©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

N151 158

155

プラズマ統計

木原太郎

1 DEBYE-HÜCKEL の極限

体積 V のプラズマ中に

電荷 $e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_s$

をもった各種荷電粒子が

個数 $N_1, \cdots, N_i, \cdots, N_s$

存在し，全体として中性であるとする；

$$\sum N_i z_i = 0 . \tag{1.1}$$

なお，単位体積中の粒子数を

$$n_i \equiv N_i / V \quad (i = 1, \cdots, s) \tag{1.2}$$

とおく。

1個の荷電粒子に着目し，そのまわりの電位 ψ を POISSON 方程式

$$\nabla^2 \psi = -4\pi\rho$$

に従って定める。第 i 種の荷電粒子の密度は BOLTZMANN の原理によって $n_i(e_i\psi/kT)$ で与えられるから，電荷密度 ρ は

$$\rho = \sum n_i e_i \exp(-e_i\psi/kT) ,$$

基礎方程式は

$$\nabla^2 \psi = -4\pi \sum n_i e_i \exp(-e_i\psi/kT) \tag{1.3}$$

となる。指数函数を展開2項で近似すれば，この方程式は線型化する；

$$\nabla^2 \psi = \kappa^2 \psi , \qquad \kappa^2 \equiv \frac{4\pi}{kT} \sum n_i e_i^2 . \tag{1.4}$$

初めに着目した1個の粒子の電荷が $z_i e$ であれば，そのまわりの電荷は (1.4) の解

$$\psi = \frac{e_i}{r} \exp(-\kappa r) \tag{1.5}$$

で与えられる。κ^{-1} は DEBYE shielding length と呼ばれる。

この粒子からの距離 r の小さいところでは，DEBYE ポテンシャル (1.5) は

$$\psi = e_i/r - e_i$$

となり，$-e_i\kappa$ がこの粒子以外の電荷による電位を表わす。この電位にその中心粒子の電荷 e_i を乗じた量をすべての構成粒子について加え合せ，2で除したものが $-\frac{1}{2}\sum N_i e_i^2 \kappa$ がプラズマのポテンシャル・エネルギーに外ならない。従ってプラズマの内部エネルギー E は

$$E = \frac{3}{2} kT \sum N_i - \frac{1}{2} N_i e_i^2 \kappa , \tag{1.6}$$

あるいは

$$E = NkT\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) , \tag{1.7}$$

ここに

$$N \equiv \sum N_i , \quad \alpha \equiv \frac{V\kappa^3}{4\pi N} \tag{1.8}$$

(1.3) と (1.4) でおきかえる近似は，α が小さく α より一層小さい量を無視することと対等である；すなはち理想氣体からのはずれが小さいことと対象である。〔P. DEBYE, E. HÜCKEL: Phys. Z. 24 (1923) 185〕

各種粒子数 N_i が一定のとき，自由エネルギー $F \equiv E - TS$ について，

$$dF = -SdT - PdV$$

(S: エントロピー，P: 圧力) あるいは

$$d(F/T) = E\,d(1/T) - PdV ;$$

従って自由エネルギーの静電部分として

$$-\frac{1}{2} NkT \int T\alpha \, d\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{-1}{3} NkT\alpha \tag{1.9}$$

を得る。ここに α が $T^{-3/2}$ に比例することを用いた。さらに $P = -\partial F/\partial V$ により，圧力は

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)

N151 158

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$P = \frac{NkT}{V}\left(1 - \frac{\alpha}{6}\right) \tag{1.10}$$

と定まる。ここに α が $V^{-\frac{1}{2}}$ に比例することを用いた。
熱函数は

$$H \equiv E + PV = NkT\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\alpha\right), \tag{1.11}$$

定積熱容量は

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = Nk\left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{4}\right). \tag{1.12}$$

定圧熱容量は

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

$$= Nk\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\alpha\right), \tag{1.13}$$

