N225

Quantenelektrodynamik

V

1934

H. Yukawa

MARUZEN

1) Diese Arbeit ist aus Diskussionen entstanden, die ich teils schriftlich, teils mündlich mit den Herren Pauli, Dirac und Weisskopf geführt habe und für die ich ihnen herzlich danke.

2) z.B. Dirac, Q.M. p.255.

3) Fock, C.R. Leningrad (N.S.) 1933, S.267–271 Nr 6.

4) Furry and Oppenheimer, Phys. Rev. 45, 245, 1934

5) Peierls, im Erscheinen.

6) Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. 30, 150, 1934 (im folgenden stets als l.c. zitiert).

Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons

ZS. f. Phys. 90
209–231, 1934.

Von W. Heisenberg in Leipzig

(Eingegangen am 21. Juni 1934.)

Die Absicht der vorliegenden Arbeit[1] ist, die Diracsche Theorie des Positrons[2] in den Formalismus der Quantenelektrodynamik einzubauen. Dabei soll gefordert werden, daß die Symmetrie der Natur in positiver und negativer Ladung von vornherein in den Grundgleichungen der Theorie zum Ausdruck kommt, ferner, daß außer den durch die bekannten Schwierigkeiten der Q.E.D. bedingten Divergenzen keine neuen Unendlichkeiten im Formalismus auftreten, d.h. daß die Theorie eine Approximationsmethode liefert zur Behandlung des Problemkreises, der auch nach der bisherigen Q.E.D. behandelt werden konnte. Durch das letztgenannte Postulat unterscheidet sich der vorliegende Versuch von den Untersuchungen von Fock[3], Oppenheimer und Furry[4]), Peierls[5]), denen er sonst ähnlich ist; er schließt sich hier vielmehr eng an eine Arbeit von Dirac[6]) an. Gegenüber der Diracschen Behandlung betont die Arbeit die Bedeutung der Erhaltungssätze für das Gesamtsystem Strahlung – Materie und die Notwendigkeit, die Grundgl. der Theorie in einer über das Hartreesche Appr.verfahren hinausgehenden Weise zu formulieren.

I. Anschauliche Theorie der Materiewellen.

1. Die inhomogene Diff. gl. der Dichtematrix.

Die wichtigsten Resulte der oben zitierten Diracschen Arbeit seien zuerst kurz wiederholt: Ein quantenmechanisches System von vielen Elektronen, die das Paulische Prinzip erfüllen und sich ohne gegenseitige Wechselwirkung in einem vorgegebenen Kraftfeld bewegen, kann charakterisiert werden durch eine „Dichtematrix":

$$(1) \quad (x't'k'|R|x''t''k'') = \sum_n \psi_n^*(x't'k')\psi_n(x''t''k''),$$

wobei $\psi_n(x't'k')$ die normierten Eigenfkt. der mit einem Elektron besetzten Zustände bedeuten, $x't'k'$ bzw. $x''t''k''$ sind Orts-, Zeit- und Spinvariable. Aus der Dichtematrix können alle physikalisch wichtigen Eigenschaften des q. m. Systems wie Ladungsdichte, Stromdichte, Energiedichte usw. abgelesen werden. Allerdings gilt dies immer nur in der Näherung, in der von der Wechselwirkung der Elektronen abgesehen werden kann, d. h. in der die typisch q. th. unanschaulichen Züge des Geschehens nicht vorkommen; die Dichtematrix vermittelt also ein anschauliches, korrespondenzmäßiges Bild des wirklichen Vorgangs – ähnlich wie die kl.-mech Atommodelle dies tun; die Forderung, daß die ψ_n in (1) normiert sein sollen, die nach Dirac auch in der Form (für $t'=t''$)

$$R^2 = R \qquad (2)$$

ausgedrückt wird, kann zu den Q.-Bedingungen der früheren halbkl. Theorie in parallel gesetzt werden...

Die zeitliche Änderung der Dichtematrix wird durch die Diracsche Diff.gl. bestimmt:

$$hf\, R = [i\hbar \frac{\partial}{c\partial t'} + \frac{e}{c} A_0(x') + \alpha_s(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s'} - \frac{e}{c} A_s(x'))\} + \rho mc] R = 0 \qquad (3)$$

~~Ev~~ Es werden von jetzt ab durchweg die folgenden Bezeichnungen verwendet:

Koordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} ct' = x_0' = -x^{0\prime}, \quad x_i' = x^{i\prime} \\ x_\lambda' - x_\lambda'' = x_\lambda, \quad \frac{x_\lambda' + x_\lambda''}{2} = \xi_\lambda. \\ \text{Potentiale:} \quad A_0 = -A^0, \quad A_i = A^i, \\ \text{Feldstärken:} \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial \xi_\mu} = F^{\nu\mu}, \quad F^{0s} = -F_{0s} \end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = \mathfrak{E} \\ (F^{23}, F^{31}, F^{12}) = \mathfrak{H}\end{array}\right\} \quad (4)$$

