf den sich der gemessene Ort bezieht, um mehr als hc/E unbestimmt sein. Will man aber die Ortsmessung zur Untersuchung eines Zustandes benutzen, wie dies im zweiten Abschnitt diskutiert wurde, so interessiert man sich für den Ort zu einem Zeitpunkt, bis zu welchem der zu untersuchende Zustand (d. h. der Zustand, dessen Energie von der Größenordnung E war) bestand. Aus der Ortsmessung kann man auf eine derartige Größe höchstens mit der Ungenauig-

keit $\Delta q > h c / E$ schließen.

Man könnte noch daran denken, die Genauigkeit zu erhöhen, indem man gleichzeitig mit der Ortsmessung eine Impulsmessung vornimmt (natürlich innerhalb der durch $\Delta p \Delta q > h$ gegebenen Grenzen) und daraus zurückzuschließen sucht, wie weit und in welcher Richtung das Lichtquant inzwischen gelaufen ist. Die nähere Untersuchung zeigt aber, daß man auch auf diesem Wege zu keiner höheren Genauigkeit als $h c / E$ kommen kann. In jedem Zustand hat es also nur Sinn, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Lichtquants für Gebiete anzugeben, die groß gegen die Wellenlänge sind. Vom Ort des Lichtquants kann man also sinnvollerweise nur im Rahmen der geometrischen Optik reden.

Wenn sich die Zahl der Lichtquanten innerhalb der Schwungsdauer merklich ändert, so verliert der Begriff der Lichtquanten überhaupt seinen Sinn.

6. Messungen an materiellen Teilchen. Wir wollen nun die entsprechenden Relationen für materielle Teilchen untersuchen, (Wir reden dabei immer von Elektronen, aber natürlich gelten die Überlegungen für jede Art von materiellen Teilchen.) Am besten lassen sich solcher Teilchen mit Hilfe von Stoßprozessen, etwa mit dem Compton effekt, nachweisen. Dabei werden wir also die Anwesenheit des Elektrons

dadurch nach, daß wir zwei Impulsmessungen am dem Lichtquant vornehmen und an der Impulsänderung sehen, daß inzwischen ein Zusammenstoß stattgefunden hat. Dabei hängt der Verlauf des Prozesses aber wesentlich davon ab, wie groß das Zeitintervall zwischen den beiden Messungen ist. In langen Zeiten bekommt man den Comptoneffekt, d. h. der Impuls des Lichtquants ändert sich entweder gar nicht oder um einen durch die Anfangsimpulse bestimmten Betrag, den man durch Verwendung sehr harten Lichts beliebig groß machen kann. In sehr kurzen Zeiten können jedoch beliebige Impulsänderungen stattfinden, wobei nur der Impulssatz gewahrt bleiben muß, die Summe der Energien von Elektron und Lichtquant jedoch nur bis auf $h\nu$ erhalten zu bleiben braucht, wie im zweiten Abschnitt ausgeführt wurde. Dabei liegt aber, aus den gleichen Gründen wie bei Messungen an Lichtquanten, die überwiegende Wahrscheinlichkeit bei kleinen Impulsänderungen. Eine elementare Rechnung zeigt, daß das zweite Verhalten dann beginnt, wenn das Zeitintervall nicht mehr groß gegen h/E wird, wo E die Energie ist, die das Elektron vor der Messung ungefähr hatte.

Will man also die Dauer des Messprozesses kürzer als

$\frac{h}{E}$ machen, so ändert sich der Impuls des Lichtquants (und daher auch der des Elektrons) um beliebige Beträge. Man kann also daraus, daß keine meßbare Impulsänderung stattgefunden hat, nicht schließen, daß überhaupt kein Zusammenstoß geschehen ist. Physikalisch bedeutet dies, daß die Messung des Lichtquantenimpulses den Anfangszustand des Elektrons zerstört. Man kann aber nicht erreichen, daß man das Elektron schon mit der Wahrscheinlichkeit 1 bei der ersten Messung findet, denn wenn es sich vor der Messung in einem Volumen von der Dimension δq befand, so braucht man eine Zeit $\delta q/c$, bis man sicher sein kann, daß das Licht das Elektron erreicht hat. Da $\frac{\delta q}{c} > \frac{h}{c\delta p} > \frac{h}{\delta p} > \frac{h}{E}$ ist, müßten wir also viele Messungen ausführen, bevor wir das Elektron nachweisen können, und haben also seinen Zustand, bevor wir es finden, schon völlig zerstört. Messungen in Zeiten, die nicht größer als $\frac{h}{E}$ sind, sind also nicht brauchbar.

Wir fragen nun wieder danach, wie genau man aus dieser Messung auf den Ort des Elektrons für einen Zeitpunkt schließen kann bis zu welchem es noch den alten Zustand hatte. Für diesen Rückschluß darf man natürlich nur die jenen Kenntnisse über die Geschwindigkeit benutzen, die mit der Ortsmessung

verträglich sind. (Nicht etwa die Geschwindigkeit, die es in dem Zustand vor der Messung hatte.) Macht man eine exakte Ortsmessung, so erhält man daraus keine Kenntnisse über die Geschw. die also bis auf c unbestimmt bleibt. Der Rückschluss auf die Koordinate läßt sich also hier nur mit dem Fehler $\Delta q > hc/E$ machen. Elementare Betrachtungen zeigen, daß man keine höhere Genauigkeit bekommen kann, wenn man Impuls und Koordinate gleichzeitig mit irgendeiner anderen (mit $\Delta p \Delta q > h$ verträglichen) Genauigkeiten mißt.

$$\Delta q > \frac{hc}{E} \quad (9)$$

stellt also die Grenze dar, bis zu der der Ort des Elektrons sinnvoll definieren werden kann. Ist insbesondere die Geschw. des Elektrons nicht sehr nahe zu c , so wird dies

$$\Delta q > \frac{h}{mc} \quad (10a)$$

Wie aus der Ableitung von (10a) hervorgeht, gilt es nur für nicht zu schnell bewegte Elektronen. Die in der Literatur häufig vor kommende Behauptung, daß $\frac{h}{mc}$ eine allgemeine Grenze für die Genauigkeit von Ortsmessungen bedeutet, beruht auf fehlerhaften Überlegungen.

Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man an der rel. Invarianz der sämtlichen oben abgeleiteten Ungenauigkeitsrelationen zweifeln. In Wirklichkeit kann natürlich

kein Widerspruch mit der Relativität vorhanden sein, da diese bei der Ableitung dauernd mit der berücksichtigt worden ist. Die Erklärung liegt darin, daß die Ungleichungen selbst sich keineswegs in relat. invarianter Weise zu transformieren brauchen, da die günstigst möglichen Messungen einer Größe keineswegs mehr günstigst mögliche zu sein brauchen, wenn man sie von einem bewegten Koordinatensystem aus betrachtet. Man muß deswegen nur fordern, daß die Grenze der Genauigkeit nicht überschritten wird, wenn man eine solche Messung von einem bewegten Koord. sys. aus betrachtet. Diese Forderung ist natürlich auch erfüllt.

Besonders vorsichtig muß man in dieser Hinsicht mit den Ortsmessungen sein. Hier ist nämlich die Fragestellung selbst nicht relat. invariant, sondern zeichnet eine Zeitachse aus, da man nach der Koord. in dem Zeitpunkt fragt, bis zu welchem der ungestörte Zustand besteht^{an σ} .

7. Messung Mathematisches Versagen der wellenmech. Methoden. Die oben festgestellte Unmeßbarkeit aller wellenmech. Größen kommt natürlich auch in dem Formalismus zum Ausdruck, den man erhält, wenn man versucht, die wellenmech. Methoden auf den relat. Fall anzuwenden. Die fundamentalste Größe der Theorie ist dabei immer,

©2022 IHAL, ITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

sowohl für Elektronen als für Lichtquanten, der Impuls, was wohl damit zusammenhängt, daß der Impuls, wenn er zeitlich konstant bleibt, noch beliebig genau definiert werden kann, wobei man allerdings sehr lange Zeiten zu seiner Messung braucht. Dieser letzte Umstand kommt in dem wellenmech. Formalismus natürlich nicht zum Ausdruck, was zur Folge hat, daß dies Aussagen der Theorie über kurze Zeiten sinnlos werden.

Die Unmeßbarkeit des Ortes dagegen kommt in dem Formalismus unmittelbar zum Ausdruck. Bei dem Elektron liegt dies daran, daß die Diracsche Gl. auch die physikalisch sinnlosen Lösungen mit negativer Energie zuläßt. Als Resultat einer Messung kann natürlich in Wirklichkeit nur eine Wellenfz entstehen, die nur aus Zuständen mit positiver Energie zuläßt aufgebaut ist. Aus solchen Zuständen kann man aber nicht jedes beliebige Wellenpaketes im allgemeinen die Größe h/mc nicht unterschreiten können. Es gibt zwar spezielle Wellenpakete, die kleiner sind (und zwar solche, deren Schwerpunkt fast mit Lichtgeschw. läuft*), aber die entsprechenden Wellenfz bilden kein vollständiges System, und man kann den Zustand vor der Messung im allgemeinen nicht nach ihnen entwickeln. Dies entspricht dem früher

* Den Hinweis auf diesen Umstand verdanke ich Herrn Prof. J. Klein.

festgestellten Umstand, daß man in kurzen Zeiten zwar zuweilen zufällig eine Feststellung des Ortes bekommen, aber nicht eine Messung mit Sicherheit ausführen kann,

Noch extremer liegen die Verhältnisse bei Lichtquanten insofern, als sich dort schon mathematisch kein Ausdruck für die Wahrsch.-dichte angeben läßt. Man erkennt dies daraus, daß die Wellenfz für ein Lichtquant wegen der Polarisations-eigenschaften ein Tensor zweiten Ranges sein muß, ^{**} Wahrsch.-dichte und -strom müssen dagegen einen Vierervektor bilden, und da sie quadratisch aus der Wellenfz gebildet werden, ist dies unmöglich. In der geometrischen Optik besteht natürlich die Möglichkeit, Wellenpakete zu bauen, bei denen alle Wirkungen außerhalb eines gewissen Bereichs verschwinden. Aber auch hier bilden diese Wellenfz kein vollständiges System.

Die Unmeßbarkeit der Feldstärke drückt sich darin aus, daß im leeren Raum (keine Lichtquanten) der Operator der Feldstärke ^{**} keineswegs den Wert Null hat, sondern daß sogar der Erwartungswert des Quadrats der Feldstärke in diesem Falle unendlich wird. Das hängt damit zusammen, daß die Relation (6) für $\sigma t = 0$ eine unendliche Unbestimmtheit der Feldstärke ergibt.

** L. Landau u. R. Peierls, ZS. f. Phys. 62. 188 (1930)

* Heisenberg u. Pauli, Landau u. Peierls, l.c.

8. Schlussfolgerung. Wir haben gesehen, daß für die fundamentalen Größen der Wellenmch. keine voraussagbaren Messungen mehr existieren können (außer wenn diese Größen zeitlich konstant sind, wobei man aber auch für eine exakt voraussagbare Messung unendlich lange Zeit braucht.) Es kann natürlich nicht formal bewiesen werden, daß nicht in der Natur spezielle komplizierte Größen existieren, für die voraussagbare Messungen möglich sind, doch ist erübrigt sich wohl die Diskussion einer solchen Vermutung. Die im zweiten Abschnitt als notwendig erwiesenen Voraussetzungen der Wellenmch. sind also im relat. Gebiet nicht erfüllt und die Anwendung der Wellenmch. Methoden auf dieses Gebiet eine Überspannung ihrer Tragweite. Man darf sich daher nicht wundern, wenn der Formalismus zu allerlei Unendlichkeiten führt, im Gegenteil, es wäre sogar wunderbar, wenn er irgendeine Ähnlichkeit mit der Wirklichkeit hätte.

Die Anwendbarkeit der Wellenmch. ist auf solche Prozesse beschränkt, wo der Zustand des Systems hinreichend langsam veränderlich ist. In Fällen, wo die gewöhnliche Schrödingergl. anwendbar ist, ist dies natürlich immer erfüllt. Für die Strahlung allein ist die Wellenmch. nie sinnvoll, weil der Grenzwert $c = \infty$ dort keinen

Sinn hat.

In der richtigen relativistischen Quantentheorie, die noch nicht existiert, wird es also keine physikalischen Größen und keine Messungen im Sinne der Wellenmech. geben. Man kann aber natürlich das System in Wechselwirkung mit irgendeinem Apparat bringen und fragen, was der Apparat dann tut. Die Theorie wird eine Wahrscheinlichkeit für das Resultat dieses Experiments liefern. Dieses kann aber nicht als Wahrsch. für einen Parameter des untersuchten Systems interpretiert werden, denn man kann es auf keine Weise erreichen, daß die Wahrsch. für ein bestimmtes Resultat gleich 1 und für alle übrigen Null wird. Außerdem wird es prinzipiell nicht möglich sein, die Zeitdauer eines solchen Experiments beliebig klein zu machen.

Diese Auffassung findet ihre Bekräftigung in der bekannten Tatsache, daß die β -Spektren der radioaktiven Kerne kontinuierlich sind, obwohl die gleiche Lebensdauer vermuten läßt, daß die Kerne sich nicht in verschiedenen Zuständen befinden. Hätten nämlich alle β -Teilchen dieselbe Energie, so könnte man den Vorgang als eine voraussagbare Messung betrachten.

Für die Wellenmech. bedeutete diese Tatsache eine überwindliche

Schwierigkeit, weil sie es, wie Bohr betont hat, wahrscheinlich macht, daß der Energiesatz für Kernelektronen nicht gilt. Andererseits ist der Energiesatz mit den Grundlagen der Wellenmech. untrennbar verbunden. In der relativist. Q.T. braucht aber der Energiebegriff, wie aus dem obigen hervorgeht, nicht auf mechanische Weise definierbar zu sein. Sie ist natürlich in gewissem Sinne durch die Gesamtmasse des Kernes definierbar, weil ja der Kern in seiner Bewegung als Ganzes der Wellenmech. genügt. Das bedeutet aber noch keine voraussagbare Messung von Größen, die mit dem inneren Zustand des Kernes zusammenhängen.

Falls der Energiesatz nicht gilt, so wird sich bei radioaktiven Prozessen die Masse des Gesamtsystems natürlich ändern. Diese Änderung wird sich aber wohl nicht zeitlich verfolgen lassen, da man die Masse nicht in beliebig kurzer Zeit messen kann. Betrachtet man nämlich den Vorgang der Messung der Masse in ähnlicher Weise wie im Abschnitt 3, so findet man für die zur Messung notwendige Zeit:

$$\Delta m \Delta t > \frac{h}{c^2},$$

Das Gesagte steht nicht damit im Widerspruch, daß die Spektren der Protonen und α -Teilchen diskret sind. Diese Teilchen genügen eben selbst im Kern wegen ihrer

großen Masse (kleine Geschwin. δ) nach der Wellenmech.
in etwa der Weise, wie die Atomkerne in einem Molekül
sich noch weitgehend klassisch beschreiben lassen, obwohl
sie in starker Wechselwirkung mit den Elektronen stehen,
für die die klassische Mechanik bereits völlig versagt.

Der eine der Verfasser (Landau) möchte der Rockefeller
Foundation für die Möglichkeit, in Kopenhagen und Zürich
zu arbeiten, seinen Dank aussprechen.

Zürich, Physik. Institut der Eidgen. Techn. Hochschule,

Jan. 1931.

Quantised Singularities in the Electromagnetic Field

Proc. Roy. Soc. B33
p. 60, 1931

By P. A. M. Dirac (Received May 29, 1931)

§ 1. Introduction

The steady progress of physics requires for its theoretical formulation a mathematics that gets continually more advanced, this is only natural and to be expected. What, however, was not expected by the scientific workers of the last century was the peculiar particular form that the line of advancement of the mathematics would take, namely, it was expected that the mathematics would get more and more complicated, but would rest on a permanent basis of axioms and definitions, while actually the modern physical developments have required a mathematics that continually shifts its foundations and gets more abstract. Non-euclidean geometry and non-commutative algebra, which were at one time considered to be purely fictions of the mind and pastimes for logical thinkers, have now been found to be very necessary for the description of general ~~stat~~ facts of the physical world. It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future and that advance in physics is to be associated with a continual modification and generalisation of the axioms at the base of the mathematics rather than with a logical development of any one mathematical scheme on a fixed foundation.

There are at present fundamental problems in theoretical

physics awaiting solution, e.g. the relativistic formulation of quantum mechanics and the nature of atomic nuclei (to be followed by more difficult ones such as the problems of life), the solution of which problems will presumably require a more drastic revision of our fundamental concepts than any that have gone before. Quite likely these changes will be so great that it will be beyond the power of human intelligence to get the necessary new ideas by direct attempts to formulate the experimental data in mathematical terms. The theoretical worker in the future will therefore have to proceed in a more indirect way. The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and after each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities (by a process like Eddington's Principle of Identification).

