PRACTICAL NOTE-BOOK

Quantenelektrodynamik

Heisenberg-Paulische Theorie

新案登録願

十時[illegible]

Erster Teil

Quantenelektrodynamik im Dreidimensionalen Raum

Kap. I. Allgemeine Methode*

1

§1. Lagrange形及ビHamilton形ノ場方程式

時間及ビ空間ノ連續函数 $Q_\alpha(x_1\, x_2\, x_3\, t)$ 及ビソノ時空坐標ニ関スル第一微係数ノ函数 ~~トシテ与ヘラレタル~~ ノ与ヘラレタル函数、所謂一ノ Lagrange 函数 L ヲ考ヘル。今~~ソノ時~~場ノ量(Feldgröße) Q_α ガ満足スベキ微分方程式ガ変分原理

$$\delta\int L\left(Q_\alpha,\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i},\ \dot{Q}_\alpha\right)dV\,dt = 0 \qquad (1)$$

カラ出ルトスル。但シ Q_α ノ変分ハ積分ノ限界(面)ニ於テ0トナルト假定シテオク。又 $\dot{Q}_\alpha$ ハ一定ノ空間的位置ニオケル時間ニ関スル微係数 $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial t}$ ヲ表ハシ、i ハ空間坐標ノ1,2,3，α ハ幾ツカノ Feldgröße ヲ代表スルトシテオク。一般ニ前者ニ対スル記号トシテハラテン文字、後者ニハギリシャ文字ヲ用ヰルコトヽスル。

(1)カラシテ周知ノ如ク次ノ微分方程式ガ出ル。

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = 0 \qquad (2)$$

通常ノ質点力学トノ類型(Analogie)ヲ明カニスル為メ

$$\bar{L} = \int L\,dV \qquad (3)$$

ナル空間ニツイテ積分サレタ Lagrange 函数ヲトルト限界ニ於テ ~~0トナル~~ $\delta Q_\alpha = 0$ トナル変分ヲ行ヘバ

$$\delta\bar{L} = \int\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)\delta Q_\alpha\,dV$$

* Heisenberg und Pauli; Zs. f. Phys. 56 ~~p.1~~ S.1. I, Allgemeine Methode

*Zustandsgröße

† 勿論 限界條件（空間的）が與へらるれば 解は完全に定まる。

トナル。コノ理由カラ

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \qquad (4)$$

(Qα＝関スル、点P(xi)ニ於ケル)

ヲ $\bar{L}$ ノ Hamilton 微分係数又ハ函数的微分係数 (funktionale Ableitung) ト称スル。

之ハ

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha;P}} = \lim \frac{\bar{L}(Q_\alpha + \delta Q_\alpha) - \bar{L}(Q_\alpha)}{\int \delta Q_\alpha \, dV}$$

ナル比ノ極限値ト定義スルコトガ出来ル。但シ分子ノ $\bar{L}$ ノ両方ノ値ハ、只一ツノ状態量*ノ Q_α ダケガ坐標ノ異ナル函数デアルトイフ ~~トイフ~~ コトニヨッテ差違ヲ生ジテ居ル。而シ分母ニ於テハ積分値ガ 0 ニ収斂スルノミナラズ δQ_α ガ 0 ト異ナル範囲モ又只一点即チ $P(x_i)$ ニ縮少セネバナラヌ。

勿論

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_{\alpha;P}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\right)_P$$

ガ成立スルカラ場方程式ハ

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{Q}_{\alpha;P}} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha;P}} \qquad (2')$$

トナル。

質点力学ニ於ケル同様、(2)又ハ(2')式ニヨッテアル時刻ニ於ケル状態量トソノ第一微係数ガ与ヘラレバ、任意ノ時刻ニ於ケル状態量ノ様子ガワカル。†

†デ示範ニ云フト Volumenbereich

*H-P ノ原論文デハ「ヲ」ノ所ガ「ニ」ノ記号デカヘテみれバ、之ハ
著シ~~ク~~イトモ云フ方ガ穏当デアラウ。

質点力学ニオケル状態量 q_i ガ有限個デアルカハリニ、状態量ノ Kontinuum、詳シクイヘバ有限個ノ Kontinua 即チ幾ツカノ状態函数 $Q_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ ガアラハレテクル。ココデハ空間座標 x_i ハ状態量デハナク Parameter ト考ヘテオクノデアル。

カカル連續的無限個ノ自由度 (kontinuierlich vieler Freiheitsgrade) ~~ヲ有スル~~ノ場合ハ有限個ノ場合ノ極限トシテ得ラレル。即チ空間ノ δx、状態量ノ定義サレル範囲ノ体積ガ有限デ合同ナ立方体ノ Zelle ニ分タレルトシ、ソノ稜ノ長サヲ $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ トシテオク。ソコデ連續ナ空間函数 $Q_\alpha(x_1 x_2 x_3)$ ヲ階段的函数 (Treppenfunktionen) 即チ各 Zelle ノ中デ一定ノ値ヲトル函数デオキカヘル。Zellen ヲ ~~符號シテ~~ 三ツノ座標ニ對應スル三ツノ laufende Nummer l, m, n デ記スコトスルト有限個ノ状態量 $Q_{\alpha,l,m,n}$ ガ得ラレル。而 $\bar{L}$ ニ於ケル積分ヲ和ニカヘ、空間微係数ヲ差係数 (Differenzenquotienten) 例ヘバ

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1} \text{ ヲ } \frac{Q_{\alpha,l+1,m,n} - Q_{\alpha,l,m,n}}{\Delta x_1} \quad *$$

ニ~~オキ~~カキカヘルト、Lagrange 函数ハ

$$\bar{L} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \sum_{l,m,n} L\left(Q_{\alpha,l,m,n}, \frac{Q_{\alpha,l+1,m,n} - Q_{\alpha,l,m,n}}{\Delta x_1}, \ldots, \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}\right) \tag{5}$$

† Lガ極限ニ於テQ_αノdifferenzierbarナ函数トナル限リニ於テ $\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}}$ ノ極限ハ $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha;p}}$ トナル筈デアル。

* 之迄ノ$\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)_{l,m,n}$等ハ厳密ニハ$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha,l,m,n}}$トカクベキデ極限ニ於テLガ$Q_\alpha$, $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1}$等ノdifferenzierbarナ函数トナル時之迄ノ如キ書キ方ガ許サレル。

トナリ、通常ノ質点力学ノ運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,l,m,n}} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha,l,m,n}} \qquad (5')$$

ガ出テクル。

ソコデZellenノ体積ヲ0ニ近ヅケテ極限ニ於テ(5')カラKontinuum（ノ自由度ノ場合）ニ対スル方程式(2)又ハ(2')ト一致スルコトヲ示サウ。ソレニハ

$$\lim \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha,l,m,n}} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha;P}}$$

ナルコトヲ証セバヨイ。

サテl,m,nニ関スル和ニ於テ$Q_{\alpha,l,m,n}$ハZelle l,m,nノミナラズ ~~lm~~ $l-1,m,n$; $l,m-1,n$; $l,m,n-1$ ニ関スル項ニモアラハレルカラ

$$\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_{\alpha,l,m,n}} = \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)_{l,m,n} - \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1}}\right)_{l,m,n} - \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_1}}\right)_{l-1,m,n}\right]\frac{1}{\Delta x_1} - \cdots^{*}$$

トナリ、Zelleヲ細カクシテユクニ従ヒ

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta Q_{\alpha;P}}$$

ニ収斂スル。即チ証明ガ出来タワケデアル。

次ニ質点力学ニオケルト同様ニLagrange型（形）ノカハリニ

*九月八日稿.

†括弧ノ湯ノ変数ヲ const.ニトル.

Hamilton形ノ場方程式ヲ導入シヨウ。*

先ヅ状態量 Q_α ニ kanonisch konjugierten-Impuls P_α ヲ

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} \qquad (6)$$

ニヨツテ定義シ、Hamilton函数ヲ

$$H\left(P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right) = \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - L \qquad (7)$$

ニヨツテ定義スル。

H ヲ $P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ ニツイテ変分スレバ

$$\delta H = \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\delta P_\alpha + \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}\delta Q_\alpha + \sum_i \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \right)$$

$$= \sum_\alpha \dot{Q}_\alpha \delta P_\alpha - \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\delta Q_\alpha + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \delta \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \right)$$

第一ニ

$$\frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \dot{Q}_\alpha \qquad (8)$$

第二ニ

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}\right)_{P_\alpha} &= \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)_{\dot{Q}_\alpha} \\ -\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{P_\alpha} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\dot{Q}_\alpha} = P_{\alpha i} \quad \dagger \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

(8)(9)カラ 正規場方程式 (kanonischen Feldgleichungen)

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\left[\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right] \qquad (10)$$

又ハ

$$\overline{H} = \int H\, dV \qquad (11)$$

ヲ使ヘバ

$$\dot{Q}_{\alpha;p} = \frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha;p}} \qquad \dot{P}_{\alpha;p} = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta Q_{\alpha;p}} \qquad (\mathrm{I})$$

† 次ノ注†参照

* Hガ $\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}$ ヲフクマヌ時ハ(10)ノ初メノ式カラ P_α ヲ $Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ ノ函数トシテ表ハスコトニヨリ Integrand ヲ $Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ 丈ノ函数ニ直ハスコトハ勿論デアル。

ソノ際ハ

$$\int \sum_\alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \dot{P}_\alpha\right) dV + \int L(Q_\alpha)\, dV$$

$$= \int dS \sum_i \left[\cos(n x_i) \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \dot{P}_\alpha\right)\right]$$

之等ハ変分原理

$$\delta\int L\,dV dt = \delta\int\Big[\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H\Big(P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\Big)\Big]dV dt = 0 \qquad (12)$$

カラ出テクル。但シ P_α 及 Q_α ハ独立ニ変ル空間函数ト見、ソノ変化分ハ限界ニ於テ 0 トナルモノトスル。

正規場方程式ニヨツテ、アル時刻 $t=t_0$ ニ於テ任意ニ P_α, Q_α ヲ与ヘレバ其ノ後ノ時間的変化ガ決定サレル。†

後ノ計算ニ於テ変分原理(12)ノ形丈ヲ用ヰルカラ(12)ノ被積分値ガ P_α ノ消去ニヨツテ Q_α, $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$, $\dot{Q}_\alpha$ ノミノ函数ニナリ得ルカドウカハ重要デハナイ。* 更ニ又 H ガ P_α ノ空間微分数 (~~Rä~~ räumlichen Ableitungen) ヲ含マヌトイフ仮定モ除イテモヨイガ、後ノ応用ニハ之ハ不必要。

§2. Energie- 及 Impuls-積分

今 Hamilton 函数 H ガ時間坐標ヲ explizit ニフクンデヰナイト仮定スルト部分積分ニヨリ

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \int \sum_\alpha \Big(\frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha;P}}\dot{P}_{\alpha;P} + \frac{\delta\overline{H}}{\delta Q_{\alpha;P}}\dot{Q}_{\alpha;P}\Big)dV_P$$

トナル。但シ(之カラ後モアル体積積分ノ中ニイツモ仮定スル如ク)積分ノ限界ニ於テ出テクル項ハ省クコトニスル。# 積分ノ際ニハ（全空間ニ亘ツテ行フ）コレハ場ノ量ハ空間的遠方ニ於テ充分速ク 0 ニ近ヅクベキコトヲ意味スル。

†但シ＊ト同様ニ表面積分ヲ省イテヨイト仮定ス。

$$* \quad \left(\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k}$$

? $$\dagger \quad G_k = -\int \sum_\alpha P'_\alpha(x'_1 x'_2 x'_3)\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\, dV$$

Drehung ノ場合ハ $\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \mathrm{const}$, L ガ invariant ナラバ

$$\frac{\partial L(x_1 x_2 x_3 \overbrace{\quad}^{Q_\alpha(x_i)\cdots})}{\partial \dot{Q}_\alpha(x_1 x_2 x_3)} = \frac{\partial L(x'_1 x'_2 x'_3 \overbrace{\quad}^{Q_\alpha(x'_i)\cdots})}{\partial \dot{Q}_\alpha(x'_1 x'_2 x'_3)}$$

$$P_\alpha(\cancel{x_1} x_2 x_3) = f(x_i, Q_\alpha \cdots)$$

$$= P'_\alpha(x'_1 x'_2 x'_3) = f(x'_i, Q_\alpha \cdots)$$

$$\therefore \; G_k = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} G'_i$$

$$G'_i = -\int \sum_\alpha \frac{\partial L(x'_1 x'_2 x'_3, Q_\alpha \cdots)}{\partial \dot{Q}_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x'_i}\, dV'$$

