

170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

N224

BOX 43



NOTE-BOOK
FOR
ACADEMY AND MIDDLE SCHOOL
MADE BY BUNUDO

Quantenelektrodynamik

IV

19 34



B. U. D.



0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200

M. Born:

E. Fermi: Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I. (ZS.f. Phys.
88, 161, 1934)

(Received August 9, 1933)

©2022 IHAL, ITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field

By Max Born

(Proc. Roy. Soc. 143, 410, 1934)

Introduction 437

Existing attempts[†] to apply the quantum theory to the electromagnetic field are open to serious objections. Above all, the time is treated differently from the space coordinates; the quantities defining the state (e.g., field strengths) are developed in Fourier series according to their space distribution, but the Fourier coefficients are not considered as classical functions of the time but as quantum oscillators. Also the subsequent development of these principles into formulae, in which the field quantities are operators depending on position in space, does not affect the fundamental distinction between time and space variables. This is also shown by the fact that the relativistic invariance cannot be derived simply from the symmetry of the formulae in the four world coordinates, but must be artificially imposed and demonstrated by a complicated proof.

Further, it is not a self-contained theory.

[†] Cf. Rosenfeld, "La théorie quantique des champs",
'Conférences faites à l'Institut Henri Poincaré' (1931),
or Pauli, § 6, 'Handbuch der Physik', 2nd ed., vol. 24.

of the electromagnetic field, but a superposition of Maxwell's electromagnetic field on the material field of Schrödinger or Dirac, in which the elementary particle, and consequently occur as point charges. Thus there is no idea of the radius of the particle, and consequently no rational notion of mass, not to mention a theory of the ratio of the mass of a proton to that of an electron. In addition to these fundamental difficulties there are others, such as that of the infinitely great "Nullpunktsenergie," which is avoided by an artificial modification of the formalism.

Whether it is possible, through the generalization of the approved principles of quantum theory mechanics, to create a field theory agreeing with reality can first be known when this generalization has been systematically undertaken. This is attempted here. Unfortunately, the mathematical formalism is so unusual and the physical interpretation so difficult, that I have been unable to obtain results capable of test. As a

preliminary the problem is to examine and distinguish between the possible methods.

I believe, however, that I have found an important result in classical electrodynamics. For the formalism shows clearly the Maxwell's equations in the original form are not compatible with the suggested quantum laws; and they have to be replaced by another set of equations, which are a special form of Mie's general field theory. I have studied the properties of this field by classical methods, and found a number of interesting results, the chief of which is the existence of an electron with finite radius and finite energy, whose potential agrees with Coulomb's law for large distances. This electron behaves in external fields like the classical point-charge, provided that the fields are almost constant in a region ~~comparable~~ large compared with the dimensions of an electron; but it may behave quite differently for short waves. It has not yet been possible to interpret these considerations according

to the quantum theory, but it seems that the new theory field laws may have the properties necessary to explain the inconsistencies of the older theories.

In order to bring the quantization of the field-equations (with more than one independent variable, space and time) into closer analogy with the quantization of the mechanical equations of motion (with one independent variable, time), it is necessary to reduce the process for the latter case to a form capable of generalization. The usual expositions are not entirely suitable. We begin, therefore, with a simple mechanical example, that of the motion of a particle in a plane; and we will emphasize the properties that hold for the case of more than one independent variable.

§ 1. Classical Mechanics of the Particles in the Plane

As we are concerned with a mathematical

analogy, we do not retain the usual notation, but denote the time by x and the plane Cartesian co-ordinates by y and z , which are functions of x . Their differential coefficients with respect to x are denoted by y' and z' . We write the Hamiltonian Principle in complete generality as a problem in the calculus of variations,

$$\delta \int L(x, y, z, y', z') dx = 0. \quad (1.1)$$

As yet, we do not make use of the fact that the Lagrangian is the difference of the kinetic and potential energies, the Euler-Lagrangian equations of motion are

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Now instead of following the usual method, which is to reduce these equations to canonical form and develop the theory from the maintenance of this form (canonical transformation), we take another property as our starting point, namely, Hilbert's "Independence Theorem."[†] We express this in the following

[†] German "Unabhängigkeitssatz". I attended Hilbert's lectures on "Variationsrechnung" 30 years ago, and

form.

The three quantities called impulses,

$$\left. \begin{aligned} p_x &= L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} - z' \frac{\partial L}{\partial z'} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial y'} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial z'} \end{aligned} \right\} (1.3)$$

are functions of x, y, z, y', z' . Now y' and z' can always be chosen as functions of x, y, z (as special distribution), namely,

$$y' = \eta(x, y, z), \quad z' = \zeta(x, y, z) \quad (1.4)$$

so that the integral

$$S = \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz)$$

$$= \int \{ L + p_y (y' - \eta) + p_z (z' - \zeta) \} dx \quad (1.5)$$

extending over a curve C in the x, y, z -space, is independent of the form of the curve and a function of the two end-points alone. This is the "action function". We have

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_z. \quad (1.6)$$

There are different methods for the determination
 would not like to omit to thank my distinguished
 teacher for their lasting stimulation.

of (1.4). From (1.6), we obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_x}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} (1.7)$$

These are three partial differential equations for η, ζ of which, however, essentially only two are independent, since the divergence of the left-hand sides vanishes identically.

Every solution of these equations satisfies the "Independence Theorem". At the same time, the expressions (1.4) exhibit [†] intermediate integrals of the equations of (1.2). Conversely [†] the proof can be demonstrated by simple calculation, using suffixes to denote differentiation, and using (1.3), the equations (1.7) can be written out in detail as follows: —

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z} &= (L_{\zeta\eta} \eta_y + L_{\zeta\zeta} \zeta_y + L_{\zeta y}) \\ &\quad - (L_{\eta\eta} \eta_z + L_{\eta\zeta} \zeta_z + L_{\eta z}) \\ &\quad \text{etc} \end{aligned}$$

Consequently

$$0 = L_z - (L_{\zeta\eta} y'' + L_{\zeta\zeta} z'' + L_{\zeta y} y' + L_{\zeta z} z' + L_{\zeta x})$$

etc

which are the eq. of motion (1.2) written out in detail.

a space-distribution (1.4) satisfying the "Independence Theorem" can be obtained by the elimination of parameters from suitable families of curves with two parameters, called a "field". Finally, it is not necessary to determine the functions η, ζ as the \underline{p} can be directly determined from a partial differential eq.

From two of the eqs (1.6), namely,

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_z, \quad (1.8)$$

whose right-hand sides are functions of x, y, z, η, ζ , we obtain η and ζ as functions of $x, y, z, \partial S/\partial y, \partial S/\partial z$; and

substitute these expressions for η and ζ in the first of equations (1.6). Then $p_x(x, y, z, \eta, \zeta)$ becomes a function of $x, y, z, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$, which, with its sign changed, we denote in the usual manner as the Hamiltonian, $H = -p_x$. We obtain, then the - Jacob differential equation

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}) = 0. \quad (1.9)$$

It is sufficient to know any general integral of the equation, i.e., one which contains two constants of integration, α and β . We put

$$\frac{\partial S(x, y, z, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = a \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = b, \quad (1.10)$$

and solve these equations for y and z . The resulting 4-parameter family of curves in the x, y, z space is identical with the totality of motions (solutions of (1.2)).† Here it has been supposed that the time x does not disappear through the differentiation in (1.10).

In the interpretation of the transformation theory, the equations (1.8) and (1.10) represent a canonical transformation with the generating function (or transf. fun.) S for the change from the old co-ordinates y, z and impulses p_y, p_z to the new α, β ; a, b . The fun. S can also be defined by the integral

$$S = \int_{x_0}^x h dx, \quad (1.11)$$

where the integration is along a path (solution of (1.2)) extending from the point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ to the variable point $P(x, y, z)$. Then † The proof of this theorem must be omitted. A good summary, and a generalization to more than one indep. variable

The paths starting from P_0 form a field, and consequently the equations (1.4) hold, so that the extra terms in (1.5) disappear. †

As an example we consider the case of no forces. Then L becomes simply the kinetic energy (the mass is taken to be unity)

$$L = \frac{1}{2} (y'^2 + z'^2) \quad (1A)$$

From (1.3) we obtain

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{1}{2} (y'^2 + z'^2) & p_y &= y' & p_z &= z' \\ H &= \frac{1}{2} (p_y^2 + p_z^2) \end{aligned} \quad (1B)$$

and the Hamilton's eq. (1.9), becomes

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0 \quad (1C)$$

Every solution of the diff. eq, which contains two constants, gives according to (1.10), all possible paths. We will give two solutions, and then show

(used later), is given by Prange "Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppel-Integrale," Gött. Diss. 1915 (W. Fr. Kaesther, Göttingen).

† Dirac bears the def. of (1.11) of the Transf. $p_2 S$ in an inter. paper () in which he attempts to generalize the fund. ideas of the T. T. to the case of more than one indep. variable. Here we take another pt. of view as our sta

how and why the quantum theory favours a special form of solution.

I. - We consider first the solution

$$S = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha y + \beta z. \quad (1E)$$

From (1.10), we have

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\alpha x + y = a \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\beta x + z = b, \quad (1F)$$

i.e., the totality of uniform motions in straight lines

$$y = a + \alpha x, \quad z = b + \beta x, \quad (1G)$$

as must, indeed, be the case.

II. - As our second solution, we consider

$$S = -\frac{1}{2}\alpha^2 x + \alpha \sqrt{(y-\beta)^2 + z^2} \quad (1H)$$

From (1.10), we now obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -\alpha x + \sqrt{(y-\beta)^2 + z^2} = a \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \alpha \frac{y-\beta}{\sqrt{(y-\beta)^2 + z^2}} = b \end{aligned} \right\} \quad (1K)$$

The solutions for y and z are

$$y = \frac{ab + \alpha\beta}{\alpha} + bx \quad z = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - b^2} + \sqrt{\alpha^2 - b^2} x \quad (1L)$$

and again represent the totality of uniform motions in straight lines.

Apart from these two solutions, there are infinitely many other possible ways of choosing the p_x $S(x, y, z, \alpha, \beta)$; indeed, so many ways as there are families of surfaces with one parameter in the x, y, z -space, $f(x, y, z) = \beta$. It is only necessary to find the solutions of (1.9) which reduce to the surfaces $f(x, y, z) = \beta$ for $\alpha = 0$.

§ 2. The Quantum Mechanics of a Particle in the Plane.

We come now to the question of the change over to quantum mechanics. As is well known, for this there is the following formal method.

The equations (1.6) are replaced by †

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} = p_x \quad \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} = p_y \quad \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z} = p_z, \quad (2.1)$$

this is, the impulse components are replaced by operators, which act on functions $\psi(x, y, z)$ of space and time. Then, out of the first order diff. eq. (1.9) we obtain the Schrödinger diff. eq.

† The units are chosen so that $\hbar = 2\pi$

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + H(x, y, z, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z}) \right\} \psi = 0 \quad (2.2)$$

This rule has the advantage of holding for arbitrary $f_{\underline{z}}$ h ^{or} H , but it does not display clearly the inner meaning of the process. We give, therefore, another method, which proceeds from the special case of motion under no forces. This motion is distinguished by the fact that h , and thus also H , is not an explicit $f_{\underline{z}}$ of x, y, z ; according to (1A) we have

$$h = \frac{1}{2}(y'^2 + z'^2), \quad H = \frac{1}{2}(p_y^2 + p_z^2) \quad (2.3)$$

Our conclusions hold also when h is an arbitrary $f_{\underline{z}}$ of y', z' , i.e., H is an arbitrary $f_{\underline{z}}$ of p_y, p_z . The wave mechanics must obtain the classical mech. as a limiting case, which is obtained by introducing Planck's const. h in (2.1) and making $h \rightarrow 0$; the wave mech. surfaces $\psi = \text{const.}$ become in this meaning limiting case the surface $S = \text{const.}$, where S denotes the phase of the wave. There is thus the asymptotic connection

$$\psi \rightarrow e^{iS} \quad (2.4)$$

where S could be any solution of eq. (1C)

(or, more generally, of (1.9)). Now, to change over from the limiting case to a strict wave mechanics eq., we use an entirely particular solution of (1.6), namely the linear (1.5),

$$S = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha y + \beta z, \quad (2.5)$$

and apply the principle of superposition, we construct the wave packet

$$(2.6) \quad \Psi(x, y, z) = \iint \phi(\alpha, \beta) e^{i[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha y + \beta z]} d\alpha d\beta,$$

having an arbitrary amplitude $\phi(\alpha, \beta)$. The Ψ satisfies identically the equation

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (2.7)$$

i.e., the Schrödinger wave eq. (2.2) with $H = \frac{1}{2}(p_y^2 + p_z^2)$. Exactly the same holds for an arbitrary $\phi \equiv H(p_y, p_z)$. The wave $\phi \equiv$

$$(2.8) \quad \Psi(x, y, z) = \iint \phi(\alpha, \beta) e^{i(-H(\alpha, \beta)x + \alpha y + \beta z)} d\alpha d\beta$$

then satisfies the eq.

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + H \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \Psi = 0. \quad (2.9)$$

Now $|\Psi|^2 dy dz$ is the probability that the

particle is in the space element $dy dz$ at time x .

By (2.6) the linear solutions

$$S = -H(\alpha, \beta) x + \alpha y + \beta z \quad (2.10)$$

of the Hamiltonian - Jacobi diff. eq. (1.9) have are preferred to all other solutions, e.g., the f_{\pm} (1.8) given in § I, II. clearly $S = \text{const.}$, as given by (2.5), represents a plane wave, while (1.8) denotes a spherical wave. Other solutions for S give waves of different forms.

Instead of taking these curved wave surfaces out of the classical mech. and introducing them into the suitably modified eq. (2.4), the wave mech. limits itself to plane wave surfaces and builds up all phenomena through the superposition of elementary plane waves with variable amplitudes. This point is absolutely essential for the generalization, which we shall later attempt.

If there is a potential energy, i.e., if H is a f_{\pm} of y and z (and possibly of the time x), as well as of p_y and p_z , then the generalization

of eq. (2.9) to (2.2) suggests itself; and this is justified by experiments etc. However, for our purpose, this is not necessary:

§ 3. The classical Mechanics of the One-dimensional Continuum.

We consider now a continuously extending medium, which we assume to be one-dimensional (vibrating string). There are two independent variables x, y , of which one is the time t , say, and we look for a function $z(x, y)$. We denote differentiation again by suffixes, so that

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

The Hamiltonian Principle becomes a variation problem of the form†

$$\delta \int L(x, y, z, z_x, z_y) dx dy = 0, \quad (3.1)$$

from which we obtain the eq. of motion

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial z_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

We now formulate anew the "Independence Theorem", and define the corresponding

† The formulae in this section are numbered so that they correspond to those in § 1.

"Impulses"

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial z_x} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial z_y} \quad (3.3)$$

$$p_z = -L + z_x \frac{\partial L}{\partial z_x} + z_y \frac{\partial L}{\partial z_y}$$

which are f_zs of x, y, z, z_x, z_y . We now consider the question whether we can attach to each point x, y, z a vector ξ, η, ζ , such that these vectors are the normals to a family of surfaces with one parameter, namely,

$$z_x = \xi(x, y, z), \quad z_y = \eta(x, y, z); \quad (3.4)$$

and further such that the integral

$$(3.5) \left\{ \begin{aligned} S &= \iint (p_x dy dz + p_y dz dx + p_z dx dy) \\ &= \iint \{ L + p_x(z_x - \xi) + p_y(z_y - \eta) \} dx dy \end{aligned} \right.$$

extending over a surface F in the x, y, z space, should depend only on the boundary curve C of the surface, and be indep. of the shape of the surface F . (The meaning of the second of eq. (3.5) is immediately clear;—

$L, p_x = \frac{\partial L}{\partial z_x}, p_y = \frac{\partial L}{\partial z_y}$ are explicit f_zs of $x, y, z, \xi(x, y, z), \eta(x, y, z)$, and S depends on x, y, z ; $z(x, y)$ is the surface F . In the first F \iint should be noticed that the sign in (3.5) has been chosen opposite to that in (1.3)

symmetrical eq. (3.5) p_x, p_y, p_z are, in the same way, fns of x, y, z ; further, if do is the surface element of \mathcal{V} , then

$dy dz = \sum x dx dy = \cos(\nu, x) do$ etc., are the projections of do on the co-ordinate planes.)

As the condition of the independence of the integral S of the form of the surface \mathcal{V} , we obtain two partial diff. eqs of the first order for ξ, η . The first is obtained from (3.4) by using the condition, that

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

, so that

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (3.7A)$$

The second condition is obtained by ~~eq.~~ ^{nat} equating the integral (3.5) over two different ~~surfaces~~ surfaces with the same boundary curve C , and enclosing a volume \mathcal{V} . Then using Gauss' Theorem[†], the difference of the two surface integral is equal to the volume integral of the divergence of the vector p_x, p_y, p_z over the volume \mathcal{V} . Since the surface integrals are equal, the volume

† or Green's theorem: -

$$\iiint \text{div } A \, dx dy dz = \iint A_r \, do$$

integral must vanish for any closed surface, so that its integrand

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0. \quad (3.7)_B$$

If ξ, η are any solutions of equations (3.7A) and (3.7B), then the independence of the integral S of the form of the surface \bar{r} is ensured. This integral has then, the form

$$S = \int (X dx + Y dy + Z dz), \quad (3.5A)$$

a line integral over the boundary curve C . From Stokes' theorem we have

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = p_x, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = p_y, \quad (3.6)$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = p_z;$$

and eq. (3.7B) is identically satisfied. Three arbitrary forms X, Y, Z , which can further be subjected to the condition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

give; according to (3.6), values of p_x, p_y, p_z for which the value of S is independent of the shape of the surface \bar{r} .

It can further be shown that, for ~~eq~~ each solution of the equations (3.7A) and (3.7B), the formulae (3.4) represent an integral of the eq. of motion (3.2).[†]

Conversely, a pair of functions ξ, η , satisfying (3.7)A and (3.7)B, i.e., that make the integral S independent of the shape T , can be obtained from each solution $z(x, y, a)$ of (3.2) with one parameter a . (It is only necessary to express the parameter a as a fn of x, y, z , using $z = z(x, y, a)$, and then to substitute this value in $z_x = z_x(x, y, a)$ and $z_y = z_y(x, y, a)$.)

In order to make the analogy with the mechanics of a particle more apparent, we consider the

$$\begin{aligned} \text{† Proof: } 0 &= \frac{\partial}{\partial x} L_z + \frac{\partial}{\partial y} L_\eta + \frac{\partial}{\partial z} (-L + \xi L_z + \eta L_\eta) \\ &= L_{zx} + L_{z\xi} \xi_x + L_{z\eta} \eta_x + \dots \end{aligned}$$

in which, from which we have, using

$$\begin{aligned} \xi &= 2x, & \eta &= 2y \\ \xi_x + \xi_z \xi &= z_{xx} & \eta_y + \eta_z \eta &= z_{yy}, \\ \xi_y + \xi_z \eta &= \eta_x + \eta_z \xi & &= z_{xy}, \end{aligned}$$

Thus the eq.

$$0 = (L_{z\xi} z_{xx} + L_{z\eta} z_{xy} + L_{z\xi} z_x + L_{z\eta} z_y) - L_z$$

function S as a special type of functional.[†] Namely, as a "linear function", and define the derivatives of a line- $f_{\underline{z}}$ with respect to the surface components of the boundary curve C . § By these latter is meant the surface areas of the projections of C on the coordinate planes:

$$(3.5^*) \quad \sigma_{yz} = \int dy dz \quad \sigma_{zx} = \int dz dx \quad \sigma_{xy} = \int dx dy$$

then, for every line integral of the form (3.5), we have clearly

$$(3.5^{**}) \quad \frac{\partial S}{\partial(\sigma_{yz})} = \lim_{C \rightarrow \text{point}} \frac{S}{\sigma_{yz}} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \text{ etc.},$$

where the limit is to be taken by contracting the curve C to a point. With this symbolism we can write for (3.6)

$$(3.6A) \quad \frac{\partial S}{\partial(\sigma_{yz})} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial(\sigma_{zx})} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial(\sigma_{xy})} = p_z, \text{ etc.}$$

in complete analogy with (1.6).