Spinmatrizen:

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha_0 = -1; \quad \alpha^i = \alpha_i$$

Griechische Indizes laufen stets von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Das Herauf- oder Herunterziehen der Indizes soll nach den üblichen Formeln der Rel. th. erfolgen. Über doppelt auftretende Indizes soll stets summiert werden. Da sich die α^λ nicht einfach wie Vektoren transformieren, hat für diese Größen die gewählte Bezeichnungsweise nur den Wert einer zweckmäßigen Abkürzung. Gl. (3) nimmt z. B. jetzt die Form an:

$$\left\{ \alpha^\lambda \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \frac{e}{c} A^\lambda(x') \right] + \beta mc \right\} R = 0.$$

Wenn, wie die Diracsche Löchertheorie es fordert, alle Zustände negativer Energie bis auf endlich viele besetzt und auch nur endlich viele Zustände positiver Energie besetzt sind, so wird die Matrix R auf dem durch

$$x_\varrho x^\varrho = 0 \quad (5)$$

definierten Lichtkegel singulär. Man betrachtet

1) $2R_S = R_1$ von Dirac

dann nach Dirac zweckmässig an Stelle der Matrix R die neue Matrix¹)

$$R_S = R - \tfrac{1}{2} R_F, \qquad (6)$$

wobei R_F den Wert von R für den Zustand des Systems bezeichnet, bei dem jedes Elektronenniveau besetzt ist. R_F geht für $t' = t''$, wie man leicht nachweist, über in die Diracsche δ-Fn der Variablen $x'k'$, $x''k''$. Die Matrix R_S hat bereits die Symmetrie in bezug auf das Vorzeichen der Ladung, die später im Formalismus wichtig wird: sie geht durch Addition von $\tfrac{1}{2}R_F$ über in die der „Löcher"theorie entsprechende Matrix R; durch Subtraktion von $\tfrac{1}{2}R_F$ geht sie in die neg. Dichtematrix einer Verteilung über, bei der Zustände positiver Energie besetzt und die neg. Energie frei sind; Vertauschung der Punkte $x't'k'$ und $x''t''k''$ in R_S und Vorzeichenwechsel von R_S sind einem Vorzeichenwechsel der Elektronenladung äquivalent. Die Singularität der Matrix R_S auf dem Lichtkegel ist von Dirac untersucht worden; man kann die Matrix in der Form

$$(x'k''|R_S|x''k'') = u\,\frac{\alpha^\rho x_\rho}{(x^\lambda x_\lambda)^2} - \frac{v}{x^\lambda x_\lambda} + w \log|x^\lambda x_\lambda| \qquad (7)$$

darstellen, wobei

$$u = -\frac{i}{2\pi^2}\, e^{-\frac{ei}{c\hbar}\int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \qquad (8)$$

(Das Int. ist auf der geraden Linie von P' nach P'' zu nehmen.)

Über die Quantisierung der ~~s~~ skalaren Relativistischen Wellengleichung

von W. Pauli und V. Weisskopf in Zürich

(27. VII. 34). (S. 709, — 731)

§ 1. Der Zusammenhang der skalaren relativistischen Wellengleichung und der Existenz ~~eine~~ entgegengesetzt geladener Teilchen.

Bekanntlich ist die skalare relativistische Wellengleichung, die mit Einführung der Operatoren

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (1)$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

im kräftefreien Fall geschrieben werden kann,

$$\frac{E^2}{c^2} - \sum_{k=1}^{3} p_k^2 - m^2c^2 = 0 \qquad (2)$$

(hier und im folgenden bedeutet stets $\hbar$ die durch 2π dividierte Planck'sche Konstante, ferner m die Ruhemasse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit), allgemein zugunsten der Diracschen vierkomponentigen Wellengleichung verlassen worden, da erstere nicht den Spin der ~~Teichlen~~ Teilchen liefert und daher für Elektronen sicher eine ungenügende Approximation der Erfahrung darstellt. Es bedarf daher einer besonderen Rechtfertigung, wenn im Folgenden die Discussion der Konsequenzen aus der ersteren Wellengl. wieder aufgenommen wird. Wir glauben eine solche Rechtfertigung insbesondere durch den Nachweis geben zu können, dass die empirische Entdeckung des Positrons und ihre theoretische Deutung durch die von Dirac herrührende Neuinterpretation der in seiner ursprünglichen Theorie auftretenden Zustände negativer Energie eine Revision diejenigen auf der allgemeinen quantenmechanischen Transformationstheorie basierenden a priori Argumente Dirac's erforderlich macht, mit denen von ihm ursprünglich ~~der~~ der Übergang von der skalaren rel. Wellengl. zu seiner Spinorwellengl. begründet wurde. Im folgenden soll nämlich gezeigt werden, dass bei Anwendung der allgemeinen Vorschriften zur Quantisierung von Wellenfeldern, die früher von Heisenberg und Pauli[1] formuliert wurden, auf das vorliegende Problem nicht nur keine allgemeinen Einwände gegen die skalare Wellgl. vom Standpunkt der qu. mech. Transformationstheorie aufrecht erhalten werden können, sondern dass man auf diese Weise unter Wahrung der relat. und der Eichinvarianz der Theorie ohne jede