A recent paper by ~~author~~* may possibly be regarded as a small step according to this general scheme of advance. The mathematical formalism at that time

* 126, p. 360 (1950)

involved a serious difficulty through its prediction of negative kinetic energy value for an electron. It was proposed to get over this difficulty, making use of Pauli's Exclusion Principle which does not allow more than one electron in any state, by saying that in the physical world almost all the negative-energy states are already occupied, so that our ordinary electrons of positive energy cannot fall into them. The question then arises as to the physical interpretation of the negative-energy states, which one this view really exist. We should expect the uniformly filled distribution of negative-energy states, being something exceptional, should make its presence felt as a kind of hole. It was shown that one of these holes would appear to us as a particle with a positive energy and a positive charge and it was suggested that this particle should be identified with a proton. Subsequent investigations, however, have shown that this particle necessarily has the same mass as an electron and also that, if it collides with an electron, the two will have a chance of annihilating one another much too great to be consistent with the known stability of matter†

(1930)

† Weyl 2nd ed. p. 234 (1931) | Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, p. 836
‡ I. Tamm - 25. 62, p. 525 (1930); Oppenheimer, Phys. Rev. 35 p. 939, (1930)

It thus appears that we must abandon the identification of the holes with protons and must find some other interpretation for them. Following Oppenheimer, we can assume that in the world as we know it, all, and not merely nearly all, of the negative energy states for electrons are occupied. A hole, if there were one, would be a new kind of particle, unknown to experimental physics, having the same mass and opposite charge to an electron. We may call such a particle an anti-electron. We should not expect to find any of them in nature, on account of their rapid rate of recombination with electrons, but if they could be produced experimentally in high vacuum they would be quite stable and amenable to observation. An encounter between two hard γ -rays (of energy at least half a million volts) could lead to the creation simultaneously of an electron and anti-electron, the probability of occurrence of this process being of the same order of magnitude as that of the collision of the two γ -rays on the assumption that they are spheres of the same size as classical electrons, this probability is negligible, however, with the intensities of γ -rays at present available.

The protons on the above view are quite unconnected with electrons. Presumably the protons will have their own

negative energy states, all of which normally are occupied, an unoccupied one appearing as an anti-proton. Theory at present is quite unable to suggest a reason why there should be any differences between electrons and protons.

The object of the present paper is to put forward a new idea which is in many respects comparable with this one about negative energies. It will be concerned essentially, not with electrons and protons, but with the reason for the existence of a smallest electric charge. This smallest charge is known to exist experimentally and to have the value e given approximately by*

$$hc/e^2 = 137. \quad (1)$$

The theory of this paper, while it looks at first as though it will give a theoretical value for e , is found when worked out to give a connection between the smallest electric charge and the smallest magnetic pole. It shows, in fact, a symmetry between electricity and magnetism quite foreign to current views. It does not, however, force a complete symmetry, analogous to the fact that the symmetry between electrons and protons is not forced when we adopt Oppenheimer's interpretation. Without this symmetry, the ratio on the left-hand side of (1) we insert the experimental value 137
* h means Planck's constant divided by 2π .

remains, from the theoretical standpoint, completely undetermined and if we insert the experimental value 137 in our theory, it introduces quantitative differences between electricity and magnetism so large that one can understand why their qualitative similarity have not been discovered experimentally up to the present.

§ 2. Non-integrable Phases for Wave Functions.

We consider a particle whose motion is represented by a wave function ψ , which is a f_z of x, y, z and t . The precise form of the wave equation and whether it is relativistic or not, are not important for the present theory.

We express ψ in the form

$$\psi = A e^{i\delta}, \quad (2)$$

where A and δ are real f_z of x, y, z and t , denoting the amplitude and phase of the wave function. For a given state of motion of the particle, ψ will be determined except for an arbitrary constant numerical coefficient, which must be of modulus unity if we impose the condition that ψ shall be normalized. The indeterminacy in ψ then consists in the possible addition of an arbitrary constant to the phase δ . Thus the value of δ at a particular point has no physical meaning and only the

180 170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

©2022 THAL, ITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200

difference between the values of δ at two different points is of any importance,

This immediately suggests a generalisation of the formalism. We may assume that δ has no definite value at a particular point, but only a definite difference in values for any two points. We may go further and assume that this difference is not definite unless the two points are neighbouring. For two distant points there will then be a definite phase difference only relative to some curve joining them and different curves will in general give different phase differences. The total change in phase when one goes round a closed curve need not vanish.

Let us examine the conditions necessary for this non-integrability of phase not to give rise to ambiguity in the applications of the theory. If we multiply ψ by its conjugate complex ψ^* we get the density function, which has a direct physical meaning. This density is independent of the phase of the wave ψ , so that no trouble will be caused in this connection by any indeterminacy of phase. There are other more general kinds of applications, however, which must also be considered. If we take two different wave ψ_1 and ψ_2

ψ_m and ψ_n , we may have to make use of the product $\phi_m \psi_n$. The integral

$$\int \phi_m \psi_n dx dy dz$$

is a number, the square of whose modulus has a physical meaning, namely, the probability of agreement of the two states. In order that the integral may have a definite modulus the integrand, although it need not have a definite phase at each point, must have a definite phase difference between any two points, whether neighbouring or not. Thus the change in phase in $\phi_m \psi_n$ round a closed curve must vanish. This requires that the change in phase in ψ_n round a closed curve shall be equal and opposite to that in ϕ_m and hence the same as that in ψ_m . We thus get the general result:— The change in phase of a wave ψ_n round any closed curve must be the same for all the wave ψ_n s.

It can easily be seen that this condition, when extended so as to give the same uncertainty of phase for transformation functions and matrices representing observables (referring to representations in which x, y and z are diagonal) as for wave ψ_n s, is sufficient to insure that the non-integrability of phase gives rise to

no ambiguity in all applications of the theory.
Whenever a ψ_n appears, if it is not multiplied into a ϕ_n it will at any rate be multiplied into something of a similar nature to a ϕ_n , which will result in the uncertainty of phase cancelling out, except for a constant which does not matter. For example, if ψ_n is to be transformed to another representation in which, say, the observables ξ are diagonal, it must be multiplied by the transformation function $(\xi | x y z t)$ and integrated, it must be multiplied with respect to $x, y,$ and z . This transformation function will have the same uncertainty of phase as a ϕ , so that the transformed wave function will have its phase determined, except for a constant independent of ξ . Again, if we multiply ψ_n by a matrix $(x' y' z' t | \alpha | x'' y'' z'' t)$, representing an observable α , the uncertainty in the phase as concerns the column [specified by x'', y'', z'', t] will cancel the uncertainty in ψ_n and the uncertainty as concerns the row will survive and give the necessary uncertainty in the new wave $\psi_n \propto \psi_n$. The superposition principle for wave ψ_n s will be discussed a little later and when this point is settled it will complete the proof that all the

general operations of quantum mechanics can be carried through exactly as though there were no uncertainty in the phase at all.

The above result that the change in phase round a closed curve must be the same for all wave functions means that this change in phase must be something determined by the dynamical system itself (and perhaps also partly by the representation) and must be independent of which state of the system is considered. As our dynamical system is merely a simple particle, it appears that the non-integrability of phase must be connected with the fields of force in which the particle moves.

For the mathematical treatment of the question we express ψ , more generally than (2), as a product

$$\psi = \psi_1 e^{i\phi}, \quad (3)$$

where ψ_1 is any ordinary wave function (i.e., one with a definite phase at each point) whose modulus is everywhere equal to the modulus of ψ . The uncertainty of phase is thus put in the factor $e^{i\phi}$. This requires that ϕ shall not be a function of x, y, z, t having a definite value at each point, but ϕ must have definite derivatives at each point, which does not in general

$$\kappa_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

* satisfy the condition of integrability $\frac{\partial \kappa_x}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_y}{\partial x}$
etc. The change in phase round a closed curve
will now be, by Stokes' theorem,

$$\int (\kappa, dS) = \int (\text{curl } \kappa, dS), \quad (4)$$

where dS (a 4-vector) is an element of arc of
the closed curve and dS (a 6-vector) is an
element of a two-dimensional surface whose
boundary is the closed curve. The factor ψ does
not enter at all into this change in phase.

It now becomes clear that the non-integrability
of phase is quite consistent with the principle of
superposition, or, stated more explicitly, that if
we take two wave functions ψ_m and ψ_n both having
the same change in phase round any closed curve,
any linear combination of them $c_m \psi_m + c_n \psi_n$ must
also have this same change in phase round every
closed curve. This is because ψ_m and ψ_n will both
be expressible in the form (3) with the same factor
 $e^{i\psi}$ (i.e. the same κ 's) but different ψ_i 's, so that
the linear combination will be expressible in this
form with the same $e^{i\psi}$ again, and this $e^{i\psi}$ determines
the change in phase round any closed curve. We may use
the same factor in $e^{i\psi}$ in (3) for dealing with all the

wave ψ_{\pm} of the system, but we are not obliged to do so, since only $\text{curl } \mathbf{K}$ is fixed and we may use x 's differing from one another by α the gradient of a scalar for treating the different wave ψ_{\pm} .

From (3) we obtain

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = e^{i\alpha} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \hbar \kappa_x) \psi_0, \quad (5)$$

with similar relations for the y , z and t derivatives. It follows that if ψ satisfies any wave eq. involving the momentum and energy operators p_0 and W , ψ_0 will satisfy the corresponding wave eq. in which p_0 and W have been replaced by $p_0 + \hbar \kappa_0$ and $W - \hbar \kappa_0$ respectively.

Let us assume that ψ satisfies the usual wave eq. for a free particle in the absence of any field, then ψ_0 will satisfy the usual wave eq. for a particle with charge $-e$ moving in an electromagnetic field whose potentials are

$$A = \hbar c/e \cdot \boldsymbol{\kappa}, \quad A_0 = -\hbar/e \cdot \kappa_0 \quad (6)$$

Thus, since ψ_0 is just an ordinary wave ψ_{\pm} with a definite phase, our theory reverts to the usual one for the motion of an electron in an electromagnetic field. This gives a physical meaning to our non-integrability of phase. We see that we must have the wave ψ_{\pm} always

satisfying the same wave eq., whether there is a field or not, and the whole effect of the field when there is one is in making the phase non-integrable.

The components of the 6-vector curl κ appearing in (4) are, apart from numerical coefficients, equal to the components of the electric and magnetic field \mathbb{E} and \mathbb{H} . They are, written in three dimensional vector-notation,

$$\text{curl } \kappa = \frac{e}{hc} \mathbb{H}, \quad \text{grad } \kappa_0 - \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{e}{hc} \mathbb{E}, \quad (7)$$

The connection between non-integrability of phase and the electromagnetic field given in this section is not new, being essentially just Weyl's Principle of Gauge Invariance in its modern form.* It is also contained in the work of Iwawenko and Fock,† who consider a more general kind of non-integrability based on a general theory of parallel displacement of half-vectors. The present treatment is given in order to emphasise that non-integrable phases are perfectly compatible with all the general principles of quantum mechanics and do not in any way restrict their physical interpretation.

* by these authors does not seem to have any physical application,
* H. Weyl, "Z. Physik", vol 56, p. 330 (1929).
† D. Iwawenko and V. Fock, "C. R.", vol 188, p. 1470 (1929); V. Fock, "ZS", 57, p. 261 (1929). The more general kind of non-integrability considered

§ 3. Nodal Singularities

We have seen in the preceding section how the non-integration^{ble} derivatives κ of the phase of the wave $\psi_{\underline{r}}$ receive a natural interpretation in terms of the potentials of the electromagnetic field, as the result of which our theory becomes mathematically equivalent to the usual one for the motion of an electron in an electromagnetic field and gives us nothing new. There is, however, one further fact ~~when~~ which must now be taken into account, namely, that a phase is always undetermined to the extent of an arbitrary integral multiple of 2π . This requires a re-consideration of the connection between the κ 's and the potentials and leads to a new physical phenomenon.

The condition for an unambiguous physical interpretation of the theory was that the change in phase round a closed curve should be the same for all wave $\psi_{\underline{r}}$. This change was then interpreted, by equations (4) and (7), as equal to (apart from numerical factors) the total flux through the closed curve of the \mathbf{G} -vector \mathbf{H} , \mathbf{H} describing the electromagnetic field. Evidently these conditions must now be relaxed. The change in phase round a closed curve may be different for different wave $\psi_{\underline{r}}$'s by arbitrary multiples of 2π and is thus not sufficiently definite to be interpreted

immediately in terms of the electromagnetic field.

To examine this question, let us consider first a very small closed curve. Now the wave eq. require the wave f_{\pm} to be continuous (except in very special circumstances which can be disregarded here) and hence the change in phase round a small closed curve must be small. Thus this change cannot now be different by multiples of 2π for different wave f_{\pm} . It must have one definite value and may therefore be interpreted without ambiguity in terms of the flux of the 6-vector \mathbf{E}, \mathbf{H} through the small closed curve which flux must also be small.

There is an exceptional case, however, occurring when the wave, f_{\pm} , is complex, its vanishing will require two conditions, so that in general the points at which it vanishes will lie along a line*.

→ vanishes, since then its phase does not have a meaning.
As the wave f_{\pm}

We call such a line a nodal line. Its sign will be associated with a direction along the nodal line.

The difference between the change in phase round the small closed curve and the nearest $2\pi n$ must now be the same as the change in phase round the closed curve for a

wave ψ_2 with no nodal line through it. It is therefore this difference that must be interpreted in terms of the flux of the 6-vector \mathbf{H} , \mathbf{H} through the closed curve. For a closed curve in three-dimensional space, only magnetic flux will come into play and hence we obtain for the change in phase round the small closed curve

$$2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}).$$

We can now treat a large closed curve by dividing it up into a network of small closed curves lying in a surface whose boundary is the large closed curve. The total change in phase round the large closed curve will equal the sum of all the changes round the small closed curves and will therefore be

$$2\pi \sum n + \frac{e}{\hbar c} \cdot \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}). \quad (8)$$

the integration being taken over the surface and the summation over all nodal lines that pass through it, the proper sign being given to each term in the sum. This expression consists of two parts, a part $\frac{e}{\hbar c} \cdot \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S})$ which must be the same for all wave ψ_2 and a part $2\pi \sum n$ which may be different for different wave ψ_2 .

Expression (8) applied to any surface is equal to the change in phase round the boundary of the surface. Hence expression

* We are here considering, for simplicity in explanation, that the wave ψ_2 is in three dimensions. The passage to four dimensions makes no essential change in the theory. The total nodal lines then

(8) applied to a closed curve surface ~~must~~ must vanish. It follows that $\sum n$, summed for all nodal lines crossing a closed surface, must be the same for all wave f_{\pm} s and must equal $-e/hc$ times the total magnetic flux crossing the surface.

If $\sum n$ does not vanish, some nodal lines must have end points inside the closed surface, since a nodal line without such end point must cross the surface twice (at least) and will contribute equal and opposite amounts to $\sum n$ at the two points of crossing. The value of $\sum n$ for the closed surface will thus equal the sum of the values of n for all nodal lines having end points inside the surface. This sum must be the same for all wave f_{\pm} s. Since this result applies to any closed surface, it follows that the end points of nodal lines must be the same for all wave f_{\pm} s. These end points are then points of singularity in the electromagnetic field. The total flux of magnetic field crossing a nodal small closed surface surrounding one of these points is

$$4\pi\mu = 2\pi n hc/e,$$

where n is the characteristic of the nodal line that ends here, or the sum of the characteristics of all nodal lines become two-dimensional nodal surfaces, which can be encircled by curves in the same way as lines are in three dimensions.

ending there when there is more than one. Thus at the end point there will be a magnetic pole of strength
$$\mu = \frac{1}{2} \hbar c / e.$$

Our theory thus allows isolated magnetic poles, but the strength of such poles must be quantised, the quantum μ_0 being connected with the electronic charge e by
$$\hbar c / e \mu_0 = 2, \quad (9)$$

This eq. is to be compared with (1). The theory also requires a quantisation of electric charge, since any charged particle moving in the field of a pole of strength μ_0 must have for its charge some integral multiple (positive or negative) of e , in order that wave fun describing the motion may exist.

§ 4. Electron in Field of One-Quantum Pole.

The wave fun discussed in the preceding section, having nodal lines ending on magnetic poles, are quite proper and amenable to analytic treatment by methods used to the usual one of quantum mechanics. It will perhaps help the reader to realise this if a simple example is discussed more explicitly.

Let us consider the motion of an electron in the magnetic field of a one-quantum pole when there is no electric field present. We take polar coordinates r, θ, ϕ with the magnetic

pole as origin. Every wave $f_{\frac{1}{2}}$ must now have a nodal line radiating out from the origin.

We express our wave $f_{\frac{1}{2}}$ ψ in the form (3), where β is now some non-integrable phase having derivatives κ that are connected with the known el-mg. field by eq. (6). It will not, however, be possible to obtain κ 's satisfying these eq. all round the magnetic pole. There must be some singular line radiating out from the pole along which these eq. are not satisfied, but this line may be chosen arbitrarily. We may choose it to be the same as the nodal line for the wave $f_{\frac{1}{2}}$ under consideration, which would result in ψ being continuous. This choice however, would mean different κ 's for different wave $f_{\frac{1}{2}}$'s (the difference between any two being, of course, the four-dimensional gradient of a scalar, except on the singular lines). This would perhaps be inconvenient and is not really necessary. We may also express all our wave $f_{\frac{1}{2}}$'s whose nodal lines do not coincide with the singular line, namely, a discontinuity just cancelling with the discontinuity in $e^{i\beta}$ here to give a continuous product.

The magnetic field H , lies along the radial direction and is of magnitude μ_0/v^2 , which by (9) equals $\frac{1}{2}hc/er^2$.

Hence, from eq. (7), curl κ is radial and of magnitude $\frac{1}{2}r^2$. It may be now easily verified that a solution of the whole of eq. (8) is

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa_r = \kappa_\theta = 0, \quad \kappa_\phi = \frac{1}{2}r \cdot \tan \frac{1}{2}\theta, \quad (10)$$

where $\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_\phi$ are the components of κ referred to the polar co-ordinates. This solution is valid at all points except along the line $\theta = \pi$, where κ_ϕ becomes infinite in such a way that $\int (\kappa, dS)$ round a small curve encircling this line is 2π . We may refer all our wave functions to this set of κ 's.