Let us suppose again that ξ and η are determined as functions of x, y, z , p_x, p_y from the first two equations (3.3), and then substituted in the

† "Functional" means $f_{\underline{z}}$ of a $f_{\underline{z}}$.

§ Cf. Prange (loc. cit.), where reference is made for to further literature on the subject.

right-hand side of the third equation, this will give a $p_z - H(x, y, z, p_x, p_y)$ for p_z . By introducing the expressions (3.6A) into $p_z = -H(x, y, z, p_x, p_y)$, we obtain the analogy to the Hamiltonian-Jacobi diff. eq.

$$\frac{\partial S}{\partial(x,y)} + H(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial(y,z)}, \frac{\partial S}{\partial(z,x)}) = 0; \quad (3.9)$$

though this is not a partial diff. eq. in the ordinary sense, but a total diff. eq. †

It can be shown (Prange, loc. cit.) that the analogy is capable of further development, † in addition to satisfying this principal eq. (3.9), the line- p_z S must satisfy two more conditions, which are obtained from (3.7)A and (3.7)B. These are

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_z} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_y \partial p_z} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} \\ & - \frac{\partial H}{\partial p_x} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_z} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_y \partial p_z} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right) \\ & = \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_z} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_y \partial p_z} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ & - \frac{\partial H}{\partial p_x} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9A)$$

and
$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} = 0 \quad (3.9B)$$

where the meaning of the second derivatives are

for the totality of motions (solutions of (3.2)) can be obtained through \int_2 al differentiation, analogous to (1.10), from special solutions of (3.9) with arbitrary f_{α} s. This theory is most complicated, and does not appear to have facilitated the practical integration, as was the case in the mechanics of a particle. However, the possibility of developing a comparatively simple method for the quantization depends on the same ideas as were used in §2; namely, that for "force-free" systems only entirely special solutions (linear solutions) of (3.9) are necessary, and that all others ~~are~~ can be constructed by the help of the principle of superposition.

§4. A Suggested Q. M. of the one-dimensional Continuum.

A pure field theory corresponds to a force-free continuum in the mechanical sense. If there is only action through a medium, H can depend only on the field quantities p_x, p_y , and not are apparent from the def. (3.**)

In what follows these conditions play no part, as they are identically fulfilled for linear line- f_{α} s.

explicitly on the time x and the co-ordinates y, z .
 Then equation (3.9) becomes

$$\frac{\partial S}{\partial(xy)} + H \left(\frac{\partial S}{\partial(yz)}, \frac{\partial S}{\partial(zx)} \right) = 0 ; \quad (4.1)$$

and a solution is immediately obtainable,
 namely,

$$S = \alpha \sigma_{yz} + \beta \sigma_{zx} - H(\alpha, \beta) \sigma_{xy}, \quad (4.2)$$

where α, β are arbitrary constants, and σ_{xy} ,
 etc., are the surface components defined by
 (3.)*. Here the partial derivatives are clearly the
 usual derivatives:

$$\frac{\partial S}{\partial(yz)} = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{yz}} = \alpha, \text{ etc.} \quad (4.3)$$

This is shown by writing S explicitly as a
 line integral. We use the formulae

$$\sigma_{yz} = \int dy dz = \frac{1}{2} \int (y dz - z dy), \text{ etc.,}$$

for the surface components; and S , writing $\delta = H(\alpha, \beta)$,
 we have

$$S = \frac{1}{2} \int \{ \alpha (y dz - z dy) + \beta (z dx - x dz) + \delta (x dy - y dx) \} \\
 = \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

where

$$X = \frac{1}{2}(\rho z - \sigma y), \quad Y = \frac{1}{2}(\sigma x - \alpha z)$$

$$Z = \frac{1}{2}(\alpha y - \rho x)$$

thus, using (3.11), we obtain

$$\frac{\delta S}{\delta(\rho z)} = \frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta t} = \alpha; \text{ etc.,}$$

in accordance with (4.3)

We now apply the ideas, already developed in § 2 for the mechanics of a particle, to field theory. All possible quantum states of the field are obtained by the superposition of states of the form

$$e^{i(\alpha \sigma_{yz} + \rho \sigma_{zx} - H(\alpha, \rho) \sigma_{xy})};$$

that is, they are represented by integrals

$$(4.4) \quad \Psi(\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}) = \iint \phi(\alpha, \rho) e^{i(\alpha \sigma_{yz} + \rho \sigma_{zx} - H(\alpha, \rho) \sigma_{xy})} d\alpha d\rho$$

The question now is whether this hypothetical statement is capable of a physical interpretation. Ψ is a line-fun, because σ_{yz} and etc., are line funs. $|\Psi|^2 d\sigma_{yz} \times d\sigma_{zx}$ is the probability that, for given σ_{xy} , the surface components σ_{yz}, σ_{zx} lie in a definite interval $d\sigma_{yz}, d\sigma_{zx}$. Here σ_{xy} is the size of the space time region;

$$\begin{aligned}\sigma_{yz} &= \int dy dz = \int \frac{\partial z}{\partial x} dx dy \\ &= \int \{z(x_1, y) - z(x_2, y)\} dy\end{aligned}$$

can be interpreted as the integral of the field quantity $\frac{\partial z}{\partial x}$ over σ_{xy} , or as the space integral of the increase of z on parallels to the time-axis (x -axis); and there is a similar interpretation for σ_{zx} .

If the theory proposed here is correct, it must be pointless to fix the prob. of a field state more exactly than by these data[†]. But that is ~~one~~ in no way evident, and will require serious investigation. Here only the formal side of the problem will be developed.

ψ satisfies the diff. eq.

$$\left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial xy} + H \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial yz}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial zx} \right) \right\} \psi = 0, \quad (4.5)$$

which, according to (4.3), is not a real eq., but a partial diff. eq. of the usual type. We remark that the extension to "non-force-free" problems, where H contains also x, y, z , appears to be exceedingly difficult; for the meaning of "second real derivative", e.g. $\frac{\partial^2}{\partial (yz)^2}$ which

then occur, is not immediately clear.

Special difficulties characterize the calculation of definite mean values, which are given in the mechanics of a particle by matrix elements; for, in the space of the line μ_2 , the notion of an integral is not defined. We do not go further into this point here.

In comparison with this, the question of the invariance of the relativistic invariance transf. is trivial, on account of the symmetry in x and y . For, if H is invariant for linear substitutions which change $x^2 - y^2$ into itself, so also is the equation (4.5).

§ 5. Generalization to the Electromagnetic Field,

We indicate, now, how the proposed formalism can be generalized to the electromagnetic field.

There are four indep. variables,

$$(5.1) \quad x_0 = it, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad (x_4 = ix_0 - ic)$$

and four dependent variables, the potentials

$$(5.2) \quad \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3 \quad (\phi_4 = i\phi_0)$$

$$(5.3) \quad \phi_{kl} = \partial \phi_k / \partial x_l \quad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

The theory of H. P. can be considered as the special case, where Ω_{xy} is a rectangle with an infinitely small base dy (space) and a finite height x (time)

Now, the Lagrangian depends only on the antisymmetrical combinations of the ϕ_{kl} , namely, on the field-strengths

$$f_{kl} = \phi_{lk} - \phi_{kl} = -f_{lk}; \quad (5.4)$$

so that

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k>l} f_{kl}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k,l} f_{kl}^2. \quad (5.5)$$

The "six-vector" (antisymmetrical tensor), f_{kl} , can be split up into magnetic and electric field-strengths,

$$(5.6) \quad \mathbf{H} = (f_{23}, f_{31}, f_{12}), \quad \mathbf{E} = i(f_{14}, f_{24}, f_{34}),$$

so that we can also write

$$L = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2). \quad (5.5A)$$

Constructing the impulses in analogy to (3.3), we have

$$p_{kl} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{kl}} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}} = f_{kl}. \quad (5.7A)$$

The impulse corresponding to the indep. variables is denoted as a p_{α} of the ϕ_{kl} by p_0 , or as a p_{α} of the p_{kl} by $-H$. It is easily seen that

$$p_0 = \frac{1}{2} \sum_{k>l} p_{kl} = L, \quad (5.7B)$$

$$\text{i.e.,} \quad p_0 = -H = \frac{1}{2} \sum_{k>l} p_{kl} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (5.7C)$$

The Hamilton-Jacobi theory refers to an 8-Dim. $x_1, x_2, x_3, x_4, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ space. The "Indep. integral" is over a four dimensional manifold R_4 and is

$$S = \int \left\{ p_0 dx + \sum_{k>l} p_{kl} (d\phi_k dx^{(k)} - d\phi_l dx^{(l)}) \right\} \quad (5.8)$$

(k, l = 1, 2, 3, 4),

where \uparrow $dx = (\frac{1}{i}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$
 $= dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$,

and $dx^{(k)}$ is obtained from this by omitting the factor dx_k . The region of integration is thus determined by the seven components

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{i} \int dx = \int dx_0 dx_1 dx_2 dx_3, \\ \sigma_{kl} &= \frac{1}{i} \int (d\phi_k dx^{(k)} - d\phi_l dx^{(l)}) \\ &= \frac{1}{i} \int \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \phi_l}{\partial x_k} \right) dx = i \int f_{kl} da, \quad (5.9) \end{aligned}$$

the σ_{kl} being the integrals of the field strengths over the space-time region σ_0 .

The quantity S satisfies the H. J. diff. eq.

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_0} - \frac{1}{2} \sum_{k>l} \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \right)^2 = 0. \quad (5.10)$$

The change over to the quantum theory is obtained as before, namely, by constructing the linear solutions of (5.10) and using them as phases of elementary waves, from which wave packets Ψ are built up. These satisfy the total diff. eq. of the second order, which is obtained from (5.7c) by interpreting p_0 and p_{kl} (the components of \mathbf{H} and \mathbf{E}) as total diff. operators:

$$p_0 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \sigma_0}, \quad p_{kl} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.11)$$

$$\text{or } H = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{31}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{12}} \right) \quad (5.11A)$$

$$E = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{14}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{24}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{34}} \right).$$

We have then

$$\left(p_0 - \frac{1}{2} \sum_{k>l} p_{kl} \right) \Psi = \left\{ p_0 - \frac{1}{2} (H^2 - E^2) \right\} \Psi = 0 \quad (5.12)$$

I am convinced, however, that in this form the theory is false, and indeed for a variety of reasons. Firstly there is a mathematical reason. In (5.12) occur second order total derivatives $\frac{\partial^2}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{mn}}$, whose meaning is obscure. Secondly there are physical reasons.

The existence of the electron (and proton) radius must be contained in the theory; here that is not so. The reason for this cannot lie in the quantization, which is only an undulatory modification of the classical formulae for the "Independence Integral," but must lie in Maxwell's eq. themselves. Indeed, these already fail in the classical treatment, in so far as naturally (without additional hypotheses) they only permit point elementary charges with infinite energy. It thus seems necessary to replace Maxwell's eq. by some others, these will be constructed in the following §6, and first treated according to classical methods.

§6. Construction of New Field-Equations, and their classical treatment.

I suggest that, instead of the Lagrangian (5.5), the following f_{μ} should be taken[†]:

$$L = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + a^2 F}, \quad (6.1)$$

where $F = \sum_{k \geq l} f_{kl}^2$. (6.2)

[†] Mie (Ann. 37, 511; 39, 1; 40, 1) first showed the possibility of the generalization of Maxwell's theory through the choice of L as an arbitrary f_{μ} of the f_{kl} ; the difference between

where a is a constant of the dimension of a reciprocal field-strength and its size depends on the accidental choice of units for potential or field-strength.

Developing L in powers of a ,

$$L = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}F + \dots$$

we see that, as a 1st approx., the new L differs from the old (5.5) only by a constant term $\frac{1}{2}$.

We construct the impulses

$$p_{kl} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}} = \frac{f_{kl}}{\sqrt{1+a^2 F}}; \quad (6.3)$$

these, just as the f_{kl} , are antisym. They can be regarded as the "excitation" of the field f_{kl} . In order to bring the notation into accordance with the notation in Maxwell's theory of material bodies, his theory and that suggested here is that he assume L was also a f_{kl} of the ϕ_k . Then he defined the densities of charge and current as the derivatives of L with respect to the ϕ_k . But this assumption leads to serious difficulties because it is physically impossible that the laws of the field should depend on the absolute value of the potentials. (- - Pauli "Rel. Theo.") In our theory this diff. is avoided.

\neq This is not quite immaterial; indeed, it causes the space integral of L to be infinite in the statical case. In the treatment of

we must write

$$(6.4A) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= (f_{23}, f_{31}, f_{12}) & \mathbf{E} &= i(f_{14}, f_{24}, f_{34}) \\ \mathbf{H} &= (p_{23}, \beta_1, p_{12}) & \mathbf{D} &= -i(p_{14}, p_{24}, \beta_4) \end{aligned}$$

the field - eq., which are derived from $\delta(L)da=0$, are

$$\sum_l \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_l} = 0, \quad (6.4A)$$

In addition, from (5.4) we have the identities

$$\sum_l \frac{\partial f_{kl}^*}{\partial x_l} = 0, \quad (6.4B)$$

where f^* is the dual tensor of f , obtained by changing the f suffixes 23, 31, 12 with 14, 24, 34 respectively.

The tensors (six-vectors) f and p can now be treated completely symmetrically. For this purpose, we use Legendre's transf.

$$p_{kl} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}} \quad H = -L + \sum_{k>l} p_{kl} f_{kl}, \quad (6.5)$$

in which L is regarded as a f_2 of the six indep. variables f_{kl} . Thus the p_{kl} are functions of the f_{kl} , and L is so chosen that conversely the f_{kl} are functions of the p_{kl} . Then H can be regarded as the stationary electron (57), it must therefore be subtracted from L .

a function of the p_{kl} , and we have

$$dH = \sum_{k>l} f_{kl} dp_{kl},$$

or

$$f_{kl} = \frac{\partial H}{\partial p_{kl}} \quad (6.6)$$

We can write (6.5) as

$$\begin{aligned} H + L &= - \sum_{k>l} f_{kl} p_{kl} = - \sum_{k>l} f_{kl}^* p_{kl}^* \\ &= \beta H + E D. \end{aligned} \quad (6.7)$$

this holds for any function L . Taking the special form (6.1) of L , it follows from (6.3) that

$$P = \sum_{k>l} p_{kl}^2 = \frac{F}{1+a^2 F}, \quad (6.8)$$

or

$$(1 - a^2 P)(1 + a^2 F) = 1, \quad (6.9)$$

Further, from (6.7),

$$H = -\frac{1}{a^2} \sqrt{1 - a^2 P}. \quad (6.10)$$

According to (6.8) it is clear that P is invariant for the interchange of the tensor p with its dual tensor, so that

$$P = \sum_{k>l} p_{kl}^{*2} \quad (6.8A)$$

We can thus write the equat. (6.4_B) as (6.4A)

as
$$\sum_l \frac{\partial f_{kl}^*}{\partial x_l} = 0, \quad (6.4c)$$

and
$$\sum_l \frac{\partial (p_{kl}^*)}{\partial x_l} = 0. \quad (6.4d)$$

The eq. (6.4d) show that there are four "anti-potentials," $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, such that

$$p_{kl}^* = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} \quad (6.11)$$

and then (6.4c) are the field equations for the variational equation

$$\delta \int H dx = 0,$$

where the Φ_k are the unknown functions, and the f_{kl} are defined by (6.6), or

$$f_{kl}^* = \frac{\partial H}{\partial p_{kl}^*} \quad (6.6A)$$

We derive now the laws corresponding to the Law of Conservation of Energy and Impulse in Maxwell's theory. They are a consequence of the fact that H does not depend on the indep. variables x_1, x_2, x_3, x_4 .[†] Thus we have

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{k,l} p_{kl} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} p_{kl} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_j \partial x_l} \right)$$

[†] Born, Gött. Nachr., p. 1 (1914)

$$= - \sum_{k,l} p_{kl} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_j \partial x_l}$$

On the other hand, it follows from (6.4A) by multiplication with $\partial \phi_k / \partial x_j$ and summation over k that

$$\sum_{k,l} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l} = 0.$$

The last two equations give

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = - \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(p_{kl} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right). \quad (6.12)$$

Since p_{kl} is anti-sym., we have the trivial identity

$$\sum_{k,l} p_{kl} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_l} = 0.$$

From (6.4A) it follows from multiplication with $\partial \phi_j / \partial x_k$ and summation over k that

$$\sum_{k,l} \frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} = 0.$$

Adding this to the last eq., we obtain

$$\sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(p_{kl} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \right) = 0.$$

This could be combined with (6.12) gives

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(L \delta_{ij} - \sum_k p_{kl} f_{kj} \right) = 0. \quad (6.13A)$$

these eq. are given by Mie. He interpreted the quantities in brackets as components of the energy-tension tensor. This is, however, somewhat arbitrary.

Starting from the fact that $H(p)$ does not depend explicitly on the x_ℓ , it can be shown in exactly the same way that

$$\sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} (H \delta_{\ell j} - \sum_k f_{\ell k}^* p_{kj}^*) = 0. \quad (6.13B)$$

The quantities in the brackets are, however, different from those occurring in (6.13A). Any linear combination could be interpreted as a component of the energy-tension tensor. The most reasonable seems to me to be to take the half-differences

$$(6.14) \quad T_{\ell j} = \frac{1}{2} (L - H) \delta_{\ell j} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq \ell} (p_{\ell k} f_{kj}^* - f_{\ell k}^* p_{kj}),$$

For, in the limit $a \rightarrow 0$, $L - H \rightarrow 0$, and the sum is identical with the Maxwell-Poincaré components.

For example, the energy density of the field is

$$(6.14A) \quad T_{44} = \frac{1}{2} (L - H) + \frac{1}{2} (H B + E D) \rightarrow \frac{1}{2} (H^2 + E^2)$$

But the space integral of this is not conserved

with the mass according to Einstein's relation $E = mc^2$, as we shall show in the next section. Einstein's formula depends essentially on the supposition of linear field-eq., and must be replaced in our theory by some other, which is only different in the matter of numerical factors. However, it always holds in its original form when it is a question of the interaction of particles (of mass m) with weak fields (of energy E).

§ 7. C. Treatment of the stationary Electron.

We show that the field eq. (6.4A) and (6.4B) have electrostatic solutions, i.e., solutions for which

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0, \quad (7.1)$$

Putting $\phi_4 = i\phi$, we have

$$B = 0, \quad E = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\text{grad } \phi. \quad (7.1A)$$

$$\text{thus} \quad L = \frac{1}{a^2} \sqrt{\hbar a^2 E^2} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\hbar a^2 (\text{grad } \phi)^2} \quad (7.2)$$

The eq. of motion is

$$p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$D^2 = \frac{1 - a^2 E^2}{Ha^2 D} \quad (7.3)$$

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

$$p_x = \frac{m^2 v_x}{(1 - \frac{v^2}{c^2})}, \quad \text{div } D = 0, \quad D_x = \frac{dL}{dE_x} = \frac{E_x}{\sqrt{1 - a^2 E^2}} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - a^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}}$$

The equation of motion
 From this it follows that the surface integral for the charge

$$4\pi e = \int D_r d\sigma, \quad (7.4)$$

vanishes, only when D is everywhere continuous.

We show, now, that there are solutions with singularities for which D is discontinuous but not infinite. For this purpose we consider the case of spherical symmetry, i.e., ϕ is a fn of $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Then (7.2) and (7.3) reduce to

$$L = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 - a^2 E_r^2} = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + a^2 \phi''} \quad (7.2A)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 D_r) = 0, \quad D_r = \frac{E_r}{\sqrt{1 - a^2 E_r^2}} = \frac{\phi'}{\sqrt{1 - a^2 \phi''}} \quad (7.3A)$$

It follows that

$$(1 - a^2 E_r^2) D_r^2 = E_r^2 \quad (7.4A)$$

$$r^2 D_r = e, \quad E_r = \frac{D_r}{\sqrt{1 + a^2 D_r^2}}$$

where e is a constant of integration, which according to (7.4) must be interpreted as a charge.