之ノ因子ヲ除スト $\frac{d\bar{H}}{dt}$ ノ式ハ(I)カラ 0 トナリ。$\bar{H}$ ガ時間的ニカハラヌコトガワカル。凡テノ物理的ノ応用ニ於テ $\bar{H}$ ナル量ハ(質点力学ニオケルHamilton函数ト同様ニ)数因数(Zahlenfaktoren)ヲ適当ニ選ベバ系ノ全Energieトシテ説明スルコトガ出来ル。

Energie積分ノ他ニ尚他ノ積分

$$G_k = -\int \sum P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV \quad (k=1,2,3) \quad (13)$$

ガ存在シ、之ヲ系ノ全Impulsノ分値(Komponenten)ト説明出来ル。

Energie積分ノ時トanalogニ G_k ガ空間坐標ヲexplicitニフクマヌト仮定スルト (13)カラ部分積分ヲクリカヘシテ

$$\frac{dG_k}{dt} = -\int \sum_\alpha \left(\dot{P}_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k} \dot{Q}_\alpha \right) dV \quad \dagger$$

$$= \int \sum_\alpha \left(\frac{\delta H}{\delta Q_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\delta H}{\delta P_\alpha} \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_k} \right) dV \quad \text{参}$$

$$= -\int \sum_\alpha \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_k} \right] dV \quad {}^{*}\text{参}$$

之ハ全ク表面積分トナリ仮定ニヨリ 0 トナル。即チ G_k モ又時間的ニカハラナイ。

モシ空間ノドノ方向モ特別ノ違ヒガナイナラバ L モ H モ坐標軸ノ空間的回転ニ対シテ不変デ G_k ハ一ツノVektorノKomponentヲ作ル。‡

* V.R. ト照合スルコトニナル.

多次元ノ坐標空間ノ

+ Schrödinger ノ微分方程式ニ analog ナ方法ハアトマハシニシテオク。
コノ方法ニヨレバ Funktionenraum ニ於テ volumenelement ヲ都合ヨク定メ
? ルコトガ困難デアル。 $d\tau = f(q_i)\,dq_1\,dq_2 \cdots dq_n$

§3. 正規交換関係 (Kanonische Vertauschungsrelationen*)
für stetige Raum-Zeit-Funktionen.

以上ハ古典的場ノ一般理論デアツタガ量子物理学ニウツルニ際シテ先ヅ量子力学ニオケル Matrizen 又ハ Operatoren ノ応用ニ対応スル方法ヲ採用シヨウト思フ。†

コノ方法ハ~~独立変数~~ノ撰擇ガ非常ニ自由デアルト云フ利益ヲモツテ居ル。~~又~~ 之ハ正規変換 (kanonische Transformationen) ガ容易ニ行ヒウルコトデアル。又ニ物理的法則ノ形ヲ特ニ今ノ場合ニオイテ Hamilton 函数ノ表示ト場方程式トヲ直接古典理論カラトツテクレバヨイ。

古典論ト量子論トノ差ハコノ方法ニ於テハヨクシラレテ居ルヤウ物理的量ガ後者ニ於テ交換不能 (nichtkommutative) Operatoren ~~量~~ ニオキカヘラレル所ニアル。

量子力学 (Quantenmechanik) ノ場合ニハ物理的状態量ハ第一ニ時間ニ、第二ニハ不連続的ニ (一個又ハ数個ノ) ~~Index~~ 異ナル自由度ヲ区別スル Index ニ関係シテ居タガ、場函数ノ量子力学 (Quantendynamik der Feldfunktionen) ニ於テハ、カヽル Index ハ (一部分) 連続的ニカハル空間~~函数~~座標 x_1, x_2, x_3 ニオキカヘラレ、之等ハ時間ト同様通常ノ数即チ c-Zahlen トミナサレルノデアル。

連続的ナ場ノ量ニ対スル正規V.R.ヲウルニハ§1ニ於ケルト同様、無限ノ自由度ノ系ノ Lagrange 函数 (5)

以下ニ於テ Operator oder Matrix ノ和．積及ビ c-Zahl トノ積等ハ通常ノ量子力学ト同様ニ定義サレテヰルト考ヘル。

† 4頁ノ注参照

* H.P.ノ論文ニハナイガ無限大モ考ヘル必要ガアル。

カラ出発シテ、空間ヲ無限ニ小サイZelleニ分ケテ極限ニ於ケル Lagrange函数(3)ニ移ル~~コトトスレ~~レバヨロシイ。#

通常ノ δ 記号

$$\delta_{ll'} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq l' \\ 1 & \text{〃 } l = l' \end{cases} \tag{14}$$

ヲ定義シ、又ニ

$$\delta_{l,m,n;l',m',n'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}$$

~~トカケバ~~ Zelle ノ体積ヲ

$$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

トカケバ、V.-R.ノ有限ノ自由度ノ場合ニ於ケル通常ノ量子力学ニヨッテ

$$p_{\alpha,l,m,n} Q_{\beta,l'm'n'} - Q_{\beta,l'm'n'} p_{\alpha,lmn} = \frac{h}{2\pi i}\delta_{lmn,l'm'n'}\delta_{\alpha\beta} \tag{15}$$

及ビ Q, p ノ其ノ他相互ノ間ノ交換可能(Vertauschbarkeit)ヲアラハス式トナル。

コノ場合

$$p_{\alpha,l,m,n} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha,lmn}} = \Delta V \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\alpha,lmn}}$$

デアルカラ、極限ニ於テ

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} p_{\alpha,lmn} = P_\alpha(x_1 x_2 x_3)$$

(14)式ヲΔVデワッテΔV→0ノ極限ヲトレバ右辺ハ0又ハ無限大トナル。故ニ(15)式ニ先ヅ階段函数其ノ Indizes $l'm'n'$ ノ任意ノ函数(c-Zahl トス)ヲ乗ジテアル空間部分 V' ニツイテ~~積分~~和ヲトレリ、ΔV→0ノ極限ニ於テ f 格ナル函数ガ連続函数 $f(x_1 x_2 x_3)$ ニ収斂スル

十分ニ（matrixノ）極限~~ヲ行テ定理~~ガヲ左記ノ如キ積分（ノ系列ノmatrix）デアルトシタモノトス。

ソノ二ツノ場合 Matrix ハ diagonal デナイ。

~~極小ナモノナラバ~~ $\sum_{l',m',n'} f(l'm'n')\Delta V$

ガ有限ナル空間部分ニツイテノ積分

$$\int_{V'} f(x_1' x_2' x_3')\, dV'$$

トナル様ナモノナラバ先

$$\sum_{l',m',n'} f(l'm'n')\Delta V\cdot\left[\frac{p_{\alpha,lmn}}{\Delta V}Q_{\beta,l'm'n'} - Q_{\beta,l'm'n'}\frac{p_{\alpha l'm'n'}}{\Delta V}\right]$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\begin{cases} f(l,m,n), & \text{wenn Zelle } lmn \text{ in } V' \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ヨリ Zelle ヲ細分シタ極限ニ於テ

$$\iiint_{V'} f(x_1' x_2' x_3')\, dV' \{P_\alpha(x_1 x_2 x_3) Q_\beta(x_1' x_2' x_3') -$$

$$- Q_\beta(x_1' x_2' x_3') P_\alpha(x_1 x_2 x_3)\} = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\begin{cases} f(x_1 x_2 x_3), & \text{wenn Punkt } x_1 x_2 x_3 \text{ in } V' \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \quad (16)$$

コノ場合 $x_1 x_2 x_3$ ト $x_1' x_2' x_3'$ ノ Rolle ハ交換シ得ル。

コノ際更ニ Dirac ノ singulären Funktionssymbol $\delta(x)$

~~ヲ使~~ $$\int_a^b f(x)\delta(x)\, dx = \begin{cases} f(0), & \text{wenn } x = 0 \text{ in } (a,b) \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ヲ使ツテアラハスト都合ガヨイ。~~ソノ要素~~ニツイテ Komponente ガ $x_1 x_2 x_3$ デアル Vektor r ニヨリ

$$\delta(r) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \qquad \delta(r r') = \delta(r' r) = \delta(r - r')$$

$$\int_{V'} f(x_1' x_2' x_3')\delta(r r')\, dV' = \begin{cases} f(x_1 x_2 x_3), & \text{wenn } x_1 x_2 x_3 \text{ in } V' \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \quad (17)$$

† 之ハ(17)カラ部分積分ニヨッテ形式的ニ出テクル。

* 此等ノ式モ又極限トシテ得タモノトスルベキデアル。

‡ 最後式ハ $\delta(r, r') = \delta(r - r') = \delta(r' - r)$ カラ出ル。

ト記號シ、且 $P_\alpha(x_i), Q_\alpha(x_i)$ ヲ P_α, Q_α ; $P_\alpha(x'_i), Q_\alpha(x'_i)$ ヲ P'_α, Q'_α トカキ

$$[F, G] \equiv FG - GF$$

ナル Klammersymbol ヲ使ツテ kanonischen V.-R. für konti. Feldgröße ハ

$$\left.\begin{aligned} &[Q_\alpha, Q'_\rho] = 0 \qquad [P_\alpha, P'_\rho] = 0 \\ &[P_\alpha, Q'_\rho] = [P'_\alpha, Q_\rho] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\rho}\,\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

トカキウル。

之等ノ關係ハ二ツノ異ナル空間的位置ニ對シ、常ニ同一ノ時刻ヲトッテ成立スル。異ナル時刻ニオケル状態量ニ對スル Klammersymbol ノ値ニツイテハ何トモイヘヌ。

之ニ反シテ δ函数ノ微係数ヲ通常ノ如ク

$$\int_a^b f(x)\,\delta'(x)\,dx = \begin{cases} -f'(0), & \text{wenn } x=0 \text{ in } (a,b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (17)$$

ト定義スルナラ[†] (II) ノ V.R. ハ空間座標ニツイテ微分スルコトガ出来ル。

例ヘバ

$$\left.\begin{aligned} &\left[P'_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') \\ &\left[P_\alpha, \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_i}\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x'_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')^{\ddagger} \\ &\left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}, Q'_\alpha\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') \\ &\left[\frac{\partial P'_\alpha}{\partial x'_i}, Q_\alpha\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x'_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}') = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')^{\ddagger} \end{aligned}\right\} \quad (18)^{*}$$

*九月九日稿

トナル。*

次ニ nicht vertauschbaren Größen ノ函数ノ微分ヲ、ソノ一ツデ微分スル公式ヲ最初ノ如ク

$$\frac{\partial F(Q_1, Q_2 \cdots)}{\partial Q_1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{F(Q_1+\delta, Q_2 \cdots) - F(Q_1, Q_2 \cdots)}{\delta}$$

ト定義スル。但シ δ ハ c-Zahl (ニ従テ Operator ヲカケタモノ) デアル。

コノ定義ニ於テハ普通ノ積ノ微分ノ規則

$$\frac{\partial (F_1 F_2)}{\partial Q_1} = F_1 \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} F_2$$

ガ成立スル。(但シ因数ノ順序ハカヘテハナラヌ。)

F ヲ P_α, $\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}$, Q_α, $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ ノ任意ノ函数トスル。但シ之等ノ函数ノアル一点ニオケル値ニノミ関係シテヰル函数トスル。スルト通常ノ量子力学ト同様ニ

$$(19)\left\{\begin{aligned} [F, Q'_\alpha] &= \frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\delta(rr') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta(rr')\right] \\ [P'_\alpha, F] &= \frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\delta(rr') + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta(rr')\right] \end{aligned}\right.$$

トナル。

何故ナラバ (II) ト (18) ニヨリ、$F = P_\alpha, Q_\alpha, \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ 等ノ一ツヲオキカヘレバ確カニ成立スル。又 F_1, F_2 ニ対シテ成立スレバ F_1+F_2 及ビ F_1F_2 ニ対シテモ成立スル。

† p.10頁ノ注†参照

* x_i ト x_i' トヲカキカヘレバヨイ。

\# 九月十日 稿

ハ任意函数ニ対シ成立スル。

更ニ(19)式カラ積分ニヨッテ直チニ

$$\bar{F} = \int F dv$$

ニ対スル V.-R.

$$[\bar{F}, Q'_\alpha] = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\text{für } x_i = x'_i}$$

$$[P'_\alpha, \bar{F}] = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)_{\text{für } x_i = x'_i}$$

ヲ得ル。†

記號 $\frac{\delta \bar{F}}{\delta P_\alpha}$, $\frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_\alpha}$ ヲ使ヘバ簡單ニ之等ヲ

$$[\bar{F}, Q_\alpha] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\delta \bar{F}}{\delta P_\alpha} \qquad [\bar{F}, P_\alpha] = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\delta \bar{F}}{\delta Q_\alpha} \qquad (20)$$

トカキうル。* 但シ変分ハ常ニ振動中ノ ~~大体状態ニ~~ Feldgröße ~~ニ対テ~~ ノ beziehen シテオル空間的位置ニ就テ行フモノトスル。‡

§4. 量子力学(Quantendynamik)ニ於ル場方程式及ビ Energie-及ビ Impulsintegral

以上ノベタ所ニヨッテ場方程式ヲ検討スル準備ハ充分出来タ。コノ場方程式トシテ古典理論カラ kanonische Form (I) ~~ヲ採ッテ~~

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\delta \bar{H}}{\delta P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta Q_\alpha} \qquad (\mathrm{I})$$

* ~~Har~~ 物質波ニ對スル Hamilton 函数ト場ノ方程式トハ物質ニ関スル場ノ量 ψ ト ψ^* ノ電磁 Potential Φ_ν トノ積ヲ含ンデヰル。ソレ故ニ一ぺんぬク吾々ノ理論ニ於テ ψ ト ψ^* トハ Φ_ν ト交換可能デアルカラ、因子ノ順序 (ψ, ψ^* ト Φ_ν トノ間ノ) ハ問題ニナラズ、結局本文ノ結論ハ正シイ。

† 原論文ノ $\dot{F} = \frac{2\pi i}{h}[H, F]$ ハ誤植デアラウ?