Let us consider a stationary state of the electron with energy W . Written non-relativistically, the wave eq. is

$$-\hbar^2/2m \nabla^2 \psi = W \psi.$$

If we apply the rule expressed by eq. (5), we get as the wave eq. for ψ ,

$$(11) \quad -\hbar^2/2m \{ \nabla^2 + i(\kappa, \nabla) + i(\nabla, \kappa) - \kappa^2 \} \psi = W \psi.$$

The values (10) for the κ 's give

$$(\kappa, \nabla) = (\nabla, \kappa) = \kappa_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{4r^2} \sec^2 \frac{1}{2}\theta \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\kappa^2 = \kappa_\phi^2 = \frac{1}{4r^2} \tan^2 \frac{1}{2}\theta,$$

so that eqs (11) becomes

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla^2 + \frac{1}{2r^2} \sec^2 \frac{1}{2}\theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{4r^2} \tan^2 \frac{1}{2}\theta \right\} \psi = W \psi.$$

We now suppose ψ_1 to be of the form of a f_{\pm} f of r only multiplied by a $f_{\pm} S$ of θ and ϕ only, i.e.,

$$\psi_1 = f(r) S(\theta, \phi).$$

This requires
$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} \right\} f = -\frac{2mW}{\hbar^2} f, \quad (12)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{1}{2} \theta \right\} S = -\lambda S, \quad (13)$$

where λ is a number.

From eq. (12) it is evident that there can be no stable states for which the electron is bound to the magnetic pole, because the operator on the left hand side contains no constant with the dimension of a length. This result is what one would expect from analogy with the classical theory. Eq. (13) determine the dependence of the wave f_{\pm} on angle. It may be considered as a generalisation of the ordinary eq. for spheroidal harmonics.

The lowest eigenvalue of (13) is $\lambda = \frac{1}{2}$, corresponding to which there are two independent wave f_{\pm} s

$$S_a = \cos \frac{1}{2} \theta, \quad S_b = \sin \frac{1}{2} \theta e^{i\phi},$$

as may easily be verified by direct substitution. The nodal line for S_a is $\theta = \pi$, that for S_b is $\theta = 0$. It should be observed that S_a is continuous everywhere,

while S_b is discontinuous for $\theta = \pi$, its phase changing by 2π when one goes round a small curve encircling the line $\theta = \pi$. This is just what is necessary in order that both S_a and S_b , when multiplied by the $e^{i\psi}$ factor, may give continuous wave functions ψ . The two ψ 's that we get in this way are both on the same footing and the difference in behaviour of S_a and S_b is due to our having chosen K 's with a singularity at $\theta = \pi$.

The general eigenvalue of (13) is $\lambda = n^2 + 2n + \frac{1}{2}$. The general solution of this wave eq. has been worked out by I. Tamur^{*}

§ 5. Conclusion.

Elementary classical theory allows us to formulate eq. of motion for an electron in the field produced by an arbitrary distribution of electric charges and magnetic poles. If we wish to put the eq. of motion in the Hamiltonian form, however, we have to introduce the electromagnetic potentials, and this is possible only when there are no isolated magnetic poles. Quantum mechanics, as it is usually established, is derived from the Hamiltonian form of the classical theory and therefore is applicable only when there are no isolated magnetic poles.

The object of the present paper is to show that q. m.
^{*} Appearing probably in 'Z. Physik'

does not really preclude the existence of ex isolated magnetic poles. On the contrary, the present formalism of $q.m.$, when developed naturally without the imposition of arbitrary restrictions, leads inevitably to wave eqs, whose only physical interpretation is the motion of an electron in the field of a single pole. This new development requires no change whatever in the formalism when expressed in terms of abstract symbols denoting states and observables, but is merely a generalisation of the possibility of representation of these abstract symbols by wave fns and matrices. Under these circumstances one would be surprised if Nature had made no use of it.

The theory leads to a connection, namely, eq. (9), between the quantum of magnitude of pole and the electronic charge. It is rather disappointing to find this reciprocity between electricity and magnetism, instead of a purely electronic quantum condition, such as (1). However, there appears to be no presumably possibility of modifying the theory, as it contains no arbitrary features, so presumably the explanation of (1) will require some entirely new idea.

The theoretical reciprocity between electricity and

magnetism is perfect. Instead of discussing the motion of an electron in the field of a fixed magnetic pole, as we did in §4, we could eq. well consider the motion of a pole in the field of fixed charge. This would require the introduction of the electromagnetic potentials \mathbb{B} satisfying

$$\vec{E} = \text{curl } \mathbb{B}, \quad H = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \text{grad } \mathbb{B}_0,$$

to be used instead of the A 's in eqs (6). The theory would now run quite parallel and would lead to the same condition (9) connecting the smallest pole with the smallest charge.

There remains to be discussed the question of why isolated magnetic poles are not observed. The experimental result (1) shows that there must be some cause of dissimilarity between electricity and magnetism (possibly connected with the cause of dissimilarity between electrons and protons) as the result of which we have, not $\mu_0 = e$, but $\mu_0 = 137/2 \cdot e$. This means that the attractive force between two one-quantum poles of opposite sign is $(137/2)^2 = 4692 \frac{1}{4}$ times that between electron and proton. This very large force may perhaps account for why poles of opposite sign have never yet been separated.

Relativistic Quantum Mechanics.

By P. A. M. Dirac

Proc. Roy. Soc. 136, 453

§1. Introduction

The steady development of the quantum theory that has taken place during the present century was made possible only by continual reference to the Correspondence Principle of Bohr, according to which, classical theory can give valuable information about quantum phenomena in spite of the essential difference in the fundamental ideas of the two theories. A masterful advance was made by Heisenberg in 1925, who showed how equations of classical physics could be taken over in a formal way and made to apply to quantities of importance in q. theory, thereby establishing the Cor. Prin. on a quantitative basis and laying the foundations of the new Q. Mech. Heisenberg's scheme was found to fit wonderfully well with the Hamiltonian theory of classical mechanics and enabled one to apply to quantum theory all the information that classical theory supplies, in so far as this information is consistent with the Hamiltonian form. Thus one was able to build up a satisfactory q. mech. for dealing with any dynamical system composed of interacting particles, provided the interaction could be expressed by means of an energy term to be added to the Hamiltonian function.

This does not exhaust the sphere of usefulness of the classical theory. Classical electrodynamics, in its accurate (restricted) relativistic form, teaches us that the idea of an interaction energy between particles is only an approximation and should be replaced by the idea of each particle emitting waves, which travel outward with a finite velocity and influence the other particles in passing over them. We must find a way of taking over this new information into the quantum theory and must set up a relativistic q. mech., before we can dispense with the Cor. Prin.

A preliminary attack on the question of rel. q. mech. has been made through the solution of the problem of a single charge particle moving in a specified classical field. For the treatment of this problem it is essential to use Schrödinger's form of q. mech., according to which the motion of the particle is described by a wave ψ involving the space and time coord. in a symmetrical manner. The solution is satisfactory from the point of view of Cor. Prin., although it involves a difficulty owing to the appearance of possible negative energy values for

the particle. The difficulty is not due to a misuse of classical information and will not concern us here.

The extension of this wave-fun method to two or more particles can easily be made so long as we keep to the idea of a given classical field in which the particles are moving. The resulting theory is logically satisfactory, but is, of course, incomplete, as it gives no interaction between the particles. It becomes necessary then to abandon the idea of a given classical field and to have instead a field which is of dynamical significance and acts in accordance with quantum laws.

An attempt at a comprehensive theory on these lines has been made by Heisenberg and Pauli.* These authors regard the field itself as a dynamical system amenable to Hamiltonian treatment and its interaction with the particles as described by an interaction energy, so that the usual methods of Hamiltonian q. mech. may be applied. There are serious objections to these theory views, apart from the purely math. difficulties to which they lead. If we wish to make an observation on a system of interacting particles, the only effective method of

procedure is to subject them to a field of el. mag. radiation and see how they react. Thus the role of the field is to provide a means for making observations. The very nature of an observation requires an interplay between the field and particles. We cannot therefore suppose the field to be a dynamical system on the same footing as the particles and thus something to be observed in the same way as the particles. The field should appear in the theory as something more elementary and fundamental.

Again, the field equations are always linear and thus of the form typical of the g -wave equation of g -theory. This suggests deep-lying connections and possibilities for simplification and unification which are entirely lacking in the H.P. theory.

In the present paper a scheme is proposed which gives the interplay between particles and fields apparently correctly and in a surprisingly simple manner. Full use is made of all the information supplied by the classical theory. The general ideas are applicable with any kind of simple harmonic wave transmitting the interaction between particles and providing the means

2.5. 56, 59.

of observation of particles (e.g. with longitudinal waves like sound waves) and not merely for the cl. mg. case, though presumably only the latter is of interest in atomic theory.

§ 2. Relativistic Observations.

A definite advance in the relativistic theory of the interaction of two electrons is contained in a recent paper by Möller*, where it is shown that in the calculation of the ~~retarded~~ mutual scattering of two colliding electrons by Born's method of approximation, one may describe the interaction with retarded potentials and use relativistic ideas throughout, without getting any ambiguity in the scattering coefficient to the first order of approx. This lack of ambiguity is ground of presumption of the correctness of the result. When, however, one tries to apply similar methods to the higher approx. or to more general problems, one meets very definitely with ambiguities.

The method by which Möller obtained his result may be compared with the methods of the Cor. Prin. in use before the introduction of Heisenberg's matrix

* Z. Phys. 70 p. 786

theory, for calculating Einstein's A and B coef. from classical models. In certain cases the result obtained was ~~was~~ unambiguous (usually those cases for which the result was zero) and was then presumed to be correct. In general, however, there was ambiguity, so that one could get no reliable accurate result.

This analogy suggests that it would be useless to try to extend Möller's method by setting up rules to provide a definite interpretation for ambiguous quantities. Any attempts in this direction would be just as futile as the attempts made in the pre-Heisenberg epoch to calculate Einstein's A 's and B 's from some sort of mean of classical quantities referring to the initial and final states. One ought to proceed on quite different lines namely by following the methods introduced by Heisenberg in 1925, which have already met with such great success for non-relativistic q . mech.

Heisenberg put forward the principle that one should confine one's attention to observable quantities, and set up an algebraic scheme in which only these observable quantities appear. Strictly speaking, it is not the observable quantities themselves (the Einstein A 's

and B 's) that formed the building stones of Heisenberg's algebraic scheme, but rather certain more elementary quantities, the matrix elements, having the observable quantities as the squares of their moduli. The extra phase quantities introduced in this way are essential.

Let us see what are the corresponding quantities in relat. theory. To make a relativistic observation on a system of particles we must, as mentioned in the introduction, send in some incident electromagnetic radiation and examine the scattered radiation. The numerical quantity that we observe is thus the probability of occurrence of a certain radiative transition process. This process may be specified by the intensities of the various monochromatic components of the ingoing and of outgoing fields of radiation. (We shall ignore the purely math. difficulty that the total number of these components is an infinity of a high order.) The phases must not be specified together with the intensities, as this would violate well-established quantum principles.



In non-relativistic q. mech. the probability of occurrence of any transition process is always given

as the square of the modulus of a certain quantity, of the nature of a matrix element or simply a transformation $f_{\alpha\beta}$, referring to the initial and final states. It appears reasonable to assume that this will still be the case in rel. q. mech. Thus the rel. observable quantities, which are always transition probabilities, will all appear as the square of the moduli of certain quantities. These quantities, which we shall refer to as probability amplitudes, will then be the building stones analogous to Heisenberg's matrix elements. We should expect to be able to set up an algebraic scheme involving only the prob. amplitudes and to translate the equations of motion of relativistic classical theory directly into exact equations expressible entirely in terms of these quantities.

The information that classical theory supplies is thus to be used to give relations between the probability amplitudes of different physical processes, rather than to calculate a particular one of them. Only in very special cases, of which Møller's paper provides an example, is it possible to evaluate a relativistic transition prob. without

at the same time evaluating a whole series of them, referring to all the possible ways in which the particles under consideration can restrict react with the action radiation field.

A point of special importance about the building stones of the new theory is that each of them refer to one field of ingoing wave and one field of outgoing waves, or to one initial field of a transition process and one final field. Quantities referring to two initial fields, or to two final fields, are not allowed. This shows a departure from the theory of H.P. according to which, if one is given any quantity referring to one initial field and one final field, one can obtain from it a quantity referring to two initial fields, or to two final fields, by a straight forward application of the transformation theory of q. mech. The H.P. theory thus involves many quantities which are unconnected with results of observations and which must be removed from consideration if one is to obtain a clear insight into the underlying physical relations.

§ 3. Equation of Motion.

We shall now consider in detail the question of how the information contained in classical el. dyn. can be taken over into ^{the} quantum theory. We meet at once with difficulty that the classical theory itself is not free from ambiguity.

To make the discussion precise, let us suppose we have a single electron interacting with a field of radiation and consider the radiation resolved into ingoing and outgoing waves. The classical problem is, given the ingoing radiation and suitable initial conditions for the electron, determine the motion of the electron and the outgoing radiation. The classical eq. which deal with this problem are of two kinds, (i) those that determine the field produced by the electron (which field is just the difference of the ingoing and outgoing fields) in terms of the variables describing the motion of the electron, and (ii) those that determine the motion of the electron. Eq. (i) are quite definite and unambiguous, but not so eq. (ii). The latter express the acceleration of the electron in terms of field quantities \vec{E} and \vec{H} at the point where the electron is situated and these field quantities in the complete classical picture are infinite and undefined.

In the usual approximate treatment of the problem one takes for these field quantities just the contributions of the ingoing waves. This treatment is necessarily only approximate, since it does not take into account the reaction on the electron of the waves it emits. We should expect in an accurate treatment, that the field determining the acceleration of the electron would be in some way associated with both the ingoing and outgoing waves. Classical attempts have been made to improve the theory by assuming a definite structure for the electron and calculating the effect on one part of it of the field produced by the rest, but such methods are not permissible in modern physics.

We must recognise at this point that we have reached the limit of classical electromagnetic theory. We have quite definite eq. for determining the motion of the electron in terms of field quantities, but we cannot interpret these field quantities in the usual classical picture and the most we can say about them is that they are related in some non-classical way to two fields, namely, those of the ingoing and the outgoing waves. Further advance can be made

only by introducing quantum ideas.

Let us make the assumption that the passage from the field of ingoing waves to the field of outgoing waves is just a quantum jump performed by one field. This assumption is permissible on account of the fact, discussed in the preceding section, that all the quantities in relativistic q. mech. are of the nature of prob. amplitudes referring to one ingoing field and one outgoing field, so that we may associate, say, the right hand sides of the Prob. Amp. with ingoing fields and the left hand sides with outgoing wave fields. In this way we automatically exclude quantities referring to two ingoing fields or to two outgoing fields and make a great simplification in the foundation of the theory.

The significance of the new assumption lies in the fact that the classical picture from which we derive our equations of motion must contain no reference to quantum jumps. This classical picture must therefore involve just one field, a field composed of waves passing undisturbed through the electron and satisfying everywhere Maxwell's equation for empty space. With this picture of the eq. of motion

for the electron are perfectly definite and unambiguous, there are no equations of motion for the field, as the field throughout space-time is pictured as given. Thus the interaction between electron and field is introduced into the eq. in only one place.

The quantisation of the eq. of motion derived from this picture may conveniently be carried out in two stages. Let us first quantise only the variables describing the electron. We then get just the usual quantum theory of the motion of an electron in a given classical field, with the difference that in the present case the field must necessarily be resolved into plane waves and must therefore contain nothing of the nature of a Coulomb force. We have a Schrödinger eq. of the form

$$\bar{H}\psi = 0,$$

where the operator \bar{H} is, neglecting spin

$$\bar{H} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right)^2 - \left(i\hbar c \frac{\partial}{\partial x} - eA_x \right)^2 - \dots - m^2 c^4. \quad (1)$$

It should be remembered that the wave-fun \bar{H} ψ involves not only the variables x, y, z, t describing the electron, but also a large number of parameters describing the field, which parameters may conveniently be taken to

©2022 IMAL, IHP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

wave eq. $\nabla^2 \psi = J, w$ 277221/2
279 Statistical term $\psi \psi^*$

2-2

be the intensities J and phases w of the various Fourier components of the field. The potentials A occurring in F are likewise functions, not only of the variables x, y, z, t describing the momentary position of the electron, but also of the parameters J and w .

In the second stage of the quantisation we assume that the J 's and w 's occurring in ψ and the A 's are not numerical, but are operators satisfying the usual quantum conditions governing the intensities and phases of the Fourier components of the el. mag. field in empty space. The new wave eq. obtained in this way is to be treated on the same lines as the previous one. In particular, it may be used to determine matrix elements associated with electron jumps. Each such matrix element will now be a f_{α} of the non-commuting J 's and w 's, so that, when we take a representation of the J 's and w 's, it becomes a set of quantities, each referring to two states of the field as well as the two electronic states, and thus being of the nature of the probability amplitudes of § 2.

For the problem of two electrons, we require a wave-function ψ which is a f_{α} of the variables x_1, y_1, z_1, t_1

Handwritten notes in Japanese, possibly a calendar or list of dates, including characters like 中, 下, 非, 凡, 12, 13, 14, 15.

and x_1, y_1, z_1, t_1 describing the two electrons and of one set of J 's and w 's describing one field. This ψ must satisfy the two wave eq.

$$T_1 \psi = 0, \quad T_2 \psi = 0, \quad (2)$$

where T_1 is the operator obtained from T by substituting $\frac{\partial}{\partial t_1}$, etc., for $\frac{\partial}{\partial t}$, etc and taking for the A 's their values at the point x_1, y_1, z_1, t_1 and similarly for T_2 . These two wave eq. describe completely the relations between the two electrons and the field. No terms of the type of a Coulomb interaction energy are ~~or~~ required in the operator of the wave eq. The interaction of the two electrons is due to the motions of both being connected with the same field. The interaction manifests itself mathematically through the fact that, if we take a wave ψ_1 , a ψ_1 only of x_1, y_1, z_1, t_1 and the J 's and w 's, satisfying

$$T_1 \psi_1 = 0, \quad (3A)$$

and a second wave- ψ_2 , a ψ_2 only of x_2, y_2, z_2, t_2 and the J 's and w 's, satisfying

$$T_2 \psi_2 = 0, \quad (3B)$$

then neither of the products $\psi_1 \psi_2$ and $\psi_2 \psi_1$ will satisfy both the wave eq. (2) The solution of

equations (2) is an essentially different and more complicated problem than the solution of (3A) and (3B).