1) Zeits. f. Phys. 56, 1, 1929.

weitere Hypothese zur Konsequenz des Vorhandenseins entgegengesetzt geladener Teilchen, und des Auftretens von Prozessen der Erzeugung und Vernichtung solcher Teilchenpaare gelangt, wobei überdies von selbst die Energie des Materiewellenfeldes sich als stets positiv ergibt. Für die Teilchen muss hiebei die Statistik symmetrischer Zustände (Einstein-Bose-Statistik) angenommen werden, aber es ist wohl nur als befriedigend anzusehen, dass ohne gleichzeitige Einführung des Spins die Einführung des Ausschliessungsprinzips sich nicht unter Wahrung der relat. Invarianz der Theorie durchführen lässt.

Was nun das erwähnte a priori-Argument Dirac's gegen die skalare relat. Wellengl.[2] betrifft, so beruht es wesentlich auf zwei Voraussetzungen:

1. Es ist in der relat. Quantentheorie widerspruchsfrei möglich, ein Einkörperproblem zu formulieren.

2. Die (statistisch zu interpretierende) räumliche Teilchendichte $\rho(x)$ ist ein sinnvoller Begriff. Nach Integration über ein beliebiges endliches

2) Man findet dieses am ausführlichsten dargestellt in den Leipziger Vorträgen 1932 (gesammelt erschienen unter dem Titel Quantentheorie und Chemie), S. 85 ff.

Volumen erhält man aus ihr eine „Observable" (im Sinne der Transformationstheorie) mit den Eigenwerten 0 und +1.

Sobald die erste Voraussetzung zutrifft, ist es nämlich nicht notwendig, den Formalismus der Quantelung der Wellenfelder auf das Problem anzuwenden; es ist dann vielmehr möglich, mit dem gewöhnlichen Wellenfeld im dreidimensionalen Raum auszukommen. Die zweite Voraussetzung hat zur Folge, dass die Teilchendichte nicht nur die vierte Komponente eines Vierervektors sein und einer Kontinuitätsgl. genügen muss, sondern auch die Eigenschaft haben muss, niemals negativ zu sein. Überdies werden die Eigenwerte der zugehörigen Dichtematrix nach Integration über ein unendliches Volumgebiet, wie Dirac zeigte, nur dann die richtigen, wenn die Teilchendichte von der Form ist [1]:

$$\rho(x) = \sum_{r} \psi_r^* \psi_r .$$

Dagegen hat die Teilchendichte, die zur skalaren relat. Wellengl. gehört, die Form

1) Erst aus dieser Form für ρ wird dann wieder geschlossen, dass die Wellgl. von erster Ordnung in $\partial/\partial t$ sein müssen.

$$\rho(x) = \psi^*\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\Phi_0\psi\right) - \left(i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + e\Phi_0\psi^*\right)\psi \qquad (3)$$

wenn e die Ladung des Teilchens und Φ_0 dass äussere skalare Potential bedeutet. Da diese nicht von der verlangten Form ist scheint ein Widerspruch hergestellt.

Bekanntlich hat nun Dirac — gestützt auf den Umstand, dass auf Grund seiner Wellengl. ein Wellenpaket aus Zuständen negativer Energie sich in einem äusseren Feld so bewegt, wie es einem Teilchen mit entgegengesetzter Ladung, gleicher Masse und positiver Energie entsprechen würde — die Zustände negativer Energie zur Deutung des Positrons in folgender Weise herangezogen. Es sollen nur die Abweichungen von dem Fall, wo alle Zustände negativer Energie besetzt sind, die „Löcher" in der Besetzung der Zustände negativer Energie, beobachtbar sein, das heisst zur „wahren" (felderzeugenden) Ladungsdichte und zur eigentlichen (dann positiven) Energie beitragen.

