物性論研究　2集 4巻 3号　(1958年9月)別刷

電子－イオン系のEffective Hamiltonian

市川芳彦

物性論研究　　2集 4巻 3号　　1958年9月

電子－イオン系のEffective Hamiltonian

東北大物理教室　市　川　芳　彦

（1958年8月26日　受理）

電子と一価の正イオンから成る系について，荷電粒子間のクーロン相互作用による多粒子間の相関の主な部分を，集団運動の形に分離して，電子及びイオンの個別運動と集団運動を記述する Effective Hamiltonian を導く．

金属内の自由電子とイオンの系に関連した集団運動の問題は，非常に多くの人々によつて議論されているが，Bohm－Pines[1]による金属内自由電子の相関エネルギーの計算に対する Gell－Mann－Brueckner[2]に始まり，Brueckner，Sawada，Fukuda Brout[3]によつて止めを刺された極めて重大な批判は，電子－イオン相互作用の問題に対しても考慮されねばならない問題であり，Nishiyama[4]によつて研究されている．

然し，Brueckner たちによつて指摘された Bohm－Pines の理論の inconsistency の所在についての議論は，相関エネルギーの計算結果に関しての議論に終つている．　我々は，以下で Bohm－Pines がその出発点として取つた電子系の Effective Hamiltonianに inconsistency が存在する事を明示しよう．

一方，高温プラズマの物理現象に関する問題は，核融合の問題に関連して最近多くの与味をひいているが，高温プラズマの物理現象を微視的観点から研究していく際に基礎となるべき　高温プラズマの系に対する Effective Hamiltonian や，系の力学的ふるまいについては余り研究が進められていない．

それ故，此処では　古典的な方法で，電子－イオン系の荷電粒子間のクーロン相互作用による相関の効果を調べていく事にする．

§1.　集団運動の分離

我々は，N 個の電子と N 個の正イオンの混合した気体を問題にする事にする．“密度は充分に高いが，イオン間の短距離力が問題になる程極端には高くない” と仮定する．　このような系の Hamiltonian は

$$H=\sum_i \frac{p_i^2}{2m}+\sum_\alpha \frac{P_\alpha^2}{2M}+\frac{2\pi e^2}{V}\sum_{\substack{\mathbf{k}\\ i,j}}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{k}(x_i-x_j)}+$$

$$+\frac{2\pi e^2}{V}\sum_{\substack{\mathbf{k}\\ \alpha,\beta}}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{k}(x_\alpha-x_\beta)}-\frac{4\pi e^2}{V}\sum_{\substack{\mathbf{k}\\ i,\alpha}}\frac{1}{k^2}e^{i\mathbf{k}(x_i-x_\alpha)}$$

$$-4\pi e^2 n\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k^2} \tag{1}$$

$(i,\ j)$は電子．$(\alpha,\ \beta)$は正イオンを示す．

電子及びイオンの密度振動 $\rho_{\mathbf{k}}^{(e)}$，$\rho_{\mathbf{k}}^{(I)}$ はそれぞれ

$$\rho_{\mathbf{k}}^{(e)}=V^{-1/2}\sum_i e^{-i\mathbf{k}x_i} \tag{2a}$$

$$\rho_{\mathbf{k}}^{(I)}=V^{-1/2}\sum_\alpha e^{-i\mathbf{k}x_\alpha} \tag{2b}$$

として導入され，これらを用いると Hamiltonian (1) は，

$$H=\sum_i \frac{p_i^2}{2m}+\sum_\alpha \frac{p_\alpha^2}{2M}+2\pi e^2\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k^2}(\rho_{\mathbf{k}}^{(e)}-\rho_{\mathbf{k}}^{(I)})(\rho_{-\mathbf{k}}^{(e)}-\rho_{-\mathbf{k}}^{(I)})-$$

$$-4\pi e^2 n\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k^2} \tag{3}$$