§ 4: Interaction between two Particles in one Dimension.

It may seem rather surprising that a theory in which all the fields are resolvable into plane waves can give anything of the nature of the usual electrostatic forces between electrons. We shall therefore illustrate by a simple example the fact that these forces really are contained in our wave eq. We shall take the case of two particles moving in a field in one-dimensional space and shall proceed to solve eq. (2), making various approximations that are permissible when we are not interested in relativistic effects.

Suppose the field to be describable by a potential ~~fun~~ V satisfying the wave eq.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

and the classical expression for the energy to be

$$H = \frac{1}{2a} \int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right\} dx$$

If we resolve V into its Fourier components, thus

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \{ a_{\nu} e^{i\nu(t+x/c)} + b_{\nu} e^{i\nu(t-x/c)} \} d\nu, \quad (4)$$

the expression for the energy will go over into

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \nu^2 \{ a_{\nu} a_{\nu} + b_{\nu} b_{\nu} \} d\nu$$

Let us now see what are the Poisson bracket relations between the Fourier coef. a and b . These relations must be chosen such that the quantities $a_{\nu} e^{i\nu t}$, $b_{\nu} e^{i\nu t}$, considered as dynamical variables, satisfying eq. of motion of the Hamiltonian form with the Hamiltonian $H_{\nu}(t)$, thus

$$\frac{d}{dt} (a_{\nu} e^{i\nu t}) = [a_{\nu} e^{i\nu t}, H]$$

$$i\nu a_{\nu} = [a_{\nu}, H],$$

and similarly for b_{ν} . It is easily verified that we must have

$$[a_{\nu}, a_{\nu'}] = [b_{\nu}, b_{\nu'}] = i c_{\nu} \delta(\nu + \nu')$$

$$[a_{\nu}, b_{\nu'}] = 0.$$

In the q. th. these relations become

$$a_{\nu} a_{\nu'} - a_{\nu'} a_{\nu} = b_{\nu} b_{\nu'} - b_{\nu'} b_{\nu} = -\hbar c_{\nu} \delta(\nu + \nu') \gamma(\nu)$$

$$a_{\nu} b_{\nu'} - b_{\nu'} a_{\nu} = 0$$

We now introduce two particles, of masses m , and

m_2 and "charges" e_1 and e_2 , and suppose the interaction of each with the field can be described by an interaction energy equal to its charge multiplied by the value of V at the point where it is situated.

Thus, if we neglect the relativistic variation of mass with velocity, we have the two wave eq.

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\hbar^2}{m_1} \nabla_1^2 - e_1 V(x, t_1) \right\} \psi_1 = 0,$$

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 - e_2 V(x, t_2) \right\} \psi_2 = 0.$$

By putting $t_1 = t_2 = t$, we can reduce these to the one wave eq.

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{m_2} \nabla_2^2 - e_1 V(x, t) - e_2 V(x, t) \right\} \psi = 0. \quad (7)$$

We shall proceed to obtain a solution of this eq. in the form of a power series in e 's. Thus put

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

where

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{m_2} \nabla_2^2 \right\} \psi_0 = 0 \quad (8)$$

$$\left\{ \dots \right\} \psi_1 = \{ e_1 V(x, t) + e_2 V(x, t) \} \psi_0$$

$$\left\{ \dots \right\} \psi_2 = \dots \psi_1$$

We take as the solution of (8)

$$\psi_0 = e^{i p_1 x_1 / \hbar} e^{i p_2 x_2 / \hbar} e^{-i W t / \hbar} \delta_{J_0},$$

where

$$W = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad (11)$$

representing a state for which the particles have the momenta p_1 and p_2 , and all the J 's, i.e. the intensities of the Fourier components of the field, vanish. Now the operator $\epsilon \cdot V(x, t) + \epsilon_2 V(x, t)$ occurring on the right-hand sides of (9) and (10), if expressed as a matrix in a representation in which the J 's are diagonal, would contain only matrix elements referring to transitions in which just one of the J 's change by one quantum. It follows that ψ_0 must consist of a sum of terms each referring to a state of the field in which just one oscillation is excited by one quantum. Similarly ψ_2 must consist of a sum of terms each referring either to a two-quantum or to a zero-quantum state of the field. The latter are the ones that interest us here, as they may be composed with the terms that would arise from (9) the insertion of an interaction energy between (10) the two particles into the operator of the wave eq. (7),

We can obtain the solution of equation (6) by

expanding the right-hand side in terms of its Fourier
 component by means of (4) and dividing each
 component by the number to which the operator on
 the left-hand side of (9) is equivalent when it
 operates on that component. This gives

$$\psi_1 = \epsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu e^{i\nu(t+x/c)}}{W - h\nu - (p_1 + h\nu/c)^2/2m_1 - p_1^2/2m_2} + \frac{b_\nu e^{i\nu(t-x/c)}}{W - h\nu - (p_1 - h\nu/c)^2/2m_1 - p_1^2/2m_2} \right\} d\nu \cdot \psi_0$$

$$+ \epsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu e^{i\nu(t+x/c)}}{W - h\nu - p_1^2/2m_1 - (p_2 + h\nu/c)^2/2m_2} + \frac{b_\nu e^{i\nu(t-x/c)}}{W - h\nu - p_1^2/2m_1 - (p_2 - h\nu/c)^2/2m_2} \right\} d\nu \cdot \psi_0$$

If we use (11) and also neglect terms like p_1/m_1c ,
 $h\nu/m_1c^2$ compared with unity, as is permissible when
 we are not interested in relativistic effects, this
 reduces to

$$\psi_1 = -\frac{\epsilon_1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a_\nu e^{i\nu(t+x/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x/c)} \right\} \frac{d\nu}{\nu} \psi_0$$

$$- \frac{\epsilon_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a_\nu e^{i\nu(t+x/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x/c)} \right\} \frac{d\nu}{\nu} \psi_0$$

When we substitute this value for ψ_0 in the right hand side of (40) and also substitute for v its expansion given by (41), we obtain an expression consisting of an operator, which is a homogeneous quadratic form of the a 's and b 's, operating on ψ_0 . We must evaluate that particular part of the expression that refer to the ~~un~~ excited state of the field. Only those terms of the operator involving products like $a_{\nu} a_{-\nu}$ or $b_{\nu} b_{-\nu}$ will contribute anything to that part. To obtain the contribution of a term involving $a_{\nu} a_{-\nu}$, we observe that, for $\nu > 0$, a_{ν} and $a_{-\nu}$ are like the quantities $p + iq$ and $p - iq$ respectively in the problem of the simple harmonic oscillator. Thus $a_{\nu} a_{-\nu}$, with $\nu > 0$, is proportional to twice the energy of the corresponding oscillation (without zero-point energy) so that it gives no contribution when multiplied into ψ_0 . The first of the quantum condition (6) now shows that, to get the contribution from a term involving $a_{-\nu} a_{\nu}$, with $\nu > 0$, we must count $a_{-\nu} a_{\nu}$ as equal to $\hbar c / \nu \cdot \delta(\nu - \nu')$. In the same way we find that we must count $b_{\nu} b_{-\nu} = 0$ and $b_{-\nu} b_{\nu} = \hbar c / \nu \cdot \delta(\nu - \nu')$ with $\nu > 0$.

ψ_0 } (12) The term on the right hand side of (16) arising from the product of $e^{iV(x,t)}$ with the first of the

Terms for ψ_0 in (12) may be written

$$-\frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \left\{ a_{v'} e^{-iv'(t+x_2/c)} + b_{-v'} e^{-iv'(t-x_1/c)} \right\}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v} \left\{ a_v e^{iv(t+x_1/c)} + b_v e^{iv(t-x_1/c)} \right\} \psi_0$$

Other part of it referring to the unexcited state of the field is, by the foregoing rules

$$-\frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \left\{ \frac{dv}{v} \frac{hc}{v} \delta(v-v') \right\} e^{-iv'(t+x_2/c)} e^{iv(t+x_1/c)}$$

$$+ e^{-iv'(t-x_1/c)} e^{iv(t-x_1/c)} \psi_0$$

$$= -2\pi\epsilon_1\epsilon_2 c \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^2} \cos v(x_1-x_2)/c \cdot \psi_0$$

The coef. of ψ_0 here differs only by an infinitely great constant (independent of x_1, x_2) from

$$2\pi\epsilon_1\epsilon_2 c \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left\{ 1 - \cos v(x_1-x_2)/c \right\} = \pi\epsilon_1\epsilon_2 |x_1-x_2|$$

The other term on the right hand side of (10) may be dealt with in the same way and give for the complete part referring to the unexcited state of the field

$$\left\{ 2\pi\epsilon_1\epsilon_2 |x_1-x_2| + K \right\} \psi_0, \quad (13)$$

where K is an infinite constant.

Dirac (2) ...
 Unbestimmtheit ...
 ... Zustand ...
 ... formuliert ...

Eq. (10) with expression (13) on its right-hand side is just what we should get if we were solving the wave equation

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - e_1 e_2 / |x_1 - x_2| \right) \psi = 0$$

$$-K \psi = 0$$

by a method of approximation through expansion in powers of $e_1 e_2$. Thus our wave eq. (17) contains implicitly an interaction between the particles, expressible approximately by the interaction energy $e_1 e_2 / |x_1 - x_2|$. This interaction energy agrees numerically with what we should expect from a one dimensional electrostatic theory. This is, however, a mistake in sign, as it gives an attractive force between like charges.

[Note Added, April 20th. - It has been pointed out to me by Prof. Heisenberg that the sign of the interaction energy given by the above calculation is really quite correct, since with the one-dimensional longitudinal wave there used the classical theory also requires an attractive force between like charges.]

... wave eq ...
 superposition ...
 ...

Ortmessung eines Elektrons durch ein Mikroskop
Weizsäcker S. 114, 25. 20, 1931

I. Anschauliche Betrachtungen. Vom Standpunkt der klassischen Wellentheorie des Lichtes läßt sich der physikalische Vorgang bei der Abbildung eines Elektrons durch ein Mikroskop folgendermaßen beschreiben: Auf das Elektron, dessen Ort bestimmt werden soll, fällt Licht etwa in Form einer ebene Welle, und wird irgendwo, sagen wir im Punkt P , an ihm gestreut (Fig. I). Ein Teil der dabei entstehenden Kugelwelle durchsetzt die Objektivlinse des Mikroskops und wird durch sie in einem bestimmten Punkte P' , dem Bildpunkt von P , wieder vereinigt. Wenn man die Lage von P' irgendwie feststellt, kann man daraus nach den Gesetzen der Optik die Lage von P berechnen, d. h. den Ort des Elektrons bestimmen.

In der Q.T. wird der Sachverhalt anschaulich wesentlich komplizierter, da wir hier auch die korpuskularen Eigenschaften des Lichtes berücksichtigen müssen.

Wir betrachten den einfachsten und interessantesten Fall, daß nur ein einziges Lichtquant am dem Elektron gestreut wird und durch die Linse

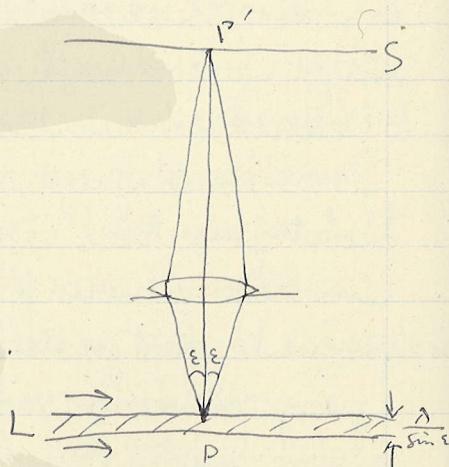
geht. Wieweit die Annahme, dieses Experiment sei nach der Q. T. zur Ortsmessung geeignet, gerechtfertigt ist, soll im zweiten Teil dieser Arbeit durch eine Q. E. D. sche Rechnung gezeigt werden; obwohl man nämlich korrespondenzmäßig erwarten muß, daß eine Abbildung durch ein einzelnes Lichtquant genau so möglich sein muß wie durch viele, so ist doch die anschauliche Diskussion des Experiments nicht völlig trivial.

Zunächst folgt aus der Benützung eines einzelnen Lichtquants eine einschränkende Bedingung: Um die Anknüpfung des Lichtquants im Bildpunkt festzustellen — von einer „Wiedervereinigung eines Strahlenbündels“ kann man hier nicht gut sprechen —, muß es durch eine photographische Platte oder einen Szintillations-
schirm absorbiert werden, der sich genau in der Bildebene befindet, in der Bildpunkt liegt. D. h., da der Schirm von vornherein festgelegt ist, muß sich das Elektron von Anfang an mit hinreichender Genauigkeit in einer bestimmten Ebene befinden, wenn man ein „scharfes Bild“ erhalten, d. h. aus der Lage

von P des Punktes P' in dem das Lichtquant absorbiert wurde, mit Recht auf die Lage von P schließen will. Da nach der Formel für die Abbildungsungenauigkeit

$$d = \frac{\lambda}{\sin \epsilon} \quad (1)$$

λ : Wellenlänge des Lichtes,
 ϵ = Öffnungswinkel des zur Abbildung verwendeten Strahlbündels) die Ortsungenauigkeit ohnehin nicht kleiner als $\lambda / \sin \epsilon$ werden kann, wird man fordern, daß nach der Streifen, innerhalb dessen sich das Elektron ursprünglich befindet, die Breite $\lambda / \sin \epsilon$ haben soll.



Auch unter diesen Bedingungen besteht noch eine Schwierigkeit. Nehmen wir einmal den ursprüngliche Impuls sowohl des Lichtquants wie des Elektrons als genau bekannt an (daß das nicht streng erlaubt ist, wird sich für

unseren Fall als unwesentlich herausstellen).
Ferner kann man zweitens den Impuls
des Elektrons nach dem Stoss beliebig genau
messen. Daraus läßt sich dann aber auch
genau berechnen, in welcher Richtung
das Lichtquant weitergeflogen ist. Das heißt
in der Sprache der Wellentheorie: der Öffnungswinkel
des gestrauten Lichtbündels wird un-
endlich klein und daher nach (1) die Breite
des Beugungsbildes in P' streng genommen un-
endlich groß; d. h. das „Bild“ ist völlig
gewachsen schein, von Ortsbestimmung kann keine
Rede mehr sein.

Über den Bau der Atomkerne. II.

Von N. Heisenberg

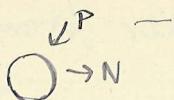
1932
Z.S.f. Physik 78. 5156,

Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist, festzustellen, inwieweit man die fundamentalen Schwierigkeiten in der Theorie des Atomkerns reduzieren kann auf die Frage nach der Existenz und nach den Eigenschaften des Neutrons. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde insbesondere die Stabilität der Kerne gegenüber dem Zerfall durch α - und β -Strahlen unter diesem Gesichtspunkt diskutiert. Die Gesetzmäßigkeiten, die sich dort als maßgebend für die Struktur der radioaktiven Zerfallsreihen erwiesen, sollen in folgenden auch auf die leichteren, nicht radioaktiven Atomkerne angewendet werden und ermöglichen hier die Deutung einiger bekannter empirischer Regeln über die Systematik der Atomkerne, die zuerst von Beck¹⁾ angegeben wurden.

§ 1. Stabilität der Kerne. Nach den Untersuchungen von Teil I²⁾ kann ein Kern dann unter Ausstrahlung

¹⁾ G. Beck, Z.S.f. Phys. 47, 407, 1928; 50, 548, 1928.

²⁾ In Teil I sind leider die Atomgewichte der Actinierreihe nach Gamovs Buch () um vier Einheiten zu hoch angegeben worden. Die betreffende Tabelle lautet nach Rutherford, Chadwick und Ellis () richtig:



von β -Strahlen zerfallen, wenn durch Zufügung eines Protons zum Kern mehr Energie gewonnen wird, als zum Entfernen eines Neutrons aus dem so entstehenden Kern aufgewendet werden muß. Um die Stabilität der Kerne gegenüber β -Zerfall leicht zu überschauen, ist es daher am zweckmäßigsten, bei gegebener Gesamtmasse der Kerne ($n = n_1 + n_2$, n_1 Neutronenanzahl, n_2 Protonenanzahl) die Energie des tiefsten Zustandes als Funktion etwa von n_1 aufzutragen. Wenn durch einen Schritt von n_1 nach $n_1 - 1$ die Energie erniedrigt werden kann, so ist der betreffende Kern β -labil, sonst ist er gegenüber β -Zerfall stabil. Wird das Verhältnis n_1/n_2 zu klein,

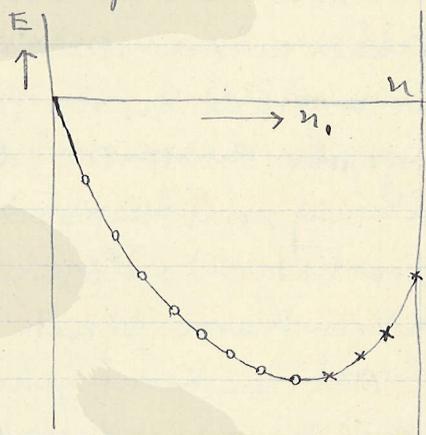
Element	n_2	n_1	n_1/n_2
Pa	91	140	1,539
α Ac	89	138	<u>1,551</u>
β RaAc	90	137	1,522
α AcX	88	135	1,535
α AcEm	86	133	1,547
α AcA	84	131	1,560
β AcB	82	129	<u>1,574</u>
β AcC	83	128	<u>1,542</u>
β AcC'	84	127	1,512
α AcD	82	125	1,524

so wird der Kern durch Aussenden von α -Strahlen zerfallen.