Ohne auf die Schwierigkeiten einer widerspruchsfreien und relat. und eichinvarianten Formulierung dieser Diracschen Löchertheorie von Elektronen und Positron im Falle äusseren Felder, die ja mehrfach in der Literatur diskutiert worden sind, näher einzugehen, können wir folgendes feststellen:

1. Wegen der Prozesse der Paarerzeugung und wegen der neuen Interpretation der Zustände negativer Energie überhaupt ist es nicht mehr möglich, sich auf ein Einkörperproblem zu beschränken.

2. Die Teilchendichte hat keinen direkten physikalischen Sinn mehr[1]. Im kräftefreien Fall ist allerdings noch die Zahl der Teilchen mit gegebenem Impuls (Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum) und daher auch die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen eine sinnevolle „Observable".

3. Dagegen ist nicht nur die Gesamtladung, sondern auch Ladungsdichte $\rho(x)$ eine sinnvolle Observable. Nach Integration über ein

---

1) Ist ψ_ρ^+ der „positive" (aus Zuständen positiver Energie zusammengesetzte), ψ_ρ^- der „negative" Teil der Wellenfunktion in der Diracschen Löchertheorie, so hat die Ladungsdichte als Operator die Form

$$\rho(x) = \sum_{\rho=1}^{4} \{ \psi_\rho^{+*} \psi_\rho^+ + \psi_\rho^{-*} \psi_\rho^- + \psi_\rho^{+*} \psi_\rho^- + \psi_\rho^{+*} \psi_\rho^{-*} \}$$

Wegen des Auftretens der gemischten Glieder lässt sie beliebiges endliches Volum ~~e~~ muss sie – auch bei Vorhandensein äusserer Felder – (bei Anwendung des Formalismus der Quantisierung der Wellen) die Eigenwerte $0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N, \dots$ haben, die jetzt sowohl positiv wie negativ sein können. (Im Fall des Ausschliessungsprinzips ist die Zahl N bei gegebener Grösse des betrachteten Raumgebietes nach oben begrenzt.) Die Ladungsdichte $\rho(x)$ und die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen sind übrigens nicht vertauschbar.

Diese Forderungen sind nun gegenüber den ursprünglichen eines echten relat. Einkörperproblems so weit modifiziert, dass für die spezielle Form $\sum_r \psi_r^* \psi_r$ bei der Ladungsdichte kein Grund mehr vorliegt. Wir werden überdies zeigen, dass die zuletzt formulierten Forderungen in der skalaren relat. Theorie für spinlose Teilchen mit Einstein-Bose-Statistik ebenso erfüllt sind wie in der Dirac'schen Löchertheorie. Hierbei ist naturgemäss der Ausdruck (3) nicht mehr als Teilchendichte, sondern als Ladungsdichte zu interpretieren.

sich schon bei Abwesenheit äusserer Kräfte nicht so in zwei Teile teilen, dass ~~s~~ jeder Teil für sich einer Kontinuitätsgleichung genügt und die 4-Komponente eines Vierervektors bildet.

Das Hauptinteresse der letzteren Theorie scheint uns darin zu liegen, dass in ihr automatisch — das heisst ohne eine neue, der Löcheridee äquivalente Hypothese und ohne dem Formalismus der Quantentheorie fremd gegenüberstehende Grenzübergangs- und Subtraktionskunstbegriffe 1) — die Energie der Wellenfelder stets positiv ist. Dies ergibt sich daraus, dass die Hamiltonfunktion des Materiewellenfeldes in der hier diskutierten skalaren Theorie — im Gegensatz zum entsprechenden Ausdruck der Dirac'sche Spinortheorie — die stets positiv definite Form annimmt:

$$\overline{H} = \int dV \Big\{ \left| i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - e\,\Phi_0 \psi \right|^2 + \sum_{k=1}^{3} \left| i\hbar c \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + e\,\Phi_k \psi \right|^2 + m^2 c^4 |\psi|^2 \Big\}. \quad (4)$$

Angesichts der Hypothesenfreiheit dieser skalaren relat. Theorie könnte man vielleicht auf den ersten Blick überrascht sein, warum „die Natur" von dieser Möglichkeit der Existenz entgegengesetzt geladener Teilchen ohne Spin mit Bose Statistik, die durch Zerstrahlung bzw. Materialisationsprozesse entstehen und vergehen können, „keinen Gebrauch gemacht hat" 2). Man muss aber bedenken, dass die Frage

1) P.A.M. Dirac, Proc. Camb. 30, 150, 1934. — R. Peierls, Proc. Roy. Soc. 146, 420, 1934. W. Heisenberg Z S. 90, 209, 1934.