と書きあらわされる．

さて，Bohm-Pines[5] に従つて，次のような関係であたえられる集団座標 $q_{\mathbf{k}}^{(e)}$，$q_{\mathbf{k}}^{(I)}$ 及びそれに関係した補助変数 $\xi_{\mathbf{k},\omega}$，$\mu_{\mathbf{k},\omega}$ を導入する．

$$q_{\mathbf{k}}^{(e)}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{\Omega_e^2}{\omega^2-(\mathbf{k}\mathbf{v}_i)^2}e^{-i\mathbf{k}x_i}=\frac{1}{2\omega}(\xi_{\mathbf{k}\cdot\omega}-\xi_{\mathbf{k}\cdot-\omega}) \tag{4a}$$

$$\xi_{\mathbf{k}.\omega}=\frac{\Omega_e^2}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{1}{\omega-(\mathbf{k}\mathbf{v}_i)}e^{-i\mathbf{k}x_i} \tag{4b}$$

$$q_{\mathbf{k}}^{(I)}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_\alpha\frac{\Omega_I^2}{\omega^2-(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2}e^{-i\mathbf{k}x_\alpha}=\frac{1}{2\omega}(\mu_{\mathbf{k},\omega}-\mu_{\mathbf{k},-\omega}) \tag{5a}$$

$$\mu_{\mathbf{k},\omega}=\frac{\Omega_I^2}{\sqrt{V}}\sum_\alpha\frac{1}{\omega-(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)}e^{-i\mathbf{k}x_\alpha} \tag{5b}$$

Ω_e．Ω_Iは後からきめられる常数．(4a)(5a)では次元をあわせる為にそれらを持ちこんだ．

以下で，$\xi_{\mathbf{k},\omega}$ $\mu_{\mathbf{k},\omega}$の運動を調べ集団運動の基準座標をさがし出す．

先づ $\xi_{\mathbf{k},\omega}$ の運動を調べよう．(4b) から

$$\dot{\xi}_{\mathbf{k},\omega}=\frac{\Omega_e^2}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{-i(\mathbf{k}\mathbf{v}_i)}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_i}e^{-i\mathbf{k}x_i}+\frac{\Omega_e^2}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{(\mathbf{k},\dot{\mathbf{v}})}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_i)^2}e^{-i\mathbf{k}x_i}$$

$$=-i\omega\xi_{\mathbf{k}\cdot\omega}+\frac{i\Omega_e^2}{\sqrt{V}}\sum_i e^{-i\mathbf{k}x_i}+\frac{\Omega_e^2}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{(\mathbf{k}\cdot\dot{\mathbf{v}}_i)}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_i)^2}e^{-i\mathbf{k}x_i}$$

それ故

$$\dot{\xi}_{\mathbf{k}\cdot\omega}+i\omega\xi_{\mathbf{k}\cdot\omega}=i\Omega_e^2\rho_{\mathbf{k}}^{(e)}+\frac{\Omega_e}{\sqrt{V}}\sum_i\frac{(\mathbf{k}\dot{\mathbf{v}}_i)}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_i)^2}e^{-i\mathbf{k}x_i} \tag{6}$$

処で，個々の電子の運動は，運動方程式

$$m\dot{v}_i=-\mathrm{grad}_i V$$

$$=-\frac{4\pi e^2}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{i\mathbf{k}}{k^2}(\rho_{+\mathbf{k}}^{(e)}-\rho_{+\mathbf{k}}^{(I)})e^{+i\mathbf{k}x_i} \tag{7}$$

からきまる．Eq. (7)から $(\mathbf{k}\cdot\dot{\mathbf{v}}_i)$ を作り Eq. (6) の最后の項に代入すると

$$\dot{\xi}_{\mathbf{k}\cdot\omega}+i\omega\xi_{\mathbf{k}\cdot\omega}=i\Omega_e^2\rho_{\mathbf{k}}^{(e)}-i\frac{\Omega_e^2}{V}\frac{4\pi e^2}{m}\sum_i\sum_{\mathbf{k}'}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k'^2(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_i)^2}\cdot$$

$$\cdot(\rho_{\mathbf{k}'}^{(e)}-\rho_{\mathbf{k}'}^{(I)})e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})x_i} \tag{8}$$

此処で $\sum_{\mathbf{k}'}$ の中で $\mathbf{k}'=\mathbf{k}$ の項だけをとる．これは有名な random phase approximation "R. P. A." と呼ばれる近似で，それは高密度の場合には許される．此の節の始めに仮定した事は，"R. P. A" が許される位充分に高い密度の場合を考えるという事であつた．然し，"R. P. A" が高密度の極限では

正確に成立つ，という Brueckner 達の結論は，一様な正の電荷分布の中の電子気体についてだけ導かれたものであつて，我々の場合のように，イオンと電子及びイオン間の相互作用を考えている場合には，高い密度の極限では，イオン間の短距離相互作用が重要になるから，それの“R. P. A”に対する効果を考えなければならない．此の点については未だ研究されていないから，一応密度は充分に高いが，短距離相互作用が（“R. P. A.”をだめにするかどうかはわからないが）重要である程には高くないと仮定した．