Further integration of (7.3A) with (7.4A) gives

$$\phi = \frac{e}{r_0} \int_{r/r_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (7.5)$$

$$\phi = \int E_r dr =$$

where r_0 is define by

$$r_0 = \sqrt{ae},$$

i.e., $a = r_0^2/e,$ (7.6)

and the limits of integration have been chosen so that ϕ vanishes as $r \rightarrow \infty$. For large r Coulomb's law holds asymptotically,

$$\phi \rightarrow e/r \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (7.5A)$$

The ϕ is everywhere finite, continuous, and differentiable, with the exception of the origin. There ϕ itself is still finite and has the value

$$\phi(0) = be/r_0. \quad (7.7)$$

where \dagger
$$b = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

 $\approx 1.85407;$

but the components of \mathbf{E} and \mathbf{D} are disconti. for $r=0$. For $D_r = e/r^2$ becomes infinite, and in

$$E_r = -\phi' = \frac{e}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1+(r/r_0)^4}}, \quad (7.8)$$

the positive value of the square root must be taken, so that the components E_x, E_y, E_z have a discontinuity of $2e/r_0$ on passage through the origin.

\dagger The integral can be expressed in terms of the ordinary elliptic integrals, e.g., by the period $\omega(g_3, g_3)$ of the

We can write ϕ as

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} \left(\int_{r/r_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{b}{2} \right) = \frac{e}{r_0} \left(\int_1^{r/r_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{b}{2} \right),$$

so that

$$\phi\left(\frac{r_0^2}{r}\right) = \frac{e}{r_0} \left(\int_1^{r/r_0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{b}{2} \right).$$

It follows from addition that

(7.9) $\phi(r_1) + \phi(r_2) = \phi(0) = be/r_0$ for $r_1, r_2 = r_0^2$.
 The behaviour of the fn $\phi(r)$ in the "interior" of the electron \ddagger of radius r_0 can be obtained from its "external behaviour" with the help of the above transformation.

All formulae are relativistically invariant. Thus the field of the uniformly moving electron can be immediately written down. For uniform motions in external fields, naturally we can only set up approximate laws. We will work out the first approx. for a specially const. (or almost const.) field.

The existence of an external field $f_{k\ell}^{(e)}$ with the potentials $\phi_k^{(e)}$ means, in our theory, that a solution Weierstrassian $f_2 - f_2 b = w(-4, 0)$; also with the help of the jacobian elliptic integral s :

$$b = F(\sin \pi/4) = \int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \pi/4 \cdot \sin^2 \phi}}$$

\ddagger With regard to the charge density ($4\pi \rho = \text{div} \mathbb{D}$) the electron is a point; the finite radius is a property of the potential.

must be looked for such that $f_{k\ell} \rightarrow f_{k\ell}^{(e)}$ asymptotically

Table I. † - The function $\phi(x) = \int_x^\infty dy / \sqrt{1+y^2}$.

| x | $\phi(x)$ | x | $\phi(x)$ |
|-----|-----------|----------|-----------|
| 0 | 1.854 | ∞ | 0 |
| 0.1 | 1.754 | 10.00 | 0.100 |
| 0.2 | 1.654 | 5.00 | 0.200 |
| 0.3 | 1.554 | 3.33 | 0.300 |
| 0.4 | 1.455 | 2.50 | 0.399 |
| 0.5 | 1.357 | 2.00 | 0.497 |
| 0.6 | 1.262 | 1.67 | 0.592 |
| 0.7 | 1.169 | 1.43 | 0.685 |
| 0.8 | 1.082 | 1.25 | 0.772 |
| 0.9 | 1.000 | 1.11 | 0.854 |
| 1.0 | 0.927 | 1.00 | 0.927 |

for large distances. It follows that we must determine $\phi_k' = \phi_k - \phi_k^{(e)}$ so that $f_{k\ell} = \phi_{\ell k}' - \phi_{k\ell}' \rightarrow 0$ asymptotically for large distances.

If the external field is weak (i.e. small compared with $\frac{e}{r_0^2} \sim \frac{10^{-10}}{10^{-26}} \approx 10^{16}$ e.s. units), L can be expanded

$$L = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + a^2 \sum_{k>\ell} (f_{k\ell}^{(e)} + f_{\ell k}')^2} - 1 = L' + \sum_{k>\ell} \phi_{k\ell}' \phi_{\ell k}^{(e)} + \dots \quad (7.10)$$

Here we have added the constant $-\frac{1}{a^2}$ to L ; † I am indebted to Dr. J.H.C. Thompson for the calc. of the $f_{k\ell}$, and of the other integrals which occur, also for help with the

for, otherwise, L would become infinite as $V/a^2 = Ve^2/r + V$ with the volume, and it is reasonable to remove this term.

We now look for an approximate solution of

$\delta \int L dx_1 \dots dx_4 = 0$, taking for ϕ_k' the corresponding f_{\pm} of the uniform motion, but relating the singularity (or the centre) as moving, as that its co-ordinates x_0, y_0, z_0 are functions of t .

A co-ordinate system Σ^0 can always be so chosen that, for any given value of t , the centre has the velocity zero. For such a system we have the formulae for the stationary electron derived above; and on the supposition that $f_k'e$ is nearly independent of x, y, z , the integration can be carried out for these variables. Thus

$$\int L dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 dx_4^0 = -4\pi ic \int \Lambda^0 dt^0 \quad (9.11)$$

where, with the notation

$$\begin{aligned} D' &= -i(p_{14}^{\prime(e)}, p_{24}^{\prime(e)}, p_{34}^{\prime(e)}), \quad E^{(e)} = i(f_{14}^{(e)}, f_{23}^{(e)}, f_{34}^{(e)}) \\ &= -\left(\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y}, \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial z}\right), \end{aligned}$$

we have

$$4\pi \Lambda^0 = -\iiint dx^0 dy^0 dz^0 L' + \iiint dx^0 dy^0 dz^0 D' \text{grad } \phi^{(e)} \quad (9.12)$$

transformation from the German.

The last integral can be transformed into

$$\iint \phi^{(e)} \mathbf{D}' \cdot d\sigma = \iiint \phi^{(e)} \operatorname{div} \mathbf{D}' dx dy dz;$$

and, according to (7.3), we have $\operatorname{div} \mathbf{D}' = 0$. Let us further suppose that $\phi^{(e)}$ is approximately constant over the extent of the electron (radius r_0), so that the surface integral is, according to (7.4),

$$4\pi \phi^{(e)} e.$$

Further

$$\begin{aligned} \iiint L' dx dy dz &= \frac{4\pi}{a^2} \int_0^\infty (\sqrt{1-a^2\phi^{(e)}} - 1) v^2 dv \\ &= -4\pi b_1 \frac{e^2}{r_0} \end{aligned} \quad (7.13)$$

where $b_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) x^2 dx = 0.619$. (7.13A)

We put the constant (7.13) equal to $-4\pi m_0 c^2$, so that

$$m_0 c^2 = b_1 \frac{e^2}{r_0}. \quad (7.14)$$

Thus $\Lambda^0 = m_0 c^2 + e \phi^{(e)}$ (7.15)

Let us now change over to an arbitrary co-ordinate system; we have then

$$\begin{aligned} \int \Lambda^0 dt^0 &= \int \Lambda dt = \int \left\{ m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e}{c}\right) (v_1 \phi_1^{(e)} + v_2 \phi_2^{(e)} + v_3 \phi_3^{(e)} - c \phi_0^{(e)}) \right\} dt \end{aligned} \quad (7.16)$$

where $v(v_1, v_2, v_3)$ is the velocity vector of the centre of the electron. This is known "principle of action"† for the motion of a point electron with rest-mass m_0 .

There seems to me no doubt that the next approx. (radiation and its reaction) will give the known results of the classical theory. In higher approx., however, deviations are to be expected.

Naturally there are solutions for more than one particle at large distances apart. For if the fields of the particles do not overlap, ϕ can be built up by simple addition. With particles nearer together, there is interaction, which can be treated by perturbation methods. It would be important to determine whether, in this case, the usual formulae will be obtained, and when deviations are to be expected.

Our theory allows, however, processes which have no analogy in the old theory, e.g., the complete fusion of two particles. Thus two electrons can fuse into one particle, whose radius is determined by

$$r_1 = \sqrt{a \cdot 2e} = r_0 \sqrt{2} \quad (r_0 = \sqrt{ae}),$$

† Born, Ann. d. Phys., 28, 571, 1909.

and whose mass is

$$m_1 = \frac{b_1 (2e)^2}{c^2 r_1} = \frac{4r_0}{r_1} m_0 = \sqrt{8} m_0 \quad (m_0 = \frac{b_1}{c^2} \frac{e^2}{r_0})$$

The energy required is thus

$(m_1 - 2m_0) c^2 = 0.83 m_0 c^2 = 432,000$ electron-volts,
and the structure is highly unstable. I have
only given this simple calculation to show how
I imagine it possible to deal with the nucleus
formation, provided that we had an explanation
of the mass of the proton.

In this theory light waves are no indep. structure.[†]
There are very weak alternating fields, which
somewhere at large distances have an electron
as centre of emission. Thus it is to be expected
that, also in the q. theory, photons must be regarded
as math. structure rather than as physical reality.

§ 8. An Attempted Quantization of the New Field-Equations.

The following treatment of a possible quantization

† Any sol. of Maxwell's classical equations for which $\mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{c}$
(as for a plane or sph. light wave) is also a solution
of the new equations; but the superposition of two
waves of this type is not a sol.

process† is completely hypothetical, a. s. at present rests only on a formal foundation.

The "independent integral" is again, exactly as (5.8),

$$(8.1) \quad S = \int p_0 dx + \sum_{k>l} p_{kl} (d\phi_k dx^l - d\phi_l dx^k),$$

only here the p_{kl} are diff. from the f_{kl} .

Since the new theory shows complete symmetry in

$$f_0 = L, \quad f_{kl} \quad \text{and} \quad p_0 = -H, \quad p_{kl}^*, \quad (8.2)$$

it is to be expected that this will also be the case for the quantization. In order to attain this, we must permit only a limited selection for the region of integration in the x_1, x_2, x_3, x_4 -space. We imagine curvilinear co-ordinates u_1, u_2, u_3, u_4 introduced; then, according to Laplace's determinantal law,

$$\begin{aligned} dx &= dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \frac{\partial(x_1 \dots)}{\partial(u_1 \dots)} du_1 du_2 du_3 du_4 \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial(x_k x_l)}{\partial(u_1 u_2)} \frac{\partial(x_k x_l)^*}{\partial(u_3 u_4)} du_1 du_2 du_3 du_4, \end{aligned}$$

where the * again denotes dual quantities, e.g.,

$$\frac{\partial(x_2 x_3)^*}{\partial(u_3 u_4)} = \frac{\partial(x_1 x_4)}{\partial(u_2 u_4)}$$

If, now, the sum of these six terms reduces to a single term, we can write

$$(8.3) \quad d\sigma = \frac{\partial(x_k x_l)}{\partial(u, v)}, \quad d\sigma' = \frac{\partial(x_k x_l)^*}{\partial(u_3 u_4)} du_3 du_4,$$

and have then

$$dx = d\sigma \cdot d\sigma' \quad V = \int dx = \sigma \cdot \sigma' \quad (8.4)$$

We admit only such world-regions, whose volume can be expressed as the product of two dual surfaces. Thus (8.1) can be written

$$S = \int p_0 d\sigma' \cdot d\sigma + \sum_{k>l} p_{kl} d\sigma' \cdot f_{kl} d\sigma.$$

Writing

$$P_0' = \int p_0 d\sigma' \quad P_{kl}' = \int p_{kl} d\sigma' \\ T_{kl} = \int f_{kl} d\sigma,$$

$$\text{where we have } S = \int P_0' d\sigma + \sum_{k>l} P_{kl}' dT_{kl}.$$

The simplest form of S is the linear form, for which P_0' , P_{kl}' are constants, and

$$S = P_0' \sigma + \sum_{k>l} P_{kl}' T_{kl}. \quad (8.7)$$

If, now, $P_0' = -H$ is a f.z. of the P_{kl}' , we should have for $\psi = e^{iS}$ the diff. eq. which is obtained

by substituting the operators

$$P'_0 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad P'_{kl} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{kl}} \quad (8.8)$$

$$\text{in } P'_0 + H(P'_{23} \dots P'_{14}) = P'_0 - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 \sum_{k>l} P'_{kl}{}^2} \quad (8.9)$$

and allowing the resultant operator to ψ . In point of fact this does not work, since H is not linear in the P_{kl} , and in no way depends simply on the surface integrals P_{kl} .

The idea suggests itself that the "wave eq" for ψ must really be linear, in order that the principle of superposition should be satisfied. This can in fact be attained by a formally slight modification, which Dirac has used in his wave theory of the electron.

ψ is regarded as a quantity with more than one component. We introduce certain operators γ_0 , γ_{kl} ($= -\gamma_{lk}$), which act on the component suffixes of ψ ; and replace the operator (8.9) by the linear

$$a^2 \gamma_0 P'_0 + a \sum_{k>l} \gamma_{kl} P'_{kl} - 1, \quad (8.10)$$

The γ_0, γ_{kl} must satisfy certain commutation

relations, namely,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_0 \gamma_{kl} + \gamma_{kl} \gamma_0 = 0 \\ \gamma_{kl} \gamma_{mn} + \gamma_{mn} \gamma_{kl} = \delta_{km} \delta_{ln} \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Multiplying (8.10) by the "conjugate" operator

$$a^\dagger \gamma_0 p_0 + a \sum_{k>l} \gamma_{kl} p_{kl} + 1,$$

we obtain the operator

$$a^\dagger p_0^2 + a^2 \sum_{k>l} p_{kl}^2 - 1,$$

which is equivalent to the sq. of (8.9)

I should like to suggest that (8.10), acting as a common diff. operator on a part ψ of the surface area σ , and of the surface integral of the field components F_{kl} (but for arbitrary choice of the integration surface), contains the quantum laws of the field. But I cannot prove this hypothesis by ~~this~~ its consequences, and I have only one physical consideration which seems to confirm the assumption that the surface integrals of the field components are the real quantum variables of the field.

Let us consider a static (non-radiating) field,

and introduce polar co-ordinates r, α, β .
The spheres $r = \text{const}$ (variables α, β) are clearly
dual to the cylinders (variables r, t). The integrals
 T_r and $P_r' = \int p_r d\sigma' = 4\pi r^2 p_r$ are therefore
conjugate. The latter represents the charge e
of the system, which in the classical treatment
is an integration constant. Thus, in q , the,
 ψ will have the factor
$$e^{ie T_r} \quad (8.10)$$

If we suppose that the range of values of f_r in
the world-region considered is finite, and thus
also that of T_r , it follows that
(8.11) $e = 2\pi n$ (n a whole number),

Our q , law means that, in a region of space where
the field strength is within finite limits, the
charge must be an integral multiple of a
charge element, which, through our choice of
units, has the value unity.

The usual q , mech. is the limiting case in which
the self-field is regarded as rigidly bound to the
centre. The field quantities become, then, only

from the motions of the centres of the particles, whether and how this limiting case (including Pauli's exclusion principle) comes out of the hypothetical formulae (8.10), I cannot yet say; nor can I say how the other limiting case of light may be dealt with. Also I do not know whether the introduction of the δ -quantities gives the spin of the particles correctly, nor whether the existence of two diff. masses can be established by means of this theory.

Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I.¹
Von E. Fermi, in Rom.
(ZS. f. Phys. 88, 161, 1934)

1. Grundannahme der Theorie.

Bei dem Versuch, eine Theorie der Kernelektronen sowie der β -Emission aufzubauen, begegnet man bekanntlich zwei Schwierigkeiten. Die erste ist durch das kontinuierliche β -Strahlenspektrum bedingt. Falls der Erhaltungssatz der Energie gültig bleiben soll, muß man annehmen, daß ein Bruchteil der beim β -Zerfall frei werdenden Energie unseren bisherigen Beobachtungsmöglichkeiten entgeht. Nach dem Vorschlag von W. Pauli kann man z. B. annehmen, daß beim β -Zerfall nicht nur ein Elektron, sondern auch ein neues Teilchen, das sogenannte „Neutrino“ (Masse von der Größenordnung oder kleiner als die Elektronenmasse; keine elekt. Ladung) emittiert wird. In der vorliegenden Theorie werden wir die Hypothese des Neutrinos zugrunde legen.

Eine weitere Schwierigkeit für die Theorie der Kernelektronen besteht darin, daß die jetzigen relat. Theorien der leichten Teilchen (Elektronen oder Neutrinos) nicht imstande sind, in einwandfreier Weise zu erklären, wie solche Teilchen in Bahnen
s.) Vgl. die vorläufige Mitteilung: La Ricerca Scientifica 2,
Heft 12, 1933

von Kernen gebunden werden können.

Es scheint deswegen zweckmäßiger, mit Heisenberg²⁾ anzunehmen, daß ein Kern nur aus schweren Teilchen, Protonen und Neutronen, besteht. Um trotzdem die Möglichkeit der β -Emission zu verstehen, wollen wir versuchen, eine Theorie der Emission leichter Teilchen aus einem Kern in Analogie zur Theorie der Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom beim gewöhnlichen Strahlungsprozess aufzubauen. In der Strahlungstheorie ist die totale Anzahl der Lichtquanten keine Konstante: Lichtquanten entstehen, wenn sie von einem Atom emittiert werden, und verschwinden, wenn sie absorbiert werden. In Analogie hierzu wollen wir der β -Strahlentheorie folgende Annahmen zugrunde legen:

a) Die totale Anzahl der Elektronen, sowie der Neutrinos, ist nicht notwendigerweise konstant. Elektronen (oder Neutrinos) können entstehen und verschwinden. Diese Möglichkeit hat jedoch keine Analogie zum Entstehen oder Verschwinden eines Paares aus einem Elektron und einem Positron; falls man das Positron als Diracsches

2) Zs. 77, 1, 1932.

„Loch“ interpretiert, kann man in der Tat diesen letzten Prozess einfach als einen Quantensprung eines Elektrons zwischen einem Zustand mit negativer Energie und einem Zustand mit positiver Energie mit Erhaltung der totalen (unendlich großen) Anzahl der Elektronen auffassen.

b) Die schweren Teilchen, Neutronen und Protonen, können wie bei Heisenberg als zwei innere Quarkzustände des schweren Teilchens betrachtet werden. Wir formulieren dies durch die Einführung einer inneren Koordinate p des schweren Teilchens, welche nur zwei Werte annehmen kann; $p = 1$, falls das Teilchen ein Neutron ist; $p = -1$, falls das Teilchen ein Proton ist.

c) Die Hamilton-Funktion des aus schweren und leichten Teilchen bestehenden Systems muß so gewählt werden, daß jedem Übergang von Neutron zu Proton das Entstehen eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet ist, Dem umgekehrten Prozess, Verwandlung eines Protons in ein Neutron, soll dagegen das Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet sein. Man bemerkt, daß hierdurch die Erhaltung der Ladung gesichert ist.

2. Die in der Theorie auftretenden Operatoren,

Ein mathematischer Formalismus der Theorie in Einklang mit diesen drei Forderungen kann am leichtesten mit Hilfe der Dirac-Jordan-Kleinodischen Methode¹⁾ der „zweite Quantelung“ aufgebaut werden. Wir werden also die Wahrsch.-amplituden ψ und φ der Elektronen und der Neutrinos sowie die komplex konjugierten Größen ψ^* und φ^* als Operatoren auffassen; für die Beschreibung der schweren Teilchen werden wir dagegen die übliche Darstellung im Konfig.-raum benutzen, wobei natürlich auch φ als Koord. mitgezählt werden muß.

Wir führen zuerst zwei Operatoren Q und Q^* ein, welche auf die Funktionen der zweiwertigen Variablen ρ als die linearen Substit.