der Anwendbarkeit der hier diskutierten Theorie, z. B. auf α-Teilchen wegen der sich hierbei geltend machenden Effekte der Kernstruktur, wohl ausserhalb des Gültigkeitsbereiches der jetzigen Quantentheorie überhaupt liegen dürfte. Auch führt die hier diskutierte Theorie, wie in § 4 gezeigt wird, bei den Fragen der Polarisation des Vakuums zu ähnlichen Unendlichkeiten wie die ursprüngliche Form der Löchertheorie[3]. Sie führt übrigens ebenfalls zu einer unendlichen Selbstenergie nicht nur der elektrischen Teilchen, sondern auch zu einer unendlichen materiellen Selbstenergie der Lichtquanten[4]. Ein weiterer Fortschritt in diesen Fragen dürfte daher wohl erst durch ein theoretisches Verständnis des numerischen Wertes der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten zu erwarten sein.

---

2) Vgl. Dirac, Proc. Roy. Soc. 133, 60, 1931, bes S. 71.

3) Dirac, Solvay-Report 1933.

4) Analog wie bei W. Heisenberg, l.c. – Über den Wert des Umstandes, dass in manchen Formulierungen der Löchertheorie zwar die Polarisationseffekte endlich, die Selbstenergie aber doch unendlich sind, kann man im Zweifel sein.

§ 2. Durchführung der Quantisierung des Wellenfeldes[1] im kräftefreien Fall

Die Lagrangefunktion der skalaren relat. Theorie lautet (mit $\mu, \nu, \ldots = 1$ bis 4 und $x_4 = ict$):

$$L = -h^2c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} - m^2c^4\psi^*\psi$$

$$= h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - m^2c^4\psi^*\psi. \quad (5)$$

Der relat. Energie-Impulstensor wird

$$T_{\mu\nu} = -h^2c^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right) - L\,\delta_{\mu\nu} \quad (6)$$

also die Energie (Hamiltonfunktion)

$$H = \int T_{44}\,dV$$

$$= \int\left\{h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi\right\}dV \quad (7)$$

und der Impuls

$$G_k = \frac{i}{c}\int T_{4k}\,dV = -\int h^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dV. \quad (8)$$

Wir haben nun ψ^* und ψ als q-Zahlen (auf das Schrödingerfunktional wirkende Operatoren) aufzufassen, wobei ψ^* hermitesch konjugiert zu ψ ist. Wir

---

[1] Über die Ausdrücke für Lagrangefunktion, Energie-Impulstensor und Stromvektor in der skalaren rel. Theorie vgl. z. B. Gordon, Zeits. f. Phys. 40, 117, 1926.

bezeichnen im folgenden stets die zu einer gegebenen q-Zahl hermitesch Konjugierte mit einem *. Wir haben dann die zu ψ und ψ^* kanonisch konjugierten Impulse π und π^* bilden nach der Regel:

$$\pi = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t}, \quad \pi^* = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (9)$$

die bei Teilchen mit Einstein-Bose-Statistik den kanonischen Vertauschungsrelationen (abgekürzt: V.-R.) genügen:

$$i\,[\pi(x,t), \psi(x',t)] = \delta(x-x'), \quad i[\pi^*(x,t), \psi^*(x',t)] = \delta(x-x') \quad (\mathrm{I})$$

worin auf der rechten Seite $\delta(x-x')$ die bekannte Diracsche δ-Funktion bedeutet und wie üblich

$$[A, B] = AB - BA \quad (10)$$

gesetzt ist. Die Grössen ψ, ψ^* sowie π, π^* untereinander, ferner π mit ψ^*, sowie π^* mit ψ sind vertauschbar.

Die Anwendung der Regel

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h}[H, f] \quad (11) \quad (\mathrm{II})$$

auf ψ, ψ^* führt auf eine Identität, die Anwendung auf π, π^* mit Hilfe von (9) führt zu den Wellengl.

$$h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=h^2c^2\Delta\psi-m^2c^4\psi \qquad (12)$$

$$h^2\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}=h^2c^2\Delta\psi^*-m^2c^4\psi^*, \qquad (12^*)$$

Ferner ist, wie es sein muss, die Regel

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=-\frac{i}{h}[G_k,f] \qquad (13)$$

für alle Grösse f erfüllt. Man wird sehen, dass nur im Ausdruck für den Impuls eine Zweideutigkeit der Reihenfolge der Faktoren eintritt. Diese wurde so gewählt, dass der Integrand des Ausdruckes (8), der die Impulsdichte darstellt, ein hermitescher Operator ist.

Wir kommen nun zu den Ausdrücken für die (in der Einheit der elektrischen Teilchenladung e gemessenen) Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\vec{i}=c\vec{s}$, die mit $s_4=i\rho$ zum Vierervektor s_ν zusammengefasst ist, der der Kontinuitätsgl.