経験上からは，たとえば，気体放電アークのようにプラズマ振動が実際に観測されている場合には[6]実際にそのような仮定が満されていると考えて良いであろう．即ち電子密度が $n \approx 10^9 \sim 10^{11}$ の場合はさうであると考えられる．

さて，“R. P. A”の下では E_q (8) は

$$\dot{\xi}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} = i\Omega_e^2\left[\rho_{\mathbb{k}}^{(e)} - \frac{1}{V}\frac{4\pi e^2}{m}\sum_i \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\cdot\mathbb{V}_i)}\left(\rho_{\mathbb{k}}^{(e)} - \rho_{\mathbb{k}}^{(I)}\right)\right] \tag{9}$$

全く同様にして，$\mu_{\mathbb{k}\cdot\omega}$ について

$$\dot{\mu}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\mu_{\mathbb{k}\cdot\omega} = i\Omega_I^2\left[\rho_{\mathbb{k}}^{(I)} - \frac{1}{V}\frac{4\pi e^2}{M}\sum_\alpha \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\cdot\mathbb{V}_\alpha)^2}\left(\rho_{\mathbb{k}}^{(I)} - \rho_{\mathbb{k}}^{(e)}\right)\right] \tag{10}$$

を得る．　ここで注意しなければならない事は E_q (9) の中の $\rho_{\mathbb{k}}^{(I)}$ E_q (10) の中の $\rho_{\mathbb{k}}^{(e)}$ の項によつて互いに couple している事である．　もしも，E_q.(9) で $\rho_{\mathbb{k}}^{(I)}$ E_q.(10) で $\rho_{\mathbb{k}}^{(e)}$ をそれぞれ消してしまえば，E_q.(9)，E_q.(10) はそれぞれ独立になり，それから

$$\dot{\xi}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} = 0 \quad with \quad 1 = \frac{4\pi e^2}{m}\frac{1}{V}\sum_i \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_i)^2} \tag{11}$$

$$\dot{\mu}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\mu_{\mathbb{k}\cdot\omega} = 0 \quad with \quad 1 = \frac{4\pi e^2}{M}\frac{1}{V}\sum_\alpha \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_\alpha)^2} \tag{12}$$

として，それぞれの分散公式によつて定められる固有振動数をもつ電子の集団運動とイオンの集団運動があたえられる．　それ故 E_{qs}.(11) と (12) を取り，それに対する摂動項として電子とイオンの間のクーロン相互作用を取り入れていくという問題の進め方も考えられるが，我々は荷電粒子間のクーロン相互作用の多粒子間の相関の効果が，摂動項としては考えられない場合を考えているのであるから，E_q.(9) で

24

中

$\rho_{\mathbb{k}}^{(I)}$ の項を $\rho_{\mathbb{k}}^{(e)}$ の項に対して，又 E_q.(10) で $\rho_{\mathbb{k}}^{(e)}$ の項を $\rho_{\mathbb{k}}^{(I)}$ の項に対して摂動項と考える事は全く正当化できない事である．

以上に論じた点を考慮して E_q.(9) と E_q.(10) を見くらべてみると，特に $\Omega_e = \Omega_I \equiv \Omega$ ととり，座標

$$\Xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} = \xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} - \mu_{\mathbb{k}\cdot\omega} \tag{13}$$

を導入すれば，E_{qs} (10)，(11) から

$$\dot{\Xi}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\Xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} = i\Omega^2\left(\rho_{\mathbb{k}}^{(e)} - \rho_{\mathbb{k}}^{(I)}\right)\cdot D(\omega) \tag{14}$$

$$D(\omega) = 1 - \frac{1}{V}\frac{4\pi e^2}{m}\sum_i \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_i)^2} - \frac{1}{V}\frac{4\pi e^2}{M}\sum_\alpha \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_\alpha)^2} \tag{15}$$

を得る．　従つて分散公式 $D(\omega)=0$ 即ち

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m}\frac{1}{V}\sum_i \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_i)^2} + \frac{4\pi e^2}{M}\frac{1}{V}\sum_\alpha \frac{1}{(\omega-\mathbb{k}\mathbb{V}_\alpha)^2} \tag{16}$$

の條件の下で $\Xi_{\mathbb{k}\cdot\omega}$ は E_q.(16) から定まる振動数で調和振動を行なう事がわかる．分散公式 (16) は Vlasov．Silin　Zyrianov[7] 等によつて別の方法で導かれたものと一致する．　分散公式 (16) の根及び可能な集団運動の状態等については次の節で論ずる．