~~† 寧 $\dot{F} = \frac{2\pi i}{h}[\dot{H}, F] + \frac{2\pi i}{h}[H, \dot{F}]$ デハナイカ? 注*参照~~

(21)' ノ関係ノ Rolle ハ

$$\dot{F} = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}} \frac{\partial \dot{P}_\alpha}{\partial x_i} \right]$$

ノ如キ過程ヲ導ク関係ヲサケルニアル。(因子ノ順序ガ正シイカドウカワカラズ。例ヘバ $F = P_\alpha Q_\alpha$ 　$\dot{F} = P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \dot{P}_\alpha Q_\alpha$
$\neq P_\alpha \dot{Q}_\alpha + Q_\alpha \dot{P}_\alpha$)

従ッテ右ノ式ノ右辺ノ偏微分ハ普通ノ微分ノ意味デ定義サレテヰルモノトスル。

尚一般ニHノ中ノ因子ノ順序ニツイテ特別ノ規約ガ必要デアッテ．之ハ古典論カラ一意的ニ定メル事ハ出来ナイ。殊ニ後ノ応用ニ於テ H ハ(本質的ニハ)場ノ量ノ二次形式(eine quadratische Form)デ従ッテ場方程式ハ(本質的ニハ) linear トナリ.* (I)ノ ~~[illegible]~~ ニヨリ与ヘラレル 場方程式ハ之ニ相応スル古典的ノ場方程式ト全ク同ジ形トナル。

(20)ニヨッテ場方程式ハ直チニ

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, Q_\alpha], \quad \dot{P}_\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, P_\alpha]$$

ナル形ニカキラレル。

之カラ前ト同様ナ帰納ニヨッテ Pノ函数タル量 F ニ対シ

$$\dot{F} = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, F] \tag{21}$$

ガ成立シ又

$$\overline{F} = \int F\,dv$$

ニ対シテモ

$$\dot{\overline{F}} = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, \overline{F}] \tag{21'}$$

ガ成立スル。†

コノ式カラシテ 予備的ナ理論ヲ述ベルニ必要ナ二ツノ結果ヲ得ラレル。

先(21')ニ於テ $\overline{F} = \overline{H}$ トオケバ $[\overline{H}\,\overline{H}] \equiv 0$ カラシテ

$$\dot{\overline{H}} = 0 \qquad \overline{H} = \text{const} \tag{22}$$

* 量子力学ノ古イ表現ニ於テ $\bar{H}$ ガ對角線形ニナルトイフ仮定ハコヽデハ導カナイトイフコトニ注意スベキデアル。$\bar{H}$ ガ對角線形デアル如キ場合ハ重要デハアルガ、~~唯~~ 方程式ノ物理的應用ニ際シテ唯一ノ可能ナ場合デハナイカラデアル。

15

ガ出テクル。即チコノ場合ニモ Energie 法則ガ成立スル。*
但シ函数 H ハ時間ヲ explizit ニ含ンデヰナイト仮定サレテヰル。何故トイヘバ (21) ハコノ仮定ガアル時丈一般ニ成立スルカラ。

第二ニ(21)ノ下ニ於テ括弧記号 $[Q_\alpha, Q'_\beta]$, $[P_\alpha, P'_\beta]$ $[P_\alpha, Q'_\beta]$, $[P'_\alpha, Q_\beta]$ ヲオケバ (II) ニヨッテ之等ノ括弧記号ハ凡テ c-Zahl (詳シクハ c-Zahl ニ単位 Operator ヲカケタモノ) デアルカラ夫ハ $\bar{H}$ ト交換可能デ従ッテ時間的導来函数ハ (空間ノ一定ノ位置ニ於テ) 0 デアル。即チ ~~(II) ノ V.-R. ガ~~ アル時刻 $t=t_0$ ニ対スル V.-R. (II) ヲ仮定スルト コノ V.-R. ハ運動方程式 (I) ニヨッテ t_0 ニ近イ時刻ニ対シテ従ッテ凡テノ時刻ニ対シテ成立スル (sich reproduzieren). コレニヨッテ初メテ (I) ト (II) トノ一致シテヰルコトガ示サレタ。**

(13) ニヨッテ定義サレタ Impuls 積分

$$G_K = -\int \sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_K} dV \qquad (13)$$

ニ (20) ヲ適用スルト

$$[G_K, Q_\alpha] = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_K}, \quad [G_K, P_\alpha] = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_K}$$

トナリ、帰納ニヨッテ前ニノベタ如ク任意ノ、F(デ空間坐標ヲ explizit ニフクマヌモノ)ニ対シテ

† 下ノ積分ガ $\frac{1}{r^2}$ ヨリ小サイ factor ニ finite ナ Operator ヲカケタモノトナル。

* $\bar{H}$ ト G_K ハ vertauschbar, 又 (23') ニヨリ G_K 相互ニ vertauschbar.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{h}[G_k, F] \qquad (23)$$

ガ成立スル。コレハ(21)ニ對スル Seitenstück デアル。
空間的體積ニツイテ積分スルト $\bar{F} = \int F\,dV$ ノ存在スル場合ニハ $\int \frac{\partial F}{\partial x_k} dV = 0$

ナルコトカラ $[G_k, \bar{F}] = 0 \qquad (23)'$

ナホ特ニ $F = \bar{H}$ トオトルト (21)ニヨリ

$$\dot{G}_k = 0 \qquad G_k = const \qquad (24)$$

トナル。即チ全系ニ對スル Impuls 積分ノ存在ガ證明サレタワケデアル。

併シ関数 P_α ト $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}$ ノ順序ニツイテ一言スベキコトガアル。実際(23)(24)ハ其ノ順序ニ関セズ成立スルガ、(18)ニヨッテ $[P_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}]$ ハ $\delta'(x)$ ト同様、$x=0$ ニ於テ singulär デ unbestimmt ナル。$P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}$ ト $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} P_\alpha$ ノドンナ Linearkombination ヲ G_k ノ被積分函数ニトルベキカハ今ノ所デハワカラヌ。

(21)ト(23)カラシテ、Feldgröße ヲアラハス Operator ヲ Matrix デアラハシタ場合、特ニ Energie $\bar{H}$ ト Impuls G_k ヲ對角線形ノ Matrix トシタ場合ニ*、F ノ任意ノ Matrixelement F_{nm} ニ對シテ微分方程式

$$\dot{F}_{nm} = \frac{2\pi i}{h}(\bar{H}_n - \bar{H}_m) F_{nm}$$

$$\dagger \therefore F(x_1' x_2' x_3' t) = F(x_1 x_2 x_3 t) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_i' - x_i) + \frac{\partial F}{\partial t}(t' - t)$$

$$+ \sum_{i,k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(x_i' - x_i)(x_k' - x_k) + \cdots$$

$$= F(x_1 x_2 x_3 t) + \sum_i \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)(G_i F - F G_i) + \cdots$$

$$= \left(1 + \left(\frac{2\pi i}{h}\right)\{H(t'-t) - (G, r'-r)\} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi i}{h}\right)^2 \{\qquad\}^2 + \cdots\right)$$

$$\times F(x_i, t) \times \left\{1 - \left(\frac{2\pi i}{h}\right)\{\qquad\} + \frac{1}{2}(\quad)^2 \{\qquad\}^2 + \cdots\right\}$$

故ニ $$\frac{\partial F_{nm}}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{h}(G_{k,n}-G_{k,m})F_{nm}$$
ガ成立シ 従ッテ Element F_{nm} ハ 空間坐標時間ニ対スル関係トシテ、具体的ニ
$$F_{nm} = a_{nm}\, e^{\frac{2\pi i}{h}[(\bar{H}_n-\bar{H}_m)t-(\mathfrak{G}_n-\mathfrak{G}_m)\mathfrak{r}]}$$
ナル 調和波 (Harmonischen Welle) ノ形ヲトル。
但シ $\mathfrak{G}$ ハ G_k ヲ Komponenten トスル Impulsvektor ヲ表ハス。

Operatoren ノ特別ナ Darstellung ニハ不関係ニ、(21) ト (23) ヲクリカヘシ使ッテ見ルト 凡テノ F ニ対シ
$$F(x_1'\,x_2'\,x_3'\,t') = e^{\frac{2\pi i}{h}[\bar{H}(t'-t)-(\mathfrak{G},\mathfrak{r}'-\mathfrak{r})]}\, F(x_1,x_2,x_3,t)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}[\bar{H}(t'-t)-(\mathfrak{G},\mathfrak{r}'-\mathfrak{r})]} \quad (26)$$
ガ成立スル。

最後ニ 方程式ノ積分ノ方法トシテ Feldgröße ヲ固有振動 (Eigenschwingung) ニヨッテ展開スル方法ヲ説明シテオカウ。コレガ実際的ニ行ヒラレル唯一ノ方法デアラウ。

Feldgröße ヲ空間坐標ニ対スル Abhängigkeit ニツイテ 一ツノ直交函数系デ展開スルト (Orthogonalsystem)
$$\left.\begin{aligned} P_\alpha &= \sum_\rho a_{\alpha\rho}(t)\, u_\rho(x_1\,x_2\,x_3) \\ Q_\alpha &= \sum_\rho b_{\alpha\rho}(t)\, u_\rho^*(x_1\,x_2\,x_3) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$
但シ
$$\int u_\rho u_\sigma^*\, dV = \delta_{\rho\sigma} \quad (28)$$

† $\widetilde{H}$ ガ P_α, Q_α ノ bilinear form デアルコト。

デアッテ Umkehrformeln ハ

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha\rho}(t) &= \int P_\alpha u^*_\rho(x_1 x_2 x_3)\,dV \\ b_{\alpha\rho}(t) &= \int Q_\alpha u_\rho(x_1 x_2 x_3)\,dV \end{aligned}\right\} \qquad (27')$$

トナル。コヽニ u_ρ ハ c-函数, a_α, b_α ハ P_α, Q_α ト同様 q-数トナス。

Orthogonalsystem ガ diskret デアルコトハ、Hohlraum ノ中ノ場ヲ考ヘルカ、(外壁ノ所デアル限界條件ガミタサレネバナラヌ) (stehende Wellen) 又ハ例ヘバ環状格子ノ理論ニ於ケル如ク Feld ヲ或ル大キナ週期ヲモッテ ソレニ制限スルカ (fortschreitende Wellen) ニヨッテ erzwingen サレル。

a, b ニ移レバ V.-R. トシテ (II) カラ

$$[a_{\alpha\rho}, b_{\beta\sigma}] = \int [P_\alpha, Q'_\beta]\, u^*_\rho u'_\sigma\, dV\, dV' = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\int u^*_\rho u_\sigma\, dV$$

從ッテ (28) ニヨリ, kanonische Form

$$[a_{\alpha\rho}, b_{\beta\sigma}] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma} \qquad (29)$$