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{i}=0 \qquad (14)$$

genügt.

Diese sind gegeben durch

$$s_\nu=hci\left(\overline{\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}}\psi-\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\psi^*\right) \qquad (15)$$

oder

$$\rho = -hi\left(\overline{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi} - \overline{\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*}\right) = -hi\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*\right)$$

$$= -hi\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \qquad (15a)$$

$$s_k = hci\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right) \qquad (15_b)$$

Die Striche auf der rechten Seite beziehen sich auf die Zweideutigkeit der Reihenfolge der Faktoren im Ausdruck für die Dichte ρ und sollen bedeuten, dass die einzelnen Summanden hermitischiert werden sollen. Eine Festlegung der Faktorenreihenfolge auf Grund der Forderung der Hermitizität des Dichteoperators allein ist hier nicht möglich. Die hier getroffene Festsetzung erweist sich aber als die zweckmässigere, da sie zu keiner Nullpunktsdichte Anlass gibt, wie später gezeigt wird. Sie ist überdies mit der relat. Invarianz und der Kontinuitätsgleichung im Einklang.

Wie man sieht, kann man die Dichte mit Rücksicht auf (9) auch schreiben:

$$\rho = -i(\pi\psi - \pi^*\psi^*) = -i(\psi\pi - \psi^*\pi^*), \qquad (16)$$

Wir wollen nun beweisen, dass diese an einer bestimmten Raumstelle x_0 die Eigenwerte

$$\rho(x) = N \cdot \delta(x - x_0)$$

mit $N = 0, \pm 1, \dots$ besitzt. Zu diesem Zweck ist es am einfachsten, ψ in hermitesche Operatoren

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + i u_2), \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - i u_2)$$

und entsprechend

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + i p_2), \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - i p_2)$$

zu zerlegen, wobei folgt

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad u_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*)$$

$$p_1 = h\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^* + \pi), \quad p_2 = h\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\pi^* - \pi)$$

Dann gilt

$$i[p_1(x), u_1(x')] = \delta(x - x'), \quad i[p_2(x), u_2(x)] = \delta(x - x'),$$

während jede Grösse mit dem Index 1 mit jeder Grösse mit dem 2 vertauschbar ist. Während Energie, Impuls und Wellengl. additiv zerfallen in Ausdrücke die bzw. nur von p_1, u_1 und von p_2, u_2 abhängen, gilt dann

$$\rho = p_1 u_2 - p_2 u_1 \qquad (16a)$$

Auf Grund der Analogie mit dem Ausdruck für eine Komponente des Drehimpulses erkennt man hieraus sofort, dass $\rho(x)$ die Eigenwerte $N \cdot \delta(x-x')$ mit $N = 0, \pm 1, \dots$ besitzt. (Der Faktor $\delta(x-x')$ kann hierin z. B. durch einen Grenzübergang von einer diskreten Einteilung des Raumes zu einer kontinuierlichen gerechtfertigt werden.) Da die Werte der Dichte an verschiedenen Raumstellen miteinander vertauschbar sind, folgt also in der Tat, dass die innerhalb eines beliebigen endlichen Gebietes v befindliche Ladung

$$e_v = \int_v \rho \, dV$$

(in der Einheit e gemessen) die Eigenwert $0, \pm 1, \dots \pm N$ besitzt.

Wir bemerken noch, dass in der vorliegenden Theorie alle Relationen einschliesslich der V.-R. richtig bleiben, wenn man alle Operatoren mit ihren hermitesch konjugierten (also ψ mit ψ^*, π mit π^*) vertauscht. Da hierbei der Viererstrom sein Vorzeichen wechselt, ergibt sich hieraus die Symmetrie der Theorie in bezug auf positive und negative Ladungen.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass eine Zerlegung der Dichte ρ in vertauschbare Teile mit nur positiven und nur negativen Eigenwerten zwar auf unendlich viele Weisen möglich ist, dass aber keiner dieser Teile für sich einer Kontinuitätsgl. genügt und auch nicht relativistisch invariant ist[1)].