In erster Näherung wird die Kurve, welche bei gegebener Masse n die Energie E als Funktion von n_1 darstellt, folgendermaßen aussehen haben (Fig. 1):

Für $n_1 = 0$ verschwindet E , da die Protonen sich gegenseitig abstoßen, und da eine Bindung deswegen nicht zustande kommt. Die Energie sinkt dann mit

zunehmendem n_1 zu einem Minimum, das etwas rechts von $\frac{n_1}{n_2} = 1$ liegen wird, und steigt wieder, bis sie bei $n_1 = n$ einen immer noch negativen Wert erreicht, der der Bindung eines nur aus Neutronen bestehenden Kerns



entspricht. Wenn der Minimalwert der Kurve bei $\frac{n_1}{n_2} = a$ erreicht wird, so würden in dieser Näherung alle Kerne, für die $\frac{n_1}{n_2} > a$ ist, β -labil sein, dagegen alle anderen gegenüber β -Zerfall stabil. (In der Figur sind die labiler Kerne durch ein Kreuz, die stabilen durch einen Kreis markiert.) Dieses Bild bedarf jedoch nach den Resultaten von Teil I, § 5 einer Verfeinerung

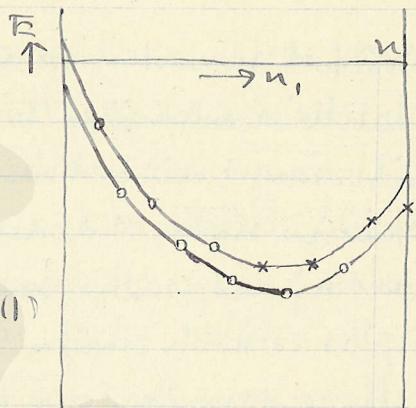
Betrachten wir zunächst die Atomkerne, bei denen n eine gerade Zahl ist. Wegen der besonderen Stabilität des Heliumkerns werden dort die geradzahligen Werte von n , und n_2 gehörigen Energien erheblich tiefer liegen, als die Energien der Zustände mit ungeradem n , und n_2 bei ungefähr gleichen Werten von n_1/n_2 . Zur Darstellung der Energie als Funktion von n_1/n_2 werden wir also nicht eine, sondern zwei Kurven vom Typus der Fig. 1. zeichnen müssen, die eine für gerade n_1, n_2 , die andere für ungerade n_1, n_2 . Die zweite Kurve wird um ein ungefähr konstantes, d. h. von n_1 und n_2 in erster Näherung unabhängiges Stück höher liegen als die erste Kurve (Fig. 2). Die Fig. 2 lehrt uns nun, daß auf der unteren Kurve bereits Punkte rechts vom Minimum zu stabilen Kernen gehören können, während auf der oberen Kurve auch noch Punkte links vom Minimum einen tiefer liegenden linken Nachbarpunkt besitzen, d. h. Kernen entsprechen, die durch Aussendung von β -Strahlen zerfallen können. Auf der oberen Kurve werden bei großer Gesamtmasse n die Kerne eventuell erst bei so kleinen n_1/n_2 -Werten β -stabil, daß bereits vorher die α -Stabilität einsetzt; in diesem Fall existieren überhaupt keine stabilen Atomkerne mit ungeradzahligen

n_1 und n_2 .

Formelmäßig wird man die Energie in der Nähe des Minimums etwas so darstellen können:

$$E_{\text{gerad.}} = A \left[n \left(\frac{n_1}{n} - b \right)^2 + c \right]$$

$$E_{\text{ungerad.}} = A \left[n \left(\frac{n_1}{n} - b \right)^2 + c + c' \right]$$



Die Konstante b ist je nach dem Wert von n gleich oder etwas größer als $\frac{1}{2}$, c ist näherungsweise unabhängig von n_1 und n . Die Grenze zwischen β -labilen und β -stabilen Kernen wird also für gerade n_1 gegeben durch

$$E_{\text{gerad.}}(n_1) = E_{\text{ungerad.}}(n_1 - 1), \quad (2)$$

d. h.
$$n \left(\frac{n_1}{n} - b \right)^2 = n \left(\frac{n_1 - 1}{n} - b \right)^2 + c$$

und
$$\frac{n_1}{n} = b + \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{n} \right) \approx b + \frac{c}{2}. \quad (3)$$

Für ungerade n_1 ergibt sich diese Grenze aus der Gleichung

$$E_{\text{ungerad.}}(n_1) = E_{\text{gerad.}}(n_1 - 1), \quad (4)$$

d. h.
$$n \left(\frac{n_1}{n} - b \right)^2 + c = n \left(\frac{n_1 - 1}{n} - b \right)^2$$

und
$$\frac{n_1}{n} = b + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - c \right) \approx b - \frac{c}{2}. \quad (5)$$

Wächst n über einen bestimmten Wert, so wird die Grenze der α -Stabilität über $b - \frac{c}{2}$ hinaus rücken, dann gibt es keine stabilen Kerne mit ungeraden n_1 und n_2 mehr.

Wächst n weiter, so wird schließlich die Grenze der α -Stabilität auch über $b + \frac{c}{2}$ hinaus rücken, dann gibt es überhaupt keine stabilen Kerne mehr. Empirisch sind nur die Kerne H^2 , He^4 , B^{10} , N^{14} mit ungeradem n , und $n=2$ als stabil bekannt. In den radioaktiven Zerfallsreihen gibt es noch einige Elemente mit ungeradem n , und $n=2$, die alle entsprechend der eben diskutierten Gesetzmäßigkeit durch Aussendung von β -Strahlen zerfallen ¹⁾.

Bei den Kernen mit ungerader Gesamtanzahl n wird kein erheblicher energetischer Unterschied zwischen den Kernen mit geradem oder ungeradem n , bestehen; denn da das Paulische Ausschließungsprinzip ebenso für Protonen wie für Neutronen gelten soll, wird es auch energetisch ungefähr gleich günstig sein, die Protonen oder die Neutronen zu abgeschlossenen Schalen zu vereinigen. Wegen der besonderen Stabilität des He-Kerns wird man allerdings annehmen können, daß eine gerade Anzahl von Protonen energetisch etwas günstiger ist, als eine gerade Anzahl von Neutronen,

1) Die an „Verzweigungsstellen“ liegenden Elemente Th^C und Ra^C zerfallen allerdings auch durch Aussendung von α -Strahlen, doch kommt auch hier die besonders große β -Stabilität der schweren Elemente mit ungeradem n , und $n=2$ in dem Umstand zum Ausdruck, daß sie vorzugsweise unter β -Emission zerfallen - der α -Zerfall kommt hier nur selten dem

β-Strahlung
α-Strahlung

wie dies ja auch aus dem Zerfallschema der Actiniumreihe hervorgeht, scheint; aber die Unterschiede sind nicht so ausgeprägt, wie bei den Elementen mit geradem n . Dem entspricht es, daß für ungerade n stabile Elemente gerade wie ungerader Ordnungszahl bis herauf zu den radioaktiven Stoffen vorkommen. Dabei sollten die maximalen Verhältniszahlen n_1/n_2 im allgemeinen bei gerader Ordnungszahl etwas höher liegen, als bei ungerader. Eine Regelmäßigkeit dieser Art läßt sich allerdings aus dem Erfahrungsmaterial, soweit es bisher bekannt ist, nicht ablesen. Daß das Paulische Prinzip sowohl für die Neutronen wie für die Protonen im Kern eine wesentliche Rolle spielt, kann man am unmittelbarsten aus folgender Gesetzmäßigkeit entnehmen: Bei vorgegebener Ordnungszahl ist der Maximalwert und der Minimalwert von n_1 , der beobachtet ist, im allgemeinen gerade. Ebenso sind bei vorgegebener Neutronenzahl die beobachteten Extremwerte von n_2 gerade. Ausnahmen von dieser Regel finden sich bei den leichten Elementen, da dort die Wegnahme oder Hinzufügung eines Teilchens schon eine große Änderung des Kerns mit sich bringt. Ferner sind einige wenige Ausnahmen auch bei schwereren Kernen beobachtet, die vielleicht durch die Unvollständigkeit unserer Kenntnis des β -Zerfalls zu vor-, während AcC mit gerader Neutronenzahl vorzugsweise unter Emission von α -Teilchen zerfällt

Isotopenschema ihre Erklärung finden.

§2. Streuung von γ -Strahlen am Atomkern. Im
folgenden Abschnitt soll die Streuung von γ -Strahlen
an Atomkernen¹⁾ vom Standpunkt des hier diskutierten
Kernmodells untersucht werden.

Eine solche Streuung kann durch zwei verschiedene Ursachen
hervorgehoben werden: Es kann erstens durch die Wirkung
der äußeren Strahlung die Bewegung der Protonen und
Neutronen so verändert werden, daß der Kern sekundäre
Kugelwellen von der Frequenz der einfallenden Strahlung
aussendet oder von einer Frequenz, die sich von dieser um
eine Eigenfrequenz des Kerns unterscheidet (Raman-
strahlung). Zweitens kann das einzelne Neutron, d. h.
die in ihm gebundene negative Ladung durch die einfallende
Strahlung zur Aussendung einer Rayleigh'schen oder Raman-
schen Streustrahlung angeregt werden. Betrachtet man
das Neutron als zusammengesetzt aus Proton und Elektron,
so wird man diese zweite Art von Streustrahlung in Parallele
setzen zur Streuung von sichtbarem Licht an Atomen, und
wird daher vermuten, daß sie wegen der erstgenannten Art
kleiner Elektronenmasse erheblich intensiver ist, als
die Streustrahlung der erstgenannten Art.

Eine später durchzuführen²⁾ Rechnung wird auch

zeigen, daß diese Streustrahlung der ersten Art höchstens an den Resonanzstellen einen beobachtbaren Beitrag zur Gesamtstreuung des Kerns liefern kann: Zur Deutung des Meitner-Klopffeldeffekts wird in erster Näherung die reine Neutronenstreuung genügen. Da die Eigenschaften des Neutrons bisher zum größten Teil unbekannt sind, läßt sich theoretisch eine Vorhersage über die Streuung von γ -Strahlung an Neutronen nicht machen. Wohl aber kann man die Intensität der von ganzen Kern gestreuten konstanten Faktorstrahlung als Funktion der Zahlen n_1 und n_2 bis auf einen unbekannt konstanten Faktor berechnen, wenn man, wie dies hier geschieht, nur Neutronen und Protonen als Elementarbausteine des Kerns betrachtet. Wenn die gestreute Strahlung als Funktion der Zahlen n_1 und n_2 bis auf einen unbekannt konstanten F im wesentlichen kohärente Rayleighstrahlung ist, d. h. die gleiche Frequenz hat, wie die einfallende Strahlung, so muß die Intensität der Streustrahlung proportional zu n^2 sein, solange die Wellenlänge der Strahlung groß gegen den Kerndurchmesser ist; ist sie im wesentlichen Ramanstrahlung, so wird ihre Intensität proportional zu n sein. Bezeichnet man die den Wirkungsquerschnitt

des Neutrons, der für die Intensität der Streustrahlung maßgebend ist, mit σ_N , so wird also der Wirkungsquerschnitt des Atomkerns σ_K im Falle der Rayleigh-Streuung:

$$\sigma_K = \sigma_N \cdot n_i^2 \quad (6)$$

im Falle der Raman-Streuung

$$\sigma_K = \sigma_N \cdot n, \quad (7)$$

Die Experimente lassen sich durch die Gleichung (6) einigermaßen befriedigend darstellen und sprechen daher zugunsten der von Meitner und Hupfeld¹⁾ vertretenen These, daß die gestreute Strahlung die gleiche Frequenz hat, wie die einfallende. Aus den Experimenten folgt bei einer Wellenlänge $\lambda = 4,7 \times E$, der einfallenden Strahlung etwa $\sigma_N = 1,5 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$. Fig. 3. enthält die theoretische Kurve für σ_K/n , berechnet für $\sigma_N = 1,50 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ und die von Meitner und Hupfeld²⁾, Jacobson³⁾, Cha⁴⁾ und Farrant⁵⁾ gemessenen Werte. Dabei ist von den experimentellen Werten für die Abweichung der Gesamtstreuung pro Elektron von der Klein-Mishina-Formel noch der An-

1) L. Meitner u. H. Hupfeld, ZS.f. Phys. 75, 205, 1932;
vgl. jedoch die gegen die obige Annahme sprechende Arbeit von G. L. Gray u. G. Farrant, Proc. Roy. Soc. London (A) 136, 662, 1932.

2) L. Meitner u. H. Hupfeld, ZS.f. Phys. 67, 147, 1931

teil abgezogen worden, ~~so~~ nach den Formeln von Saunter⁶⁾ auf den Photoeffekt an den Atomelektronen geschoben werden muss. Entsprechend den experimentellen Ergebnissen von Meitner und Hupfeld⁴⁾ wurden dabei die Sauntersche Werte bei den schweren Atomen Pb und Hg, bei denen die Sauntersche Werte bei den schweren Atomen ~~P~~ Annäherungsmethode nicht mehr

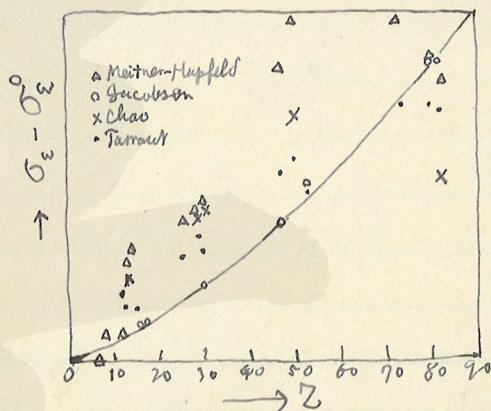


Fig. 3.

zuverlässig ist, um etwa 20% reduziert; die Jacobsonsche Messung bei Uran wurde weggelassen, da bei Uran eine Abhängigkeit des Photoeffektes nicht mehr möglich ist.

Es soll nun die Berechnung der Streustrahlung der ersten Art, die auf eine Änderung der Protonen- und Neutronenbewegung zurückgeht, nachgeholt werden. Als Variablen des Systems betrachten wir, wie in Teil I, die Ortskoordinaten

3) J. Jackson, ebenda 70, 145, 1952.

4) Chao, Proc. Nat. Acad. Amer., 16, 451, 1930.

5) G. Farrant, Proc. Roy. Soc. London (A) 135, 223, 1932.

6) T. Saunter, Ann. d. Phys. 11, 454, 1931.

⑧

r_k der Teilchen, ihren Spin σ_k und die Größe p_k^3 , die angibt, ob das Teilchen ein Proton ($p_k^3 = -1$) oder ein Neutron ($p_k^3 = +1$) ist. Die Wechselwirkungsenergie des Kerns mit einem äußeren elektrischen Feld \mathbb{E} hat dann die Form

$$H_1 = \mathbb{E} \cdot e \sum r_k \frac{1}{2} (1 - p_k^3) \quad (8)$$

Der erste Teil dieser Störungsenergie $\mathbb{E} \cdot \frac{e}{2} \sum r_k$ entspricht einer elektrischen Kraft, die am Kernschwerpunkt angreift und die daher zu einer Streustrahlung Anlass gibt, wie sie von einem Elementarteilchen der Ladung $ne/2$ und der Masse nM ausgesandt würde. Diese Streustrahlung gehorcht also der Thomson'schen Formel und kommt für die Deutung der Experimente von Meitner und Hupfeld wegen ihrer geringen Intensität nicht in Betracht. Anders ist es mit der Streuung, die dem zweiten Gliede von (8)

$$- \frac{e}{2} \sum r_k p_k^3$$

entspricht, denn diese kann intensiv werden, wenn die Frequenz der einfallenden Strahlung nahe bei einer Eigenfrequenz des Atomkerns liegt. Für die Amplitude des durch die äußere Strahlung erzeugten sekundären Dipolmoments erhält man dann, wie in der Dispersions Theorie der Atome, die Formel (\mathbb{E} wird parallel

zur z -Achse angenommen):

$$M_z(n) = e^2 f_z \sum_m \frac{\left(\frac{1}{2} \sum_k 2k p_k^z \right)_{nm} \left(2(E_n - E_m) \right)}{(E_n - E_m)^2 - (h\nu)^2} \quad (9)$$

Hierin bedeutet E_n die Energie des Zustandes n , und $\left(\frac{1}{2} \sum_k 2k p_k^z \right)_{nm}$ das zum Übergang von n nach m gehörige Matrixelement der Summe $\frac{1}{2} \sum_k 2k p_k^z$. Die gestreute Strahlung wird also an den Resonanzstellen $h\nu = |E_n - E_m|$ sehr intensiv, wenn nicht zufällig das zu dem betreffenden Übergang gehörige Matrixelement verschwindet. Eine eingehendere Diskussion der Gleichung (9) ist nur möglich für einen speziellen Atomkern. Wir betrachten etwas das in Teil I, ausführlicher behandelt wurde, das H-Isotop vom Gewicht 2. Dort ist das Matrixelement $(p_1^z z_1 + p_2^z z_2)_{nm}$ nur dann von Null verschieden, wenn der eine der beiden Zustände zu dem in der p^z symmetrischen Teilsystem gehört, der andere zum antisymmetrischen. Da der Grundzustand zum symmetrischen System gehört, spielen für die Streuung am Grundzustand nur angeregte Zustände eine Rolle, deren Wellenfunktionen antisymmetrisch in p_1^z und p_2^z ist. Bei den Zuständen der letztgenannten Art gibt der Platzwechselintegral $J(\nu)$ zu einer Abstoßung zwischen Neutron und Proton Anlass; die betreffenden

angelegten Zustände gehören also alle zum kontinuierlichen Spektrum positiver Gesamtenergie. Eine scharfe Resonanzstellen im üblichen Sinn gibt es für das H_2 α -Grotup daher nicht.