ガ出テクル。

Hamilton 函数 $\overline{H}$ ハ a, b ノ函数トナリ†. コレ等ノ変数ニ對スル kanonischen Gleichungen ガ出テクル。Orthogonalsystem ノ撰擇ハ全ク自由デアルガ $\overline{H}$ ガ separierbar デアル様ニ エラ~~ベバ~~ ビラレバ $\overline{H}$ ノ Matrix ヲ對角

ニ計算セラル。
他ノ場合ニ於テハ適當ニAusgangssystemヲトッテStörungs-theorieニ從ッテ計算サレル。ソレハSchrödinger函數$\varphi(b_1, b_2, \dots)$ヲ導入シテヤッテモヨク、又Matrix理論ノ元ノ方法ヲ使ッテヤッテモヨイ。

§5. Relativistische Invarianz der V.-R. bei invarianter Lagrangefunktion

今迄ハ同ジ時刻ニ於ケル二ツノ異ナル空間的位置ニ於ケルFeldgrößenノ間ノV.-R.丈ヲ考ヘタガ、場ノ方程式(I)ニヨッテ異ナル時刻ニ於ケルFeldgrößenノ間ノV.-R.モ又決定サレル。實際役ニ立ツ理論ニ於テハLagrange函數ガrelativistischニinvariantナラバ、V.-R.モ又Lorentztransformationニ對シテinvariantデナケレバナラヌトイフコトガ要求サレル。此ノ節デ實際此ノ條件ガ滿サレルコトヲ証明シヨウ。

今一ツノ坐標系カラLorentz変換ニヨリ他ノ坐標系ニウツッタ時括弧記号(III)ノ値ハ二ツノ理由カラ変ハル。先P_α, Q_αハ一般ニハSkalareデハナイカラ一定ノ世界点(Weltpunkt)ニ於テ、アル仕方デ変換サレルデアラウ。第二ニV.-R.ニ於テトルベキ二ツノWeltpunktハ前ノ場合ニハ同ジtノ値ヲモツ点、後ノ場合ニハ同ジt'ノ値ヲモツ点ヲトルノデアルカラ、当然異ナル

一對（Weltpunkt）ヲトルコト、ナル。コノ後ノ方ノ事情カラクル括弧記号ノ変化ハ完ナルコトガ困難デアル。両者ニ於ケル時間ノ値ノ有限ニ異ナル場合ニ対スル一般的式ヲ作ルコトハ不可能ダカラデアル。併シコノ困難ハ、無限小ノ Lorentz 変換ニ局限スルコトニヨッテ除カレル。コノ場合ニハ、一ツノ物理的量 $f(t')$ ハ $f(t)+\frac{\partial f}{\partial t}(t'-t)$ ニヨッテオキカヘラレル。而シテ $\frac{\partial f}{\partial t}$ 及ビ之ニ属スル V.-R. ハ(I)カラトッテクルコトガ出来ル。コノ変換ノ全体ガ群ノ性質ヲモッテヰルコトカラ自然有限ノ変換ニ対スル Gleichungssysteme ノ Invarianz モワカル。其故、次ニ於テ先括弧記号ノ infinitesimale Lorentztransformation ニ對スル変化ヲ上ノ二ツノ事情ニツイテ別々ニ計算シ、ソレ後イカナル条件ノ下ニ両者ガ kompensieren スルカヲ見ヨウ。

第一ノ原因ニヨル変化ヲ見ルニハ先 P_α, Q_α ノ変換ヲ一般的ニ考察セネバナラヌ。ソレニハ imaginäre Zeitkoordinate $x_4 = ict$ ヲ導入シ P_α ノカハリニ

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4}} = icP_\alpha \tag{30}$$

ヲ用ヰルトヨイ。スルト

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_4} &= \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta Q_\alpha} \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} &= \frac{1}{ic}\dot{Q}_\alpha = \frac{1}{ic}\frac{\delta \overline{H}}{\delta P_\alpha} = \frac{\delta \overline{H}}{\delta P_{\alpha 4}} \end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

$$[P_{\alpha 4}, \overline{Q}_\beta] = \frac{hc}{2\pi}\delta_{\alpha\beta}\,\delta(r,\overline{r}) \tag{31}$$

* 之ハ定義ト見ルベキデアル。

† L ガ $\dot{Q}_\alpha$ ノ他ニ $P_{\alpha 4}$ ヲ explizit ニフクンデヰルカドウカニ無関係デアル。

* 之ハ大キナ制限デアル。

トナル。但シ Q_ρ ノ Raum-Zeitstelle ヲアラハスニ Über-streichen ヲ用ヰ、Akzent ノ方ハ他ノ坐標ニうつル時ノタメニ残シテオク。

形式的ニ ~~之ヲ~~ $P_{\alpha 4}$ ト同形ノモノトシテ (9) デ定義シタ

$$P_{\alpha i} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} = -\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}} \qquad (9)$$

ヲ考ヘテヰル。之ニ對シテハ Q_ρ ヤ $P_{\rho 4}$ ニ對スル V.R. トシテ (31) 式程簡單ナ関係ハ出テコナイ。例ヘバ此ノ場合 (9) ノ両方ノ Ausdruck ガ H ノ中ニ因ル、Nichtvertauschbarkeit ニヨッテ ~~一般解ハ二~~ 保存サレナイトイフコトハ注意スベキデアル。L ガ $\dot{Q}_\alpha$ 及ビ $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}$ ノ二次形式（常数又ハ 及ビ Q_α の任意函数を係數トシタ ~~Q_α 丈ノ任意函数ナル~~ 係數ヲモツ）デアル時丈ハ (9) ヲ求メルニ利用シタ Argumentation ヲ直接採用シテヨイ。~~ノ場合ニハ一般~~

従ッテ一般ニハ、

$$P_{\alpha\mu} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\mu}} \qquad (32)$$

ガ成立スル*。但シ μ, ν ハ今後 1 カラ 4 迄トルモノトスル。

(32) カラシテ† Orthogonalen Koordinatentransformation

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \qquad a_{\mu\rho} a_{\nu\rho} = \delta_{\nu\mu} \qquad (33)$$

（二度出テ来ル Index ハ常ニ 1 カラ 4 迄ヨセル）

ヲ行ッタ時 Feldgröße Q ガ

$$Q'_\alpha = A_{\alpha\rho} Q_\rho \qquad (34)$$

ニヨッテ変換サレルナラバ*

$$A\bar{B}=1 \quad \therefore B\bar{A}=1 \quad \because B^{-1}(B\bar{A})B=1$$
$$\therefore \bar{A}B=1$$
$$\left(\because (36) ヨリ \quad A_{\gamma\alpha}B_{\gamma\rho}=\delta_{\alpha\rho}\right)$$

$$\dagger \because \quad a_{\mu\nu}\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_\mu}=A_{\alpha\rho}\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}$$

$$B_{\alpha\rho}\,a_{\mu\nu}\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_\mu}}=\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}}B_{\alpha\rho}a_{\mu\nu}$$

之ハLノ変数ガ nichtvertauschbar デアッテモ成立スル

$$\because \frac{\partial}{\partial\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_\mu}}\sum_{\substack{\rho,\gamma\\ \nu,\lambda}}\left\{(\ )_1\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}(\ )_2\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\lambda}(\ )_3\cdots\right\}=\sum\left\{(\ )_1(\ )_2\overset{B_{\alpha\rho}a_{\mu\nu}}{}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\lambda}(\ )_3\cdots\right\}$$
$$+\sum\left\{(\ )_1\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}(\ )_2\,B_{\alpha\gamma}a_{\mu\lambda}(\ )_3\cdots\right\}$$
$$+\cdots$$

$$=\sum B_{\alpha\rho}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\nu}}\{\quad\cdots\quad\}$$

* 9月11日 終

$P_{\alpha\mu}$ ハ　　$P'_{\alpha\mu} = a_{\mu\nu} B_{\alpha\rho} P_{\rho\nu}$　　(35)

ニヨツテ変換サレルトイフコトガ出来ル。†

但シAトBトハ

$$A_{\alpha\gamma} B_{\rho\gamma} = \delta_{\alpha\rho} \qquad (36)$$

ナル関係ヲモツテ居ル。*　即チ BノMatrix ハ Aノtransponierte Matrix ノ reziproke デアル。従ツテ P ト Q ノ同ジ Index ハイツデモ verjüngen 出来ル。例ヘバ

$\sum_\alpha P_{\alpha\mu} Q_\alpha$ ハ一ツノ Vektor デアリ

$\sum_\alpha P_{\alpha\mu} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\nu}$ ハ一ツノ Tensor デアル。

サテ有限ノ変換カラ infinitesimal ノ変換ニウツレバ、

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon s_{\mu\nu}, \quad A_{\alpha\rho} = \delta_{\alpha\rho} + \varepsilon t_{\alpha\rho}$$

(33)(36)ニヨリ

$$s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}, \quad s_{\nu\nu} = 0, \quad B_{\alpha\rho} = \delta_{\alpha\rho} - \varepsilon t_{\rho\alpha}$$

デ、ε^2ノOrdnungノ量ヲ無視スルト (33)(34)(35)カラ

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon s_{\mu\nu} x_\nu \qquad s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu} \qquad (33')$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha + \varepsilon t_{\alpha\rho} Q_\rho \qquad (34')$$

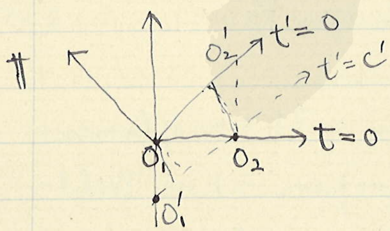
$$P'_{\alpha\mu} = P_{\alpha\mu} - \varepsilon t_{\rho\alpha} P_{\rho\mu} + \varepsilon s_{\mu\nu} P_{\alpha\nu} \qquad (35')$$

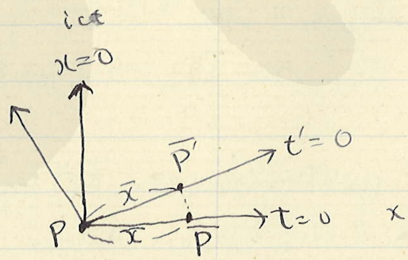
トナル。

ソコデ gestrichenen Feldgrößen ニ対スル Klammer-Symbole ヲ計算スル。但シ Feldgrößen ヲトル Weltpunkte (x_μ) 及ビ ($\bar{x}_\mu$) ハ固定シテオク。~~スルト~~
スルト.

十 第一、第五式ニツイテハ容易ニワカル。第二式デハ 並進ノ関数ヲノゾケバ

$$-t_{\gamma\alpha}\delta_{\gamma\beta}+t_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\gamma}=-t_{\beta\alpha}+t_{\beta\alpha}=0$$





$$[Q'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] = [Q_\alpha, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\alpha\gamma}[Q_\gamma, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\delta}[Q_\alpha, \bar{Q}_\delta]$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{Q}'_\beta] = [P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon s_{4\nu}[P_{\alpha\nu}, \bar{Q}_\beta] - \varepsilon t_{\gamma\alpha}[P_{\gamma 4}, \bar{Q}_\beta] + \varepsilon t_{\beta\gamma}[P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\gamma]$$

$$[P'_{\alpha 4}, \bar{P}'_{\beta 4}] = [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu}[P_{\alpha\nu}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4\nu}[P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta\nu}] - \varepsilon t_{\gamma\alpha}[P_{\gamma 4}, \bar{P}_{\beta 4}] - \varepsilon t_{\gamma\beta}[P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\gamma 4}]$$

コノ式ニ於テ. ungestrichene System ニ対スル［ ］ノ値トシテ (II) 及 (31) ヲ入レルト $t_{\alpha\beta}$ ヲ含ムトコロノ項ハ凡テ消エル!