Wir wollen nun, was sowohl für Anwendung von Wichtigkeit ist als auch an und für sich physikalisches Interesse beansprucht, untersuchen, wie sich die Verhältnisse im Impulsraum gestalten. Um statt Integrationen im Impulsraum Summen zu erhalten, verwenden wir die bekannte formale Methode, den Wellenfeldern die Bedingung aufzuerlegen, einer

1) Man erhält solche Zerlegungen z.B. unter Einführung einer beliebigen Konstante a von der Dimension Wurzel aus Energie (z.B. $a = \sqrt{mc^2}$) gemäss dem Ansatz

$$\pi = \frac{a}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2^*) \qquad \psi = \frac{-i}{\sqrt{2}\,a}(\varphi_1^* - \varphi_2^*)$$

$$\pi^* = \frac{a}{\sqrt{2}}(\varphi_1^* + \varphi_2) \qquad \psi^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\,a}(\varphi_2^* - \varphi_1^*).$$

Es ist dann

$$[\varphi_1(x), \varphi_1^*(x')] = \delta(x-x'), \quad [\varphi_2(x), \varphi_2^*(x')] = \delta(x-x'),$$

während Grössen mit index 1 und solche mit dem Index 2 kommutieren. Und es gilt $\rho = \varphi_2^*\varphi_2 - \varphi_1^*\varphi_1$.

Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis für die Eigenwerte von ρ.

Würfel der Kantenlänge L, also mit dem Volumen $L^3 = V$, als Periodizitätsgebiet zu haben, so dass die Komponententen des Ausbreitungsvektors $\vec{k}$ der Wellen ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{L}$ sein müssen. Wir verwenden ferner

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\vec{x})} \qquad (17)$$

als ein vollständiges System orthogonaler normierter ~~C~~-Zahl-Eigenfunktionen, für die also gilt

$$\int_V u_k^*(x)\, u_l(x)\, dV = \delta_{kl} \qquad (18)$$

Hierbei schreiben wir als Index k hier und im folgenden der Einfachheit halber stets nur einen Index statt der den drei Komponenten von $\vec{k}$ entsprechenden drei Indices und ähnliches soll gelten für Summen über k.

Zerlegen wir nun die Funktionen ψ, π, ψ^*, π^* nach den u_k gemäss

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k^* e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \qquad (19_a)$$

$$\pi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \qquad (19_b)$$

mit den Umkehrformeln

$$(19c)\quad q_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \psi e^{-i(\vec{k}\vec{x})} dV, \quad q_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \psi^* e^{i(\vec{k}\vec{x})} dV$$

$$(19d)\quad p_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \pi^* e^{-i(\vec{k}\vec{x})} dV, \quad p_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \pi e^{i(\vec{k}\vec{x})} dV$$

so genügen die q-Zahlen $p_k, q_k, p_k^* q_k^*$ (man beachte, dass p_k, q_k nicht hermitesche Operatoren und p_k^*, q_k^* die hermiteschen Konjugierten von p_k, q_k sind) gemäss (I) den V.-R.

$$i[p_k, q_l] = \delta_{kl}, \quad i[p_k^*, q_l^*] = \delta_{kl}, \quad (\mathrm{II})$$

während die q_k und q_k^* untereinander, die p_k und p_k^* untereinander, sowie die p_k mit den q_l^* und die p_k^* mit den q_l kommutieren. Überdies gilt nach (9)

$$p_k = h\dot{q}_k^* \qquad p_k^* = h\dot{q}_k \qquad (20)$$

Für Hamilton-Funktion und Impuls erhält man nach (7) und (8)

$$H = \sum_k (p_k^* p_k + E_k^2 q_k^* q_k) \qquad (21)$$

$$G = -ih \sum_k \vec{k} (p_k q_k - q_k^* p_k^*) \qquad (22)$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$E_k^2 = c^2(h^2k^2 + m^2c^2). \qquad (23)$$

Wir werden im folgenden unter

$$E_k = +c\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2} \qquad (23a)$$

stets die positive Wurzel verstehen.

Man bestätigt leicht ~~z~~ die Gültigkeit der Regel (11) für p_k, q_k, p_k^*, q_k^*; insbesondere ergibt sich

$$\dot{p}_k = \frac{i}{h}[\bar{H}, p_k] = -\frac{1}{h}E_k^2 q_k^*, \qquad (24a)$$

$$\dot{p}_k^* = \frac{i}{h}[\bar{H}, p_k^*] = -\frac{1}{h}E_k^2 q_k. \qquad (24b)$$

Wir schreiben weiter auf Grund von (16) und (15b) noch die Ausdrücke für die Gesamtladung

$$\bar{e} = \int_V \rho\, dV$$

und den Gesamtstrom

$$\frac{1}{c}\vec{J} = \int_V \vec{s}\, dV$$

in ihrer Zerlegung nach den Anteilen der verschiedeinen Impulseigenfunktionen hin. Wir erhalten

$$\bar{e} = -i \sum_k (p_k q_k - p_k^* q_k^*) \qquad (25)$$

$$\frac{1}{c}\vec{J} = 2hc \sum_k \vec{k}\, q_k^* q_k. \qquad (26)$$

Man wird sehen, dass der letztere nicht zeitlich konstant ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die Anteile der einzelnen Eigenschwingung k zur Gesamtladung, zur Energie und zum ~~A~~ Impuls sich zugleich in zwei Teile zerlegen lassen, die einen einfachen physikalischen Interpretation fähig sind. Zu diesem Zweck führen wir folgende Variable a_k, a_k^*, b_k, b_k^* ein:

$$(27) \quad p_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k^* + b_k), \quad q_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(-a_k + b_k^*)$$

$$(27^*) \quad p_k^* = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k + b_k^*), \quad q_k^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(a_k^* - b_k)$$

mit den Umkehrformeln

$$(28a) \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* - i\sqrt{E_k}\, q_k\right), \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k + i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right)$$

$$(28b) \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k - i\sqrt{E_k}\, q_k^*\right), \quad b_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}} p_k^* + i\sqrt{E_k}\, q_k\right)$$

Für die neuen Variablen folgen die V.-R.

$$[a_k, a_l^*] = \delta_{kl}, \qquad [b_k, b_l^*] = \delta_{kl}, \qquad (\mathrm{III})$$

während die a_k oder a_k^* untereinander, die b_k oder b_k^* untereinander, sowie die a_k mit b_l^* und die a_k^* mit den b_l kommutieren.

Man erhält weiter

$$\overline{H} = \sum_k E_k \tfrac{1}{2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k + b_k^* b_k + b_k b_k^*)$$

$$= \sum_k E_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1) \qquad (29)$$

$$\vec{G} = h \sum_k \vec{k}\, \tfrac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*)$$

$$= h \sum_k \vec{k}\,(a_k^* a_k - b_k^* b_k). \qquad (30)$$

Ferner für die Gesamtladung

$$\overline{e} = \sum_k \tfrac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*)$$

$$= \sum_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k). \qquad (31)$$

Schliesslich ergibt sich nach (26) für den Gesamtstrom

$$\frac{1}{c}\vec{J} = hc \sum \frac{\vec{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k b_k^* - a_k^* b_k^* - a_k b_k)$$

$$= hc \sum_k \frac{\vec{k}}{E_k} \left(a_k^* a_k + b_k^* b_k - a_k^* b_k^* - a_k b_k + 1 \right). \qquad (32)$$

Die V.-R. für die a, b, a^*, b^* haben zur Folge, dass die Operatoren

$$N_k^+ = a_k^* a_k \,, \quad N_k^- = b_k^* b_k \qquad (33)$$

vertauschbar sind und beide die niemals negativen ganzzahligen Eigenwerte 0, 1, 2, ... besitzen. Die Ausdrücke für Ladung, Energie und Impuls berechtigen uns in dem hier betrachteten kräftefreien Fall zu folgender Interpretation:

Es bedeutet N_k^+ die Zahl der Teilchen mit der Ladungszahl +1 und dem Impuls $h\vec{k}$, und N_k^- die Zahl der Teilchen mit der Ladungszahl −1 und dem Impuls $-h\vec{k}$[1].

[1] Nochmals sei bemerkt, dass eine entsprechende Definition für eine räumliche Dichte $\rho^+(x)$ und $\rho^-(x)$ der Teilchensorten nicht in physikalisch sinnvoller Weise möglich ist. Bildet man z.B. aus a_k und b_k

Es sei noch darauf hingewiesen, dass der Term mit +1 im Energieausdruck eine Nullpunktsenergie (Vakuumenergie) der Materiewellen bedeutet, die aber, ganz analog wie die Nullpunktsenergie der elektromagnetischen Strahlung, bei allen Anwendungen und unbeschadet der rel. Invarianz der Theorie fortgestrichen werden kann. Ähnliches gilt vom Term mit +1 im Ausdruck für den Strom. Von entscheidender physikalischer Wichtigkeit ist, dass auch abgesehen von diesem Term die Energie von selbst stets positiv ist.

Wichtig sind die Terme mit $a_k b_k$ und $a_k^* b_k^*$ im Ausdruck für den Strom, welche dessen zeitliche Konstanz ~~sett~~ selbst im kräftefreien Fall verhindern. Wie man aus den Bewegungsgl.

(34) $$\dot{a}_k = -i \frac{E_k}{h} a_k \,, \quad \dot{b}_k = -i \frac{E_k}{h} b_k$$

und ihren Integralen

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_k e^{i(\vec{k}\vec{x})} \qquad b(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k b_k e^{-i(\vec{k}\vec{x})}$$

so zeigt sich, dass der Ausdruck $a^*(x)a(x) - b^*(x)b(x)$ nicht mit der Ladungsdichte übereinstimmt.

Arthur March in Innsbruck
Statistische Metrik und Quantenelektrodynamik
(Zeits. f. Phys. 106