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

wirken. Man sieht ohne weiteres, daß Q einem Übergang von Proton zu Neutron, entspricht und Q^* einem Übergang von Neutron zu Proton,
Die Bedeutung der als Operatoren aufgefaßten

Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ und Φ ist bekannt-
 lich die folgende: Sei

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_s, \dots$
 ein System individueller Quantenzustände für
 die Elektronen. Man setze weiter

$$\Psi = \sum_s \Psi_s a_s ; \quad \Psi^* = \sum_s \Psi_s^* a_s^* . \quad (2)$$

Die Amplituden a_s und die komplex konjugierten
 Größen a_s^* sind Operatoren, welche auf die F -nen
 der Besetzungszahlen $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$ der
 individuellen Quantenzustände wirken. Im Falle
 des Pauli-Prinzips ist jedes der N_s nur der
 beide Werte 0 und 1 fähig. Die Operatoren
 a_s und a_s^* sind dann folgendermaßen
 definiert:

$$(3) \begin{cases} a_s \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) = (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1}} (1 - N_s) \Psi(N_1, \dots, 1 - N_s, \dots) \\ a_s^* \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) = (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1}} N_s \Psi(N_1, \dots, 1 - N_s, \dots) \end{cases}$$

Der Operator a_s^* entspricht der Erzeugung und der
 Operator a_s dem Verschwinden eines Elektrons im
 Quantenzustand s ,

entsprechend zu (2) setze man für die
 Neutrinos

$$\varphi = \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma} b_{\sigma} \quad , \quad \varphi^{*} = \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}^{*} b_{\sigma}^{*} \quad (4)$$

Die komplex-konjugierten Größen b_{σ} und b_{σ}^{*} sind Operatoren, die auf die Eigen der Besetzungszahlen $M_1, M_2, \dots, M_{\sigma}, \dots$ der individuellen Quantenzustände $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\sigma}, \dots$ der Neutrinos wirken.

Nimmt man an, daß auch für die Neutrinos das Pauli-Prinzip gilt, so sind die Zahlen M_{σ} nur der beiden Werte 0 und 1 fähig. Es ist ferner:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{\sigma} \Phi(M_1, M_2, \dots, M_{\sigma}, \dots) = (-1)^{M_1 + \dots + M_{\sigma-1}} (1 - M_{\sigma}) \Phi(\dots, 1 - M_{\sigma}, \dots) \\ b_{\sigma}^{*} \Phi(\dots) = (-1)^{M_1 + \dots + M_{\sigma-1}} M_{\sigma} \Phi(\dots, 1 - M_{\sigma}, \dots) \end{array} \right.$$

3. Aufstellung der Hamilton-Funktion.

Die Energie des gesamten, aus schweren und leichten Teilchen bestehenden, Systems ist die Summe der Energien H_{schwer} der schweren Teilchen + H_{leicht} der leichten Teilchen + der Wechselwirkungsenergie H zwischen schweren und leichten Teilchen.

Das erste Glied schreiben wir, indem wir vorläufig nur ein einziges schwereres Teilchen betrachten, in die Form

$$H_{\text{schwer}} = \frac{1+p}{2} N + \frac{1-p}{2} P. \quad (6)$$

wo N und P die Energieoperatoren des Neutrons bzw. des Protons darstellen. Für $\rho = 1$ (Neutron) reduziert sich in der Tat (6) auf N ; für $\rho = -1$ (Proton) reduziert sich (6) auf P .

Die Energie H des Lichtes der leichten Teilchen nimmt die einfachsten Form an, wenn man als Quasizustände $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s$ und $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_o$ stationäre Zustände für die Elektronen bzw. die Neutrinos nimmt. Für die Elektronen soll man dabei etwa die stationären Zustände im Coulomb-Feld des Kerns, unter Berücksichtigung der Elektronenabschirmung, wählen. Für die Neutrinos kann man einfach eben die Proglie-Wellen annehmen, da wohl die auf die Neutrinos wirkenden Kräfte keine wesentliche Rolle spielen. Seien H_1, H_2, \dots, H_s und K_1, K_2, \dots, K_o die Energie der stationären Zustände der Elektronen und der Neutrinos; dann haben wir:

$$H_{\text{leicht}} = \sum_s H_s N_s + \sum_o K_o M_o. \quad (7)$$

Es bleibt nur noch die Wechselwirkungsenergie zu schreiben. Diese besteht erstens aus der Coulomb-Energie zwischen Proton und Elektronen; bei schweren Kernen spielt jedoch die Anziehung

durch ein einziges Proton nur eine untergeordnete Rolle ¹ und trägt in keinem Falle zum Prozeß des β -Zerfalls bei. Wir wollen also dies Glied der Einfachheit halber nicht berücksichtigen. Wir müssen hingegen zur Hamilton-Fn. ein Glied addieren, das die Bedingung c) von Ziffer 1 erfüllt.

Ein Glied, das notwendigerweise die Verwandlung eines Protons in ein Neutron mit dem Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos koppelt, hat nun nach Ziffer 2 die Form

$$Q a_s b_o, \quad (8)$$

Der komplex konjugierte Operator

$$Q^* a_s^* b_o^* \quad (8')$$

koppelt dagegen die umgekehrten Prozesse (Verwandlung eines \underline{N} in ein \underline{P} und Entstehen eines \underline{e} und eines \underline{n}).

Ein Wechselwirkungsglied, das die Bedingung c) erfüllt, kann also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(9) \quad H = Q \sum_{s_o} c_{s_o} a_s b_o + Q^* \sum_{s_o} c_{s_o}^* a_s^* b_o^*$$

wo c_{s_o} und $c_{s_o}^*$ Größen darstellen, die von den Koordinaten, Impulsen usw. des schwereren Teilchens abhängen können.

¹) Die Coulombsche Wirkung der zahlreichen übrigen Protonen muß natürlich als statisches Feld in Betracht gezogen werden

Zur nähere Bestimmung von H ist man die Einfachheitskriterien angewiesen. Eine wesentliche Einschränkung in der Freiheit der Wahl von H ist durch die Erhaltung des Impulses sowie durch die Bedingung gesetzt, daß bei einer Drehung oder einer Translation der Raumkoordinaten (9) invariant bleiben muß.

Sehen wir zunächst von der Relativitätskorrek. und der Spinwirkung ab, so ist wohl die einfachst mögliche Wahl von (9) die folgende:

$$H = g \{ Q \psi(x) \varphi(x) + Q^* \psi^*(x) \varphi^*(x) \}, \quad (10)$$

wo g eine Konstante mit den Dimensionen $L^5 M T^{-2}$ darstellt; x repräsentiert die Koordinaten des schweren Teilchens; $\psi, \varphi, \psi^*, \varphi^*$ sind durch (2) und (4) gegeben und sind an dem Orte x, y, z des schweren Teilchens zu nehmen.

(10) stellt keineswegs die einzig mögliche Wahl von H dar. Jeder skalar Ausdruck, wie etwa

$$L(p) \psi(x) M(p) \varphi(x) N(p) + \text{kompl. conj.},$$

wo $L(p), M(p), N(p)$ passende Funktionen des Impulses des schweren Teilchens darstellen, würde ebensogut möglich sein. Da jedoch die Folgerungen aus (10)

bisher mit der Erfahrung in Einklang zu sein scheinen, ist es wohl besser, sich vorläufig auf die einfachste Wahl zu beschränken.

Wesentlich ist es jedoch, den Ausdruck (10) derart zu verallgemeinern, daß man mindestens die leichter Teilchen relativistisch behandeln kann. Auch bei dieser Verallgemeinerung ist natürlich eine gewisse Willkür nicht auszuschließen. Die einfachste Lösung des Problems dürfte die folgende sein:

Relativistisch treten an Stelle von ψ und φ je vier Diracsche Funktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Wir betrachten nun die 16 unabhängigen bilinearen Kombinationen aus $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Bei einer Lorentz-Transformation der Koordinaten erfahren diese 16 Größen eine lineare Transformation, eine Darstellung der Ordnung 16 der Lorentz-Gruppe. Diese Darstellung spaltet sich in verschiedene einfachere Darstellungen; im besonderen transformieren sich die vier bilinearen Kombinationen:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3, \\ A_1 &= \psi_1 \varphi_3 - \psi_2 \varphi_4 - \psi_3 \varphi_1 + \psi_4 \varphi_2, \end{aligned}$$

$$A_2 = i\psi_1\varphi_3 + i\psi_2\varphi_4 - i\psi_3\varphi_1 - i\psi_4\varphi_2, \quad (11)$$

$$A_3 = -\psi_1\varphi_4 - \psi_2\varphi_3 + \psi_3\varphi_2 + \psi_4\varphi_1$$

wie die Komponenten eines polaren Vierervektors, also wie die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials. Es liegt nun nahe, die Größen

$$g(QA_i + Q^*A_i^*)$$

in der Hamilton-Funktion des schweren Teilchens in einer Stellung aufzunehmen, die der Stellung der Komponenten des Viererpotentials entspricht.

(Hier begegnen wir einer Schwierigkeit, welche davon hervührt, daß die relativistische Wellen-gl. für die schweren Teilchen unbekannt ist. Falls die Geschwindigkeit des schweren Teilchens klein gegenüber c ist, kann man sich jedoch auf den zu eV ($V =$ skalares Potential) analogen Term beschränken und schreiben:

$$(12) \quad H = g [Q (-\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3) + Q^* (-\psi_1^*\varphi_2^* + \psi_2^*\varphi_1^* + \psi_3^*\varphi_4^* - \psi_4^*\varphi_3^*)]$$

Zu diesem Glied sollen noch andere Glieder von der Größenordnung ψ/c addiert werden. Da die Geschwindigkeiten der Neutronen und Protonen in den

Kernen gewöhnlich klein gegenüber der Lichtgesch.
 sind, wollen wir diese Glieder vorläufig vernach-
 lässigen (vgl. hierzu Ziffer 9).

(12) kann in symbolischer Schreibweise folgender-
 maßen abgekürzt werden:

$$H = g [Q \psi^* \delta \varphi + Q^* \tilde{\psi} \delta \varphi^*], \quad (13)$$

wo ψ und φ als vertikale Matrixspalten zu schreiben
 sind; das Zeichen \sim verwandelt eine Matrix
 in die konj. Transponierte; und es ist

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Mit diesen Bezeichnungen bekommt man durch
 Vergleich mit (9)

$$C_{s\sigma} = g \tilde{\psi}_s^* \delta \varphi_\sigma; \quad C_{s\sigma}^* = g \tilde{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^*, \quad (15)$$

wo ψ_s und φ_s die normierten vierkomponentigen
 Eigenfunktionen der Zustände s (des Elektrons) und σ
 (des Neutrinos) darstellen. ψ und φ sind in (15) an der
 Stelle des schweren Teilchen s , also als \vec{r}_s von
 x, y, z , zu nehmen.

4. Störungsmatrix.

Die Theorie des β -Zerfalls kann mit Hilfe der aufgestellten Hamilton-Funktion in voller Analogie zur Strahlungstheorie durchgeführt werden. In dieser letzteren besteht die Hamilton-Funktion bekanntlich aus der Summe: Energie des Atoms + Energie des reinen Strahlungsfeldes + Kopplungsenergie. Dies letzte Glied wird als Störung des beiden anderen aufgefaßt. In Analogie hierzu werden wir in unserem Falle die Summe

$$H_{\text{schwer}} + H_{\text{leicht}} \quad (16)$$

als ungestört Hamilton-Funktion betrachten; hierzu kommt die durch das Kopplungsglied (13) dargestellte Störung.

Die Q.zustände des ungestörten Systems können folgendermaßen numeriert werden:

$$(\rho, n, N_1, N_2, \dots, N_s, \dots, M_1, M_2, \dots, M_s, \dots), \quad (17)$$

wobei die erste Zahl ρ einen der beiden Werte ± 1 annimmt und angibt, ob das schwere Teilchen ein N oder ein P ist. Die zweite Zahl n numeriert den Q.zust. des N oder des P . Für $\rho=1$ (N) sei die entsprechende Eigenfn

$$u_n(x),$$

$$(18)$$

wo x die Koordinaten des schweren Teilchens, bis auf ρ , darstellt. Für $\rho = -1$ (\underline{K}) sei die Eigenfz

$$V_n(x). \quad (19)$$

Die übrigen Zahlen $N_1, N_2 \dots N_5 \dots M_1, M_2 \dots M_6 \dots$ sind nur der beiden Werte 0 und 1 fähig und geben an, ob der betreffende Zustand des ~~Elektrons~~ oder \underline{e} oder des \underline{n} besetzt ist.

Fasst man nun die allgemeine Form (9) der Störungsenergie ins Auge, so sieht man, dass sie von Null verschiedene Elemente nur für solche Übergänge hat, bei denen entweder das schwere Teilchen von einem Neutron in ein \underline{K} Zustand übergeht und zugleich ein \underline{e} und ein \underline{n} entstehen oder umgekehrt.

Mit Hilfe von (1), (3), (5), (9), (18), (9) findet man ohne weiteres das betreffende Matrix-

$$(20) H_{-1 m N_1 N_2 \dots 1_s \dots M_1 M_2 \dots 1_6 \dots}^{i n N_1 N_2 \dots 0_s \dots M_1 M_2 \dots 0_6 \dots} = \pm \int V_m^* C_{s0}^* U_{nd} d\tau$$

wo die Integration über den Konf.raum des schweren Teilchens (bis auf die Koord. ρ) erstreckt werden muss. Das \pm -Zeichen bedeutet genauer

$$(-1) N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1} + M_1 + M_2 + \dots + M_{s-1}$$

und wird übrigens aus den folgenden Rechn. herauffallen. Dem entspricht entgegengesetzter Übergang entspricht ein komplex konjugiertes Matrixelement.

Führt man für c_{s0}^* den Wert (15) ein, so erhält man

$$(21) \quad H \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ -1 & m & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mp g \int v_{in}^* v_{in} \bar{\psi}_s \delta \varphi_0^* dr,$$

wo der Kürzewege in der ersten Glied alle gleichbleibenden Indizes fortgelassen worden sind.

5. Theorie des β -Zerfalls

Ein β -Zerfall besteht in einem Prozess, bei welchem ein Kernneutron sich in ein P_n verwandelt und gleichzeitig mit dem geschil. Mechanismus ein Elektron, das als β -Strahl beobachtet wird und ein Neutrino emittiert werden. Um die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses zu berechnen, wollen wir annehmen, daß zur Zeit $t=0$ ein N in einem Kernzust. mit Eigen $f_{\frac{1}{2}}$ vorhanden ist und $N_s = M_s = 0$, d. h. der Elekt. zust. s und der N zust. 0 leer sind. Dann ist für $t=0$ $\frac{1}{2}$ zust die

Wahrsch. ampl. des Zustandes $(1, n, 0_s, 0_\sigma)$

$$a_{1n0_s0_\sigma} = 1 \quad (22)$$

und die des Zustandes $(-1, m, 1_s, 1_\sigma)$, wo das Neutron in ein Proton mit der Eigenf. $\nu_m(x)$ unter Emission eines Elektrons und eines Neutrinos übergegangen ist, gleich Null.

Mit Anwendung der gewöhnlichen Störungstheorie formeln hat man nun für eine Zeit, die kurz genug ist, damit (22) noch angenähert gültig ist:

$$(23) \quad \dot{a}_{-1m1_s1_\sigma} = -\frac{2\nu_i}{\hbar} H_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} \exp \frac{2\nu_i}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma)$$

wo W die Energiediff. des N_z und des P_z zust. darstellt.
 Aus (23) erhält man (da für $t=0$, $a_{-1m1_s1_\sigma} = 0$)

$$a_{-1m1_s1_\sigma} = -H_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma} \exp \frac{2\nu_i}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma)t$$

Die W. des betrachteten Überganges ist also zur Zeit

$$(25) \quad |a_{-1m1_s1_\sigma}|^2 = 4 |H_{-1m1_s1_\sigma}^{1n0_s0_\sigma}|^2 \frac{\sin^2 \frac{2\pi t}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma)}{(-W + H_s + K_\sigma)}$$

Um die Lebensdauer des Neutrons N_z zust. u_n zu berechnen, hat man den Ausdruck (25) über die

alle freien \underline{e} - und \underline{u} -Zust. zu summieren.

Eine wesentliche Vereinfachung in der Ausführung der Summe erhält man durch die Bemerkung, daß die de Broglie-Wellenlänge für \underline{e} und \underline{u} mit Energie von einigen Millivolt bis Volt wesentlich größer ist als die Kerndimens. In erster Näherung kann man also die Eigenfunktionen Ψ_s und φ_σ innerhalb des Kerns als konst. betrachten. (21) wird dann:

$$(26) \quad H_{-1 m 1 s 1 \sigma}^{1 n 0 s 0 \sigma} = \pm g \int \Psi_s \delta \varphi_\sigma^* \left(v_m^* u_n d\tau \right),$$

wobei hier und im folgenden Ψ_s und φ_σ an der Stelle des Kerns zu nehmen sind (vgl. Ziffer 8). Aus (26) hat man

$$(27) \quad \left| H_{-1 m 1 s 1 \sigma}^{1 n 0 s 0 \sigma} \right|^2 = g^2 \int v_m^* u_n d\tau \int \Psi_s \delta \varphi_\sigma^* \times \varphi_\sigma^* \delta \Psi_s.$$

Die Zust. σ des $\frac{1}{2}$ sind durch ihren Impuls ($\hbar \sigma$) und die Spin richt. bestimmte Falls wir zu Normierungszwecken in einem Volumen Ω quantisieren, dessen Dimensionen wir nachher ins Unendliche wachsen lassen werden, so sind die normierten $\frac{1}{2}$ eigenf. ebenen Debye-Wellen,

mit der Dichte $\frac{1}{2}\Omega$. Eine einfache Algebra erlaubt dann in (27) den Mittelwert über alle Richtungen von p_0 und alle Spinrichtungen des Neutrinos zu nehmen. (Zu betrachten sind dabei nur die positiven Eigenwerte; die negativen sind mit einem der Diracschen Löchertheorie analogen Kunstgriff zu beseitigen.) Man findet:

$$\left| \int \psi^* \psi \right|^2 = \frac{g^2}{4\Omega} \left| \int \psi_m^* \psi \right|^2 (\tilde{\gamma}_5 \gamma_5 - \frac{mc}{k_0} \tilde{\gamma}_5 \beta \gamma_5), \quad (28)$$

wo μ die Ruhemasse des Neutrinos und β die Diracsche Matrix

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{vmatrix} \quad (29)$$

darstellt. Beachtet man nun:

dass die Anzahl der Neutrinozustände positiver Energie mit Impuls zwischen p_0 und $p_0 + dp_0$ $\frac{8\pi\Omega}{h^3} p_0^2 dp_0$ ist;

dass $\frac{\partial k_0}{\partial p_0} = v_0$, wo v_0 die Geschwindigkeit des Neutrinos im Zustand σ darstellt;

dass (25) ein scharfes Maximum in der Nähe des

Wertes von p_0 hat, für den die Variation der ungestörten Energie verschwindet, d. h.

$$-W + H_s + K_0 = 0, \quad (30)$$

so kann man die Summe von (25) über σ in bekannter Weise') ausführen, und man findet:

$$(30) \quad t \cdot \frac{8\pi^3 g^2}{h^4} \left| \int V_m^* u_{ndc} \right|^2 \frac{p_0^2}{v_0} (\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{mc}{K_0} \tilde{\psi}_s \rho \psi_s),$$

wo p_0 hier den Wert des $\frac{h}{\lambda}$ Impulses bedeutet, für den (30) gültig ist.