然ルニ函数 $s_{4\nu}$ ヲモツタ項丈ガノコル。更ニ $s_{44}=0$ デアルカラ ν ハ 1カラ3迄動カハル index k デオキカヘラレル。ソコデ

$$\left.\begin{aligned}
&[Q'_\alpha, \bar{Q}'_\beta] = 0\\
&[P'_{\alpha 4}, \bar{Q}'_\beta] = \frac{hc}{2\pi}\delta(r, \bar{r})\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon s_{4k}[P_{\alpha 4}, \bar{Q}_\beta]\\
&[P'_{\alpha 4}, \bar{P}'_{\beta 4}] = \varepsilon s_{4k}[P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + \varepsilon s_{4k}[P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]
\end{aligned}\right\}(37)$$

次ニ［ ］ノ変化ノ第二ノ部分: 即チ Weltpunkt ノ変化ニヨル部分ヲ計算シヨウ。座標ノ原点ハ二ツノ Weltpunkt ノ一ツ即チ何レノ方ニ取ッテモヨイ。又二ツノドチラヲ固定シテモヨイ。∵ $t=\mathrm{const}$ ナル一ツノ Schnitt カラ之ニ parallel ナ ~~他ノ Schnitt ニ移ッテモ~~ (四次元世界ニオケル) 近傍ニ移ッテモ V.-R. ハ少シモカハラヌカラデアル。

今第一ノ点 P ヲ fest トシ 第二ノ点 ~~$\bar{P}$~~ ハ ungestrichene Koordinatensystem デハ、$\bar{P}$ デ $x_i = \bar{x}_i$, $x_4 = 0$. gestrichene

† 原点ノ移動ニ對シテハ Q_α 從ッテ P_α 等モ何等ノ變化ヲ起サズト假定シナケレバ不備デアル。

即チ $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ 　 $Q_\alpha(x_\mu) = Q'_\alpha(x_\mu + a_\mu)$

‡ 九月十二日稿。

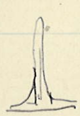
‡ 之ハ第一及ビ第二ノ式ニ對シテハ [ ] ガ 0 デアルカラ問題ニナラヌ。第三式ニ對シテハ、$(\bar{x}_k - x_k)$ ヲ含ンデ居ル項ハ、ソノ因数ガ後ニ述ベル δ函数ヲ x_k デ微分シタモノニヨッテ再ビ aufheben サレル事ハ大丈夫ナル。

何故ナラ $\nu = 1, 2, 3$ ニ對シ $\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_\nu}\right]$ ハ $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta(r\bar{r})$ ニ比例シ、從ッテ $\nu \neq k$ ノ時ニハ $(\bar{x}_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(r\bar{r})$ ノ如キモノハ

~~$\int(\bar{x}_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(r\bar{r})\,dv = 0$ デ且 $\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(r\bar{r})$ ハ ノ形ノ函数デアルカラ~~

~~$[f(x) - f(0)]\delta(x) = 0$ カラ $f(0)\delta'(x) = f(x)\delta'(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\delta(x)$~~

~~ニ於テ. $\frac{\partial}{\partial x_2}$ $0 = (\bar{x}_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(x - \bar{x}) + 0$~~



故ニ 0 トナリ $\nu = k$ ニ對シテハ $S_{kk} = 0$。 ?. $\nu = 4$ ノ式ガノコル。

Koordinaten デハソレゾレ次ノ値ヲモツタ $x'_i = \bar{x}_i$ $x'_4 = 0$ ナル $\bar{P}'$ ヲトル。

ungestrichene System デハ $\bar{P}$ 点ノ座標ハ $(\bar{x}_i, 0)$
$\bar{P}'$ 点ノ座標ハ $(\bar{x}_i - \sum s_{ik}\bar{x}_k \;, -\sum s_{4k}\bar{x}_k)$
従ッテ任意ノ二ツノ量 $F_1 F_2$ ニ對シ

$$[F_1(P), F_2(\bar{P}')] = [F_1(P), F_2(\bar{P})] - \sum s_{\nu k}\bar{x}_k \times$$
$$\times \left[F_1(P), \frac{\partial F_2(\bar{P})}{\partial x_\nu}\right]$$

Klammersymbol ノ全部ノ変化ハ、座標ノ原点ヲ再ビ任意ニトッテ得ル†

$$(38)\begin{cases} [Q'_\alpha, Q'_\beta(\bar{P}')] - [Q_\alpha, Q_\beta(\bar{P})] = -\sum s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_\nu}\right] \\ [P'_{\alpha 4}, Q'_\beta(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, Q_\beta(\bar{P})] = -\sum s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_\nu}\right] \\ \qquad + \sum s_{4k}[P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta] \\ [P'_{\alpha 4}, P'_{\beta 4}(\bar{P}')] - [P_{\alpha 4}, P_{\beta 4}(\bar{P})] = -\sum s_{\nu k}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_\nu}\right] \\ \qquad + \sum s_{4k}\{[P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta 4}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}]\} \end{cases}$$

コヽデ $s_{\nu k}$ ナル因子ヲ持ツタ項ニ於テ ν ハ4丈ヲトレバヨイ。#
ソコデ V.-R.(II) ガ nicht parallelen Nachbarschnitt $t' =$ const ニ對シテモ成立スルタメニハ、A デノ schiefsymmetrische ナ $s_{\mu\nu}$ 即チ A デノ s_{4k} ニ對シ式中ノ Σ ヲ含ム項ガ kompensieren セネバナラヌ。
即チ

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{x}_k - x_k)\left[Q_\alpha, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right] = 0 \\ &(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial x_4}\right] = [P_{\alpha k}, \bar{Q}_\beta] \\ &(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial x_4}\right] = [P_{\alpha k}, \bar{P}_{\beta k}] + [P_{\alpha 4}, \bar{P}_{\beta k}] \end{aligned}\right\}(39)$$

$$* \because P_{\alpha k} = - \frac{\partial H\left(P_{\alpha 4}, Q_\alpha, \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\right)}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}$$ ハ $\dfrac{\partial P_{\alpha 4}}{\partial x_i}$ ヲ含マヌ

† H, P ノ論文デハ コノ最後ノ項ガオチテ居ルタメ、第三式ガ成立スルタメニハ

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\,\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right) = 0 \quad (40)$$

ナル余計ノ條件ガ必要デアツタ。Rosenfeld ノ指摘セル如ク

$$\frac{2\pi}{hc}[P_{\alpha k}, \overline{P}_{\beta 4}] = - \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial Q_\beta}\delta(r\overline{r}) + \sum_i \frac{\partial \overline{P}_{\alpha k}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta$$

$$= - \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial Q_\beta}\delta + \sum_i \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}\delta + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right)\delta$$

$\because [f(\overline{r}) - f(r)]\,\delta(r, \overline{r}) = 0$ カラ

$$f(r)\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}\delta = f(\overline{r})\frac{\partial \delta}{\partial \overline{x}_i} + \frac{\partial f(\overline{r})}{\partial \overline{x}_i}\delta$$

$$= -f(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\delta \;\cancel{= -f(\overline{r})\frac{\partial \delta}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\overline{r})}{\partial \overline{x}_i}\delta}$$

$$\cancel{f(r)\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = f(r)\frac{\partial \delta}{\partial \overline{x}_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}f(r)\cdot\delta}$$

$$= -f(r)\frac{\partial \delta}{\partial \overline{x}_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta$$

ガ成立セネバナラヌ。

(39)式ヲ検討スルタメニ、HハPノ räumliche Ableitung ヲフクンデヰナイト仮定スル。

先第一ノ式ハ $[Q_\alpha, \overline{\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_4}}]$ ガ函数δノ微分ヲフクンデヰナイカラ、右辺左辺ハ0トナツテ正シク成立スル。

第二ノ式ノ左辺ハ(II)ト(19)ニヨリ

$$\frac{2\pi}{hc}[P_{\alpha k}, \overline{Q_\rho}] = \frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial P_{\rho 4}}\delta(r\bar{r}) = -\frac{\partial^2 H}{\partial P_{\rho 4}\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}\delta(r\bar{r})$$

トナリ*、右辺ハ

$$\frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)[P_{\alpha 4}, \overline{\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_4}}] = \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)[P_{\alpha 4}, \overline{\frac{\partial H}{\partial P_\rho}}]$$

$$= (\bar{x}_k - x_k)\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial P_\rho}\delta + (\bar{x}_k - x_k)\sum_i \frac{\partial}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\frac{\partial H}{\partial P_\rho}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\delta.$$

$(\bar{x}_k - x_k)$ ナル因数ハδ函数ノ Ableitung ト compensate スルカラ、$\bar{x}_k - x_k$ ニツイテ偏微分スルトノコルノハ

$$-\frac{\partial}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}}\frac{\partial H}{\partial P_\rho}\cdot\delta \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}(\bar{x}_k - x_k)\delta - \delta.$$

丈トナル。之ハ左辺ト一致スル。

最後ノ式ノ左辺ハ (19) ニヨリ

$$\frac{2\pi}{hc}\left\{[P_{\alpha k}, \overline{P_{\rho 4}}] + [P_{\alpha 4}, \overline{P_{\rho k}}]\right\} = \left(-\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial Q_\rho} + \frac{\partial P_{\rho k}}{\partial Q_\alpha}\right)\delta$$

$$+ \sum_i\left(\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i}} + \frac{\partial P_{\rho k}}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\delta + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i}}\right)\delta(r\bar{r})^*$$

$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\rho\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_k}}\right)\delta - \sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i}\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 H}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_k}}\right)\frac{\partial\delta}{\partial \bar{x}_i}$$

$$- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}\partial\frac{\partial Q_\rho}{\partial x_i}}\right)\delta$$

* Rosenfeld: Zs. f. Phys. 63 S. 574

† $\dfrac{\partial\delta}{\partial x_i \partial \pi_j} = \dfrac{\partial\delta}{\partial \pi_i \partial x_j}$ トシ x_i, x_j ニツイテ by parts ヲヤレバ
ヨイ。

†† Kanonische Gleichungen 自身ガ Invariant ナルトハ ~~関係ナリ~~ 式 (41) ノ J_μ ガ Vierervektor デアルコトト equivalent デアル。

∵ ~~$Q'_\alpha = A_{\alpha\rho} Q_\rho$ ナル変換ヲスルモノナラバ~~

~~$\dot{Q}'_\alpha = A_{\alpha\rho} \frac{2\pi i}{h}[\bar{H}, Q_\rho] = \frac{2\pi i}{h}[\bar{H}, Q'_\alpha]$~~

~~又 $\dfrac{\partial F}{\partial x_k} = -\dfrac{2\pi i}{h}[G_k, F]$~~

$x^*_\mu = a_{\mu\nu} x'_\nu$; $Q^*_\alpha = A_{\alpha\rho} Q^*_\rho$ ナル変換ヲスルモノナラバ

$$\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial x'_\nu} = A_{\alpha\rho} a_{\mu\nu} \frac{\partial Q_\rho}{\partial x_\mu} = A_{\alpha\rho} a_{\mu\nu} [J_\mu, Q_\rho] \frac{2\pi}{hc} = [a_{\mu\nu} J_\mu, A_{\alpha\rho} Q_\rho] \frac{2\pi}{hc}$$

左辺ハ $\frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{P}_{\beta 4}}{\partial \bar{x}_4}\right]$

$$= \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\left[P_{\alpha 4}, -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{Q}_\beta}\right] + \frac{2\pi}{hc}(\bar{x}_k - x_k)\sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left[P_{\alpha 4}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial \frac{\partial \bar{Q}_\beta}{\partial \bar{x}_i}}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \, \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} \cdot \delta + (\bar{x}_k - x_k)\sum \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left[\overline{\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}}\,\delta + \sum_j \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}}\,\frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_j}\right]$$

$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \, \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\right)\delta - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right)\delta$$

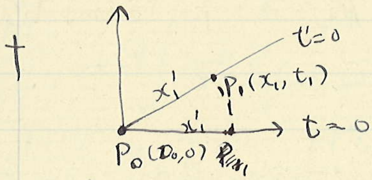
$$+ \sum_i \sum_j (\bar{x}_k - x_k) \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i \, \partial \bar{x}_j} \cdot \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}} +$$

$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Q_\beta \, \partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k}} - \frac{\partial^2 H}{\partial Q_\alpha \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}\right)\delta - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}\right)\delta$$

$$\overset{*}{\pm} \left(\overline{\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i}}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i} + \overline{\frac{\partial^2 H}{\partial \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} \, \partial \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_k}}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}_i}\right)$$

∴ 両辺ハ一致スル。

附記 任意ノ relativistisch invariante Lagrange-funktion ~~ニ対シ~~ L ヲ使ヒ之ニ依ツテ Hamilton 函数 H ニ就イテ云フ十分条件 (9) 式ノ満足サレル如キ場合ニ於テハ V.R. ハ relativistisch invariante トナル。#



$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-c^2t_1^2>0$$

ナラバ. Lorentz transformation $(x,t)\to(x',t')$

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-c^2t_1^2$$
$$= x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2 > 0 \qquad t_1'=0$$

~~ニヨリテ~~ ヲ行~~ナ~~フテ．P_0, P_1 ヲ同時刻ニスルコトガ出来ル。

$x_1^2+y_1^2+z_1^2-c^2t_1^2<0$ ナラバ 之ハ不可能

カクシテ V.-R. ノ形カラ、無限小ノ距離ニアッテ raumartiger Verbingungsrichtung ~~ヲモッテ~~ 即チ

$$\sum_i \Delta x_i^2 - c^2\Delta t^2 > 0$$

ヲモッテ存在スル世界点ニ対シ Klammersymbol ハ 0 トナル。(infinitesimaler Charakter der V.-R.)