§ 3. Die Eigenschaften des Neutrons¹⁾. Den Überlegungen der vorliegenden Arbeit wurde stets die Annahme zugrunde gelegt, daß das Neutron als fester Elementarbaustein des Kerns aufgefaßt werden kann; der Umstand, daß sich das Neutron auch in mancher Beziehung so verhält, als sei es aus Proton und Elektron zusammengesetzt, kam nur in der Berücksichtigung des Platzwechsels und beim β -Zerfall zum Ausdruck. Obwohl nun zwar die experimentelle Tatsache, daß bei der Zertrümmerung leichter Kerne Neutronen frei werden können, zugunsten der Obengenannten Annahmen spricht, so bedarf es doch einer ausführlichen theoretischen Rechtfertigung, wenn man das Neutron mit seinem kleinen Massendefekt (~ 1 Million $El.$ -Volt) als festen Elementarbaustein auffaßt in einem Kern, in dem die Wechselwirkungsenergien der Teilchen sehr viel größer sind als 1 Million $El.$ Volt.

Zur Verteidigung dieser Hypothese kann man zunächst anführen, daß schon die Existenz des Neutrons den

Gesetzen der Quantenmechanik in ihrer bisherigen Form widerspricht. Sowohl die allerdings hypothetische Gültigkeit der Fermi-Statistik für Neutronen, wie das Versagen des Energiesatzes beim β -Zerfall beweist die Unanwendbarkeit der bisherigen Quantenmechanik auf die Struktur des Neutrons. Aber selbst wenn man von diesen Eigenschaften des Neutrons absieht, so bedeutet bereits der Umstand, daß das Neutron ein Gebilde der ungefähren Ausdehnung $\Delta q \sim \frac{e^2}{mc^2}$ ist, einen Widerspruch der zur Q. M., wenn man das Neutron als zusammengesetzt aus Elektron und Proton auffaßt. Dem Ortsbereich $\Delta q \sim \frac{e^2}{mc^2}$ entspreche nämlich nach den Unbestimmtheitsrelationen der mittlere Impuls

$$\Delta p \sim \frac{h}{2\pi \Delta q} \sim \frac{hmc^2}{2\pi e^2} \approx \frac{hc}{2\pi e^2} mc$$

Man müßte also für den Massendefekt des Neutrons eine Energie der Ordnung:

$$E = c \cdot \Delta p = \frac{hc}{2\pi e^2} \cdot mc^2 \approx 137 mc^2$$

erwarten, während der beobachtete Massendefekt etwa hundertmal kleiner ist.

Wenn man also die Bindungsenergie des Elektrons im Neutron zu berechnen sucht, so bekommt man aus dem Massendefekt Werte der Ordnung mc^2 ,

aus der Größe des Neutrons Werte der Ordnung $137 mc^2$.

Man kann auch die Streuung von Licht durch die Neutronen zur Berechnung der Bindungsenergie heranziehen und die Frage stellen: Wie groß ist die Frequenz eines klassischen Oszillators, der γ -strahlen etwa der Wellenlänge $\lambda = 4,7 \lambda_{\text{e}} = \frac{1}{2}$, genau so stark streut, wie ein Neutron. Der Wirkungsquerschnitt eines Oszillators der Frequenz ν_0 ist

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2} \right)^2 \quad (10)$$

Aus dem empirischen Wert (vgl. S. 161) $\sigma = 1,5 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ für $h\nu = 5,15 mc^2$ folgt $h\nu_0 = 42,6 mc^2$.

Aus der Streuung würde man also auf eine Bindungsenergie schließen, wie sie ungefähr der Größe des Neutrons entspricht, im Gegensatz zum empirischen Massendefekt des Neutrons.

Zusammenfassend kann man also feststellen: Eine eindeutige Definition des Begriffs „Bindungsenergie“ ist für das Elektron im Neutron wegen des Versagens des Energiesatzes beim β -Zerfall unmöglich. Da ferner die Anwendung der Q.M. auf das Neutron zu Widersprüchen führt, bekommt man für die Bindungsenergie des Elektrons im Neutron ganz verschiedene Werte, je nach den

(Nature Vol 130, p165, 1932)

Nuclear Structure by J. H. Bartlett, Jr.

The experimental evidence for the existence of the neutron has given added support to the view¹ that the nucleus may be composed of protons, neutrons, and α -particles. Meisenberg² has recently found it convenient to use a model with protons and neutrons only as the building-stones. In various papers,³ Aston³ has determined the isotopic constitution of many of the chemical elements, but it has not been possible to say, from consideration of stability, just what isotopes may be expected to occur. The purpose of this note is to point out regularities for elements of low mass, and to suggest a possible building-up principle for such elements.

1. J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. A. 136, 1705; 1932
2. W. Meisenberg, Z. Phys.
3. F. W. Aston, Proc. Roy. Soc., 4927-31.

On Quantum Electrodynamics Sov. Phys. Bd 2.
S. 468-499

by P. A. M. Dirac, V. A. Fock and Boris Podolsky

Part I. Equivalence of Dirac's and Heisenberg-Pauli's Theories.

§1. Recently Rosenfeld shows³ that the new form of relativistic Quantum Mechanics¹ is equivalent to that of Heisenberg and Pauli.² Rosenfeld's proof is, however, obscure and does not bring out some features of the relation of the two theories. To assist in the further development of the theory we give here a simplified proof of the equivalence.

Consider a system, with a Hamiltonian H , consisting of two parts A and B with their respective Hamiltonians H_a and H_b and the interaction V . We have

$$H = H_a + H_b + V, \tag{1}$$

where H_a Particles and H_b Field

$$H_a = H_a(p_a, q_a, T); \quad H_b = H_b(p_b, q_b, T); \\ V = V(p_a, q_a, p_b, q_b, T)$$

and T is the time of for the entire system. The wave function for the entire system will satisfy the equation⁴

$$(H - i\hbar \frac{\partial}{\partial T}) \psi(p_a, q_a, p_b, q_b, T) = 0 \tag{2}$$

and will be a function of the variables indicated.

Now, upon performing the canonical transformation

$$\psi^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} \psi, \tag{3}$$

1, Dirac, 136, 453, 1932
2, Heisenberg, 16, 179, 1932
3, Rosenfeld, 16, 179, 1932

by which dynamical variables, say F , transform as follows

$$F^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} F e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \quad (4)$$

Eq. (2) takes the form

$$(H_a^* + V^* - i\hbar \frac{\partial}{\partial T}) \psi^* = 0, \quad (5)$$

Since H_a commutes with H_b , $H_a^* = H_a$.

On the other hand, since the fundamental functional relation between variables is not disturbed by the canonical transformation (3), V^* is the same function of the transformed variables p^*, q^* as V is of p, q . But p_a and q_a commute with H_b so that $p_a^* = p_a$, $q_a^* = q_a$. Therefore

$$V^* = V(p_a, q_a, p_b^*, q_b^*), \quad (6)$$

where

$$\left. \begin{aligned} q_b^* &= e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} q_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \\ p_b^* &= e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} p_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \end{aligned} \right\} (7)$$

It will be shown in §7, after suitable notation is developed, that Eqs. (7) are equivalent to

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} (H_b q_b^* - q_b^* H_b) \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} (H_b p_b^* - p_b^* H_b) \end{aligned} \right\} (8)$$

where t is the separate time of the part B,

These, however, are just the equations of motion for the part B alone, unperturbed by the presence of part A.

§ 2. Now let part B correspond to the field and part A to the particles present. Eqs. (8) must then be equivalent to the ~~part~~ Maxwell's equations for empty space. Eq. (2) is then the wave equation of Heisenberg-Pauli's theory, while Eq. (5), in which the perturbation is expressed in terms of potentials corresponding to empty space, is the wave equation of the new theory. Thus, this theory corresponds to treating separately a part of the system, which is in some problems more convenient.

Now, H_a can be represented as a sum of the Hamiltonians for the separate particles, the interaction between the particles is not included in H_a for this is taken to be the result of interaction between the particles and the field. Similarly, V is the sum of interactions between the field and the particles. Thus, we may write

$$\text{and } \left. \begin{aligned} H_a &= \sum_{s=1}^n (c\alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \alpha_s^{(A)}) = \sum_{s=1}^n H_s \\ V^* &= \sum_{s=1}^n V_s^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s [\Phi(r_s, T) - \alpha_s \cdot A(r_s, T)] \end{aligned} \right\} (9)$$

where r_s are the coordinates of the s -th particles and n is the number of particles.

Eq. (5) takes the form

$$\left[\sum_{s=1}^n (H_s + V_s^*) - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right] \psi^*(r_s; J; T) = 0, (10)$$

J stands for the variables describing the field. Besides the common time T and the field time t an individual time $t_s = t_1, t_2, \dots, t_n$ is introduced for each particle. Eq. (10) is satisfied by the common solution of the set of eq.

where

$$(R_s - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}) \psi^* = 0 \quad (11)$$

$R_s = c \alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \alpha_s^4 + \epsilon_s [\Phi(r_s, t_s) - \alpha_s A(r_s, t_s)]$
and $\psi^* = \psi^*(r_1, r_2, \dots, r_n; t_1, t_2, \dots, t_n; T)$, when all the t 's are put equal to the common time T .

Now, Eqs. (11) are the equations of Dirac's theory. They are obviously relativistically invariant and form a generalization of Eq. (10). This obvious relativistic invariance is achieved by the introduction of separate time for each particle.

§ 3. For further development we shall need some formulas of quantization of electromagnetic
2. This is somewhat analogous to Frenkel's method of treating incomplete systems, see Frenkel, Sov. Phys. 1, 99, 1952

fields and shall use for this purpose some formulas obtained by Fock and Podolsky¹ starting with the Lagrangian function

$$L = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - H^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \dot{\Phi})^2, \quad (12)$$

taking as coordinates (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) the potentials (Φ, A_1, A_2, A_3) , and retaining the usual relations

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{A}; \quad H = \operatorname{curl} A, \quad (13)$$

one obtains

$$\left. \begin{aligned} (P_1, P_2, P_3) &= P = -\frac{1}{c} \mathbf{E}; \\ P_0 &= -\frac{1}{c} (\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \dot{\Phi}); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

and the Hamiltonian

$$H = \frac{c^2}{2} (P^2 - P_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{l=1,2,3} \left(\frac{\partial Q_l}{\partial x_l} - \frac{\partial Q_0}{\partial x_l} \right)^2 - c P_0 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} - c P \cdot \operatorname{grad} Q_0$$

The equations of motions are²

1. Fock and Podolsky, Sov. Phys. **1**, 8 P 1, 1932, later quoted as l.c. For other treatments see Jordan and Pauli, **47**, 151, or Fermi, Rend. Lincei, **9**, 881, 1929. The Lagrangian (12) differs from that of Fermi only by a fourdimensional div.
2. A dot over a field quantity will be used to designate a derivative with respect to the field time t .

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{A}} &= c^2 P - c \operatorname{grad} \Phi \\ \dot{\hat{\Phi}} &= -c^2 P_0 - c \operatorname{div} A, \\ \dot{P} &= \Delta A - \operatorname{grad} \operatorname{div} A - c \operatorname{grad} P_0 \\ \dot{P}_0 &= -c \operatorname{div} P, \end{aligned} \right\} (16)$$

On elimination of P and P_0 , Eqs. (16) give the D'Alembert eq. for the potentials Φ and A . To obtain Maxwell's eq. for empty space one must set $P_0 = 0$. The quantization rules are expressed in terms of amplitudes of the Fourier's integral.

Thus, for every $F = F(x, y, z, t)$, amplitudes $F(k)$ and $F^*(k)$ are introduced by the equation

$$(17) \quad F = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \left\{ F(k) e^{-i c |k| t + i k r} + F^*(k) e^{i c |k| t - i k r} \right\} d k$$

where $r = (x, y, z)$ is the position vector, $k = (k_x, k_y, k_z)$ is the wave vector having the magnitude $|k| = 2\pi/\lambda$, $d k = d k_x d k_y d k_z$, the integration being performed for each component of k from $-\infty$ to $+\infty$. In terms of the amplitudes equations of motion can be written

$$(18) \quad \begin{cases} P(k) = \frac{i}{c} [k \Phi(k) - |k| A(k)] = -\frac{1}{c} E(k) \\ P_0(k) = \frac{i}{c} [|k| \Phi(k) - k A(k)] \end{cases}$$

the other two equations being algebraic consequences of these.

The commutation rules for the potentials are

$$(19) \begin{cases} \Phi^\dagger(k) \Phi(k') - \Phi(k') \Phi^\dagger(k) = \frac{c\hbar}{2|k|} \delta(k-k') \\ A_\ell^\dagger(k) A_m(k') - A_m(k') A_\ell^\dagger(k) = -\frac{c\hbar}{2|k|} \delta_{\ell m} \delta(k-k') \end{cases}$$

all other combinations of amplitudes commuting.

Part II. The Maxwellian Case.

§ 4. For the Maxwellian case the following additional considerations are necessary. In obtaining the field variables, besides the regular equations of motion of the electromagnetic field one must use the additional condition $P_0 = 0$, or $-c P_0 = \operatorname{div} A + \dot{\Phi}/c = 0$. This condition cannot be regarded as a quantum mechanical equation, but rather as a condition on permissible ψ functions. This can be seen, for example, from the fact that, when regarded as a quantum mechanical eq., $\operatorname{div} A + \dot{\Phi}/c = 0$ contradicts the commutation rules. Thus only those ψ 's should be regarded as physically permissible which satisfy the condition

$$-c P_0 \psi = (\text{div } A + \frac{1}{c} \Phi) \psi = 0. \quad (20)$$

Condition (20), expressed in terms of amplitudes by the use of Eq. (18), takes the form

$$\text{and } \left. \begin{aligned} i [k \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] \psi &= 0 \\ -i [k \cdot A^\dagger(k) - |k| \Phi^\dagger(k)] \psi &= 0. \end{aligned} \right\} (20')$$

To these must, of course, be added the wave equation

$$(H_0 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0, \quad (21)$$

where H_0 is the Hamiltonian for the field

$$(22) \quad H_0 = 2 \int \{ A^\dagger(k) \cdot A(k) - \Phi^\dagger(k) \Phi(k) \} |k|^2 dk,$$

as in l.c.

If a number of eq. $A\psi=0$, $B\psi=0$, etc., are simultaneously satisfied, then $AB\psi=0$, $BA\psi=0$, etc.; and therefore $(AB-BA)\psi=0$, etc. All such new equations must be consequences of the old, i.e. must not give any new conditions on ψ .

This may be regarded as a test of consistency of the original eq. Applying this to our Eqs. (20') and (21) we have

$$P_0(k) P_0^\dagger(k') - P_0^\dagger(k') P_0(k)$$

$$(23) \quad = c^2 [k \cdot A(k) k' \cdot A^T(k') - k' \cdot A^T(k') k \cdot A(k)] \\
 + c^2 [k | k'] [\Phi(k) \Phi^T(k') - \Phi^T(k') \Phi(k)]$$

since A 's commute with Φ 's. Applying now the commutation rules of Eq. (19) we obtain

$$(24) \quad P_0(k) P_0^T(k') - P_0^T(k') P_0(k) \\
 = \frac{c^2 \hbar}{2|k|} \left(\sum_{l,m} k_l k_m \delta_{lm} - |k|^2 \right) \delta(k-k') = 0$$

Eq. (24) is satisfied in consequence of ~~quantum~~ quantum-mechanical eq., hence

$[P_0(k) P_0^T(k') - P_0^T(k') P_0(k)] \psi = 0$
 is not a condition on ψ . Thus conditions (20') are consistent. Since $P_0(k)$ and $P_0^T(k)$ commute with $\frac{\partial}{\partial t}$, to test the consistency of condition (20) with (21) one must test the condition

$$(H_0 P_0 - P_0 H_0) \psi = 0 \quad (25)$$

However, since $\dot{P}_0 = (i/\hbar) (H_0 P_0 - P_0 H_0)$, Eq. (25) takes the form $\dot{P}_0 \psi = 0$, or in Fourier's components

$$\dot{P}_0(k) \psi = -i c |k| P_0(k) \psi = 0$$

and $\dot{P}_0^T(k) \psi = i c |k| P_0^T(k) \psi = 0$.

But these are just the conditions (20'). Thus, conditions (20) and (21) are consistent.

§ 5. The extra condition of Eq. (20) is not an equation of motion, but is a "constraint", imposed on the initial coordinates and velocities, which the equations of motion then preserve for all time. The existence of this constraint for the Maxwellian case is the reason for the additional considerations, mentioned at the beginning of § 4. It turns out that we must modify this constraint when particles are present, in order to get something which the equations of motion will preserve for all time.

The conditions (20) as they stand, when applied to ψ , are not consistent with Eqs. (11). It is, however, not difficult to see that they can be replaced by a somewhat different set of conditions

$$C(k) \psi = 0 \quad \text{and} \quad C^\dagger(k) \psi = 0, \quad (26')$$

$$C(k) = i \left[k \cdot A(k) - |k| \bar{D}(k) \right] + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n \epsilon_s e^{i c |k| t_s - i k \cdot r_s} \quad (27')$$

Terms in $C(k)$ not contained in $-C P_0(k)$ are functions of the coordinates and the time for the particles. They commute with $H_0 - i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$, with $P_0(k)$ and with each other. Therefore Eqs.

1. We shall drop the asterisk and in the following use ψ instead of ψ^* .

(26)' are consistent with each other and with Eq. (21).

It remains to show that Eqs. (26)' are consistent with Eqs. (11). In fact $C(k)$ and $C^\dagger(k)$ commute with $R_s - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}$. We shall show this for $C(k)$.