6. Bestimmungsstücke der Übergangswahrs.

(11) gibt die Wahrs. dafür an, daß während der Zeit t (t ist als klein in bezug auf die Lebensdauer angenommen worden); der Koeffizient von t gibt die Übergangswahrscheinlichkeit für ein p -Zerfall mit Übergang des Elektrons in den Zustand S statt findet. Wie es sein soll, ist diese Wahrsch. proportional der Zeit t (t ist als klein in bezug auf die Lebensdauer angenommen worden); der Koeffizient von t gibt die Überg. Wahrs. für den geschil. Prozeß an. Sie ist:

$$P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{h^4} \left| \int V_m^* u_{ndc} \right|^2 \frac{p_0^2}{v_0} (\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{mc^2}{K_0} \tilde{\psi}_s \rho \psi_s). \quad (32)$$

Man bemerke:

a) Für die freien Neutronenzustände ist immer $K_0 \mu c^2$.
Damit (30) befriedigt werden kann, ist also notwendig,
dass

$$H_0 \leq W - \mu c^2. \quad (33)$$

Dem \leq -Zeichnen entspricht die obere Grenze des
konti. β -Strahlungsspektrums.

b) Da für die freien Elektronenzustände $H_0 > \mu c^2$
ist, bekommt man die folgende, für die Möglich-
keit des β -Zerfalls notwendige Bedingung

$$W \geq (m + \mu) c^2, \quad (34)$$

Ein besetzter μ -zustand n im Kerne muß also hoch
genug über einem unbesetzten Protonenzustand m
liegen, damit der β -Prozess von sich gehen kann.

c) Nach (32) hängt P_0 von den Eigenfunktionen u_n, v_n
des schweren Teilchens im Kerne durch das Matrix-
element

$$Q_{mn}^* = \int v_m^* u_n d\tau \quad (35)$$

ab. Dies Matrixelement spielt in der β -Strahltheorie
eine ähnliche Rolle wie das Matrixelement des
elektrischen Moments eines Atoms in der Strahlungstheorie.
Das Matrixelement (35) hat normalerweise die
Größenordnung 1; durch besondere Symmetrieeigen.

von u_n und v_m kann es jedoch oft vorkommen, dass Q_{nm}^* verschwindet. In solchen Fällen sprechen wir von verbotenen β -Übergängen. Man muss natürlich nicht erwarten, dass die verbotenen Übergänge überhaupt nicht vorkommen, da (32) nur eine Näherungsformel ist. Wir werden in Ziffer 9 etwas über diesen Typ von Übergängen sprechen.

7. Die Masse des Neutrinos.

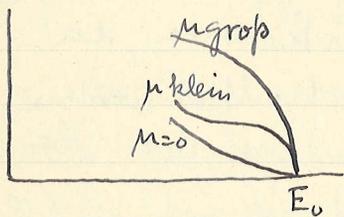
Durch die Übergangswahrs. (32) ist die Form des konti. β -Spektrums bestimmt. Wir wollen zuerst diskutieren, wie diese Form von der Ruhemasse μ des Neutrinos abhängt, um von einem Vergleich mit den empirischen Kurven diese Konstante zu bestimmen. Die Masse μ ist in dem Faktor p_0^2/v_0 enthalten. Die Abhängigkeit der Form der Energieverteilungskurve von μ ist am meisten ausgeprägt in der Nähe des Endpunktes der Verteilungskurve. Ist E_0 die Grenzenergie der β -Strahlen, so sieht man ohne Schwierigkeit, dass die Verteilungskurve für Energien E in der Nähe von E_0 bis auf einen von E unabhängigen Faktor sich wie

$$\frac{p_0}{v_0} = \frac{K_0 \sigma}{c^2}$$

$$\sqrt{(\mu c^2 + E_0 - E)^2 - (\mu c)^2}$$

$$(36) \quad \frac{p_0}{v_0} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}$$

verhält.



In der Fig. 1 ist das Ende der Vert.-
 kurve für $\mu=0$ und für einen
 kleinen und einen großen Wert von
 μ gezeichnet. Die größte Ähnl.
 mit den empirischen Kurven zeigt

die theor. Kurve für $\mu=0$.

Wir kommen also zu dem Schluss, dass die Ruhe-
 masse des Neutrinos entweder Null oder jedenfalls
 sehr klein in bezug auf die Masse des Elektrons
 ist¹⁾. In den folgenden Rechnungen werden wir die
 einfachste Hypothese $\mu=0$ einführen. Es wird
 dann (30)

$$(37) \quad v_0 = c; \quad K_0 = p_0 c; \quad p_0 = \frac{K_0}{c} = \frac{W - H_5}{c}$$

Die Ungl. (33), (34) werden jetzt:

$$H_5 \leq W; \quad W \geq \mu c^2, \quad (38)$$

Und die Überg.wahrs. (32) nimmt die Form an

$$P_S = \frac{8\pi^2 g_2}{c^3 h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \varphi_S \psi_S (W - H_5) \quad (39)$$

1) In einer kürzlich erschienenen Notiz kommt F. Perrin,
 C. R. 197, 1625, 1933, mit qualitativen Überleg. zu
 demselben Schluss.

8. Lebensdauer und Form der Vert.-kurve für „erlaubte“ Übergänge.

Aus (39) kann man eine Formel ableiten, welche angibt, wieviel β -Übergänge in der Zeiteinheit stattfinden, für welche das β -Teilchen einen Impuls zwischen $m_0c\eta$ und $m_0c(\eta+d\eta)$ erhält.

Dazu muß man eine Formel für die Summe von $\tilde{\psi}_s \psi_s$ an Orte des Kerns überall im konti. Spektrum liegender Quantenzust. des betreffenden Intervalls ableiten.

Dabei sei bemerkt, daß die relativistische Eigenfz im Coulomb Feld für die Zustände mit $j = \frac{1}{2}$ ($^2S_{1/2}$ und $^2P_{1/2}$) für $v \rightarrow \infty$ unendlich groß werden. Nun gehorcht aber die Kernanziehung für die elekt. dem Coulombschen Gesetz nur bis $r > \rho$, wo ρ hier den Kernradius bedeutet. Eine Überschlagsrech. zeigt, daß, wenn man plausible Annahme über den Verlauf des elekt. Feldes innerhalb des Kerns macht, der Wert von $\tilde{\psi}_s \psi_s$ im Mittelpunkt einen Wert hat, der sehr nahe dem Werte liegt, den $\tilde{\psi}_s \psi_s$ im Falle des Coulomb-Gesetzes in der Entfernung ρ vom Mittelpunkt annehmen würde. (Durch Überanziehung der bekannten Formeln¹⁾)

¹⁾ Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) 133, 381, 1931.

$$P(\xi) d\xi = P(\eta) \frac{d\eta}{dk} \cdot d\xi = P(\eta) \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot d\xi = P(\eta) \frac{\xi}{\eta} d\xi$$

für die relat. Eigenformen des Kontinuums im wasserstoffähnlichen Falle findet man also nach einer ziemlich langwierigen Rechnung

$$\sum_{dn} \tilde{\Psi}_s \Psi_s = dn \cdot \frac{32\pi m^3 c^3}{h^2 [P(3+2S)]^2} \left(\frac{4\pi m c \rho}{h} \right)^{2S} \eta^{2+2S}$$

$$\times e^{\pi \gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma\left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right) \right|^2, \quad (40)$$

$$\gamma = Z/\nu \eta \quad ; \quad S = \sqrt{1-\gamma^2} - 1. \quad (41)$$

Die Übergangswahrs. in einen Elektronenzustand mit einem Impuls des Intervalls $mc d\eta$ wird dann nach (39):

$$P(\eta) d\eta = d\eta \cdot g^2 \cdot \frac{256\pi^4}{[P(3+2S)]^2} \frac{m^5 c^4}{h^2} \left(\frac{4\pi m c \rho}{h} \right)^{2S}$$

$$\times \left| \int v_{in}^* u_{nd} dc \right|^2 \eta^{2+2S} e^{-\pi \gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma\left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right) \right|^2$$

$$\times (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2, \quad (42)$$

wo η_0 den in Einheiten mc gemessenen maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen darstellt.

Die numerische Auswertung von (42) kann man etwa für $\gamma = 0,6$, d.h. $Z = 82,2$ machen, da ja die Atomnummern der radioaktiven Stoffe nicht weit von diesem Wert liegen. Für $\gamma = 0,6$

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \dots \right\}$$

$$\Gamma(z) = e^{-z} \sqrt{2\pi} z^{-z+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^2} + \dots \right)$$

ist nach (41) $S = -0,2$. Man findet weiter, daß für $\eta < 10$ die folgende Formel angenähert gilt:

$$\eta^{1,6} e^{0,8\eta} \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \left| \Gamma(0,8 + 0,6i \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}) \right|^2 \cong 4,5\eta + 1,6\eta^2. \quad (43)$$

Formel (42) wird damit, wenn man $\rho = 9 \cdot 10^{-15}$ setzt:

$$P(\eta) d\eta = 1,75 \cdot 10^{25} g^2 \int |v_m^* u_n| d\Omega^2 (\eta + 0,355\eta^2) (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2, \quad (44)$$

Die reziproke Lebensdauer erhält man aus (44) durch Integration von $\eta = 0$ bis $\eta = \eta_0$; man findet:

$$\frac{1}{\tau} = 1,75 \cdot 10^{25} g^2 \int |v_m^* u_n| d\Omega^2 F(\eta_0), \quad (45)$$

wo $F(\eta_0) = \frac{2}{3} (\sqrt{1+\eta_0^2} - 1)$

$$+ \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^2}{3} + 0,355 \left[-\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} + \frac{\sqrt{1+\eta_0^2}}{4} \log(\eta_0 + \sqrt{1+\eta_0^2}) \right] \quad (46)$$

Für kleine Argumente verhält sich $F(\eta_0)$ wie $\eta_0^6/24$; für größere Argumente sind die Werte von F in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

| η_0 | $F(\eta_0)$ | η_0 | $F(\eta_0)$ | η_0 | $F(\eta_0)$ | η_0 | $F(\eta_0)$ |
|----------|---------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
| 0 | $\eta_0^6/24$ | 2 | 1,2 | 4 | 29 | 6 | 185 |
| 1 | 0,03 | 3 | 7,5 | 5 | 80 | 7 | 280 |

9. Die verbotenen Übergänge,
Bevor wir zum Vergleich mit der Erfahrung
übergehen, wollen wir noch einige Eigenschaften
der verbotener β -Übergänge diskutieren.

Wie schon bemerkt, ist ein Übergang verboten,
wenn das zugehörige Matrixelement (B^2) verschwindet.
Falls nun die Darstellung des Kerns mit individuellen
Quantenzuständen der Neutronen und der Protonen
eine gute Näherung ist, verschwindet immer Q_{nn}^*
aus Symmetriegründen, wenn nicht

$$i = i'. \quad (47)$$

wo i und i' die Impulsmomente (in Einheiten \hbar/ka)
des Neutronenzustands u_n und des Protonenzustands
 v_m darstellen. Der Auswahlregel (47) entspricht,
falls die individuellen Zustände keine gute
Näherung sind, die allgemeinere

$$I = I', \quad (48)$$

wo I und I' die Impulsmomente des Kerns vor
und nach dem β -Zerfall bedeuten.

Die Auswahlregeln (47) und (48) sind bei weitem
nicht so scharf wie die Auswahlregeln der
Optik. Es gibt hauptsächlich zwei Prozesse,
wodurch ein Durchbrechen dieser Auswahl-

regeln möglich ist:

a) Form (28) ist durch Vernachlässigung der Variationen von ψ_s und φ_0 innerhalb der Kernausdehnung erhalten worden. Falls man aber ψ_s und φ_0 im Bereich des Kerns nicht als konstante betrachtet, so erhält man die Möglichkeit von β -Übergängen auch in Fällen, wo Q_{inn}^* verschwindet.

Es ist leicht einzusehen, daß die Intensität solcher Übergänge zur Intensität der erlaubten Prozesse größenordnungsmäßig im Verhältnis $(R/\lambda)^2$ steht, wo λ die de Broglie-Wellenlänge der leichten Teilchen darstellt. Man bemerke hierzu, daß, bei gleicher Energie, die kinetische Energie der e^- am Orte des Kerns wegen der elektrostatischen Anziehung erheblich größer ist als die der Neutronen n ; die größte Wirkung rührt also von der Variation von ψ_s her. Eine Abschätzung der Intensität dieser verbotenen Prozesse zeigt, daß sie rund 100 mal schwächer sein müssen als die nach (48) erlaubten Übergänge, für welche β -Teilchen der gleichen Energie emittiert werden.

Ein Merkmal für verbotene Übergänge dieses Typs könnte man nicht nur in der verhältnismäßig

längeren Lebensdauer, sondern auch in der verschiedenen Form der Energieverteilungskurve der β -Strahlen erblickten; man findet nämlich, daß für diese Übergänge die Verteilungskurve für kleine Energien tiefer liegen muß als im normalen Falle.

b) Eine zweite Möglichkeit von nach (48) verbotenen Übergängen folgt aus der am Ende von Ziffer 3 bemerkten Tatsache, daß, falls man die Geschwindigkeit der schweren Kernbestandteile nicht gegen die Lichtgeschw. vernachlässigt, zum Wechselwirkungsglied (12) noch weitere von der Größenordnung v/c hinzutreten. Falls man etwa auch für die schweren Teilchen eine relativistische Wellengl. vom Diracschen Typus annimmt, könnte man z. B. zu (12) Terme wie

$$g Q (\alpha_x A_1 + \alpha_y A_2 + \alpha_z A_3) + \text{komp. konj.} \quad (49)$$

addieren, wo $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ die Diracschen Matrizen für das schwere Teilchen bedeuten und A_1, A_2, A_3 die Raumkomp. des von (11) definierten Vierervektors sind. Das Glied (49) würde zu (12) in demselben Verhältnis stehen wie die Terme eV bzw.

$e(\alpha, U)$ ($V =$ skalares Potential; $U =$ Vektorpotential) zu der Diracschen Hamilton-Fn.

Ein Wechselwirkungsglied wie (49) würde natürlich auch verbotene Übergänge ermöglichen, mit einer relativen Intensität von der Größenordnung $(v/c)^2$ in bezug auf die der erlaubten Übergänge. Dies gibt also eine zweite Möglichkeit für das Vorhandensein von Übergängen, die etwa 100 mal schwächer sind als die normalen.

20. Vergleich mit der Erfahrung
Formel (45) gibt eine Beziehung zwischen dem maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen und der Lebensdauer der β -strahlenden Substanz. In dieser Beziehung tritt zwar noch ein unbekanntes Element auf, nämlich das Integral

$$\int v_m^* v_n dv, \quad (50)$$

für dessen Auswertung eine Kenntnis der Eigenfunktionen des \underline{p} von u des \underline{M} im Kern notwendig wäre. Im Falle der erlaubten Übergänge ist jedoch (50) von der Größenordnung 1. Man kann also erwarten, daß das Produkt

$$\tau F(\gamma_0) \quad (51)$$

für alle erlaubten Übergänge dieselbe Größenordnung hat. Falls aber der betreffende Übergang verboten ist, ist die Lebensdauer rund 100 mal größer als

im normalen Falle und auch das Produkt (5D) wird
 entsprechend größer.

In der Tabelle 2 sind die Produkte (5D) für die
 radioaktiven Elemente zusammengestellt, für
 welche man genügende Daten über das conti-
 nuierliche β -Spektrum hat.

Tabelle 2.

| Elemente | τ (Stunden) | η_0 | F (η_0) | τF (η_0) |
|-------------------|------------------|----------|----------------|-----------------------|
| Ux ₂ | 0,026 | 5,4 | 115 | 3,0 |
| RaB | 0,64 | 2,04 | 1,34 | 0,9 |
| ThB | 15,3 | 1,37 | 0,176 | 2,7 |
| ThC" | 0,076 | 4,4 | 44 | 3,3 |
| AcC" | 0,115 | 3,6 | 17,6 | 2,0 |
| RaC | 0,47 | 7,07 | 398 | 190 |
| RaE | 173 | 3,23 | 10,5 | 1800 |
| ThC | 2,4 | 5,2 | 95 | 230 |
| MsTh ₂ | 8,8 | 6,13 | 73 | 640 |

Aus der Tabelle sind die zwei erwarteten Gruppe
 ohne weiteres erkennbar; eine solche Einteilung
 ist übrigens bereits von Sargent¹⁾ auf empirischem
 Wege festgestellt worden. Die Werte von η_0 sind
 aus der genannten Arbeit von Sargent genommen
 (zum Vergleich bemerke man, daß: $\eta_0 = (HE)_{\max} / (1700)$.)
¹⁾ Proc. Roy. Soc. London (A) 139, 659, 1933.

Die von Sargent als nicht zuverlässig angegebenen Werte von η_0 passen nicht besonders gut in die Einteilung; für UX_1 hat man $\tau = 830$; $\eta_0 = 0,76$; $\bar{\tau}(\eta_0) = 0,0065$; $\tau \bar{\tau}(\eta_0) = 5,4$; dies Element scheint also zur ersten Gruppe zu passen. Für AcB hat man die folgenden Daten: $\tau = 0,87$; $\eta_0 = 1,24$; $\bar{\tau}(\eta_0) = 0,102$; $\tau \bar{\tau}(\eta_0) = 0,09$, also ein $\tau \bar{\tau}$ -Wert etwa zehnmal kleiner als die der erste Gruppe. Für RaD hat man $\tau = 320000$; $\eta_0 = 0,38$ (sehr unsicher); $\bar{\tau}(\eta_0) = 0,00011$; $\tau \bar{\tau}(\eta_0) = 35$. RaD liegt also ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Gruppen. Ich habe keine Daten über die anderen β -strahlenden Elemente $MnTh$, UY , Ac , Act , AcC , $U2$, RaC' gefunden.

Aus den Daten der Tabelle 2 kann man eine, wenn auch sehr grobe, Abschätzung der Konstante g gewinnen. Nimmt man etwa an, daß in den Tälern wo (50) gleich Eins wird, man $\tau \bar{\tau}(\eta_0) = 1$ hat (d. h., in Sekunden = 3600), so bekommt man aus (45):

$$g = 4 \cdot 10^{-50} \text{ cm}^3 \cdot \text{erg}.$$

Dieser Wert gibt natürlich nur die Größenordnung von g .

Zusammenfassend kann man sagen, daß dieser Vergleich von Theorie und Erfahrung eine so gute Übereinstimmung gibt, wie man nur erwarten konnte.

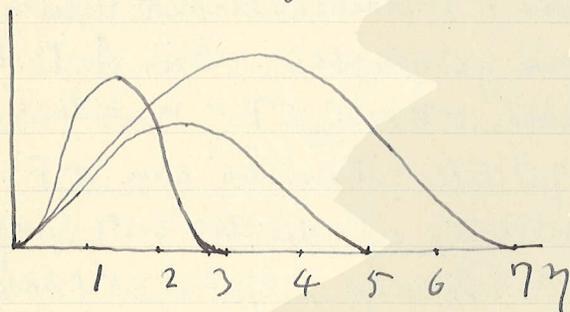


Fig 2

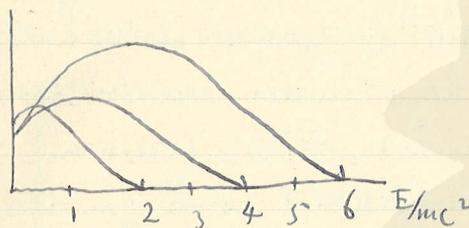
Die bei den als experimentell unsicheren Elementen RaD und AcB festgestellten Abweichungen können wohl teilweise durch Ungenauigkeit der Messungen erklärt werden, teilweise auch durch etwas abnorm große aber gar nicht un plausible Schwankungen des Matrixelements (50). Man hat weiter zu bemerken, daß man aus der dem β -Zerfall begleitenden γ -Strahlung schließen kann, daß die β -Zerfälle zu verschiedenen Endzuständen des Protons führen können, wodurch wieder Schwankungen in dem $\tau F(\eta_0)$ -Wert erklärt werden können.

Wir wenden uns jetzt zur Frage nach der Form der Geschw.-vert.-kurve der emittierten β -strahlen. Für den Fall der erlaubten Übergänge ist die Verteilungskurve als \bar{v}_n von η (d. h. bis auf

den Faktor 1700, von $H\beta$) durch ~~(4)~~ gegeben. Vert. Kurven für verschiedene Werte von η_0 sind in der Fig 2 zusammengestellt, wobei für die Regelmäßigkeit der Zeichnung die Ordinaten einheit in den verschiedenen Fällen passend gewählt worden ist. Diese Kurven zeigen eine befriedigende Ähnlichkeit etwa zu der von Sargent¹⁾ zusammengestellten Verteil. Kurven, Nur in dem Teil der Kurve kleiner Energie liegen die Kurven von Sargent etwas tiefer als die theoretischen. Dies ist deutlicher in der Fig. 3. so zu sehen, wo als Abszisse die Energie an Stelle des Impulses genommen worden ist. Hierzu muß man jedoch bemerken, daß die experimentelle Kenntnis der Vert. Kurve Gesetzes für kleine Energien besonders unsicher ist!) Überigens hat man für die verbotenen Übergänge auch theor. Kurven zu erwarten, die im Gebiet kleiner Energie tiefer liegen als die der Fig. 2 und 3. Dieser letzte Punkt ist besonders für den Fall der experimentell verhältnismäßig gut bekannten Kurve des RaE zu beachten. Aus der Tabelle 2 sieht man nämlich, daß RaE einen sehr großen $\tau F(\eta_0)$ -Wert hat; der β -Zerfall des RaE ist also gewiß verboten und wird sogar möglicherweise nur erst in zweiter Näherung

¹⁾ Sargent, Proc. Camb. Phil. Soc. 28, 538, 1932.