又違ッタ方面カラ考察シテミルト、コノ事柄ハ Lichtkegel 上ノ点ニアル諸点、又ハ zeitartigerverbindungs-richtung ヲ ~~以テ~~ 持ッタ諸点ニ対シテハ一般ニ成立シナイコトガワカル。コノ場合 Klammersymbol ノ値ハ無限小ノ距離ノ点ニ対シテモ 0 ト異ナリ、特別ノ場合ニ限リ explizit ニ与ヘルコトガ出来ル。

コノ事ハ量子力学(Quantenmechanik)ニ於テ時刻 t ニオケル座標 q(t) ガ t' ニオケル座標ト交換出来ナイコトニ類似シテヰル。コノ方ノ Klammersymbol モ一般ニハ explizit ニ与ヘルコトガ出来ナイ。

式(21)ト(23)カラ

$$\left.\begin{aligned} J_k &= -icG_k = \int \sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_k} dV \\ J_4 &= \int \left(\sum_\alpha P_{\alpha 4} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} - L \right) dV = \overline{H} = E \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

ガ四次元 Vektor (Vierervektor) ノ Komponenten ヲ作ルコトガ示サレル。即チ Gesamtenergie ト Gesamtimpuls ヲ一緒ニシテ Vektor ヲ作ル。

† Lorentztransformation $x_\mu = a_{\mu\nu} x'_\nu$ ニヨッテ

$J_\mu = A_{\mu\nu} J'_\nu$ ナル変換ヲスルモノトスルト

$$\frac{\partial F}{\partial x'_\nu} = a_{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial x_\mu} = \frac{2\pi}{hc}[J'_\nu, F] = \frac{2\pi}{hc}A_{\mu\nu}[J_\nu, F]$$

$\therefore\ a_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$ （仮ニFハskalarトス）

†九月十三日朝

結局. (21)(23) ハ

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = \frac{2\pi}{hc}[J_\nu, F] \qquad (42)$$

トナルカラデアル。†

J_k ノ Vektorcharakter ハ後ニ直接ノ計算ニヨツテ確カメルデアラウ。††

* 二度出テクル Index ハイツモ sum up スル。ラテン字ハ 1→3，ギリシヤ字ハ 1→4 迄トル。尚 単位ハイツモ Heaviside 単位ニトル。

Kap II. Aufstellung der Grundgleichungen der Theorie für elektromagnetische Felder und Materiewellen.

§1. 電磁場ノ式及ビソノ難点.

先前章ノ V.-R. ノ Schema ヲ Vakuumelektrodynamik ニ應用シテ見ル。

コノ場合ノ物理的状態量ハ Viererpotential ノ Komponenten Φ_α [$\Phi_i = \mathfrak{A}_i$, $\Phi_4 = i\Phi_0$] デアッテ、之ヲ微分スルト

$$\left.\begin{aligned} F_{\alpha\rho} &= \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\rho} \\ F_{4k} = i\mathfrak{E}_k \quad (F_{23}, F_{31}, F_{12}) &= (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3) \quad F_{\alpha\rho} = -F_{\rho\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

トシテ Feldstärken ガ出来テ来ル。

ソコデ Vakuum ニ對スル Maxwell ノ方程式ハ

$$\frac{\partial F_{\alpha\rho}}{\partial x_\rho} = 0 \qquad (44)$$

デ之ハ変分ニヨリ

$$\delta \int L \, dV \, dt = 0$$

ナル Wirkungsprinzip カラ出テクル.

但シ $L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\rho} F_{\alpha\rho} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2)$ * (45)

前章ノ一般的要請ニ従ッテ Φ_α ニ kanonisch konjugierte Impuls トシテ

$$P_{\alpha 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_4}}$$

ヲツクルト

$$P_{k4} = -F_{4k} \quad (k = 1, 2, 3) \qquad P_{44} \equiv 0 \qquad (46)$$

トナル。カクノ如ク Φ_4 ニ konjugiert ナ Impuls ガ identisch

* 此等ノ点ハ後ニモット詳シク述ベル。

† 之ハ後ニノベル如ク (44′) ノ左辺ハ identisch ニ 0 トナル ノデハナク $\frac{\partial P_{k4}}{\partial x_k}$ ノ、トリウル値ノ一ツガ0デアリ ソノ場合ガ実際オコリ、他ノ値ヲトル場合トノ間ニ Über-gang ガオコリ得ナイトイフ形デ解釈~~出来ル~~スレバ 難点ハ除カレル。

=0 ニナルコトハ Elektrodynamik ノ Lagrange 函数ノ著シイ Ausartung ヲアラハシテ居ル。就中 P_{k4} ヲ一ツノ Weltschnitt $t=\mathrm{const}$ ニ於テ任意函数トシテアタヘルコトハ出来ナイ。∵ 其等ノ間ニ（ソノ schnitt ノ上ニ於テ）

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial P_{k4}}{\partial x_k} = -i \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \qquad (44')$$

ナル関係ガアルカラデアル。*

ソコデ吾等ノ Kanonischen V.-R. ハ (30) ヲ考慮スレバ

$$\left.\begin{array}{ll} [\Phi_\alpha, \Phi'_\beta] = 0 & [F_{4i}, F'_{4k}] = 0 \\ [F_{4k}, \Phi'_\alpha] = \delta_{k\alpha} \dfrac{-hc}{2\pi} \delta(rr') & \end{array}\right\} \qquad (47)$$

トナルガ、コレガ (44') ノ Nebenbedingung ナドト組合セテ両立シ得ルカヲ調ベテ見レバ直チニ矛盾ヲ来ス。

最後ノ式カラ

$$\left[\frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}, \Phi'_i\right] = -\frac{hc}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(rr')$$

トナリ、一方 (44') カラ之ハ 0 トナラネバナラヌ。

∴ (44'), (47) トハ一般ニ両立シナイ。†

従ッテ微分ニヨッテ Potentiale ヲ消去シテ得ラレル Feldstärken ニ対スル V.-R.

$$\left.\begin{array}{l} [F_{ik}, F'_{lm}] = 0, \quad [F_{4i}, F'_{4k}] = 0 \\ [F_{4k}, F'_{lm}] = -\dfrac{hc}{2\pi}\left(\delta_{kl} \dfrac{\partial \delta}{\partial x_m} - \delta_{km} \dfrac{\partial \delta}{\partial x_l}\right) \end{array}\right\} \qquad (47')$$

又ハ之ヲ三次元的ニカケバ、

$$[H_i, H'_k] = 0, \qquad [E_i, E'_k] = 0 \qquad (47'')$$

† 此ノ関係カラワカルノハ $\sum_k \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}$ ガ c-Zahl デアルトイフコトデアル。ソレガ特ニ 0 トスレバ (44') ト同ジニナル。

後ノ計算デ見レバワカル。

$$* \quad \int \sum_k F_{4k} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} dV = -\int \sum_k \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} \Phi_4 dV + \int F_{4k} \Phi_4 \cos(n, x_k) df$$

$$= 0 \qquad\qquad -\int \mathbf{E} \Phi_0 df$$

Vierstrom ノ存在スル時ニハ（一般ニ）$\sum \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} \neq 0$ デアルカラ (53')（58'）カラ

$$+\int \sum_k \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} \Phi_4 dV = -\int \operatorname{Div} \mathbf{E} \cdot \Phi_0 dV = \int e \psi_\alpha^* \psi_\alpha \Phi_0 dV$$

$$[\mathbb{E}_1, \mathbb{H}_2'] = -[\mathbb{E}_2, \mathbb{H}_1'] = \frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial \delta}{\partial x_3} \qquad (47'')$$

ハ brauchbar デアル。

何故ナラ (47′) ノ最後ノ式カラ、要求サレル ~~条件~~．従ッテ

$$\left[\sum_k \frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k}, F_{lm}'\right] = -\frac{hc}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_m \partial x_l}\right) = 0$$

トナルカラデアル†。

実際 (47′) ノ V.R. ガ Lichtquanten ノ概念ニヨッテ電磁場ノ Quantelung ヲヤッタモノト äquivalent デアルコトハ、第一編 §4 ノ終リノ Eigenschwingung ノ方法ヲ使ヘバワカル。‡ 然シ第一章デ扱ッタ様ナ一般的ナ V.R. ノ Schema ハ Elektrodynamik ニハ直グニハ使ヘヌトイフ事実ハ残ッテ居ル。

(45) ノ Lagrange 函数カラ Hamilton 函数ヲ作レバ、

$$\overline{H} = \int\left(\sum_\alpha P_{\alpha 4}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_4} - L\right) dv$$

$$= \int\left(-F_{4k}\cdot\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) dv$$

$$= \int\left(-F_{4k}F_{4k} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) dv \pm \int F_{4k}\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} dv$$

後ノ項ハ 0 トナルカラ*

$$\overline{H} = \sum_{i<k}\frac{1}{2}\int(F_{ik}F_{ik} - F_{4k}F_{4k})\, dv \qquad (48)$$

$$= \frac{1}{2}\int(\mathbb{H}^2 + \mathbb{E}^2)\, dv \qquad (48')$$

トナル。之ハヨク知ラレタ Feld ノ Energie ノ式デアル。

§2. 物質波ノ式.

Mehrkörperproblem ノ relativistische ニ取扱フニ際シテ、粒子ノ存在ヲ先ヅソレニ属スル物質波ヲ取入レルコトニヨリ計算ニ入レルノガ順デアル。デアルカラ古典論カラ量子論ニウツルニハ、二ツノ階段ヲヘネバナラヌ。先第一ニ古典的質点力学カラ(任意電磁場ニオケル)量子力学的多体ノ問題ノ Wellengleichung ニウツリ、カクシテ得ラレタ微分方程式ヲ古典的ナ Kontinuumstheorie ノ意味デ説明シ、次ニ Materiewellen カラ出テクル Viererstrom ヲ電磁場ヲ作ルモノト考ヘ而シテ物質波モ電磁波モ共ニ(通常ノ時空世界ニ於テ)量子化スルコトニヨッテ多体問題ニウツルコトガ出来ル。

コノ操作ハ ~~古典~~ 量子力学的多体問題ノ相対論的取扱ヒノ際ニ関聯シテ来ル根本的困難ヲ取除クコトハ矢張リ出来ナイ。又 [illegible] 考ヘラレタ Impuls ニ就テ Energie-Impulssatz ノ relativistische Form (für Teilchen) カラ Energie ノ両方ノ符号ヲモツモノガ出テクルトイフ難点モ矢張リ取除カレナイ。

後ニノベル Dirac ノ Proton 論ニ對スル巧妙ナ考ヘニモ矢張リ難点ガアルカラ、コノ問題ハ未ダ全ク解決サレテヰ

$$\psi_\sigma^\dagger \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\gamma^\mu_{\sigma\rho} + imc\,\psi_\rho^\dagger$$

ナイトイツテヨイ。

ソコデ Spin ヲ考慮シタ電子ニ對スル Dirac ノ理論ヲ基礎ニトルコトニスル。

四ツノ函数 ψ_ρ $(\rho=1,2,3,4)$ ト四行四列ノ(vierzeilige) Matrizen γ^μ $(\mu=1,\ldots 4)$ (Element ヲ $\gamma^\mu_{\rho\sigma}$ トスル) ヲ導入スル。但シ

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\delta_{\nu\mu} \tag{49}$$

ナル関係ガアルモノトスル。

スルト ψ_ρ ハ Feldgleichungen

$$\sum_\mu\sum_\sigma\gamma^\mu_{\rho\sigma}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\psi_\sigma-imc\,\psi_\rho=0 \tag{50}$$

同様ニ $\psi_\rho^\dagger$ ハ之ニ adjungiert ナ Gleichungen

$$\sum_\mu\sum_\sigma\gamma^\mu_{\sigma\rho}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\psi_\sigma^\dagger+imc\,\psi_\rho^\dagger=0 \tag{50'}$$