Designating, in the usual way, $AB - BA$ as $[A, B]$, we see that it is sufficient to show that

$$[C(k), p_s - \frac{\varepsilon_s}{c} A(r_s t_s)] = 0 \quad (28)$$

and

$$[C(k), i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s} - \varepsilon_s \Phi(r_s t_s)] = 0 \quad (29)$$

By considering the form of $C(k)$, these become respectively

$$[k \cdot A(k), A(r_s t_s)] = \frac{c}{2(2\pi)^{3/2} |k|} e^{i c |k| t} [e^{-i k \cdot r_s}, p_s] = 0, \quad (30)$$

and

$$[|k| \Phi(k), \Phi(r_s t_s)] + \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} |k|} e^{-i k \cdot r_s} \times [e^{i c |k| t_s}, i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}] = 0 \quad (31)$$

Now

$$[k \cdot A(k), A(r_s t_s)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int [k \cdot A(k), A^\dagger(k')] \times e^{i c |k'| t_s - i k' \cdot r_s} dk'$$

by Eq. (17) and because $A(k)$ commutes with $A(k')$.

Using the commutation formulas and performing the integration it becomes

$$\frac{c\hbar k}{2(2\pi)^{3/2}|k|} e^{ic|k|ts - ik\cdot rs} \quad (32)$$

On the other hand

$$\begin{aligned} [e^{-ik\cdot rs}, p_s] &= \hbar i \text{grad} e^{-ik\cdot rs} \\ &= \hbar k e^{-ik\cdot rs} \end{aligned} \quad (33)$$

Thus, Eq. (30) is satisfied. Similarly Eq. (31) is satisfied because

$$(34) \quad [|k| \Phi(k), \Phi(rs, ts)] = -\frac{c\hbar}{2(2\pi)^{3/2}} e^{ic|k|ts - ik\cdot rs}$$

$$\text{and} \quad [e^{ic|k|ts}, i\hbar \frac{\partial}{\partial ts}] = c\hbar |k| e^{ic|k|ts} \quad (35)$$

Thus, conditions (26') satisfy all the requirements of consistency. It can be shown that these requirements determine $\epsilon(k)$ uniquely up to an additive constant, if it is taken to have the form $i[\hbar \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] + f(rs, ts)$.

§ 6. We shall now show that the introduction of separate time for the field and for each particle allows the use of the entire vacuum electrodynamics of § 3 and § 4, except for the charge discussed in § 5. In fact, we shall show that

Maxwell's equations of electrodynamics, in which
 either current or charge densities, become conditions
 on ψ function.

For convenience we collect together our fundamental
 equations.

The equations of vacuum electrodynamics are

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi = \frac{1}{c} \text{div } \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A} \quad (15)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0; \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0 \quad (16)$$

The wave equations are

$$(R_s - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}) \psi = 0,$$

where $R_s = c \alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \beta_s - e_s \beta_s A(r_s t_s) + e \Phi(r_s t_s)$ (17)

The additional conditions on ψ function are

$$C(k) \psi = 0 \quad \text{and} \quad C^\dagger(k) \psi = 0, \quad (18)$$

where

$$C(k) = i [k \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n e_s e^{i c |k| t_s - i k \cdot r_s} \quad (19)$$

We transform the last two eqs. by passing from the
 amplitudes $C(k)$ and $C^\dagger(k)$ to $C(r, t)$ by means

of Eq. (17). Thus we obtain

$$C(x, t) \psi = 0 \quad (26)$$

and

$$C(x, t) = \operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{e_s}{4\pi} \Delta(X - X_s) \quad (27)$$

where X and X_s are four dimensional vectors
 $X = (x, y, z, t)$, $X_s = (x_s, y_s, z_s, t_s)$ and Δ is
 the so-called invariant delta function

$$\Delta(X) = \frac{1}{|r|} [\delta(|r| + ct) - \delta(|r| - ct)] \quad (37)$$

From Eqs. (13) follows immediately

$$\operatorname{div} H = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{curl} E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (38)$$

so that these remain as quantum-mechanical
 equations. Using Eqs. (13) and (36) and condition (26)
 we obtain by direct calculation

$$\left(\operatorname{curl} H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \psi = \operatorname{grad} \sum_{s=1}^n \frac{e_s}{4\pi} \Delta(X - X_s) \psi \quad (39)$$

and

$$(\operatorname{div} E) \psi = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^n \frac{e_s}{4\pi} \Delta(X - X_s) \right) \psi \quad (40)$$

Now, let us consider what becomes of these eqs. when
 we put $t = t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$, which is implied
 in Maxwell's Eqs. and which we shall write for
 short as $t_s = T$.

For any quantity $f = f(t, t_1, \dots, t_n)$

$$(41) \quad \frac{\partial f(t, t_1, \dots, t_n)}{\partial T} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t_n} \right) \right]_{t_s=T}$$

and for each of the n derivatives $\frac{\partial}{\partial t_s}$ we have an equation of motion

$$\frac{\partial f}{\partial t_s} = \frac{i}{\hbar} (R_s f - f R_s) \quad (42)$$

If we put $f = A(r, t)$ or $f = \Phi(r, t)$ then, since both commute with R_s , $\frac{\partial f}{\partial t_s} = 0$ and we get

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial T}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \quad (43)$$

It follows that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial T} - \text{grad } \Phi; \quad \mathbf{H} = \text{curl } A \quad (44)$$

so that the form of the connection between the field and the potentials is preserved. Remembering that for $t = t_s$ we have $\Delta(X - X_s) = 0$ and hence $\text{grad } \Delta(X - X_s) = 0$, and using Eqs. (26), (39) and (40) we obtain

$$\left(\text{div } A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \psi = 0, \quad (45)$$

$$\left(\text{curl } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial T} \right)_{t_s=T} \psi = 0. \quad (46)$$

and

$$(47) \quad (\text{div } \mathbb{E}) \psi = - \sum_{s=1}^n \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta (X - X_s) \right]_{t=t_s} \psi.$$

For further reduction of Eq. (46) we must use eqs. (41) and (42), from which follows

$$(48) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right)_{t_s=T} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial T} - \sum_{s=1}^n \frac{i}{ct_s} [R_s, \mathbb{E}]$$

and $[R_s, \mathbb{E}]$ is easily calculated, because the only term in R_s which does not commute with \mathbb{E} is $-\epsilon_s \alpha_s A(r_s t_s)$ and $-\mathbb{E}/c$ is the momentum conjugate to A . In this way we obtain

$$[R_s, \mathbb{E}] = i c t_s \epsilon_s \alpha_s \delta(r - r_s). \quad (49)$$

For the reduction of Eq. (47) we need only remember that

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta (X) \right]_{t=0} = -4\pi \delta(r). \quad (50)$$

Thus, eqs. (46) and (47) become

$$\left(\text{curl } \mathbb{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial T} \right) \psi = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \alpha_s \delta(r - r_s) \psi \quad (51)$$

and

$$(\text{div } \mathbb{E}) \psi = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \delta(r - r_s) \psi, \quad (52)$$

which are just the remaining Maxwell's Eqs., appearing as conditions on ψ . Eq. (52) is the

additional condition of H. P.'s theory.

§7. We shall now derive Eq. (8) of §1. For this we need to recall that the transformation (7) is a canonical transformation which preserves the form of the algebraic relations between the variables, as well as the Eqs. of motion. These will be, in the exact notation now developed, ~~no~~

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} [H^*, q_b^*]_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} [H^*, p_b^*]_{t_s=T} \end{aligned} \right\} (53)$$

As we have seen in the discussion following Eq. (5)

$$H^* = H_a + H_b + V^* \quad (54)$$

and since q_b and p_b commute with H_a , q_b^* and p_b^* commute with H_a^* and hence with H_a .

Therefore Eqs. (53) become

$$(55) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, q_b^*] + [V^*, q_b^*] \}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, p_b^*] + [V^*, p_b^*] \}_{t_s=T} \end{aligned} \right.$$

On the other hand, we have from Eqs. (41) and (42)

$$(56) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, q_b^*] \right\}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, p_b^*] \right\}_{t_s=T} \end{aligned} \right.$$

Now the only term in R_s which does not commute with p_b^* and q_b^* is V_s^* . So that

$$\left. \begin{aligned} [R_s, q_b^*] &= [V_s^*, q_b^*] \\ \text{and } [R_s, p_b^*] &= [V_s^*, p_b^*] \end{aligned} \right\} (57)$$

Since $\sum V_s^* = V^*$, Eqs. (56) become

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, q_b^*] \right\}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, p_b^*] \right\}_{t_s=T} \end{aligned} \right\} (58)$$

Comparison of Eqs. (55) with (58) finally gives

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial q_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, q_b^*]_{t=T} \\ \left(\frac{\partial p_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, p_b^*]_{t=T} \end{aligned} \right\} (59)$$

which is, in the more exact notation, just Eqs. (8).
 Cambridge, Leningrad and Kharkov.

25.80, 587, 1933
596

Über den Bau der Atomkerne. III,
Von W. Heisenberg in Leipzig.

(Eingegangen am 22. Dezember 1932.)

Die Experimente von Curie, Joliot und Chadwick über die Existenz und die Stabilität des Neutrons veranlaßten den in Teil I und II dieser Arbeit unternommenen Versuch, die Rolle, welche die Neutronen im Aufbau der Atomkerne spielen, in ganz bestimmten physikalischen Annahmen festzulegen und die Brauchbarkeit dieser Annahmen am Tatsachenmaterial der Kernphysik zu erproben. Die Unvollständigkeit der bisher vorliegenden empirischen Ergebnisse führt bei diesem Problem zu einer großen Unsicherheit selbst der Fundamente jeglicher Theorie und nur in ganz wenigen Fällen erzwingend die Experimente eine bestimmte Interpretation. Aus diesem Grunde schien es geboten, zunächst eine bestimmte Hypothese an die Spitze zu stellen und zu zusehen, wie sie sich zur Ordnung der Erfahrungen eignet. Im folgenden soll jedoch auch ausführlich diskutiert werden, auf welche Konsequenzen gerade für die gewählte Hypothese charakteristisch sind und an welchen Punkten eine besondere Wahl der

©2022 IMAL, IHP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Grundannahmen zu den gleichen Ergebnissen führen würde. Vor dieser Diskussion sollen die Überlegungen der beiden ersten Teile ergänzt und an einigen Stellen berichtigt werden.

§ 1 Anwendung des Thomas-Fermischen Verfahrens auf die Hamiltonfunktion des Atomkerns. Den Untersuchungen von Teil I wurde eine Hamiltonfunktion zugrunde gelegt, die abhängt von den Ortskoordinaten r_k der Kernpartikeln und den dazu konjugierten Impulsen p_k , ferner den Variablen p_k^z , die angeben, ob das betreffende Teilchen ein Neutron ($p_k^z = +1$) oder ein Proton ($p_k^z = -1$) sei. Außer den in Teil I, Gl. (I) eingeführten Wechselwirkungsgliedern $J(r_{kl})$ und $K(r_{kl})$ soll, um die Analogie zu den Molekülwechselwirkungen vollständig zu machen, noch eine "statische" Wechselwirkung $L(r_{kl})$ zwischen Neutron und Proton zugefügt werden, die dem elektrostatischen Teil der Bindungsenergie etwa von H und H^+ in H_2^+ -Ion entspricht. In Teil I war dieses Glied als vermutlich klein weggelassen worden.

Die vollständige Hamiltonianfunktion lautet nunmehr:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2M} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{l}} J(r_{\mathbf{k}\mathbf{l}}) (p_{\mathbf{k}}^z p_{\mathbf{l}}^z + p_{\mathbf{k}}^x p_{\mathbf{l}}^x) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{l}} L(r_{\mathbf{k}\mathbf{l}}) (1 - p_{\mathbf{k}}^z p_{\mathbf{l}}^z) \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{l}} K(r_{\mathbf{k}\mathbf{l}}) (1 + p_{\mathbf{k}}^z)(1 + p_{\mathbf{l}}^z) \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{l}} \frac{e^2}{r_{\mathbf{k}\mathbf{l}}} (1 - p_{\mathbf{k}}^z)(1 - p_{\mathbf{l}}^z) \\
 & - \frac{1}{2} D \sum_{\mathbf{k}} (1 + p_{\mathbf{k}}^z)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

eine Annäherungsmethode zur Lösung von (1) bei Kernen mit vielen Partikeln läßt sich in Analogie zur Thomas-Fermi-Methode in folgender Weise herleiten: Zunächst kann die zu (1) gehörige Schrödingerfz des Normalzustandes in bekannter Weise aufgefaßt werden als Lösung des Minimalproblems:

$$\int \psi^* H \psi d\Omega = \text{Min} \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung

$$\int \psi^* \psi d\Omega = 1. \tag{3}$$

$$n(n-1) \cdot p_k^3 p_l^3 + p_k^n p_l^n = \frac{n(n-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} - \frac{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2}{n_1 + n_2 + 2n_1 n_2}$$

Lässt man nun im Minimalproblem (2) nur solche Schrödingerfz en zur Konkurrenz zu, bei denen

$$4P(P+1) = \left(\sum_k p_k^3 \right)^2 + \left(\sum_k p_k^n \right)^2 + \left(\sum_k p_k^5 \right)^2 \quad (4)$$

(d. h. sozusagen der gesamte „p-Spin“ einen bestimmten Zahlwert hat), so stellt sich bei der auch in Teil I gemachten Annahme, dass $J(r_{ke})$ positiv sei, heraus, dass $2P = n = n_1 + n_2$ zum tiefsten Energiewert führt. ψ kann in dieser Näherung in der Form

$$(5) \quad \psi(r_1, p_1^5 \dots r_n, p_n^5) = \varphi(r_1 \dots r_n) f(p_1^5 \dots p_n^5)$$

geschrieben werden. Hier bedeutet f eine symmetrische Funktion der p_k^5 , deren Gestalt nach den üblichen Verfahren der Q.M. berechnet werden kann, wenn $\sum_k p_k^5 = n_2 - n_2$ gegeben ist.

Die Funktion φ gehört dann als Schrödingerfunktion zu einer Hamiltonfz, die aus (2) dadurch hervorgeht, dass die von den p_k abhängigen Ausdrücke

1) In ähnlicher Weise kann nach J.C. Slater, Phys. Rev. **35**, 210, 1930, die Hartree-Methode bei Atomen aufgefasst werden als Näherungslösung des Minimalproblems, bei der nur ein bestimmter einfacher Typus von Schrödingerfz en zur Konkurrenz zugelassen wird.

$$2N\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sum_k (p_k^z)^2 + \sum_k (p_k^x)^2 + \left(\sum_k p_k^y\right)^2 + 2\sum_{k>l} (p_k^z p_l^z + p_k^x p_l^x + p_k^y p_l^y)$$

$$= 2n + (n_1 - n_2)^2 + 2\sum_{k>l} (\quad)$$

durch ihren Erwartungswerte bei $p = \frac{n}{2}$,
 $p_k^z = \sum p_k^z = n_1 - n_2$ ersetzt werden. Für
 diese Erwartungswerte findet man:

$$k \neq l \quad p_k^z p_l^z + p_k^x p_l^x + p_k^y p_l^y = 4 \frac{n_1 n_2}{n(n-1)}$$

$$1 - p_k^z p_l^z = 4 \frac{n_1 n_2}{n(n-1)}$$

$$(1 + p_k^z)(1 + p_l^z) = 4 \frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)} \quad \left. \vphantom{\frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)}}} \right\} (6)$$

$$(1 - p_k^z)(1 - p_l^z) = 4 \frac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)}$$

$$\sum_k (1 + p_k^z) = 2n,$$

Die Hamiltonfunktion lautet also für φ :

$$H = \frac{1}{2M} \sum p_k^2 - 2 \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} \sum_{k>l} [\mathcal{J}(r_{kl}) - \mathcal{L}(r_{kl})]$$

$$- \frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)} \sum_{k>l} \mathcal{K}(r_{kl}) + \frac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)} \sum_{k>l} \frac{e^2}{r_{kl}}$$

$$- n_1 D. \quad (7)$$

Die Symmetrieeigenschaften von $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in
 Bezug auf die Vertauschung der Partikel hängen
 sind wie bei den Atomen durch das Pauli-
 Prinzip vorgeschrieben. Der Atomkern erscheint

nach (7) als mechanisches System gleichartiger Massenpunkte, wobei die W.W. Energie zweier Massenpunkte jeweils durch den Ausdruck

$$U(r) = -2 \frac{n_1 n_2}{n(n-1)} [J(r) - L(r)] - \frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)} K(r) + \frac{n_2(n_2-1)}{n(n-1)} \frac{e^2}{r} \quad (8)$$

gegeben ist. Betrachtet man nun nach dem Vorbild der Thomas-Fermi-Methode den Kern als Gas freier Teilchen, die den Gesetzen der Fermi-Statistik folgen und durch die Kräfte (8) zusammengehalten werden, ist ferner $\rho(x)$ die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, so wird nach Fermi die kinetische Energie dieses Gases

$$E_{kin} = \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{5} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \int \rho(x)^{5/3} dx \quad (9)$$

und die Gesamtenergie des Atomkerns

$$E = \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{5} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \int \rho(x)^{5/3} dx \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \rho(x) \rho(x') U(|x-x'|) dx dx' - n \cdot D. \quad (10)$$

Die Dichteverteilung $\rho(x)$ wird aus der Forderung bestimmt, E solle unter der Nebenbedingung