E_q.(13) の定義に対応して

$$Q_{\mathbb{k}} = q_{\mathbb{k}}^{(e)} - q_{\mathbb{k}}^{(I)} \tag{17}$$

であたえられる集団座標は，$\Xi_{\mathbb{k}\cdot\omega}$ が

$$\dot{\Xi}_{\mathbb{k}\cdot\omega} + i\omega\Xi_{\mathbb{k}\cdot\omega} = 0 \tag{18}$$

を満す事から直ちに，運動方程式

$$\ddot{Q}_{\mathbb{k}} + \omega^2 Q_{\mathbb{k}} = 0 \tag{19}$$

に従う事がわかる．　Eq.(17) を見ればわかるように，Q_{k} は系の荷電密度の振動に対応する集団座標である．　系の全電荷が 0 という條件の下では，可能な集団運動の基準座標は，電荷密度の振動 Q_{k} に限り，粒子密度の振動 $\rho_{k}^{(e)}+\rho_{k}^{(I)}$ は，集団運動の基準座標ではあり得ない．

さて，後の計算に必要であるから (4a) (5a) から $\dot{Q}_{k}$ を計算しておこう．　それは (17) によつて Eqs. (9) (10) を用いると，

$$\dot{Q}_{k}=i\frac{\Omega^2}{\sqrt{V}}\left\{\sum_i\frac{(k\cdot v_i)}{\omega^2-(k\cdot v_i)^2}e^{-ik x_i}-\sum_\alpha\frac{(k\cdot v_\alpha)}{\omega^2-(k\cdot v_\alpha)^2}e^{-ik x_\alpha}\right\}\tag{20}$$

であたえられる．

最后に，常数 Ω^2 をきめなければならないが，それは電荷密度の振動

$$\Gamma_{k}=\rho_{k}^{(e)}-\rho_{k}^{(I)}\tag{21}$$

の中で相互作用によつて生じた振動が凡て Q_{k} に含まれ，相互作用がない場合の熱運動による個別的な振動と Q_{k} に"完全"に分離されるようにきめる．　"完全"にとは，もちろん"R. P. A"と分散公式の成立の條件の下で完全にという意味である．
Bohm–Pines の計算に従つて今の場合それは

$$\Omega^2=\frac{4\pi e^2}{m^*}n \qquad with\ \frac{1}{m^*}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\tag{22}$$

と定められるが，計算の詳細は省略する．

§2.　分散公式の根

分散公式 (16) の根は，一般には二種類ある．　即ち Optical Branch と Acoustic Branch の二つである．

(1) Optical Branch

これは

$$\omega^2\gg\{k^2\langle v_i^2\rangle,\ k^2\langle v_\alpha^2\rangle\}\tag{23}$$

の條件が満足されるような場合で，(16) の解として，近似的に

$$\omega^2=\frac{4\pi e^2}{m^*}n+O(k^2)\tag{24}$$

を得る．　一定の電子温度，イオン温度の下で考えれば (23) は k に対する條件として，或る critical wave number k_c に対して

$$k_c\gg k$$

という條件におきかえ得るであろう．　即ち，(24) であたえられる振動数による集団運動は長距離間相関の効果によるいわゆるプラズマ振動である．　この場合には，電子の運動とイオンの運動は out of phase である．

(2) Acoustic Branch

これは

$$\langle v_i^2\rangle_{AV}\approx\langle v_\alpha^2\rangle_{AV}\tag{26}$$

のような場合には存在し得ないが，イオン温度が余り高くなく，((M/m) Te ≫ Ti なら)

$$\langle v_i^2\rangle_{AV}\gg\langle v_\alpha^2\rangle_{AV}\tag{27}$$

であるような場合には (16) から

$$\langle(k\cdot v_i)^{-2}\rangle_{AV}=-k^{-2}\langle v_i^{-2}\rangle_{AV}\tag{28}$$

を用いて

$$\omega^2=\frac{4\pi e^2 n/M}{k^2+\frac{4\pi e^2}{m}n\langle v_i^{-2}\rangle_{AV}}k^2\tag{29}$$

という解が得られる．

この解は，Zyrianov によつて金属内電子の電気伝導度の計算の基礎として採用されたが，高温プラズマ乃至気体放電アークでも，(27) は満足されるから，この解も重要な役割を果すものであろう．　然しこの点については理論的にはもちろん，実験的にも殆ど調べられていないようである．