ヲ満足セネバナラヌ。但シ電子ノ電荷ハ $-e$ (e positiv) トシテオク。

コノ両方ノ式ハ変分原理

$$\delta\int L\,dv\,dt=0$$

ガ出テクル。但シ L ハ

$$L=-\sum_\mu\sum_\sigma\sum_\rho\left[\gamma^\mu_{\rho\sigma}\psi_\rho^\dagger\left(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}+e\Phi_\mu\right)\psi_\sigma-imc^2\psi_\rho^\dagger\psi_\rho\right] \tag{51}$$

トトリ $\psi^\dagger$ ト ψ トハ相互ニ独立ニ変分ヲ行フコトトスル。

之カラ(50)ガ出テクルコトハアキラカデアルガ、(50')ガ出テク

ヤモット ハッキリ イヘバ

$$\delta\int L\,dv\,dt = \sum_{\rho}\int \delta\psi_{\rho}^{\dagger}[(\ )]\,dv\,dt + \sum_{\sigma}\int [(\ )']\,\delta\psi_{\sigma}\,dv\,dt$$

$$+\sum(\ )\int \mathrm{Div}(\psi_{\rho}^{\dagger}\delta\psi_{\rho})\,dv\,dt$$

[illegible]

ルコトハ、L ガ

$$L' = +\sum_\mu\sum_\rho\sum_\sigma\left[\gamma^\mu_{\sigma\rho}\left(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial\psi_\sigma^\dagger}{\partial x_\mu} - e\Phi_\mu\psi_\sigma^\dagger\right)\psi_\rho + imc^2\psi_\rho^\dagger\psi_\rho\right] \quad (51')$$

トノ差

$$L - L' = -\sum_\mu\sum_\rho\sum_\sigma \frac{hc}{2\pi i}\gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\psi_\rho^\dagger\psi_\sigma) \quad (52)$$

ガ Divergenz デアルハスコトガ出来テ、$\int L\,dv\,dt$ ノ変分ニ何ノ影響モ及ボサナイトイフコトカラワカル。
コノ計算ニ於テ $\psi^\dagger$ ト ψ ヲ Vertauschbar ト仮定スル必要ハナク $\psi^\dagger$ ハ常ニ ψ ノ左ニ来テ居ルコトハ注意スベキ点デアル。

~~変分ヲ行ハヌ~~ nicht varierten Feldverlauf ニ於テハ
(50)(50') ニヨリ L モ L' モ 0 トナルカラ $L-L'=0$
トナル。従ツテ

$$s_\mu = (-e)\sum_{\rho,\sigma}\gamma^\mu_{\rho\sigma}\psi_\rho^\dagger\psi_\sigma \quad (53)$$

ヲ Stromvektor ($s_k = \frac{1}{c}i_k$, $s_4 = i\rho$) ト見ナスコトガ出来ル。$-e$ ガツクノハ電子ノ負ノ電荷ニヨル。
保存、

$$\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (54)$$

トナルカラ。
又 (51),(53) カラ

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} = s_\mu \quad (55)$$

トナル。

† (50)′ = $\gamma^4_{\rho r}$ ヲカケルト、 $\gamma^\mu_{\sigma\rho}\gamma^4_{\rho r} = 2\delta_{\mu 4} - \gamma^4_{\sigma\rho}\gamma^\mu_{\rho r}$ カラ

$$-\cancel{2\delta_{\mu 4}}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma^\mu_{\rho r}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)\psi^*_r + \gamma^4_{\rho r}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{e}{c}\Phi_4\right)\psi^*_r$$
$$+ imc\,\psi^*_\rho = 0$$

トナル。之ハ x_4, Φ_4 ガ pure imaginary ナルコトカラ当
(50)ノ complex conjugate ニナッテ居ルコトガワカル。

Dirac ノ式ガ出テクル上ノ変分原理ハ、L ガ $\dot{Q}_\alpha$ (即チ $\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_4}$) ニ関シテ linear デアルコトカラ直チニ Hamilton ノ形 (12) デアルトイフコトガワカル。

即チ
$$p_{\sigma 4} = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4}} = -\frac{hc}{2\pi i}\sum_\rho \gamma^4_{\rho\sigma}\psi_\rho^\dagger = -\frac{hc}{2\pi}\psi^*_\sigma$$

コヽデ最後ノ式ノ正シイコトハ (50)(50') ニヨッテ ψ_σ ニ konjugiert komplexe ナル函数 ψ^*_σ ハ
$$\psi^*_\sigma = \frac{1}{i}\sum_\rho \gamma^4_{\rho\sigma}\psi_\rho^\dagger \qquad (56)$$

トナルコトカラワカル。従ッテ γ^α ハ Hermitesche Matrizen トシテオク。

コレカラ
$$\frac{1}{(-e)}\frac{1}{i}s_4 = \sum_\rho \psi^*_\rho\psi_\rho \qquad (53')$$

ガ Teilchendichte トナル。

従ッテ Hamilton 函数ハ (56) ヨリ出ル
$$\psi_\rho^\dagger = i\gamma^4_{\sigma\rho}\psi^*_\sigma \qquad (56')$$

ヲ使ッテ、
$$\overline{H} = \int\Big[\Big(-\frac{hc}{2\pi}\Big)\psi^*_\sigma\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_4} + i\psi^*_\sigma\Big(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_4} + e\Phi_4\Big)\psi_\sigma + i\sum_{k=1}^{3}\gamma^4_{\tau\rho}\gamma^k_{\rho\sigma}\psi^*_\tau\Big(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} + e\Phi_k\Big)\psi_\sigma + mc\gamma^4_{\sigma\rho}\psi^*_\sigma\psi_\rho\Big]\, dV\ \cancel{dt}$$

$$= \int\Big[ei\Phi_4\psi^*_\sigma\psi_\sigma + i(\gamma^4\gamma^k)_{\tau\sigma}\psi^*_\tau\Big(\frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} + e\Phi_k\Big)\psi_\sigma + mc\gamma^4_{\sigma\rho}\psi^*_\sigma\psi_\rho\Big]\, dV\ \cancel{dt}$$

† α^k, β ノ間ニモ γ^μ ト同様ノ V.-R. ガ成立スル。

即チ　$\alpha^k\alpha^l+\alpha^l\alpha^k=2\delta_{kl}$　　$\beta^2=1$

$\alpha^k\beta+\beta\alpha^k=0.$

† α^k, β ノ間ニモ γ^μ ト同様ノ V.-R. ガ成立スル。

即チ $\alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = 2\delta_{kl}$ $\quad \beta^2 = 1$

$\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0.$

$$\therefore \overline{H} = \int \left[\psi^* \{ (e) \Phi_0 + \alpha^k \left(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} + e A_k \right) + mc^2 \beta \} \psi \right] dV \cdots (57)$$

トナル。

但シ $\alpha^k = i\gamma^4 \gamma^k \quad \beta = \gamma^4 \qquad \dagger$

$$(\psi^* \alpha^k \psi) = \sum_{\sigma\tau} \psi^*_\sigma \alpha^k_{\sigma\tau} \psi_\tau \qquad \text{etc}$$

ナリトス。

コノ場合ニオケル V.-R. (II) 及ビ (31) ハ

$$\left.\begin{aligned} [\psi_\rho, \psi'_\sigma] &= 0 \\ [\psi_\rho, \psi^{*\prime}_\sigma] = \frac{1}{i} \sum_\tau \gamma^4_{\tau\sigma} [\psi_\sigma, \psi^{\dagger\prime}_\tau] &= \delta_{\rho\sigma} \delta(\gamma\gamma') \\ [\psi^*_\rho, \psi^{*\prime}_\sigma] = [\psi^\dagger_\rho, \psi^{\dagger\prime}_\sigma] &= 0 \end{aligned}\right\} (58)$$

ナル簡単ナ形ヲトル。

$\psi_\sigma, \psi^\dagger_\sigma$ 等ノ量ガ Lorenztransformation ニヨッテ変換サレル法則ナ一々述ベル必要ハナイ。実際ソレガ第五節（第一章）ノ一般的法則ト一致シ従ッテ V.-R. (58) ノ relativistische Invarianz モ又成立スルコトヲ注意スレバヨイ。

扨シ (58) ノ V.-R. ハ二ツノ全ク gleichberechtigt ナ可能性ノ内ノ一ツニ過ギナイ。而シテ Konfigurationsraum ニオケル通常ノ q.m. Gleichungen ノ symmetrischen Lösungen 即チ Einstein-Bose-Statistik ニ對応シタモノデアル。

今一ツノ場合ハantisymmetrischen Lösungen 即チ Fermi-Dirac-Statistik ニ對應シ、(58)ノKlammersymbol ノ中ノ −-Zeichen ヲ +-Zeichen デ置キ換ヘルコトニヨッテ得ラレル。

即チ　$[F,G]_+ = FG+GF$

トオケバ V.R.ハ

$$\left.\begin{aligned}[\psi_\rho,\psi_\sigma^{*\prime}]_+ &= \frac{1}{i}\sum_\tau \gamma^4_{\tau\sigma}[\psi_\rho,\psi_\tau^{\dagger\prime}]_+ = \delta_{\rho\sigma}\delta(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')\\ [\psi_\rho,\psi'_\sigma]_+ &= [\psi^*_\rho,\psi^{*\prime}_\sigma]_+ = [\psi^\dagger_\rho,\psi^{\dagger\prime}_\sigma]_+ = 0\end{aligned}\right\}(58')$$

コノ方ノ場合ヲ考察スル為メニハ(19)(20)ナル一般ノ式ガ$[\ \ ]_-$ノカハリニ$[\ \ ]_+$ヲトルコトニヨリドウ変ルカヲ見ネバナラヌ。

Fガ$\psi,\psi^\dagger$(又ハ其ノAbleitungen)ニツイテlinearデアル場合ニハ(19)(20)ノ左辺ニ$[\ \ ]_+$ヲトレバヨイ。ソシテ又前章§5ノrelativistische Invarianzノ証明ニ這入ッテヰル全テノKlammersymbolニ對シテモ$[\ \ ]_+$トトッテヨイ。従ッテrelativistische Invarianzハ証明サレタト見テヨイ。

コレニ反シテ(19)ヲ証明スル際、F_1トF_2カラF_1F_2ニウツル場合ニハ注意セネバナラヌ。何故ナラ、−-Zeichen ヲモッタKlammersymbolニ對シテハ

$$[F_1F_2,Q_\alpha]_- = F_1(F_2Q_\alpha+Q_\alpha F_2) - (F_1Q_\alpha+Q_\alpha F_1)F_2$$

$$[P_\alpha,F_1F_2]_- = (P_\alpha F_1+F_1P_\alpha)F_2 - F_1(P_\alpha F_2+F_2P_\alpha)$$

† $[P_\alpha F_1]_-$, $[P_\alpha F_2]_-$ カラハ

$$[P_\alpha, F_1 F_2]_- = [P_\alpha, F_1]_- F_2 + F_1 [P_\alpha, F_2]_-$$

$$\cancel{[P_\alpha, F_1 F_2]_+ = [P_\alpha, F_1]_- F_2 - F_1 [P_\alpha, F_2]_-}$$

~~ノ両者~~ガ成立スル。

* 例ヘバ $\cancel{P_\alpha Q_\alpha' \cdot Q_\beta' - Q_\beta'} F = P_\alpha Q_\rho$ ニ於テ(19)ノ上式ノ左辺ハ

? $$[P_\alpha Q_\rho, Q_\gamma']_- = P_\alpha Q_\rho Q_\gamma' - Q_\gamma' \cancel{Q_\rho} P_\alpha Q_\rho$$

$$= -(P_\alpha Q_\gamma' + Q_\gamma' P_\alpha) Q_\rho = -\frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\gamma}\delta(\gamma\gamma')Q_\rho$$

右辺ハ $\frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\gamma} Q_\rho \delta(\gamma\gamma')$

‡ Diracノ Proton ニ関スル理論カラスレバ、後ニノベル如ク、Electron*ノ他ニ Proton 的ノ中間粒子ヲ考ヘル必要ハナイガ、コレニモ色々ノ難点ガアルカラ直チニ採用ハ出来ナイ。

ガ成立シ、之ニ反シテ $[F_1F_2, Q_\alpha]_+$ 及ビ $[P_\alpha, F_1F_2]_+$ ハ F_1, F_2 ノ對應スル Symbol ニ分解スルコトハ出來ナイカラデアル†

