pp. 12-13 ②

プラズマ研究会. Nov. 14, 1957

木原

準定常中性プラズマ

一般　変位電流と電子集団の運動の慣性項とが無視できる。

電磁場: $\mathrm{rot}\,\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$　(1)　(2)

$\mathrm{rot}\,\mathbb{H} + \ = \mathbb{J}$, $\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 0$　(3)　(4)

$\mathbb{D} = \epsilon \mathbb{E}$, $\mathbb{H} = \mu^{-1}\mathbb{B}$　(ϵ, μは一定する)

mass density

流体連続: $\mathrm{div}(\rho \mathbb{V}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (ρ=密度, $\mathbb{V}$=平均流)　(5)

流体運動: $\rho\left[\dfrac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + (\mathbb{V}\cdot \mathrm{grad})\mathbb{V}\right] = \mathbb{J}\times\mathbb{B} - \mathrm{grad}\,P$　(6)

電子集団の運動: $ne(\mathbb{E} + \mathbb{V}\times\mathbb{B} - \sigma^{-1}\mathbb{J}) - \mathbb{J}\times\mathbb{B} + \mathrm{grad}\,P_e = 0$　(7)

(e = electron charge, n = 電子の粒子密度,
σ = 電氣伝導度, P_e = 電子の分圧)

grad n と grad P_e とが同じ方向の場合のみ考える。

$$\mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{grad}\,P_e}{en} = \mathrm{grad}\,\frac{1}{en} \times \mathrm{grad}\,P_e = 0$$

従って(7)より

$$\mathrm{rot}\left\{\mathbb{E} + \mathbb{V}\times\mathbb{B} - \sigma^{-1}\mathbb{J} - (en)^{-1}\mathbb{J}\times\mathbb{B}\right\} = 0$$

これと電磁場の方程式から

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbb{V}\times\mathbb{B}) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\mathbb{B} - \mathrm{rot}\left[\frac{1}{en}\mathbb{J}\times\mathbb{B}\right] \qquad (8)$$

軸対称その一

$0 \leq r < R$

	r	θ	z成分
$\mathbb{B}$	0	0	$B(r,t)$
$\mathbb{J}$	0	$J(r,t)$	0
$\mathbb{V}$	$v(r,t)$	0	0

(8) は　$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rvB) + \frac{1}{\mu\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right) \qquad (8a)$$

(5) は　$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5a)$$

(6) は　$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{B^2}{2\mu}\right) = 0 \qquad (6a)$$

一つの模型　$t \geq 0$ で

	σ	ρ	B	P
$0 \leq r < r_1(t)$	∞	$\rho(t)$	$B_1(r/r_1)^n$	$P(r,t)$
$r_1(t) < r < R$	0	0	$B_1(t)$	0

ただし $P(r_1, t) = 0$, $n > 1$

なる條件を満す解がある。(5a)より

$$v = -\frac{r}{2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{-1}{2}r\beta(t) \text{ とおく}$$

そうすれば　$$\rho(t) = \rho(0)\exp\int_0^t \beta\,dt \qquad (9)$$

境界條件　$$v_{r=r_1} = \frac{dr_1}{dt} \qquad \therefore -\frac{r_1}{2}\beta = \frac{dr_1}{dt}$$

$$\therefore r_1^2 = r_1^2(0)\exp\left[-\int_0^t \beta\,dt\right] \qquad (10)$$

$v = \dfrac{-1}{2}r\beta$, $B = B_1(r/r_1)^n$ を (8a) に入れ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B}{r_1{}^n}\right) = \left(\frac{n}{2}+1\right)\beta\frac{B_1}{r_1^n}, \quad \frac{B_1}{r_1^n} = \frac{B_1(0)}{r_1^n(0)}\exp\left[\frac{n+2}{2}\int_0^t \beta\,dt\right]$$

$$\therefore B_1 = B_1(0)\exp\int_0^t \beta\,dt \qquad (11)$$

(9), (10), (11) より

$$\boxed{\rho r_1^2 = \mathrm{const.}} \quad \boxed{B_1 r_1^2 = \mathrm{const}} \quad \boxed{\frac{\rho}{B_1} = \mathrm{const.}} \qquad (12)$$

を得る. "The magnetic flux is frozen in the fluid" (Alfvén)

圧力 P は (6a) より

$$P = \frac{B_1^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu} + \frac{1}{4}\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{d\beta}{dt}\right)(r_1^2 - r^2)$$

β^2, $d\beta/dt$ が小さいとき

$$P = \frac{B_1^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B_1^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2n}\right]$$

P は r/r_0 一定の所で ρ^2 に比例し, これは2次元的断熱変化の條件と相容れる P/ρ は温度 T に比例するから中心部 ($r=0$) での温度を $T(0,t)$ とおき

$$\frac{T(0,t)}{B_1(t)} = \mathrm{const.} \qquad (13)$$