ここに α^2 を1に対して無視した。さらに

$$C_P - C_V = Nk\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right);\quad C_P/C_V = \frac{5}{3} + \frac{\alpha}{6} \tag{1.14}$$

これらの関係式の物理的な意味は明かであろう。
　つぎに2個の粒子 (e_1, e_2) に着目し、それらを距離 r におくとき、ポテンシャル・エネルギーが r にどう依存するかを調べておく。附近の電位 ψ はやはり (1.4) を満すから、e_1 からの距離 r_1、e_2 からの距離 r_2 での電位は

$$\psi = \frac{e_1}{r_1}\exp(-\kappa r_1) + \frac{e_2}{r_2}\exp(-\kappa r_2).$$

e_1 での電位 $(e_1/r_1) - e_1\kappa + (e_2/r)\exp(-\kappa r)$ に $Z_1 e$ を乗じ、e_2 での電位に e_2 を乗じ、加えて2で除し、r に依る部分を取り出せば

$$(e_1 e_2/r)\exp(-\kappa r) \tag{1.15}$$

を得る。(1.5) と同様、この断熱ポテンシャルにもシールトの

影響は因子 $\exp(-\kappa r)$ として現われる。

2. 多電子問題と2体間の有効ポテンシアル

　MAYER は、氣体の自由エネルギーが理想氣体のそれから相違する高さ

$$F - F_{ideal} = NkT\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\beta_\nu}{\nu+1}v^{-\nu},\quad v \equiv V/N \tag{2.1}$$

の形に展開するとき、β_ν 分子間ポテンシャルを含んだ"既約 cluster 積分"で表わされることを示した。特に、2分子間の相互作用は問題になるが3分子が同時に相互作用を及ぼすことが無視できる場合には、右辺の級数は第一項だけで近似できる。以下同様、第 i 種分子のモル分率を N_i/N とし、ij 分子間のポテンシャル $U_{ij}(r)$ が分子間の距離 r のみの函数であるとき、たとえば

$$\beta_1 = 4\pi\sum\frac{N_i}{N}\frac{N_j}{N}\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{U_{ij}(r)}{kT}\right) - 1\right]r^2 dr \tag{2.2}$$

で与えられる。積分は、$U(r)$ が r の大きい極限で r^{-3} より急に小さくなった場合に、有限の値に定まる。
　プラズマの場合には $U(r)$ が r^{-1} に比例するから (2.2) の表式はそのままでは使えない。この場合に MAYER は (2.1) が全体として、$\alpha \ll 1$ のとき、(1.9) に一致することを示した。[J. E. MAYER : J. Chem. Phys. 18 (1950) 1426] プラズマの統計熱力学は、本質的な多体問題できれいに解けた一例である。
　こころみに

$$U_{ij}(r) = \frac{e_i e_j}{r}\exp(-\kappa' r) \tag{2.3}$$

と仮定して (2.2) に代入し、DEBYE-HÜCKEL の極限をとり、(1.1) を考慮すれば

$$\beta_1 = 4\pi\sum\frac{N_i}{N}\frac{N_j}{N}\int_0^\infty\frac{1}{2}\left(\frac{e_i e_j}{r}\right)^2\exp(-2\kappa' r)\,r^2 dr$$

あるいは

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
N151 158

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

$$\beta_1 v^{-1} = \frac{v\kappa^4}{16\pi}\frac{1}{\kappa'}$$

を得る。従って $\kappa' = 3\kappa/8$ に選べは (2.1) で右辺オ1項がちようど (1.9) の右辺に一致する。こうして，2粒子間の有効ポテンシャルとして，シールドの影響を取り入れた (2.3) を採用することにより，3個及びそれ以上の個数の粒子が同時に及ぼす相互作用を "消去" することができる。