ソレデ、F ガ $\psi^\dagger, \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_i}, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ ノ Bilinearform デ $\psi^\dagger$ ガ常ニ ψ ノ左側ニアル場合ハ、~~ソノFニ對シテ~~ Klammersymbol ヲ −−Zeichen ノ方ニトッタナラバ*ソノ F ニ對シテ (19) 又ハ (20) ガ成立スル。

註ノ Quantelung ト多體問題ノ relativistisch invariante ナ取扱ヒトイフ立場カラ見テモ兩種ノ解即チ Einstein-Bose-Statistik ト Ausschließungsprinzip (Äquivalenzverbot) トハ形式的ニハ全ク同等デアリ、第二ノ解ガ自然ニヨッテ採擇サレタコトノ充分ナ説明ヲ與ヘルコトハ出來ナイ。

Elektron ニ對スルト同樣 Proton ニ對シテモ特別ノ ψ−函數ヲ取入レネバナラヌ。ソレハ Elektron ノ ψ−函數ニ對シ vertauschbar デナケレバナラヌ。此ノ場合ノ方程式モ Elektron ノ場合ト $-e$ ヲ $+e$, m ヲ M ニオキカヘタ丈ノ違ヒシカナイカラ詳説ノ必要ハナイ。#

最後ニ Materiewellen ト elektromagnetische Feld ノ Wechselwirkung * ハ、Lagrange 函數ト

シテ (45) デ与ヘラレル Strahlungsteil $L^{(s)}$ ト (51) デ与ヘラレル Materieteil $L^{(m)}$ ノ和ヲトレバ、変分原理

$$\left.\begin{aligned}\delta\int L\,dV\,dt &= 0\\ L &= L^{(s)} + L^{(m)}\end{aligned}\right\}\qquad(59)$$

カラ出テクル。

即チ
$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = s_\alpha \qquad (60)$$

但シ s_α ハ (53) ノ式ヲトレバヨイ。

コレハ物理的ニハ、Stromvektor ガ äußere Feld ノ Materie ヘノ Wirkung ニ対シ maßgebend デアルノミナラズ、又逆ニ felderzeugend ~~デアル~~ (ニ作用ス) コトヲアラハシテ居ル。

而シコノ場合ニハ

$$\mathrm{div}\,E = \frac{1}{i}s_4 = \rho = (-e)\sum_\sigma \psi_\sigma^*\psi_\sigma \qquad (60')$$

ト矛盾シナイ様 V.-R. ヲ作ラネバナラヌトイフ難点ガ新タニ生ジテクル。

何故カトイフト (58) 又ハ (58') ノドチラカラシテモ

$$[\mathrm{div}\,E, \psi_\sigma^{*\prime}] = (-e)\,\delta(x x')\,\psi_\sigma^* \qquad (61)$$

ガ出テ来テ (x_i) ニツイテ、有限ノ (x_i') ヲフクム任意ノ体積ニワタッテ積分スルト

$$\left[\int E_n\,df, \psi_\sigma^{*\prime}\right] = (-e)\,\psi_\sigma^{*\prime} \qquad (62)$$

之ハ有限ノ距離ヲ隔テル二点 $(x_i)(x_i')$ ニ於テ電場ノ強サ E ト Materiefeld ψ トガ nicht vertauschbar デアリ得ルコトヲアラハシテ居ル。

†† 九月十五日稿

† 31頁注*参照

*

コノ辺デハ電子ノ系全体ヲ見ルト系全体ヲ0トスルト

klassisch ニハ Fläche ヲ球面ニトルト之ガ非常ニ大キク ~~なる~~

$\mathbf{E}_{periodisch} \perp df$. $\therefore$ $\mathbf{E}_{per.} df = 0$.

$\mathbf{E}_{statisch} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ $\quad \Phi_{0\,statisch} = O\left(\frac{1}{r}\right)$

$\therefore \int \mathbf{E}\,\Phi_0\,df = 0$ ガ一般ニ成立スル。

カヽル nicht infinitesimal ナ V.-R. ヲ含ンダ理論ヲ要徹スルコトハ ~~実用的~~ 実際上絶望デアリ、殊ニ V.-R. ノ relat. Invarianz ヲ証明スルガ非常ニ困難トナル。‡

Materiefeld ト Elektromagnetisches Feld ヲ一緒ニシタ全体ノ Feld ニ対スル Hamiltonian $\overline{H}$ ヲ作ッテ見ルト、
(48') 及ビ (57) カラ† Φ_0 ヲフクンダ項ハ消エテ

$$\overline{H} = \overline{H}^{(m)} + \overline{H}^{(S)}$$

$$= \int \Big[\psi^* \Big\{ \alpha^k \Big(\frac{hc}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} + eA_k \Big) + mc^2 \beta \Big\} \psi + \frac{1}{2} (\mathbb{H}^2 + \mathbb{E}^2) \Big] dV.$$

トナル。即チ $\int \Phi_0 \rho \, dV$ ナル elektrostatische Energie ノ項ガ消エテ了フ。但シ之ハ Flächenintegral

$$\int \mathbb{E} \Phi_0 \, df = \int (\mathbb{E}\,\mathrm{grad}\,\Phi_0 + \rho \Phi_0) dV$$

ガ Fläche ヲ大キクスレバ 0 ニ近ヅク場合ヲ假定シテアル。*

一人で居る時には多少の注意が働くが、~~お客が来たり~~
~~家族~~人など多少の

それから ~~緑に~~ ~~外出すると気が転倒する~~ 他の人と接觸すると
気の転倒する~~方~~ことが多い。それで ~~外出する時は~~
~~失敗せぬ為に~~ 外であはて、失敗してはならんと
思ふので、外出する~~時~~ ~~場合~~には時間に余裕をつけて
紙幣はあすこのポケット はんけちはあすこのポケット
~~忘れ物のな~~ あ~~れは~~ ~~あの~~ポケット ~~これは~~ ~~その~~ポケット
と頭ではつきりと意識しながら、大切なものを ~~お金を~~ それぐ
のポケットに入れ~~なければ~~た丈でなく出がけに
も一応 ~~そこらを指~~ 洋服の上から指で、さはらねば
気がすまぬ~~ま~~方である。それで今迄は忘れ物、落し物
といふ類の失敗は殆んどしたことがなかつた。

出

洋服の時には折畳み型の　　　　　　　蟇口から
いつもなら、~~もう一つの方の~~財布へ 大切なものを入れ
かへて、ポケットへ入れてボタンをかけねば気がすまんの
であるが、今日は ~~そうでない方の財布を~~ 蟇口たんのまゝ
もつてゐようと思~~ふ~~ ~~入れ~~ふのはずーつと前だと
その時自分でも思つた。どうも頭がぼーつとしてる。

~~落し物~~ 忘れ物。落し物
~~靴と鞄~~ 財布を~~落す~~

僕は特に頭のぼーっとする人間である。まあいへば何時でも頭がも一つはつきりしない方であるが、一寸したつまらんことを苦にし病みだすと、何時までもくよくよと考へて、その間は人のいふことなどよくわからず馬鹿みたいになつてゐる。

ある夏の朝、私は~~出かけに~~少し遠方まで行~~く時~~かねばならぬので二階で洋服に着替へながら、今日は少し頭がぼんやりしてゐるから、なる丈失敗せぬ様に注意しよう。と~~思つて~~さうすると ゐた。財布は下に~~ある~~おいてあつたから出がけにポケットに入れんならんと思つてゐた。

靴を~~はいて~~ 靴をはいた時、妻が~~バ~~バスの回数券は持つてるかと聞いたので気がつくと財布をまだ入れてない。あゝよかつたと思つて、財布が棚の所にあるから、とつて来てくれと言~~ふ~~つた。妻は財布を渡しながら、お金は大丈夫ですかと聞いた。私の金は相当~~入つてゐる~~ある筈だし、バスの回数券も持つてる筈だから、うん大丈夫と答へた。~~靴の~~まだ結ばぬ方の靴の紐のさきが~~水溜り~~玄関のたゝきの中に入つてゐるのを妻が上から手を伸して直してくれた。妻も今日もの僕を変だと思つたらしい。僕自身も今日は着々妙だと思ひました。

バスに腰かけるとズボンの~~ポ~~のポケットに入れた~~財布~~財布が すべり落ち~~さ~~さうな気がした~~様~~ので回数券を出した

あと、~~やっぱり~~同じポケットの出来るだけ奥の方へおしこんだ
がやはり何だかすべり落ちそうであった。~~それで~~
~~他のポ~~いつもの上衣のポケットに入れか~~へないのは~~へなければならない
僕ながらそれでもその時~~危っ気だと~~思った。
危っ気
危っ気だと

乗客は僕の他に二人きりで、~~運転手と車掌は~~三四人
がほぼ所を往復しているのであるから運転手と車
掌は~~いつ~~も互に知る顔であった。名札を見ると
古田、山田行くかと書いてある。二人の乗客はやがてお
りた。運転手は~~何かまま~~絶えずくしながら川沿いの松原を
走って行く。僕は宇川という停留場でおりた~~おりると~~、いつも
なら海水浴場行きの子供達が先を争ってのりこむ
所~~であるで~~だが今日は朝~~から~~細い雨がふ
ったので、僕の~~あとには~~おりた後は、誰ものる人はな
く、運転手はそのまゝで海岸の方に向って走って
行った。これから電車にのりかへねばならぬので歩き
ながら~~財布~~ズボンのポケットに手を入れてみると
~~財~~鍵がない。知らぬ間に他のポケットへいれ
かへたのかと、そこいらをさがしたがどこにもない。
バスの~~中~~ゆれる拍子にポケットから滑り落ちたも
のに相違ない。しかしこの時僕は何だか予期して
ゐたことが起った様な気がした。それ程[illegible]の
[illegible]成じなかったのは、[illegible]がほんやりしてゐた

のであらう。しかしこれでは電車には乗れぬ、家へ引きかへせばまたおくれる。のみならず家へ帰つて財布をおとした~~こと~~といふのは[illegible]僕の恥をあらはすやうで恥しい。あの電車は海岸へ行つて帰つてくるまで他人の時間でもないから待つて居るのは訳ではないが、中途で人が来つたりするとお気のおそれがある。どうも困つたものだと思ひながら、急に角子川の停留場までひきかへして行けば一人や二人位運転手か車掌が遊んでゐる電車の溜所をのぞいて見ると生憎誰もいない。暫く待つてみると~~外から~~そこへアッパッパを着たお上さんが一人の子をだき一人の子をあるかして入つてきて二人の子を畳の上へ上げて、僕は側へ腰をかけた。どうも~~二一あれ~~2の溜所にいつもゐる人らしいので ここの方ですかとたづねるとさうですといふので 僕が海岸の方へいつた電車の中に財布を忘れたがどうしたらよいか電話でもないかときいてみると、これはないが近くの
発 停留所にあるから、そこから海岸の方へかけたらよい 番号は一二一だといふ。其来ねが下りで事もあまり近くない僕にはこれはちと難儀だと思つたが仕方ない。

我が妻を何にたとへん
春秋に花はさまざまにほへども
清きをなぎし

鶴 桜 萩 摘みし所 香 難し

鶴 櫻 萩 高臺寺 最も 難し

高臺寺

生産

歴史小説ヲ作ル心得。~~[illegible]~~

鳥瞰的デハ駄目。内ニ入ッテ自分ノ中ニ溶レル。
主観的描写デナケレバナラヌ。客観描写デハ駄目。
思索ガ第一。創造ノ世界ハ一朝ニハ出来上ラヌ。
深ク入ルト ~~[illegible]~~ 時代ノ人物ノ中ニ親シミテ成ル様ニナル迄行カネバナラヌ。
場面ニ就テ自分ヲ出スニシテモ、自分ガ場面ヲ見テヰル様デナケレバナラヌ。人間ニ最モ直接的ナモノハ人間ニシテハ自然ハ常ニ流動的、情意的ノモノニ過ギナイ。ソレガ作中ノ常人物ノ様ナッテ見ヘル。

若柴園京物語

避暑地風景

枕を取って ~~[illegible]~~ 机の前に坐る。　八月廿七日

秋立つや 梢に~~掛る~~かゝるちぎれ雲。　〃

ちゞみ~~行~~くつまる入道雲に秋の風。　〃

~~木がくれに 物干す 薇園はす家の近所と。~~

近所の 薇園はす家や、閉ぢし家。　〃

かつて火の焔は足の下に消えて　〃

残り少き夏休みかな。

南画派

写生画、清は

てら好派子

純粋創造

といらねど

ら写生派子

「

写生