²⁾ Rutherford etc. Radiations from S. 407



erlaubt. Ich hoffe in einer
nächsten Mitteilung etwas
Genaueres über den Verlauf
der Energie vert. kurven für
die verbotenen Übergänge
sagen zu können.

Zusammenfassend darf
man wohl sagen, daß die Theorie in der hier
angegebenen Form in Übereinstimmung mit den
allerdings nicht immer besonders genauen experim.
Daten ist. Sollte man übrigens auch bei
einem näheren Vergleich von Theorie und Erfahrung
zu Widersprüchen kommen, so wäre es noch möglich,
die Theorie abzuändern, ohne ihre begrifflichen
Fundamente zu berühren. Man könnte nämlich
Gl. (9) behalten und eine verschiedene Wahl der
 C_5 treffen. Dies könnte insbesondere zu
einer Abänderung der Auswahl regel (48) führen und
eine andere Form der Energie vert. kurve sowie der
Abhängigkeit der Lebensdauer von der maximalen
Energie ergeben. Ob eine solche Änderung notwendig
sein wird, kann jedoch erst durch eine weitere Ent-
wicklung der Theorie und möglicherweise auch durch
eine Verstärkung der experimentellen Daten gezeigt werden.

Die physikalischen Bedeutung mehrerer Zeiten
in der Q.E.D.
Von F. Bloch.

(Zs. f. phys. ZS. d. Sowj. 5, Heft 2, 301, 1934)

§ 1. Schwac, Fock und Podolsky haben vor einiger Zeit die QED in einer eleganten Weise formuliert, die gegenüber früheren Darstellungen vor allem den grossen Vorzug hat, die relativistische Invarianz der Theorie durch die invariante Form der Gl. selbst zum Ausdruck zu bringen. Dieser Fortschritt wird dadurch erzielt, dass neben der „Feldzeit“ t noch für jede der n Partikeln eine gesonderte „Partikelzeit“ t_s ($s=1, 2, \dots, n$) eingeführt wird. Die W.F. Ψ des Gesamtsystems, bestehend aus dem el. mg. Feld und den Partikeln, hängt dann ausser von den Koordinaten des Systems noch von den sämtlichen $n+1$ Zeiten t, t_1, t_2, \dots, t_n ab; man hat dementsprechend zu fordern, dass sie $n+1$ simultanen Diff. gl. genügt, deren jede ihre Abhängigkeit von einer der $n+1$ Zeiten bestimmt. Der Übergang zu der corresp. mässigen Theorie von H.P.² mit einer Wellenf., die in der üblichen Weise nur von einer Zeit t abhängt, geschieht, indem man die $n+1$ Zeiten einer gemeinsamen Zeit T gleichsetzt, d. h. indem man dann die Wellen

Ψ_2 ~~ist~~ nur für den Fall
 $t = t_1 = \dots = t_n = T$
betrachtet.

Die Kenntnis der Wellenfz $\Psi(T)$ in der H.P. Theorie erlaubt in bekannter Weise, die Wahrsch. gewisser Messergebnisse zur Zeit T zu berechnen, d. h. alle diejenigen Aussagen über das vorgelegte System zu machen, die im Sinne der Q.E.D. phys. sinnvoll sind. Dagegen ist die phys. Interpretation der von mehreren Zeiten abhängigen Wellenfz $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ keineswegs vom Anfang an evident (ausgenommen der Fall $t = t_1 = \dots = t_n = T$, wo sie mit der von H.P. zusammenfällt) und es ist von Interesse zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen auch sie Schlüsse auf bestimmte Messergebnisresultate zu ziehen gestattet.

Wie schon bemerkt, gibt die H.P. Theorie, wie überhaupt die Q.M., eine eindeutige Antwort auf die Frage A: wie gross ist die Wahrsch. dafür, dass zur Zeit T ein gewisses Resultat einer am Gesamtsystem vorgenommenen Messung gefunden wird? Es liegt nahe, in der

Theorie mit mehreren Zeiten die Fragestellung in der folgenden Weise zu verallgemeinern: Frage B: wie gross ist die Wahrsch. dafür, dass sowohl zur Zeit t ein gewisses Resultat einer lediglich an el. mag. Feld, als auch zur Zeit t_1 ein gewisses Resultat einer lediglich an der Partikel 1 ... usw., als auch zur Zeit t_n ein gewisses Resultat einer lediglich an der Partikel n vorgenommenen Messung gefunden wird? Wir werden im Folgenden zeigen, dass unter gewissen charakt. einschränkenden Bedingungen die W. f. $\Psi(t, t_1, t_2, \dots, t_n)$ in der Tat eine direkte Antwort auf die Frage B gibt. Sie lässt sich, wie jede phys. sinnvolle Frage, natürlich auch nach der H. P. - Theorie beantworten und der Gang der folgenden Überlegungen verfolgt gerade die Äquivalenz der nach den beiden Theorien gewonnenen Aussagen.

Nach D. F. P. ist die Abhängigkeit der Wellenf. $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ von der Feldzeit t bestimmt durch die Gl

$$\left(H_0 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0. \quad (1)$$

Dabei ist $2\pi\hbar$ das Wirk. quantum, H_0 der

Hamiltonoperator des Feldes, wie er sich bei der Abwesenheit sämtlicher Ladungen ergeben würde, (1) wird gelöst durch den Ansatz

$$(2) \quad \Psi(t, t_1, \dots, t_n) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \varphi(t, t_1, \dots, t_n),$$

wo $\varphi(t, t_1, \dots, t_n) = \Psi(0, \dots, 0)$ lediglich von den Partikelzeiten t_1, t_2, \dots, t_n abhängt. Die Abhängigkeit von Ψ , bzw. φ von den Partikelzeiten t_1, t_2, \dots, t_n wird dadurch bestimmt, dass φ den folgenden n simultanen Gl. genügen soll:

$$(3) \quad [R_s(t_s) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}] \varphi = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

mit

$$R_s(t_s) = c \vec{\alpha}_s \vec{p}_s + m_s c^2 \alpha_s^{(4)} + \tau \epsilon_s [\Phi(r_s, t_s) - \vec{\alpha}_s \vec{A}(r_s, t_s)]. \quad (4)$$

Die Potentiale $\Phi(r_s, t_s)$ und $\vec{A}(r_s, t_s)$ sind dabei Lösungen der Vakuum-Elektrodyn., d. h. der homogenen Lichtwellen gl., genommen zur Zeit t_s und an der Stelle \vec{r}_s der Partikel s . Um auch die Wirkung der Ladungen ϵ_s auf das Feld zu berücksichtigen, muss neben den $n+1$ gl. (1) und (3) als Nebenbed. noch die gl

$$\left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{e_s}{4\pi} \Delta(|\vec{r} - \vec{r}_s|, t - \tau_s) \right) \Psi = 0 \quad (5)$$

gefordert werden, mit

$$(6) \quad \Delta(|r|, t) = \frac{1}{|r|} [\delta(|r| + ct) - \delta(|r| - ct)].$$

§ 2. Durch die Vermittlung von (2) stellen die Gl. (1), (3) und (5) $n+2$ Diff. gl. mit einer unbekanntem τ_n Ψ dar. Es ist klar, dass diese $n+2$ Gl. nicht unabhängig sein können, sondern dass $\binom{n+2}{2}$ Integrab. bed. zu gelten haben, damit sie eine gemeinsame Lösung haben, d. h. damit jede der Gleichungen mit jeder andern verträglich ist. Die Gl. (3) bestimmt bestimmen lediglich die τ_n φ ; da (2) eine Lösung von (1) darstellt, unabhängig von der Form von φ , so ist es zunächst klar, dass (1) mit jeder der n Gl. (3) verträglich ist. Überdies haben D, F, P. gezeigt, dass (5) sowohl mit (1) als auch mit den Gl. (3) verträglich ist. Überdies ~~bedeutet~~ sind von den $n+2$ Int. Bed. bereits $2n+1$ erfüllt.

Es bleiben noch die restlichen $\binom{n}{2}$ Bedingungen

zu untersuchen, die zu fordern wären, damit auch die n-glb) untereinander verträglich sind. Dieser Pt. ist von D.F.P. nicht berührt worden, und wir werden sogleich sehen, dass die Gl. (3) im allgem. nicht erfüllbar sind, also keine gemeinsame Lösung φ besitzen. Wäre dies nämlich der Fall, so hätte für irgend zwei Partikelzeiten t, t_s ($s \neq s' = 1, 2, \dots, n$) zu gelten:

$$i\hbar \left(\frac{\partial^2}{\partial t_s \partial t_s} - \frac{\partial^2}{\partial t_s \partial t_s} \right) \varphi = (R_s R_{s'} - R_{s'} R_s) \varphi \\
 = [R_s, R_{s'}] \varphi = 0. \quad (7)$$

Wegen der Nichtvertauschbarkeit der in R_s und $R_{s'}$ nach (4) auftretenden Potentiale ist (7) nun aber im allgemeinen keineswegs erfüllt. Vielmehr folgt aus den Vertauschungsrelationen der Potentiale

$$[R_s, R_{s'}] \varphi = \left[\frac{e_s e_{s'} c \hbar}{4\pi i} \Delta(\vec{r}_s - \vec{r}_{s'}, t_s - t_{s'}) \times (1 - \vec{\alpha}_s \vec{\alpha}_{s'}) \right] \varphi, \quad (8)$$

wo Δ wieder die durch (6) definierte „invariante $\Delta \bar{T}_n$ “ ist. $\vec{\alpha}_s \vec{\alpha}_{s'}$ steht für das skalare Produkt der Vektormatrizen $\vec{\alpha}_s$ und $\vec{\alpha}_{s'}$; d.h. D.F.P. (17), (19)

es ist

$$\vec{\alpha}_s \vec{\alpha}_{s'} = \sum_{l=1}^3 \alpha_s^{(l)} \alpha_{s'}^{(l)}$$

Die ~~Integ.~~ Integrabilität der Gl. (3) fordert also neben (4) nach (7) und (8) $\binom{n}{2}$ weitere einschränkende Bed. für die möglichen Wellenfz φ , die sich jedoch im Gegensatz zu (5) im allgemeinen, d. h. für beliebige Zeiten t_1, t_2, \dots, t_n nicht erfüllen lassen.

Da nun aber die in (8) auftretende ΔF_n nach (6) nur dann von Null verschieden ist, wenn der Weltpt (\vec{r}_s, t_s) der Partikel s auf dem vom Weltpunkt $(\vec{r}_{s'}, t_{s'})$ der Partikel s' ausgehenden Lichtkegel liegt, oder umgekehrt, gilt es (je nach der vorliegenden Wellenfz φ) im "Raum" der t_1, \dots, t_n stets gewisse "Gebiete", innerhalb deren die Bedingungen (7) erfüllt sind. D. B. ist dies stets auf "Geraden" $t_1 = t_2 = \dots = t_n$ der Fall, der für $t_s = t_{s'}$ die ΔF_n in (8) verschwindet.

Trotz der Inkompatibilität der Gl. (3) bleibt also der von P. F. P. erbrachte Beweis der Äquivalenz ihrer Theorie mit der von H. P. bestehen, da dabei das Verhalten der von φ nur in unmittel-

barer Umgebung der „Punkte“ $t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$ benötigt wird, wo die Gl. (7) mit beliebiger Annäherung erfüllt sind. Ein anderer, allgemeiner Fall in dem (7) erfüllt ist, ist der, dass z. B. im „Punkt“ $t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$ die n Partikel mit einer gewissen Genauigkeit lokalisiert sind, d. h., dass die Wellenf. φ in diesem „Punkt“ als Funktion der $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ überall dort verschwindet, wo die räumlichen Abstände der Partikel s und s' ein gewisses Mindestmass $\rho_{ss'}$ unterschreiten, d. h. wo

$$|\vec{r}_s - \vec{r}_{s'}| \leq \rho_{ss'} \quad (9)$$

ist. Dann lassen sich die Gl. (3) in dem ganzen „Quader“ behaupten, in dem

$$|t_s - T| \leq \frac{\rho_{ss'}}{c} \quad (10)$$

für jedes Wertepaar $s \neq s'$ erfüllt ist, da in ihm das oben besprochene Durchdringen des Lichtkegel einer Partikel durch eine andere mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann; also verschwindet im Gebiet (10) die in (8) auftretende $\Delta \cdot \vec{r}_n$ überall dort, wo φ nicht verschwindet und die Gl. (3) sind in seinem Innern integrierbar. Stellt man an φ keine einschränkende Bedingung,

d. h. setzt man in (10) $p_{ss} = 0$, so folgt mit Notwendigkeit nach (10) der H.P. - Fall $t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$. Gibt es mehrere „Gebiete“, innerhalb derer die Gl. (7) erfüllt sind und die voneinander durch solche Gebiete getrennt sind, innerhalb derer dies nicht der Fall ist, dann lassen sich zwar innerhalb jedes „erlaubten“ Gebietes Lösungen der Wellergl. angeben; der Zusammenhang zwischen diesen Lösungen ist aber dann im allgemeinen ein unendlich - vieldeutiger, indem die Lösung in einem erlaubten Gebiet verschieden ausfällt, je nachdem, auf welchem Integrationsweg durch „verbotene“ Gebiete im t_1, t_2, \dots, t_n -Raum hindurch sie an (dass der Gl. (3) durch Fortsetzung aus einer Lösung in einem andern „erlaubten“ Gebiet entstanden ist.

§3. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass, wenn in einem gewissen Gebiete eine gemeinsame Lösung der Gl. (1), (3) und (5) existiert, sie auch in einfacher Weise die Antwort auf die in §2 formulierte Frage B zu geben gestattet. Wir müssen uns also auf solche Wellenfunktionen beschränken bei denen in dem betrachteten Gebiet die Gl. (7)

25
erfüllt sind. In ihrer Wirkung auf solche zugelassenen Wellenfunktionen dürfen also die Operatoren R_s und R_s' als vertauschbar betrachtet werden.

Zunächst haben wir zu untersuchen, wie sich die Frage B nach der H. P. - Theorie beantwortet, in der sowohl Ψ wie φ nur von einer Zeit T abhängigen. An Stelle von (2) tritt hier nach D. F. P. die Gleichung

$$\Psi(T) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 T} \varphi(T), \quad (11)$$

an Stelle der n Gleichungen (3) die eine Gl.

$$\left[\sum_{s=1}^n R_s(T) - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right] \varphi(T) = 0. \quad (12)$$

Um den Anschluss an die D. F. P. - Theorie mit mehreren Zeiten zu erhalten, werden wir hier auch von Anfang an nur solche Wellenfunktionen Ψ , bzw. φ zulassen, dass die Operatoren R_s in ihrer Anwendung auf sie vertauschbar sind, obschon sich in der H. P. - Theorie die Antwort auf die Frage B natürlich auch ohne diese einschränkende Bedingung geben liesse.

Bei dieser Einschränkung lässt sich die Lösung von (12) in der Form schreiben:

$$\varphi(T) = \prod_{s=1}^n D_s(T) \varphi(0), \quad (13)$$

©2022 THAL, YTP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial T_a} D_S(T_a + T_b) = R_S(T_a + T_b) D_S(T_a + T_b)$$

$$D_S(0 + T_b) = D_S(T_b)$$

$$D_S(T_a + T_b) = D_S(T_a) D_S(T_b)$$

wenn für die Operatoren $D_S(T)$ gilt:

$$\varphi(T) = \prod_{s=1}^n D_S(T) \varphi(0) \quad (13)$$

wenn $\hbar i \frac{\partial D_S(T)}{\partial T} = R_S(T) D_S(T) \quad (14a)$

$$D_S(0) = 1 \quad (14b)$$

Aus (14) folgt unmittelbar die formale Reihenentwicklung

$$D_S(T) = 1 + \frac{1}{\hbar i} \int_0^T R_S(T') dT' + \frac{1}{(\hbar i)^2} \int_0^T R_S(T') dT' \int_0^{T'} R_S(T'') dT'' + \dots$$

und der Satz, dass die Operatoren $D_S(T), D_S(T')$ als vertauschbar betrachtet werden können, solange dies in den Zeitintervallen $0 \leq T \leq T; 0 \leq T' \leq T'$ für die Operatoren $R_S(T), R_S(T')$ der Fall ist; dies soll nach dem Obigen vorausgesetzt werden. Ferner folgt aus (14)

$$D_S(T_a) D_S(T_b) = D_S(T_a + T_b) \quad (15)$$

und

$$D_S^*(T) = D_S(-T)$$

$$-\hbar i \frac{\partial D_S(T)}{\partial T} = R_S(T) D_S(T) = R_S^*(T) D_S(-T) \quad (16)$$

Bei den in der Frage B (§1) eingeführten „Messzeiten“ t, t_1, \dots, t_n wollen wir festsetzen: Der Stern bedeutet hier und im Folgenden (im Gegensatz zu D. F. P.) „konj. komplex“, der Strich ~ „transponiert“.

$$0 < t_1 < \dots < t_n < t, \quad (17)$$

Im Übrigen werden wir später sehen, dass die hierdurch bestimmte Reihenfolge der Messungen durch eine beliebige andere ersetzt werden könnte, ohne dass sich Wesentliches ändert; auch die Wahl des Zeitbeginnes $T=0$ ist natürlich ganz unwesentlich.

Zur Zeit $T=0$ liege nun ein bestimmter Zustand des Systems vor, dargestellt durch eine Wellenfunktion:

$$\Psi_0(0) = \Psi(0) = \varphi(0)$$

Verfolgen wir ihn bis zur Zeit t_1 , so ist aus der ursprünglichen Wellenfunktion $\Psi(0)$ nach (11) und (13) geworden

$$\Psi_0(t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t_1} \prod_{s=1}^n D_s(t_1) \Psi(0) \quad (18)$$

Nun erfolgt der erste Eingriff in das System durch eine Messung an der Partikel 1. Die zu messende physik. Größe G_1 wird dargestellt durch einen Operator

$$f_1 = f_1(\vec{p}_1, \vec{r}_1, \vec{\alpha}_1),$$

der, da es sich nur um eine Messung an der

Partikel 1 handelt, lediglich die dynamischen Variableneln $\vec{p}_1, \vec{r}_1, \alpha_1$ dieser Partikel enthält. Ist nun bei der Messung ein bestimmter Wert f_1' der Größe f_1 festgestellt worden, so ist das System nach der Messung durch eine neue Wellenf₂ darzustellen, die sich bis auf einen ~~un~~ unbestimmten Phasenfaktor eindeutig aus der Welle.f₂ (18) vor der Messung bestimmen lässt. Wir nennen sie $\Psi_1(t_1)$ und setzen

$$\Psi_1(t_1) = M_{f_1'} \Psi_0(t_1) \quad (19)$$

Der „Messoperator“ $M_{f_1'}$ soll ausdrücken: „Man entwickel~~t~~te die Wellenf₂ $\Psi_0(t_1)$ hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten des ersten Teilchens nach den orthogonalen normierten Eigenf₂en des Operators f_1 und behandelte denjenigen Teil in der Entwicklung bei, der der zum Eigenwert f_1' von f_1 gehörigen Eigenf₂ entspricht.“ Die so entstehende neue F_{2z} sämtlicher Koord. des Systems ist $\Psi_1(t_1)$. $M_{f_1'}$ ist ein hermitescher Operator, der der Gl.

$$M^2 = M \quad (20)$$

genügt, d. h. seine Eigenwerte sind 0 und 1. Nachdem so die Messung am Teilchen 1 dar-

gestellt ist, verfolgen wir das neue „Wellenpaket“
 Ψ_1 weiter während des Zeitintervalles $t_1 \leq T \leq t_2$.