(29) は (16) から

$$\omega^2\ll k^2\langle v_i^2\rangle_{AV}\tag{30}$$

を仮定して求めたものであるから，(29) が (30) と矛盾しない k の範囲を調べて

みなければならない．

先づ $k^2 \ll \frac{4\pi e^2}{m} n \langle v_i^{-2} \rangle_{Av} = k_\alpha^2$ の場合 ω^2 は

$$\omega^2 = \frac{\kappa T_e}{M} k^2 \qquad T_e \text{ : 電子温度} \tag{31}$$

$$\therefore \quad (30) \to \frac{\kappa T_e}{M} \ll \langle v_i^2 \rangle_{Av} = \frac{3\kappa T_e}{m} \tag{32}$$

であるから，矛盾しない．

次に 逆に $k^2 \gg k_d^2$ の場合 ω^2 は

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2}{M} n \tag{33}$$

$$\therefore \quad (30) \to \frac{4\pi e^2}{M} n \ll k^2 \frac{3\kappa T_e}{m}$$

これは

$$\frac{m}{M} k_d^2 \ll k^2 \tag{34}$$

我々の仮定 $k^2 \gg k_d^2$ とこれは矛盾しない．

一般に（29）は（30）と結んで

$$\frac{m}{3M} k_d^2 \ll k_d^2 + k^2 \tag{35}$$

となるから これは k の大きさの如何によらず成立．即ち，イオン温度が

$$10^3 T_e \gg T_i \tag{27'}$$

を満足する程ひくい時には，*Acoustic Branch* の解は存在し得る．

この *Acoustic Branch* に属する集団運動については，いわゆるプラズマ振動が長距離間相関による ―（$k < k_c$ の條件）―事とはちがい上にのべたようにそのような制限はない．　此のような集団運動は高温プラズマ内での電子－イオン相互作用に対してプラズマ振動よりも一層重要な役割を果しているのではないかと考えられる．　この点については別の機会にくわしく調べよう．

25

中

§3. Effective Hamiltonian の導出

相互にクーロン力で相互作用をしている荷電子系のハミルトニアンは（3）であたえられるが，前節までの分析で明らかにされたように，“R. P. A” の下では，分散式（16）で定まる固有振動数で振動する集団運動が可能である事がわかつた．　此処で注意すべき事は “R. P. A.” はクーロン相互作用の非摂動的な“対角化”の手続きであるという事である．　従つてこの集団運動の分离に対応して，*Hamiltonian* (3) を *Effective Hamiltonian* $H_{R.P.A.}$ に *reduce* する事が望ましい．この *Effective Hamiltonian* の導出については *Bohm-Pines* による議論 *Tomonaga*[8] による *Bohm-Pines* 理論の基礎づけ等があるが，“R.P.A.” が $H \to H_{R.P.A}$ の *reduction* に対して果す役割については余り明確に理解されていないように思われる．

“R. P. A.” の下で，（17） *with* (4a)，(5a) で定義された Q_k が調和振動子の運動方程式

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 \tag{19}$$

に従う事はすでに知られた．　これから，“R. P. A” によつて *reduce* された *Effective Hamiltonian* $H_{R.P.A.}$ に対して *Hamilton* の正準形にかいた運動方程式

$$\frac{\partial H_{R.P.A}}{\partial P_k} = \dot{Q}_k \qquad \frac{\partial H_{R.P.A}}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k \tag{36}$$

が，（19）をあたえるような $H_{R.P.A}$ を求めれば，それが求める *Effective Hamiltonian* である事がわかる．

電荷密度の搖動 Γ_k（21）を用いると（3）のクーロン相互作用の項は

$$\sum_k \frac{2\pi e^2}{k^2} \Gamma_k \Gamma_{-k} \tag{37}$$

とかけるが，Γ_k を集団運動の部分 Q_k と個別的熱運動による部分 η_k に分离すると（37）は

$$\sum_k \frac{2\pi e^2}{k^2} Q_k Q_{-k} + \sum_k \frac{2\pi e^2}{k^2} \eta_k \eta_{-k} + \sum_k \frac{2\pi e^2}{k^2} \left\{ Q_k \eta_{-k} + Q_{-k} \eta_k \right\} \tag{38}$$