プラズマ内の輸送現象も本質的な多体問題であるが，これを正確に取り扱うことは困難であろう。従って上記のような "消去法" を用いよう。すなわち，粒子間の有効ポテンシャルとして

$$U_{ij}(r) = \frac{e_i e_j}{r}\exp(-\kappa_{ij} r) \qquad (2.4)$$

を仮定することにより，3個およびそれ以上の個数の粒子が同時に及ぼす相互作用を消去する。そうすれば Boltzmann の方程式にもとづく取扱いが可能となる。

3 輸送現象のための衝突断面積

Boltzmann 方程式を解く Enskog–Chapman–Cowling の方法では衝突断面積

$$\phi^{(\ell)} = \int_0^\infty (1-\cos^\ell\theta)\, g b\, db, \quad (\ell = 1 \text{ および } 2) \qquad (3.1)$$

がまず必要である。ここに θ は，相対速度の大きさ g，衝突パラメタ b で近づく2粒子の相対運動軌道が曲る角を表わす。2粒子間の有効ポテンシャルが (2.4) であるとき，$\cos\theta$ は

$$x \equiv \kappa_{ij} b \text{ と } y = m_{ij} g^2/2|e_i e_j|\kappa_{ij} \quad (m_{ij} \text{ は reduced mass}) \qquad (3.2)$$

との函数である。さらに $\phi^{(\ell)}$ の統計的平均

$$\Omega^{(\ell)}(r) = \sqrt{\pi}\int_0^\infty \phi^{(\ell)} V^{2r+2}\exp(-V^2)\,dV, \quad (r = \ell, \ell+1, \cdots) \qquad (3.3)$$

$$V \equiv (m_{ij}/2kT)^{\frac{1}{2}} g$$

が必要である。

$$V^2 = \zeta y, \quad \zeta \equiv |e_i e_j|\kappa_{ij}/kT \qquad (3.4)$$

とおけば

$$\Omega^{(\ell)}(r) = \left(\frac{2\pi kT}{m_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e_i e_j}{2kT}\right)^2 F_r^\ell(\zeta), \qquad (3.5)$$

$$F_r^\ell(\zeta) = 2\zeta^r\int_0^\infty\left[\int_0^\infty(1-\cos^\ell\theta)\,x\,dx\right] y^{r+1}\exp(-\zeta y)\,dy. \qquad (3.6)$$

Debye–Hückel の極限を問題とする限り，$\zeta \ll 1$ での $F_r^\ell(\zeta)$ の漸近形が求まればよい。そのとき (3.6) の積分は $y \gg 1$ なる範囲のみできまる。従ってまず $\int_0^\infty(1-\cos^\ell\theta)\,x\,dx$ の $y \gg 1$ での漸近形を求める。

2粒子が十分大きい速度で近づくとき，$\theta \ll 1$ でない場合はシールドの影響が無視できて

$$\tan\frac{\theta}{2} = e_i e_j / m_{ij} g^2 b.$$

$\theta \ll 1$ の場合は

$$\tan\theta\,\frac{\theta}{2} = \frac{-1}{g}\int_b^\infty \frac{b}{r}\frac{1}{m_{ij}}\frac{dU_{ij}}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} dr$$

ここに t は時間で $dr/dt = g\sqrt{r^2-b^2}/r$，従って

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{e_i e_j}{m_{ij} g^2}\, b\int_0^\infty \frac{d}{dr}\left(\frac{\exp(-\kappa_{ij} r)}{r}\right)\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

$$= \frac{e_i e_j}{m_{ij} g^2 b} f(x), \qquad x \equiv \kappa_{ij} b$$

$$f(x) = -\int_1^\infty \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\exp(-x\rho)}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-1}}.$$

函数 f は $f(0) \equiv 1$ 単調減少して $f(\infty) = 0$．結局すべての θ について

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{e_i e_j}{m_{ij} g^2 b} f(x) = \frac{f(x)}{2xy} \qquad \text{ただし } y \gg 1 \quad (3.7)$$