Da } Dazu gehen wir zunächst von der \bar{H}_n
 $\Psi_1(t_1)$ zur entspr. $\bar{H}_n \Psi_1(t_1)$ über mittels (11):

$$\varphi_1(t_1) = e^{i\frac{1}{\hbar} H_b t_1} \Psi_1(t_1)$$

oder mittels (18) und (19)

$$\varphi_1(t_1) = e^{i\frac{1}{\hbar} H_b t_1} M_{f_1} e^{-i\frac{1}{\hbar} H_b t_1} \times \prod_{s=1}^n D_s(t_1) \Psi(0), \quad (21)$$

Da der Operator M_{f_1} nur auf die Koord. des Teilchens 1 wirkt, ist er mit dem lediglich die Feldoperatoren enthaltenden Operatoren H_b vertauschbar; aus (21) wird also

$$\varphi_1(t_1) = M_{f_1} \prod_{s=1}^n D_s(t_1) \Psi(0) \quad (22)$$

und zur Zeit t_2 ist aus dem Wellenpaket Ψ_1 geworden:

$$\begin{aligned} \Psi_1(t_2) &= e^{-i\frac{1}{\hbar} H_b t_2} \varphi_1(t_2) \\ &= e^{-i\frac{1}{\hbar} H_b t_2} \prod_{s=1}^n D_s(t_2 - t_1) \varphi_1(t_1) \\ &= e^{-i\frac{1}{\hbar} H_b t_2} \prod_{s=1}^n D_s(t_2 - t_1) M_{f_1} \prod_{s=1}^n D_s(t_1) \Psi(0), \end{aligned} \quad (23)$$

In vollkommen entsprechender Weise, wie bisher die Messung am ersten Teilchen zur Zeit t_1 , verfolgt wurde, wiederholt sich nun die Überlegung bei den folgenden Messungen an den übrigen Teilchen; Zur Zeit t_2 soll eine Messung der Grösse

$$f_2 = f_2(\vec{p}_2, \vec{r}_2, \vec{\alpha}_2)$$

am Teilchen 1; Zur Zeit t_2 soll eine Messung der Grösse

$$f_2 = f_2(\vec{p}_2, \vec{r}_2, \vec{\alpha}_2)$$

am Teilchen 2 das Ergebnis f_2^i liefern. Der zugehörigen Messoperator sei $M_{f_2^i}$. Dann wird aus $\Psi_1(t_2)$ analog zu (19) eine neue Wellenfz

$$\Psi_2(t_1) = M_{f_2^i} \Psi_1(t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t_2} \varphi_2(t_2)$$

und aus ihr zur Zeit t_3 , wenn man wieder die Vertauschbarkeit von $M_{f_2^i}$ mit H_b berücksichtigt, entsprechend zu (23) und mit Benutzung von (23)

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \Psi_2(t_3) &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t_3} \prod_{s=1}^n D_s(t_3 - t_2) M_{f_2^i} \varphi_2(t_2) \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t_3} \prod_{s=1}^n D_s(t_3 - t_2) M_{f_2^i} \prod_{s'=1}^n D_{s'}(t_2 - t_1) M_{f_1^i} \prod_{s''=1}^n D_{s''}(t_1 - t_0) \varphi_0 \\
 &\quad \times D_{s''}(t_1) \varphi_0
 \end{aligned}$$

So weiter fortfahrend, erhält man schliesslich zur Zeit t :

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) = & e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t} \prod_{s=1}^n D_s(t-t_n) M_{f_n} \\ & \times \prod_{s'=1}^n D_{s'}(t_n-t_{n-1}) M_{f_{n-1}} \cdots M_{f_2} \prod_{s^{(n-1)}=1}^n D_{s^{(n-1)}}(t_2-t_1) M_{f_1} \\ & \times \prod_{s^{(n)}=1}^n D_{s^{(n)}}(t_1) \Psi(0), \end{aligned} \quad (25)$$

wenn die Messungen der phys. Grössen

f_1, f_2, \dots, f_n

an den Teilchen $1, 2, \dots, n$ die Resultate

f'_1, f'_2, \dots, f'_n

ergeben haben und die zugehörigen Messoperatoren

mit $M_{f_1} M_{f_2} \cdots M_{f_n}$

bezeichnet werden, die sämtlich mit H_b vertauschbar sind.

Zur Zeit t erfolge nun schliesslich noch die Messung einer auf das Feld allein bezüglichen Grösse f , (etwa einer Feldstärke an einer bestimmten Raumstelle.) Sie möge das Resultat f' liefern und der zugehörige Messoperator sei $M_{f'}$. Nach sämtlichen vorgenommenen $n+1$

Messungen wird also unser System dargestellt durch die bis auf eine Phasenkonstante bestimmte Wellenf_z

$$\Psi_{n+1}(t) = M_f \Psi_n(t). \quad (26)$$

Die gesuchte Wahrsch. $W(f_1't_1, \dots, f_n't_n)$ dafür, zur Zeit t_1 den Wert f_1 u.s.w., zur Zeit t_n den Wert f_n zu finden, ist nun nach der Wellenmechanik gegeben durch das über sämtlichen vorkoordinaten des Systems integrierte Absolutquadrat von $\Psi_{n+1}(t)$. Es ist also

$$W(f_1't_1, f_2't_2, \dots, f_n't_n, f't) = \int \Psi_{n+1}^*(t) \Psi_{n+1}(t) dq$$

wobei das Differential dq die Integration über sämtliche Systemkoordinaten bedeutet. Schreiben wir symbolisch

$$\Psi_{n+1}(t) = F \Psi(0)$$

wobei sich die Bedeutung des Operators F aus (25) und (26) ergibt, so wird

$$W = \int [F^* \Psi^*(0)] [F \Psi(0)] dq$$

oder durch partielle Integration

$$W = \int \Psi^*(0) \tilde{F}^* F \Psi(0) dq$$

Berücksichtigt man (16) und ferner, dass wegen der Idempotenzität der Messoperatoren M

$$M^* = M$$

sowie wegen (20)

$$M_{f_i}^2 = M_{f_i}$$

ist, so folgt aus der durch (25) und (26) bestimmten Bedeutung des Operators T ausführlich geschrieben:

$$W(f_1^0, t_1, f_2^0, t_2, \dots, f_n^0, t_n)$$

$$= \int \Psi^*(0) \prod_s D_s(t_1) M_{f_1} \prod_{s'} D_{s'}(t_1 - t_2) M_{f_2} \dots$$

$$\dots M_{f_{n-1}} \prod_{s^{(n-1)}} D_{s^{(n-1)}}(t_{n-1} - t_n) M_{f_n}$$

$$(27) \left\{ \cdot \prod_{s^{(n)}} D_{s^{(n)}}(t_n - t) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$$

$$\prod_{s^{(n+1)}} D_{s^{(n+1)}}(t - t_n) M_{f_n} \prod_{s^{(n+2)}} D_{s^{(n+2)}}(t_n - t_{n-1}) M_{f_{n-1}} \dots$$

$$\dots M_{f_2} \prod_{s^{(2)}} D_{s^{(2)}}(t_2 - t_1) M_{f_1} \prod_{s^{(1)}} D_{s^{(1)}}(t_1) \Psi(0) d\mathbf{q}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich stark, wenn man berücksichtigt, dass durch unsere zu Beginn des § 3 eingeführte einschränkende Bedingung für die betrachteten Wellenfunktionen (sie schränkt nicht nur die F_n $\Psi_0 = \Psi(0)$, sondern

auch die aus ihr durch die Messungen entstehenden
Fragen Ψ_1, \dots, Ψ_n ein) unter dem Integral (27)
die Operatoren $D_u(T), D_u(T')$ für $u \neq v$ und beliebige
in (27) vorkommende Argumente T, T' als vertausch-
bar betrachtet werden können. Sie besagt, dass
während des ganzen Zeitintervalls $0 \leq T \leq t$
sicher keine Partikel den Lichtkegel einer
anderen Partikel erreicht.

Indessen lässt sich das Ergebnis von (27)
erst dann auf die D.F.P.-Theorie mit mehreren
Zeiten übertragen, wenn noch die zusätzliche
Forderung gemacht wird dass auch die Messung
der Feldgröße f nicht durch die von Teilchen
ausgehenden Strahlenwirkung gestört wird, d.h.,
dass sie sich in solchen Weltgebieten vollzieht, die
nicht von Lichtkegeln durchsetzt werden, welche
von den Teilchen ausgehen. In dem in (27) auftretenden
Operator $e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_f e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$ bleiben nämlich
nur die auf die Feldmessung bezüglichen Feldoperatoren
stehen, da die übrigen in H_0 enthaltenen Feldoperatoren
mit M_f vertauschbar sind. Unter unserer zusätzlichen
Einschränkung bezüglich der zu messenden Feldgröße
 f gestattet dann in (27) die Vertauschung des

Operators $e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$ mit den übrigen dort auftretenden Operatoren M_{f_s} und D_s ($s=1, 2, \dots, n$).

Indem man die nunmehr erlaubten Vertauschungen der Operatoren in (27) in geeigneter Weise durchführt und die Gl. (14), (15) und (20) berücksichtigt, lässt sich nun (27) stark vereinfachen. Um überflüssige Länge der Formeln zu vermeiden, erläutern wir das Vorgehen an dem Beispiel, dass nur zwei Teilchen vorhanden ~~ist~~ sein; die Verallgemeinerung auf den allgemeinen Fall von n Teilchen bietet dann keine Schwierigkeiten. Für den Fall zweier Teilchen wird S aus (27)

$$W(f_1 t_1, f_2 t_2, f' t) =$$

$$(28) \quad = \int \Psi^*(0) D_1(-t_1) D_2(-t_2) M_{f_1} D_1(t_1 - t_2) D_2(t_2) \\
 \cdot M_{f_2} D_1(t_2 - t) D_2(t_2 - t) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} D_2(t - t_1) D_1(t) \\
 M_{f_2} D_2(t_2 - t_1) D_1(t_2 - t_1) M_{f_1} D_2(t_1) D_1(t_1) \Psi(0) dq.$$

Vertauscht man zunächst den Operator $e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$ mit dem links von ihm stehenden Operatorprodukt und berücksichtigt, dass wegen (15), (14b) und (20)

$$M_{f_i} D_1(t_2 - t_1) D_2(t_2 - t_1) D_2(t_1 - t_2) D_1(t_1 - t_2) M_{f_i} \\
 = M_{f_i} D_1(0) D_2(0) M_{f_i} = M_{f_i}^2 = M_{f_i}$$

ist, so wird aus (28)

$$W = \int \Psi^*(0) e^{\frac{i}{\hbar} H_b t} M_{f_i} e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t} D_1(-t_1) D_2(-t_1) M_{f_i} \\
 \cdot D_1(t_1 - t_2) D_2(t_1 - t_2) M_{f_i} D_2(t_2 - t_1) D_1(t_2 - t_1) M_{f_i} \\
 \cdot D_2(t_1) D_1(t_1) \Psi(0) dq. \quad (29)$$

Durch Vertauschung von $D_1(t_1 - t_2)$ mit den drei
 rechts von ihm stehenden Operatoren und
 Berücksichtigung von

$$D_1(t_1 - t_2) D_1(t_2 - t_1) = D_1(0) = 1$$

$$\text{wird } W = \int \Psi^*(0) e^{\frac{i}{\hbar} H_b t} M_{f_i} e^{-\frac{i}{\hbar} H_b t} D_1(-t_1) D_2(-t_1) \\
 \cdot M_{f_i} D_2(t_1 - t_2) M_{f_i} D_2(t_2 - t_1) M_{f_i} D_2(t_1) D_1(t_1) \Psi(0) dq.$$

Vertauscht man hier $D_2(-t_1)$ mit M_{f_i} und $D_2(t_1)$
 mit M_{f_i} und berücksichtigt

$$D_2(-t_1) D_2(t_1 - t_2) = D_2(-t_2)$$

sowie

$$D_2(t_2 - t_1) D_2(t_1) = D_2(t_2)$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 W &= \int \Psi^*(0) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} D_1(-t_1) \cdot M_{f_1} \\
 &\cdot D_2(-t_2) M_{f_2} D_2(t_2) M_{f_2} D_1(t_1) \Psi(0) dq \\
 &= \int \Psi^*(0) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} D_1(-t_1) D_2(-t_2) \\
 &\cdot M_{f_2} D_2(t_2) M_{f_2} D_1(t_1) \Psi(0) dq \quad (31)
 \end{aligned}$$

letzteres durch Vertauschung von M_{f_1} mit $D_2(-t_2)$
 $M_{f_2} D_2(t_2)$ und Berücksichtigung von
 $M_{f_1}^2 = M_{f_1}$

Indem man berücksichtigt, dass im letzten
 Integral (31) H_0 mit M_{f_1} und M_{f_2} vertauschbar
 ist und noch einige einfache Vertauschungen
 vornimmt, wird schliesslich

$$\begin{aligned}
 W &= \int \Psi^*(0) D_2(-t_2) D_1(-t_1) e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} M_{f_1} \\
 &\cdot M_{f_2} M_{f_2} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} D_1(t_1) D_2(t_2) \Psi(0) dq. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Führen wir nun

$$\Psi(t, t_1, t_2) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} D_1(t_1) D_2(t_2) \Psi(0)$$

ein, so folgt durch partielle Integration von
 (32) mit Berücksichtigung von (16)

$$W(f_1 t_1, f_2 t_2, f' t) = \int \Psi(t, t_1, t_2) M_{f'} M_{f_1} M_{f_2} \Psi(t, t_1, t_2) dq. \quad (33)$$

Ein vollkommen analoges, wenn auch weitläufigeres Verfahren liefert im allgemeinen Fall von n Teilchen das folgende Resultat; Sei

$$(34) \quad \Psi(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = e^{-\frac{1}{\hbar} H_b t} \prod_{s=1}^n D_s(t_s) \Psi(0),$$

so wird aus (27)

$$(35) \quad W(f_1 t_1, f_2 t_2, \dots, f_n t_n, f t) = \int \Psi^*(t, t_1, t_2, \dots, t_n) M_{f'} \prod_{s=1}^n M_{f_s} \Psi(t, t_1, t_2, \dots, t_n) dq.$$

§ 4. Das Resultat (35) ist allerdings auf Grund von der besondere Festsetzung (17) gewonnen. Indessen sieht man sofort, dass eine andere Reihenfolge der Zeilen lediglich zur Folge hätte, dass in (27) vertauschbare Operatoren in einer anderen Reihenfolge zu stehen kämen. Durch ihre Vertauschung lässt sich also die allgemeine Gültigkeit von (35) auf dem in § 3 angegebenen Wege beweisen.

Die Gl. (35) beantwortet nun sofort unsere in § 1 gestellte Frage nach der phys. Bedeutung der von

mehreren Zeilen abhängigen Wellenf_z von D. F. P. In der Tat ist die hier auftretende, durch (34) definierte Wellenf_z $\Psi(t, t_1; \dots t_n)$ identisch mit der von D. F. P., denn sie genügt nicht nur die der Gl. (1), sondern den sämtlichen n Gl. (3), wenn

$$[D_s(t_s) D_s(t_s')] \varphi = [D_s(t_s) R_s(t_s')] \varphi \\ \approx [R_s(t_s) R_s(t_s')] \varphi = 0$$

ist, d. h. wenn die Gl. (3) überhaupt eine gemeinsame Lösung haben.

Dass die D. F. P.'sche Wellenf_z in dem durch (35) ausgedrückten Zusammenhang mit der Wahrs. $W(f_1, t_1; \dots f_n, t_n | f', t)$ steht, bedeutet, dass sie in vollkommen analogem Sinne die Rolle einer Wahrs. amp. spielt, wie die Wellenf_z der üblichen Wellenmech. Insbesondere ist

$$W(t_1, t_2, \dots t_n, t, g) dg = \\ (35a) = \Psi^*(t, t_1, t_2, \dots t_n, g) \Psi(t, t_1, t_2, \dots t_n, g) dg$$

die Wahrs. dafür, sowohl zur Zeit t die Koord. des Teilchen \mathcal{L} zwischen g , und $g+dg$, u. s. w. als auch zur Zeit t die Velokoord. zwischen

q_b und $q_b + dq_b$ zu finden.¹ (Es handelt es sich nämlich um Koordinatenmessungen, so sind die in (35) auftretenden Messoperatoren durch T_{neu} zu ersetzen, die innerhalb der betrachteten Koord. Intervalle $dq_1, dq_2, \dots, dq_n, dq_b$ gleich q_{ins} , ausserhalb gleich null sind. Dies liefert unmittelbar das Resultat (35a), welches zeigt, dass auch $\Psi^* \Psi$ in der D. F. P. - Theorie in entsprechender Weise die Rolle einer „Wahrs. dichte“ spielt, wie in der gewöhn. Wellenrech.

Es handelt es sich in der gewöhnlichen Wellenrech. um die gleichzeitige Messung der Grösse f_1, f_2, \dots, f_n , die durch vertauschbare Operatoren dargestellt werden, so ist die Wahrs. dafür, zur Zeit T sowohl den Wert f_1 als auch den Wert f_2 u. s. w. als auch den Wert f' zu finden, gegeben durch

$$(36) W(f_1', f_2', \dots, f_n', f', T) = \int \Psi^*(T) M_{f_1'} \prod_{s=1}^n M_{f_s'} \Psi(T) dq$$

Nach (35) führt die Wellenfz $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ der Theorie von D. F. P. in genau derselben Weise zur Wahrs., sowohl zur Zeit t_1 den Wert f_1 als auch zur Zeit t_2 den Wert f_2 u. s. w. als auch zur Zeit t den Wert f' zu find. Während

jedoch in der gewöhnlichen Wellenmech. die
Gültigkeit von (36) lediglich die Vertauschb. der
Operatoren M_j^i, M_j^s , ($s=1, 2, \dots, n$) voraussetzt,
muss in der D. F. P. - Theorie in charakteristischer
Weise noch ausserdem gefordert werden,
dass die Messungen in solchen Weltgebieten
ausgehender Lichtkegel keines der anderen
treffen, d. h., dass sich die Messungen nicht
durch Strahlung beeinflussen können.

Discussion of the infinite distribution of electrons
in the theory of the positron. By Prof. P. A. M. Dirac
[Received 2 February, read 5 March 1934.]

(Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 150, 1934)

1. Use of the density matrix.

The ψ theory of the electron allows states of negative kinetic energy as well as the usual states of positive k. e. and also allows transitions from one kind of state to the other. Now particles in states of neg. k. e. are never observed in ~~the~~ practice. We can get over this discrepancy between theory and observation by assuming that, in the world as we know it, nearly all the states of negative k. e. are occupied, with one electron in each state in accordance with Pauli's exclusion principle, and that the distribution of neg.-energy electrons is unobservable to us on account of its uniformity. Any ^{un}occupied neg.-energy states would be observable to us, as holes in the distribution of neg.-energy electrons, but these holes would appear as particles with pos. k. e. and thus not as things foreign to all our experience. It seems reasonable and in agreement with all the facts known at

present to identify these holes with the recently discovered positions and thus to obtain a theory of the positron.*

We now have a picture of the world in which there are an infinite n_0 of negative energy electrons (in fact an infinite n_0 per unit volume) having energies extending continuously from $-mc^2$ to $-cs$. The problem we have to consider is the way this infinity can be handled mathematically and the physical effects it produces. In particular, we must set up some assumptions for the production of electromagnetic field by the electron distribution, which assumptions must be such that any finite change in the distribution produces a change in the field in agreement with Maxwell's eq., but such that the infinite field which would be required by Maxwell's eq. from an infinite density of electrons is in some way cut out.

* These problems are quite simple when we

suppose each electron to be moving in a space free of el. mag. field. They are not so simple when there is a field present since the positive- and negative-energy states then get mixed together so intimately that one cannot in general distinguish accurately between them in a relativistically invariant way. A careful investigation is then necessary, even for such an elementary problem as seeing that a precise meaning can be given to a distribution such as occurs in practice, in which nearly all the neg.-energy states are occupied and nearly all the pos.-energy ones unoccupied.

To make an exact treatment of the matter would be very complicated and in the present paper only an approximate treatment will be given, on the lines of Hartree's method of the self-consistent field. We shall suppose that each electron has its own individual wave function in space-time (instead of there being one wave ψ in an enormous number of variables to describe the whole distribution),

And also we shall suppose that each electron moves in a definite electromagnetic field, which is the same for all the electrons. This field will consist of a part coming from external causes and a part coming from the electron distribution itself, the precise way in which the latter part depends on the electron distribution being one of the problems we have to consider.