A, B, C

$$\int \rho(x) dx = n$$

zu einem Minimum gemacht werden. Allerdings ist bei der Anwendung der Thomas-Fermi-Methode zu beachten, dass der approximative Ansatz (10) für die Energie nur unter gewissen Einschränkungen richtig ist. Wenn z. B. die $T_{\pm} \approx U(|x-x'|)$ die ~~da~~ in ihrem Verlauf dem Gamowberg ähnelt und für große n_1 und n_2 nur vom Verhältnis n_1/n_2 abhängt, für abnehmende Werte von $|x-x'|$ an einer bestimmten Stelle plötzlich außerordentlich stark zunimmt, d. h. wenn ~~st~~ sehr große Abstoßungskräfte die weitere Annäherung zweier Teilchen zu hindern suchen, so würde das Integral $\iint \rho(x) \rho(x') U(|x-x'|) dx dx'$ ~~divergieren~~ divergieren oder jedenfalls völlig unrichtige Werte für die potentielle Energie liefern, da es eben in Wirklichkeit nicht vorkommt, dass zwei Teilchen sich über den kritischen Abstand hinaus nähern. In diesem Falle erhält man eine sehr viel bessere Approximation an die Wirklichkeit, wenn man in Analogie zur Konstanten „b“ der van der Waalschen Gl. einen Minimalabstand zweier Teilchen und

entsprechend eine Maximaldichte ρ_0 einführt
 und dafür in der potentiellen Energie die Funktion
 $U(|x-x'|)$ für Werte von $|x-x'|$, die kleiner
 sind als der Minimalabstand zweier Teilchen,
 Null setzt. In der kinetischen Energie tritt
 dann an Stelle von $\rho^{5/3}$ (Anzahl der Teilchen
 pro Kubikzentimeter; ρ , multipliziert mit
 der mittleren Energie der einzelnen Partikel; $\rho^{2/3}$)
 in genauer Analogie zur van der Waalschen
 Gleichung $\rho \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-2/3}$. Statt Gleichung (10)
 erhält man so den allgemeineren Ansatz:

$$E = \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \int \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-2/3} \rho \, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \rho(x) \rho(x') U_0(|x-x'|) \, d\tau \, d\tau' - n \cdot D, \quad (11)$$

wobei U_0 für U gesetzt wurde, um anzudeuten,
 daß in $U(|x-x'|)$ die Beiträge, für die $|x-x'|$
 kleiner ist als der Minimalabstand, wegzulassen
 sind. Durch Variation von ρ unter Berücksichtigung
 der Nebenbedingung $\int \rho \, d\tau = n$ folgt aus (11) die

Beziehung:

$$\frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-5/3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{3}{5\rho_0}\right) + \int \rho(x') U_0(|x'-x|) \, d\tau' - \lambda = 0. \quad (12)$$

Multipliziert man Gleichung (12) mit $d\rho/dn$ und integriert über dc , so erkennt man aus (11) und (12):

$$\lambda = \frac{dE}{dn} \quad (13)$$

$U_0(x) U_0(y)$ wird dabei als unabhängig von n angenommen. Die Gleichung (12) gilt nur in dem Gebiet, in dem ρ von Null verschieden ist. Außerhalb dieses Gebiets ist der Zustand des Systems durch die Forderung $\rho = 0$ vollständig bestimmt. Durch Multiplikation von (12) mit $\frac{1}{2}\rho$ und Integration erhält man

$$\frac{\hbar^2}{M} \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \int \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-2/3} \left(\rho + \frac{2}{5}\frac{\rho^2}{\rho_0}\right) dc$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \rho(x)\rho(x')U_0 dcd c' - \frac{n}{2} \frac{dE}{dn} = 0, \quad (14)$$

und durch Vergleich mit (11):

$$E - \frac{n}{2} \frac{dE}{dn} = \frac{\hbar^2}{M} \frac{2\pi}{15} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \left[\int \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-2/3} \rho dc \right.$$

$$\left. - 2 \int \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^{-5/3} dc \right]. \quad (15)$$

Verwendet man diese Formel zur Diskussion der Abhängigkeit der Massendefekte von n_1 und n_2 ,

so folgt zunächst aus den Aston'schen Messungen, dass für die Kerne eine maximale Dichte ρ_0 existiert, die größenordnungsmäßig übereinstimmen muss mit der Dichte ρ_0 existiert, die größenordnungsmäßig übereinstimmen muss mit der Dichte des α -Teilchens. Solange nämlich, wie in der üblichen Thomas-Termi-Methode, $\frac{1}{\rho_0} \ll \frac{1}{\rho}$ angenommen werden kann, ist die rechte Seite von (15) positiv, es müsste daher $-E$ als Funktion von n stärker als $\text{const} \cdot n^2$ anwachsen. Empirisch nimmt jedoch $-E$ für klein n etwa proportional n , für große n noch langsamer zu. Die Funktion $V(|r-r'|)$ steigt also offenbar für abnehmender Werte von $|r-r'|$ in der gegend kleiner Abstände sehr stark an. Für die schweren Kerne lässt sich daraus schließen, dass die Dichte in einem großen Teil des Kerns nahe am Wert ρ_0 liegt und außen in einem relativ kleinen Bereich nach Null absinkt. Wenn daher die $J(r_{k\ell})$, $K(r_{k\ell})$, $L(r_{k\ell})$ als Funktionen des Abstandes rasch abnehmen, so wird sich für große n ($n/m = \text{const}$) die Energie nach (15) in der Form:

$$E = -an + bn^{5/2} + C \quad (16)$$

darstellen lassen (dabei rührt das Glied - an von den rasch abnehmenden Kräften, das Glied $\propto n^{5/3}$ von den Coulombkräften her), wie in Teil I bei der Diskussion der Stabilitätskurven implizite angenommen wurde.

Da aus der Symmetrie des Problems folgt, dass $\rho(r) = \rho(r)$ kugelsymmetrisch ist, so dürfte es auch im allgemeinen Fall nicht allzu schwierig sein, Näherungslösungen für $\rho(r)$ zu finden, wenn $U(r)$ gegeben ist. Einstweilen wird man umgekehrt aus den empirisch gefundenen Massendefekten auf den Verlauf der Funktion $U(r)$ zu schließen suchen.

Überträgt man die eben durchgeführten Überlegungen mutatis mutandis auf einen Atomkern, den man als aus α -Teilchen und Neutronen aufgebaut betrachtet, so kann man den parabelartigen Anstieg der auf He bezogenen Massendefektkurven bei leichten Elementen mit dem Resultat in Verbindung bringen, dass für $\rho \ll \rho_0$ die Größe $-E$ stärker als $\text{const} \cdot n^2$ anwachsen muss. Das spätere Umbiegen der Kurven beweist (innerhalb der für das hier

verwandte Verfahren charakteristischen
(Approximation) auch hier wieder die Existenz
eines Minimalabstandes für α -Teilchen.

§ 2. Streuung von γ -Strahlen am Atomkern.
Die von Tarrant, Meitner, Hupfeld, Chao
und Jakobsen¹⁾ experimentell untersuchte
Streuung harter γ -Strahlen an Atomkernen
wurde in Teil II als kohärente Streuung
der Neutronen interpretiert, die an Roschay-
stellen ~~von~~ noch durch die im allgemeinen
vernachlässigbar kleine Protonenstreuung
modifiziert werden kann. Für diese Deutung
spricht die experimentelle Tatsache, daß
die Intensität der Streustrahlung dem
Quadrat der Neutronenzahl ungefähr
proportional ist. Der hieraus gezogene
Schluß, die Frequenz des gestreuten Lichtes
müßte mit der des einfallenden
Übereinstimmen [Rayleigh-Streuung²⁾],
beruhte jedoch auf einem Irrtum, der im
folgenden richtiggestellt werden soll.

¹⁾ G. Tarrant, 128, 345, 1930 Meitner u.

H. Hupfeld, Naturwiss. 18, 534, 1930 etc

²⁾

In mehratomigen Molekülen schwingen auch bei der Ramanstreuung die Elektronenwolken der einzelnen Atome in Phase. Soweit also ein Atomkern mit einem Molekül verglichen werden darf (siehe hierzu § 3), wird auch die Intensität des Ramanlichtes, das von kohärenter Neutronenstreuung herrührt, dem Quadrat der Neutronenzahl proportional sein.

In diesem Vergleich entsprechen die Neutronen den Atomen mit ihren Elektronenwolken, die von den Protonen herrührende Streustrahlung wird in beiden Fällen ~~ver~~ vernachlässigt. Die Energie der einfallenden Lichtquanten kann bei Molekülen und Kernen als klein gegen die Bindungsenergie der negativen Ladungen an die schwereren Massen angenommen werden; als Bindungsenergie des Neutrons gilt nach Teil II ein Wert der \approx Ordnung $137mc^2$,

Die Polarisierbarkeit der Atome wird ungefähr durch ihr Volumen gegeben; in Analogie hierzu folgt aus σ_N

$= 1,5 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$ bei $h\nu = 5,15 \text{ mc}^2$
(vgl. Teil II, S. 161) für die Polarisierbarkeit des Neutrons:

$$(17) \quad \alpha_N = \left(\frac{c}{2\pi\nu} \right)^2 \sqrt{\frac{3\sigma_N}{8\pi}} = 10,7 \left(\frac{e^2}{\text{mc}^2} \right)^3$$

Der Wert von α_N dürfte im hier betrachteten Frequenzgebiet ($h\nu < 13,7 \text{ mc}^2$) nicht mehr ~~so~~ stark von ν abhängen; σ_N wird also ungefähr mit der vierten Potenz von ν anwachsen. Der Umstand, daß die Polarisierbarkeit des Neutrons etwa zehnmal größer als zu sein scheint als sein Volumen, hängt vielleicht mit den der bisherigen Theorie fremden Zügen in der Struktur des Neutrons zusammen.

Betrachtet man die Neutronen und Protonen im Kern als ruhend, so sendet der Kern unter Einfluß einer Strahlung, deren Wellenlänge groß gegen die Kerndimensionen ist, kohärentes Rayleighsches Streulicht aus, dessen Intensität

proportional dem Quadrat der Neutronenanzahl anwächst; allerdings kann bei hinreichend dichter Lagerung der Teilchen das Dipolmoment des einzelnen Neutrons — und damit die Intensität der Streustrahlung — durch den Einfluss geändert werden, den die anderen Partikeln teils vermöge ihrer starken elektrischen Felder (vgl. den Entmagnetisierungsfaktor bei Ferrromagneten¹⁾) teils durch die nach der bisherigen Theorie nicht beschriebene eibbaren, für die Kerne charakteristischen Kraftwirkungen auf ein Neutron ausüben.

Aus diesem Grunde ändert sich der Charakter der gestreuten Strahlung, wenn sie die Neutronen und Protonen im Kern bewegt; die Amplitude der Rayleighstrahlung variiert dann wegen des wechselnden Abstandes der Partikeln im Kern periodisch, die Streustrahlung spaltet auf so in Strahlung verschiedener Frequenzen — in genauer Analogie zu den Raman-spektren der Moleküle¹⁾. Für die gesamte gestreute

¹⁾ Blazek, ZS. f. Phys. 70, 84, 1951.

Intensität gilt bei den ~~festen~~ Molekülen eine einfache Summenrelationen: Die Summe der Amplitudenquadrate der verschiedenen Streuwellen ist gegeben durch diesen Mittelwert des Amplitudenquadrats des Rayleighlichtes, wenn die Mittelung bei ruhenden Teilchen über alle ihre Lagen (mit dem durch die Wellen f_{λ} gegebenen statistischen Gewicht) ausgeführt wird. Dieser Sumsatz gilt ebenso für den Atomkern; hat die einfallende Strahlung eine Frequenz von der gleichen Ordnung wie die der Partikelschwingungen, so ist der Satz noch für die Quadrate der S Oszillatoramplituden richtig, nicht mehr jedoch für die Intensität der emittierten Strahlung. In einem Punkt unterscheiden sich die Atomkerne wesentlich von den Molekülen: Während die Atome im Molekül mit relativ kleinen Amplituden um ihre Gleichgewichtslage schwingen, ändert sich der Abstand der Neutronen und Protonen im

Kern periodisch um Beträge seiner eigenen
Größenordnung, wie aus der von Bohr²⁾
hervorgehobenen Beziehung zwischen Kern-
dimensionen und Massendefekt hervorgeht.
Deshalb ist bei den Molekülen das Raman-
licht wesentlich schwächer als das Rayleigh-
sche Streulicht, bei den Atomkernen können
sie gleich intensiv sein. Die Gesamtstreuung
des Kerns wird also qualitativ entsprechend
den Überlegungen im Teil II mit dem
Quadrat der Neutronenanzahl und der
vierten Potenz der Frequenz der einfallenden
Strahlung (vgl. den experimentell sehr
großen Unterschied der Kernstreuung für
 $\lambda = 6,7 \cdot 10^{-11}$ cm. und $\lambda = 4,7 \cdot 10^{-11}$ cm.)
anzuwachsen, die Intensität verteilt sich
aber zu Teilen gleicher Größenordnung auf
die unverschobene Linie und die nach dem
Gebiet der langen Wellen verschobenen
Ramanlinien. Außer dieser Streustrahlung
muss dann in den Experimenten noch Licht
von der Frequenz der Kerneigenenschwingungen
auftreten, da der Kern nach einem Smekal-
2) Convegno di Fisica Nucleare, Rom 1952.

ischen Streuakt stets in einem angeregten Zustand zurückbleibt,

§ 3. Diskussion der Annahmen über die Natur des Neutrons. Die hier vertretene Auffassung über die Natur des Neutrons ist durch die Experimente nicht erzwungen. Die Zertrümmerungsversuche erlauben z. B. auch, das Neutron als einen unzerstörbaren Elementarbaustein nach Art von Proton und Elektron aufzufassen.¹⁾ Diese Annahme drückt sich zunächst in der Hamiltonfunktion darin aus, daß die Austauschglieder ($T(\gamma_{kl})$) wegfallen, es bleibt nur eine einfache Wechselwirkungsenergie ($L(\gamma_{kl})$) von Proton und Neutron übrig. Für die Frage nach den Massendefekten und der Struktur der leichten Kerne würden die

Von San-ichiro Mizushima

Streuung von Atomen
v₁

Phys. 28. 32, 1951
S. 798

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

$$\psi = 0 \text{ für } r^2 = a^2$$

$$\psi_0 = e^{-ikx} = e^{-ikr \cos \theta} \quad (1)$$

$$= \sum_0^{\infty} (-1)^n e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) \frac{f_n(kr)}{kr} P_n(\cos \theta)$$

$$f_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$$

(Besselsche Funktion erster Art)

$$\psi_1 = \sum C_n \frac{\zeta_n(kr)}{kr} P_n(\cos \theta)$$

$$\zeta_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)$$

(Hankelsche Funktion zweiter Art.)

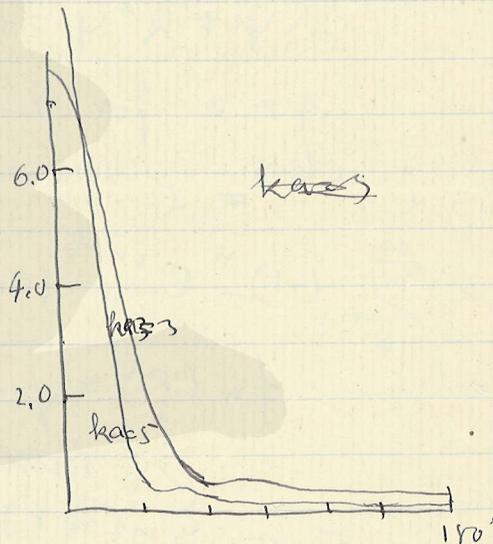
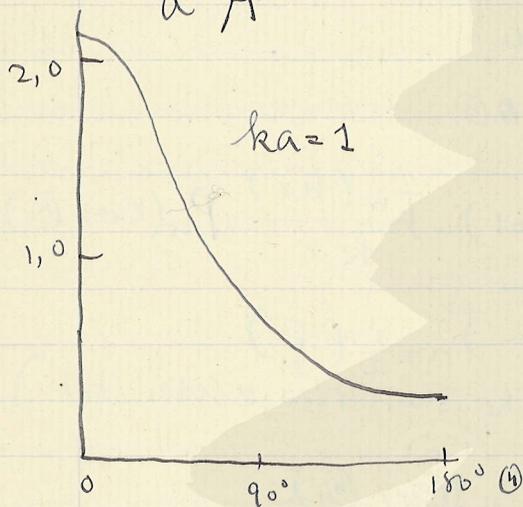
$$(\psi_0 + \psi_1)_{r=a} = 0$$

$$C_n = -(-1)^n A e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) \frac{f_n(ka)}{\zeta_n(ka)}$$

$$\psi_1 = -iA \sum_0^{\infty}$$

$$\psi = A e^{-ikx} - iA \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{f_n(ka)}{\zeta_n(ka)} P_n(\cos \theta) \times \frac{e^{-ikr}}{kr}$$

$$\frac{|Y_1|^2 r^2}{a^2 A^2}$$



Über die Kerntheorie
Von Ettore Majorana

DS. 82(3-4)
137 1953

Die Entdeckung des Neutrons, d. h. eines schweren
und

©2022 YHAL, YIP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室
Nicht relativistisch

Born und S. Flugge:

Zur Quantenmechanik des Zweiatom systems

Ann. (5) 16, (7) 768.

M. Teichmann: The Theory of Crystal-Photoeffect

E. J. Williams: Applications of the method of 105

Impact Parameter in Collisions 163

Massey and Mohr: The Collision of Slow Electrons
with atoms II. General Theory and
inelastic Collisions 187

Proc. Roy. Soc Vol 139 (No. A837), 1933

V. Fock: Über Austauschenergie

ZS. 81(3-4) S. 195, 1933

©2022 IHAL, IHP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

Relativistisch

Ettore Majorana: Über die Kerntheorie.
ZS.f. Phys. 82 (3-4), 137-145.

E. N. Gapon: Zur Theorie des Atomkerns III
ZS.f. Phys. 82 (5-6) 404-407

Schonland and Viljoen: On a Penetrating
Radiation from Thunderclouds.
Proc. Roy. Soc. 139. p 314, 1933.

Massey: The Passage of Neutrons through Matter
Proc. Roy. Soc. 138 p. 460, 1932

J. Solomon: Sur l'interaction entre Neutrons et
Protons (Journal de Physique
Tome IV 2^e, 210, 1933)
Avril

Configuration space \rightarrow Dirac \leftarrow R. Q. M
as 3dim. / quantised wave \rightarrow / Übergang
zustand.