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
N151 158

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

あるいは
$$\cos\theta = \frac{(2xy)^2 - f(x)^2}{(2xy)^2 + f(x)^2}$$

さて $y \gg 1$ の場合，$y^{-1} \ll x_1 \ll 1$ なる x_1 を任意にとり積分区間を
$$\int_0^\infty (1-\cos^\ell\theta)\,x\,dx = \int_0^{x_1} + \int_{x_1}^1 + \int_1^\infty$$
と分ければ
$$\int_0^{x_1} = \int_0^{x_1}\left[1-\left(\frac{(2xy)^2-1}{(2xy)^2+1}\right)^\ell\right]x\,dx$$
$$= \frac{1}{8y^2}\int_0^{(2x_1y)^2}\left[1-\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^\ell\right]d\xi$$
$$= \frac{\ell}{2y^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\left[1+(2x_1y)^2\right] - \frac{\ell-1}{2}\right\} \qquad \text{ただし } \ell = 1,\ 2$$
$$\approx \frac{\ell}{2y^2}\left\{\ln(2x_1y) - \frac{\ell-1}{2}\right\}.$$
$$\int_{x_1}^1 \approx \int_{x_1}^1 2\ell\left(\frac{f(x)}{2xy}\right)^2 x\,dx = \frac{\ell}{2y^2}\int_{x_1}^1 \frac{f(x)^2}{x}\,dx$$
$$\approx \frac{\ell}{2y^2}\left\{\ln\frac{1}{x_1} - \int_0^1 \frac{1-f(x)^2}{x}\,dx\right\}$$
$$\int_1^\infty \approx \frac{\ell}{2y^2}\int_1^\infty \frac{f(x)^2}{x}\,dx$$
結局
$$\int_0^\infty (1-\cos^\ell\theta)\,x\,dx = \frac{\ell}{2y^2}\left\{\ln\frac{2y}{\gamma'} - \frac{\ell-1}{2}\right\}, \quad \ell = 1, 2,\ y \gg 1 \qquad (3.8)$$
ここに
$$\ln\gamma' = \int_0^1 \frac{1-f(x)^2}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{f(x)^2}{x}\,dx = 0.39.$$

(3.8) を (3.6) に入れて
$$F_r^\ell(\zeta) = \ell\zeta^r\int_0^\infty \left(\ln\frac{2y}{\gamma'} - \frac{\ell-1}{2}\right) y^{r-1}\exp(-\zeta y)\,dy$$
$$= (r-1)!\,\ell\left(\ln\frac{2}{\gamma'\zeta} - \frac{\ell-1}{2}\right) + \ell\int_0^\infty \ln\eta\cdot\eta^{r-1}\exp(-\eta)\,d\eta$$

第2項の積分を $(r-1)!\,I_r$ とおけば，漸化式 $I_{r+1} = I_r + \frac{1}{r}$ $(r \geqq 1)$ が成り立ち，
$$I_1 = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \ln\eta\cdot\exp(-\eta)\,d\eta$$
$$= \lim\left\{-\left[\ln\eta\cdot\exp(-\eta)\right]_\delta^\infty + \int_\delta^\infty \frac{\exp(-\eta)}{\eta}\,d\eta\right\}$$
$$= -\int_0^1 \frac{1-\exp(-\eta)}{\eta}\,d\eta + \int_1^\infty \frac{\exp(-\eta)}{\eta}\,d\eta = \ln\frac{1}{\gamma},$$
$$\gamma = 1.781$$

結局
$$F_r^\ell(\zeta) \approx (r-1)!\,\ell\left[\ln\frac{2}{\gamma\gamma'\zeta} - \frac{\ell-1}{2} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} + \cdots + 1\right]$$
$$\text{ただし } \ell = 1, 2,\ \zeta \ll 1. \qquad (3.9)$$

ここに $r=1$ のとき $\frac{1}{r-1} + \cdots + 1 \equiv 0$ とする。$2/\gamma\gamma' \fallingdotseq \frac{3}{4}$.