Let the normalized functions for the electrons at any time be $\psi_a(x)$, where x stands for three positional coordinates x_1, x_2, x_3 of an electron and the suffix a takes on different values for the different electrons. With electron spin taken into account, each $\psi_a(x)$ must have four components, which may be specified by $\psi_{ak}(x)$ with $k=1, 2, 3, 4$. The whole distribution of electrons may now be described by the density matrix ρ defined by

$$(1) \quad (x' | \rho | x'')_{k'k''} = \sum_a \psi_{ak'}(x') \overline{\psi_{ak''}(x'')},$$

in which the sum is taken over all the electrons.

This is a matrix in the spin variables σ as well as in the positional variables x . It is, of course, a Hermitian matrix. Its properties have been studied previously*, the chief ones being the equation

$$\rho^\dagger = \rho, \quad (2)$$

which express that the electron distribution satisfies the exclusion principle, and the equation of motion

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = H\rho - \rho H. \quad (3)$$

(Here H is the Hamiltonian for the motion of a single electron in the field, thus

$$H = c\sum_s(p_s + eA_s) - eA_0 + d_4m, \quad (4)$$

the velocity of light being made equal to unity and a summation being implied over the values $s = 1, 2, 3$.

An alternative way of neglect regarding the sum on the right-hand side of (2) is as a sum over all the occupied states*. It may then conveniently be written $\sum_{\text{occ}} \psi_k(x') \psi_k(x'')$. There will be a corresponding sum over the unoccupied and does not include states formed by superposition of them.

* The word 'all' used in this connection means each of a set of orthogonal states which is made as large as possible.

states, which may be written $\sum_{\alpha} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k'}(x')$.
 If we add these two sums, we get the sum over all states and this must give us the unit matrix, from the transition formation theory of quantum mechanics. Thus

$$\sum_{\alpha} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''} + \sum_{\alpha} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'') = \delta(x' - x'') \delta_{kk''}$$

Put so that
$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \rho_1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (x' | \rho_1 | x'')_{kk''} &= \sum_{\alpha} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'') \\ &\quad - \sum_{\alpha} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'). \end{aligned}$$

We may now consider the electron distribution as specified by the matrix ρ , instead of the matrix ρ . This has the advantage that it makes a closer symmetry between the electrons and the positions and leads to neater mathematical expressions. The eq. of motion (3) holds unchanged with ρ , instead of ρ and eq. (2) gets modified to

$$\rho_1^2 = 1. \quad (6)$$

The density matrices that we have been discussing up to the present are non-relativistic things,

since they their elements each refer to two points in space x' and x'' but to only one time. To get a rel. theory, we must introduce two times, t' and t'' , and use instead of ρ the rel. density matrix R defined by

$$\begin{aligned} (x't' | R | x''t'')_{k'k''} &= \sum_a \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') \\ &= \sum_{oc} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t''). \quad (7) \end{aligned}$$

Instead of ρ , we shall now have R_1 , defined by

$$(x't' | R_1 | x''t'')_{k'k''}$$

$$= \sum_{oc} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') - \sum_{un} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'')$$

and instead of eq. (5) we shall have

$$R = \frac{1}{2} (R_F + R_1),$$

$$\begin{aligned} \text{where } (x't' | R_F | x''t'')_{k'k''} &= \bar{\psi}_{k''}(x''t'') \\ &= \sum_{oc} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') + \sum_{un} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') \end{aligned}$$

R_F , representing the full distribution with all possible states occupied, is not longer simply the unit matrix, but all the same

we should expect it to play some fundamental part in the theory.

The new matrices R, R_1, R_F are also Hermitian and their eq. of motion is

$$\mathcal{H} R = 0, \quad \mathcal{H} R_1 = 0, \quad \mathcal{H} R_F = 0 \quad (8)$$

where \mathcal{H} is the total operator that operates on the wave $\psi_{\underline{u}}$ in the wave eq. for one electron, i.e.,

$$\mathcal{H} = W - H,$$

W being the operator in t times time-diff. eq. (2) and (6) cannot be concisely expressed in terms of the R 's.

To obtain the field produced by the distrib. of electrons, we must first get the el. density and current density. For this purpose we must, according to the usual theory for finite distrib., take a diagonal element of ρ in the positional variables, or a diagonal element of R in the positional and time variables, and form its diagonal sum over the spin variables.

The resulting expression, namely $\sum_k (\alpha | \rho | \alpha)_{kk}$ or $\sum_k (x | R | x)_{kk}$ would be the
Then

electric density (apart from the factor $-e$).
 The corresponding current density would have
 as for its s th component $\sum_k (x | \alpha_s p | x) k_k$ or
 $\sum_k (x | \alpha_s R | x) k_k$. We can easily
 verify that this electric density and current
 density satisfy the conservation law of
 electricity. In eq. (3) let us take diagonal
 elements in the positional variables, but keep
 to the symbolic matrix notation for the spin
 variables, so that a symbol like $(x | p | x)$
 denotes a matrix with four rows and α
 columns, of the same nature as α . This
 gives

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} (x | p | x) &= (x | H p - p H | x) \\ &= \alpha_s (x | p_s p - p p_s | x) \\ &\quad + (x | \{ \alpha_s p - p \alpha_s \} \{ p_s + e A_s \} | x) \\ &\quad + (x | \alpha_4 p - p \alpha_4 | x) m \end{aligned}$$

If we now take the diagonal sum with respect
 to the spin variables, the last two terms will
 contribute nothing, from the rule that the
 diagonal sum of the product of two matrices
 is independent of their order, and we shall

be left with

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum_k (x|p|x)_{kk} = \sum_{kk'} \alpha_{skk'} (x|p_s p)$$

$$= -i\hbar \sum_{kk'} \alpha_{skk'} \frac{\partial}{\partial x_s} (x|p|x)_{k'k},$$

$$(9) \text{ i.e. } \frac{d}{dt} \sum_k (x|p|x)_{kk} = -\frac{\partial}{\partial x_s} \sum_k (x|\alpha_s p|x)_{kk}$$

which is the required conservation law.

In our present theory the electric density and current density given by these formulae would be infinite and some alternation of the assumption is therefore necessary. The problem now presents itself of finding some natural way of removing the infinities from $\sum_k (x't'|R|x't)$ and $\sum_k (x't'|R|x't)$ so as to leave finite remainders, which we could then assume to be the electric density and current.

This problem requires us to make a detailed investigation of the singularities in the matrix elements $(x't'|R|x)$ near the diagonal $x_s'' = x_s'$, $t' = t''$.

2. Case of no field.

We shall begin our investigation by taking the case of no electromagnetic field, when the (Hamiltonian (4) reduces to

$$\begin{aligned} H &= \alpha_5 p_5 + \alpha_4 m \\ &= (\alpha, p) + \alpha_4 m. \end{aligned} \quad (10)$$

In this case we can calculate accurately the matrix elements $\langle \alpha' t' | R | \alpha t \rangle_{kk}$ for the distribution of electrons in which all the negative-energy states are occupied and all the positive-energy state ones unoccupied, and see exactly how these matrix elements behave near the diagonal.

If we try to work directly from the def. (7) we meet with some awkward calculations in taking the spin variables into account and summing over the two possible spin orientations, we can avoid these calculations by using symbolic methods and first obtaining ρ .

"t")_{kk} The condition that a wave ψ contains only Fourier components belonging to neg. -energy states may be expressed symb. by

$$\{ H + \sqrt{P^2 + m^2} \} \psi = 0,$$

where P denotes the length of the vector p and the positive square root is understood.

Similarly, the condition that the distribution ρ contains electrons only in negative-energy states may be expressed by

$$\{ H + \sqrt{P^2 + m^2} \} \rho = 0 \quad (11)$$

The condition that in the distribution ρ every negative-energy states is occupied, is just the condition that the distribution $1 - \rho$ contains electrons only in positive-energy states and may thus be expressed by

$$\{ H - \sqrt{P^2 + m^2} \} (1 - \rho) = 0.$$

Adding this eq. to (11) we get

$$H + \sqrt{P^2 + m^2} (2\rho - 1) = 0$$

$$(12) \text{ or } \rho = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{H}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\alpha p) + \alpha_4 m}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right]$$

Hence, from the transf. theory,

$$\begin{aligned} \langle x' | \rho | x'' \rangle &= \frac{1}{2h^3} \iint e^{i(x', p')/h} dp' \left[1 - \frac{(\alpha p) + \alpha_4 m}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right] \\ &\quad \times \delta(p' - p'') dp'' e^{-i(x'', p'')/h} \quad (13) \end{aligned}$$

where dp denotes the product dp_x, dp_y, dp_z .

We can now easily see that

$$(14) \quad \langle x't' | R | x''t'' \rangle = \frac{1}{2h^3} \iint e^{i(\alpha, p')/h} e^{it'/h \sqrt{p'^2 + m^2}} e^{-i(\alpha'', p'')/h} e^{-it''/h \sqrt{p''^2 + m^2}} dp' [1 - \dots] \times \delta(p' - p'') dp''$$

This is because the right-hand side of (14) is Hermitian and goes over into the right-hand side of (13) when $t' = t''$, and also it satisfies the eq. of motion (8), since the operator H operating on the integrand in (14) is equivalent to the factor =

$$- \{ (\alpha, p') + \alpha_4 m + \sqrt{p'^2 + m^2} \}$$

multiplied into this integrand on the left and therefore gives the result zero, from equation (11). Introducing the notation =

$$x'_5 - x''_5 = x_5, \quad t' - t'' = t,$$

which we shall keep through the rest of the paper, we get from (14)

$$\langle x't' | R | x''t'' \rangle = \frac{1}{2h^3} \int e^{i(\alpha, p)/h} e^{it/h \sqrt{p^2 + m^2}} \times \left[1 - \frac{(\alpha, p) + \alpha_4 m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right] dp$$

$$(15) = - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \alpha_4 m \right] S(x, t)$$

where
$$S(x, t) = \frac{1}{2\hbar^3} \int e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})/\hbar} e^{it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \times \frac{d^3 p}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}$$

To integrate this expression for S , let r denote the length of the vector \mathbf{x} and θ the angle between it and the vector \mathbf{p} .

Then
$$S(x, t) = \frac{\pi}{\hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta e^{i r p \cos \theta / \hbar}$$

$$e^{it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}/\hbar} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

$$= \frac{-i}{2\hbar^2 r} \int_0^\infty \left\{ e^{i[rp + t\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]/\hbar} - e^{-i[rp + t\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]/\hbar} \right\}$$

$$p dp \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

$$= \frac{-i}{2\hbar^2 r} \int_{-\infty}^\infty e^{i[rp + t\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]/\hbar} p dp \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

$$= \frac{-i}{4\hbar} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U(r, t)$$

where
$$U(r, t) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[rP + t\sqrt{P^2 + m^2}]/\hbar} \frac{dP}{\sqrt{P^2 + m^2}}$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[r \sinh \chi + t \cosh \chi] \frac{m}{\hbar} \chi\} dx$$

with $P = m \sinh \chi$ $\sqrt{P^2 + m^2} = m \cosh \chi$.

This integral can be evaluated in terms of Bessel functions and the result is

$$U(r, t) = \begin{cases} H_0^{(1)} \left\{ m(t^2 - r^2)^{1/2} / \hbar \right\} & t > r \\ H_0^{(1)} \left\{ i m(r^2 - t^2)^{1/2} / \hbar \right\} & r > t > -r \\ -H_0^{(2)} \left\{ m(t^2 - r^2)^{1/2} / \hbar \right\} & -r > t \end{cases}$$

If we went through the corresponding calculation for the distribution of electrons in which all the negative-energy states are unoccupied and all the positive-energy ones occupied, we should get a result of the form (15), where S would be given by eq. (16) with $-U(r, -t)$ substituted for $U(r, t)$. Hence the full distribution R_F , with all the positive and negative-energy

states occupied, will be given by

$$(x't' | R_F | x''t'') = - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} + d_4 m \right]$$

$$\times S_F(x, t). \quad (17)$$

$$S_F(x, t) = \frac{-i}{4\hbar} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} U_F(v, t), \quad (18)$$

with

$$\begin{aligned} U_F(v, t) &= U(v, t) - U(v, -t) \\ &= 2J_0 \left\{ m(t^2 - v^2)^{1/2} / \hbar \right\} \quad \left. \begin{array}{l} t > v \\ v > t > -v \end{array} \right\} \\ &= 0 \\ &= -2J_0 \left\{ m(t^2 - v^2)^{1/2} / \hbar \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -v > t \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Similarly the distribution R_1 will be given by

$$(x't' | R_1 | x''t'') = - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} + d_4 m \right] \times S_1(x, t), \quad (20)$$

$$S_1(x, t) = \frac{-i}{4\hbar} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} U_1(v, t), \quad (21)$$

with

$$\begin{aligned} U_1(v, t) &= U(v, t) + U(v, -t) \\ &= 2iY_0 \left\{ m(t^2 - v^2)^{1/2} / \hbar \right\} \quad t > v \\ &= 2H_0^{(1)} \left\{ im(v^2 - t^2)^{1/2} / \hbar \right\} \quad v > t > -v \\ &= 2iY_0 \left\{ m(t^2 - v^2)^{1/2} / \hbar \right\} \quad -v > t \end{aligned} \quad (22)$$

It is clear from these equations that there will be singularities not only at the point $x_s = 0, t = 0$, but also everywhere

on the lightcone $t^2 - r^2 = 0$. In order to determine these singularities, we may expand the Bessel functions in power series of $\sqrt{t^2 - r^2}$ and retain only the first few terms. If we retain only the first term in (19), we get for U_F the constant value zero outside the light-cone and the constant values $2, -2$ in the two regions inside the light-cone for which $t > r$ and $t < -r$ respectively.

This U_F substituted in (18) gives

$$S_F(x, t) = (i/2hr) \{ \delta(r-t) - \delta(r+t) \}.$$

For $t > 0$, this may be written

$$\begin{aligned} S_F(x, t) &= (i/2hr) \delta(r-t) \\ &= (i/h) \delta(t^2 - r^2), \end{aligned}$$

and when substituted in (17) gives

$$\begin{aligned} (x' t' | R_F | x'' t'') &= (1/\pi) (t + a_s x_s) \\ &\quad \times \delta'(t^2 - r^2) \end{aligned} \quad (23)$$

with neglect of a term involving $\delta(t^2 - r^2)$. This is the worst singularity of R_F . For $t < 0$ the result is the same, except for a change of sign. If we retained the second term in the expansion of J_0 in (19), we should

get the next worst singularity of R_F , containing $\delta(t^2 - r^2)$. If we retained also the third term in J_0 in (19), we should get also the third worst kind of singularity in R_F , involving a plain discontinuity on the light-cone. The fourth and higher terms in J_0 would not give rise to any singularity in R_F . In this way we can determine completely all the singularities in R_F .

Let us now examine the singularities in R_+ . The important terms in U_+ , given by (22), are

$$(t)_{\leq r} (4i/\pi) \log \left\{ m(t^2 - r^2)^{1/2}/h \right\} J_0 \left(m(t^2 - r^2)^{1/2}/h \right) \quad (24)$$

$$(t)_{\leq r} \left[2 + (4i/\pi) \log \left\{ i m(t^2 - r^2)^{1/2}/h \right\} \right] J_0 \left(i m(t^2 - r^2)^{1/2}/h \right)$$

The remaining terms are a powerseries in $t^2 - r^2$, of the same form inside and outside the light-cone, and therefore they do not give rise to any singularity. Expression (25) may be simplified to

$$(4i/\pi) \log \left\{ m(r^2 - t^2)^{1/2}/h \right\} J_0 \left\{ i m(r^2 - t^2)^{1/2}/h \right\}$$

Substituting this and $J(24)$ into (21) we get, if we take only the first term of J_0 into account,

$$S_1(x, t) = \frac{1}{\pi h} \frac{1}{r^2 t^2} \quad (26)$$

It is important to see that no $J_{\frac{1}{2}}$ occurs in $S_1(x, t)$. The reason at the bottom of this is that, in differentiating the logarithm that occurs in the Bessel $J_{\frac{1}{2}}$, Y_0 and $H_0^{(1)}$, we must use the formula

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} - i\pi \delta(z) \quad (27)$$

in which

(25)

$|t| < \frac{1}{2} r$

G.C. Wick: Sugli elementi radioattivi
di P. Joliot e I. Curie

(Atti della Reale Accademia Nazionale
dei Lincei, XX, 319, 1934)

19

Questa Nota contiene un'applicazione della teoria della disintegrazione β , recentemente proposta da E. Fermi⁽³⁾, ai fenomeni di radioattività provocata osservati da P. Joliot e I. Curie⁽⁴⁾. Durante le loro esperienze sulla produzione di elettroni positivi da parte di elementi leggeri bombardati colle particelle α del polonio, Curie e Joliot hanno recentemente osservato un fenomeno di natura completamente nuova. Quando una foglia di alluminio è stata bombardata con un preparato di polonio, l'emissione di positroni non cessa immediatamente, tolto il preparato, ma diminuisce esponenzialmente, come l'attività di un elemento radioattivo. Un effetto analogo si osserva col boro e il magnesio.

L'interpretazione del fenomeno proposta dagli scopritori, e confermata da ulteriori esperienze⁽⁵⁾, è la seguente: i raggi α

(3) E. Fermi, *N. Cim.*, XI, 1, 1934.

(4) *C. R.*, 1931, 254 —

(5) *C. R. Nature*, 133, 201, —

del polonio producono, com'è noto, una dis-
integrazione dei nuclei di boro, alluminio,
e magnesio (con emissione di neutroni).
Si formano così nuovi nuclei e precisa-
mente N^{13} , P^{30} , Si^{27} . Si tratta di isotopi
radioattivi dell'azoto, fosforo e silicio
non presenti in natura (ciò si spiega
data la loro breve vita media) che
decadono spontaneamente con emissioni
di elettroni positivi. Si può parlare di
radioattività $-p$.

Mentre la trasmutazione che genera gli
elementi radioattivi è di un tipo già
noto, e può venire interpretata in base
alle ordinarie ipotesi sulla struttura
dei nuclei, la radioattività $-p$ presenter-
ebbe le stesse difficoltà d'interpretazione
che sono caratteristiche dell'emissione p .
In particolare sembra stabilito che i
positroni dell'alluminio (o meglio del P^{30})
formano uno spettro continuo simile allo
spettro dei raggi p .

E, Fermi ha recentemente svolto una

teoria della emissione β , nella quale si evitano le difficoltà già citate mediante l'ipotesi che l'elettrone sia creato al momento dell'emissione β , insieme a un « neutrino » di Pauli (particella elementare di carica nulla e massa molto piccola, pare, rispetto a quella dell'elettrone). L'esistenza del « neutrino » è stata postulata da Pauli, per salvare la conservazione dell'energia nell'emissione β . E. Fermi ha mostrato che non solo queste ipotesi permettono una soluzione qualitativa di quelle difficoltà, ma che su di esse si può costruire uno schema formale, che può dare risposte ben determinate, quantitative, su varie questioni, come i forma dello spettro, vite medie ecc. Per il momento però, l'incertezza che ancora regna circa autofunzioni e altre proprietà nucleari, non permette di ricavare dalla teoria dati precisi, ma solo valutazioni sugli ordini di grandezza.

Mentre, in seguito a queste varie incertezze, è per ora difficile trovare prove sicure in favore di questa teoria, è tuttavia interessante il fatto che ora mostriamo nel quadro della teoria di Fermi della disintegrazione β . La stessa Hamiltoniana che produce le transizioni in cui vien creato un elettrone, può in fatti, se le condizioni energetiche sono favorevoli, produrre la distruzione di un elettrone che si trova in uno stato di energia negativa, il che equivale secondo la teoria di Dirac alla creazione di un elettrone positivo. Oltre alla spiegazione qualitativa del fenomeno, la teoria permette di prevedere che i positroni vengono emessi in uno spettro continuo di forma molto simile a quella degli spettri β . Una valutazione della vita media dà inoltre un risultato che è conciliabile con quello sperimentale.