(4. 輸送係数 に続く)

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料(中間子論関係)
N151 158

©2022 YHAL, YITP, Kyoto University
京都大学基礎物理学研究所　湯川記念館史料室

4. 輸送係数

電子の他に唯一種類の Z 価イオンを含むプラズマを扱う. 添字1をイオンに, 添字2を電子に用いる: $e_1 = Ze$, $e_2 = -e$. イオンと電子との質量を m_1, m_2 とおき $Z \ll (m_1/m_2)^{\frac{1}{2}}$ と仮定する.

(1) 粘性率 η. 運動量の輸送はもっぱらイオンによる.

第1近似

$$[\eta]_1 = \frac{5kT}{8\Omega_{11}^{(2)}(2)} = \frac{5}{8}\left(\frac{m_1 kT}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kT}{Z^2e^2}\right)^2\left(\ln\frac{3kT}{4Z^2e^2\kappa_{11}} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

第2近似

$$[\eta]_2 = [\eta]_1\left\{1 + \frac{3}{49}\left(\frac{7}{2} - \frac{\Omega_{11}^{(2)}(3)}{\Omega_{11}^{(2)}(2)}\right)^2\right\}$$

$$= [\eta]_1\left\{1 + \frac{3}{49}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln\frac{3kT}{4Z^2e^2\kappa_{11}} + \frac{1}{2}}\right)^2\right\}$$

(2) 熱伝導率 λ.

第1近似

$$[\lambda]_1 = \frac{75k^2T}{32m_2\Omega_{22}^{(2)}(2)}\left\{1 + \frac{1}{Z}\left(\frac{25}{2} - 2\,\frac{5\Omega_{12}^{(1)}(2) - \Omega_{12}^{(1)}(3)}{\Omega_{12}^{(1)}(1)}\right)\frac{\Omega_{12}^{(1)}(1)}{\Omega_{22}^{(2)}(2)}\right\}^{-1}$$

$$= \frac{75k}{32}\left(\frac{kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kT}{e^2}\right)^2\left\{\ln\frac{3kT}{4e^2\kappa_{22}} + \frac{1}{2} + \frac{Z}{\sqrt{2}}\left(\frac{13}{4}\ln\frac{3kT}{4Ze^2\kappa_{12}} + 2\right)\right\}^{-1}$$

第2近似はこれより約20%大きい.

(3) 拡散係数 D_{12} （$n \equiv n_1 + n_2$ とおき）

$$[D_{12}]_1 = \frac{1}{m_2}\,\frac{3kT}{16n\Omega_{12}^{(1)}(1)} = \frac{3}{4n}\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kT}{Ze^2}\right)^2 \Big/ \ln\frac{3kT}{4Ze^2\kappa_{12}}$$

第1近似は電子イオン間の相互作用のみによる.

$$[D_{12}]_2 = [D_{12}]_1(1+\delta)$$

$$\delta = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{2\Omega_{12}^{(1)}(2)}{5\Omega_{12}^{(1)}(1)}\right)^2\frac{1}{1 + Z\Omega_{22}^{(2)}(2)/5\Omega_{12}^{(1)}(1)}$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\ln\frac{3kT}{4Ze^2\kappa_{12}}}\right)^2\frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{5}\frac{1}{Z}\left(\ln\frac{3kT}{4e^2\kappa_{22}} + \frac{1}{2}\right)\Big/\ln\frac{3kT}{4Ze^2\kappa_{12}}}$$

(4) 電気伝導率 σ は
Einsteinの関係式（をやや一般化した）

$$\sigma = \frac{Ze^2n}{kT}D_{12}$$

から定まる. （通常のEinsteinの関係式は $Z \to 0$ の極限にあたる）

注. shieldの定数 κ_{ij} については, すべて $3\kappa/8$ に等しいと仮定して大体よいと私は考える.

pp. 38-39 ④

京都大学基礎物理学研究所 湯川記念館史料室所蔵 湯川秀樹史料（中間子論関係）
N151 158