とかきあらわされるが，この中で最后の項は実は "R. P. A" と分散式によつて消去された効果をあらわすものである事に注意しなければならない．即ち，もしも $H_{R.P.A}$ の中にこのような Q_{k} と η_{-k} の間の cross term があると (36) から (19) の調和振動子の運動方程式は導かれない．かくして，$H \to H_{R.P.A}$ の reduction において，クーロン相互作用の項は "R. P. A." によつて

$$\sum_{k}\frac{2\pi e^2}{k^2}\Gamma_{k}\Gamma_{-k} \longrightarrow \sum_{k}\frac{2\pi e^2}{k^2}\eta_{k}\eta_{-k}+\sum\frac{2\pi e^2}{k^2}Q_{k}Q_{-k} \tag{39}$$

と reduce されるべきである事がわかつた．

さて，集団運動する調和振動子 Q_{k} に対しては，その振動子の慣性を $I(k)$ とすれば，振動子 Q_{k} に対する Hamiltonian として

$$H_f(P_k, Q_k)=\sum_{k}\left\{\frac{1}{I(k)}P_k^{*}P_k+I(k)\,\omega_k^2 Q_k^{*}Q_k\right\} \tag{40}$$

をとる事ができ Q_k に対する共軛な運動量 P_k^{*} が

$$P_k^{*}=I(k)\,\dot{Q}_k \tag{41}$$

とあたえられる．ここで $\dot{Q}_k$ は粒子の座標で explicit にかきあらわすと (20) であたえられる．

電子－イオン系の Effective Hamiltonian H_p は $H_{R.P.A}$ が H_f と H_p に分離されている事から

$$H_p(x_i, p_i\,;\,x_\alpha : p_\alpha)=H_{R.P.A}-H_f \tag{42}$$

として定められる．但しここで $H_{R.P.A}$ は上にのべたように H (3) の中でクーロン相互作用を (39) に reduce したものである．それ故

$$\begin{aligned}H_p &\equiv H_{R.P.A}-H_f\\ &=\sum_i\frac{p_i^2}{2m}+\sum_\alpha\frac{p_\alpha^2}{2M}+\sum\frac{2\pi e^2}{k^2}\eta_k^{*}\eta_{+k}-2\pi n e^2\sum\frac{1}{k^2}+\\ &\quad+\sum\left\{\frac{2\pi e^2}{k^2}-I(k)\,\omega_k^2\right\}Q_k^{*}Q_k-\frac{1}{V}\sum\Omega^4 I(k)\left\{\sum_i\frac{k v_i}{\omega^2-(k v_i)^2}e^{-ikx_i}\right.\\ &\quad\left.-\sum_\alpha\frac{k v_\alpha}{\omega^2-(k v_\alpha)^2}e^{-ikx_\alpha}\right\}\left\{\sum_i\frac{(k v_i)}{\omega^2-(k v_i)^2}e^{+ikx_i}-\sum_\alpha\frac{(k v_\alpha)}{\omega^2-(k v_\alpha)^2}e^{+ikx_\alpha}\right\}\end{aligned} \tag{43}$$

となる．但し，H_p は $(x_i, p_i, x_\alpha, p_\alpha)$ の函数であるから (43) の最后の項は (41) と (20) を用いて P_k，P_k^{*} を粒子座標でかきあらわした．

さて，(43) で

$$I(k)=\frac{2\pi e^2}{k^2}\,\omega_k^{-2} \tag{44}$$

とえらべばクーロン相互作用の中集団運動に寄与する多粒子間の相関は，完全に消去でき全部集団運動の Hamiltonian の中に押しこめてしまう事ができる．然し，この集団運動の分離に対応して，残つた粒子系の個別運動には，複雑な速度 dependent な粒子間の相互作用（(43) の最后の項）が生ずる．

とにかく，このようにして Effective Hamiltonian $H_{R.P.A}$ は

$$H_{R.P.A}=H_p(x_i, p_i\,;\,x_\alpha, p_\alpha)+H_f(Q_k, P_k) \tag{45}$$

$$\begin{aligned}H_p(x_i, p_i\,;\,x_\alpha\,p_\alpha) &=\sum_i\frac{p_i^2}{2m}+\sum_\alpha\frac{p_\alpha^2}{2M}+\sum_k\frac{2\pi e^2}{k^2}\eta_k^{*}\eta_k-\\ &\quad-\frac{1}{V}\sum_k\Omega^4 I(k)\left\{\sum_i\frac{k v_i}{\omega^2-(k v_i)^2}e^{-ikx_i}-\sum_\alpha\frac{k v_\alpha}{\omega^2-(k v_\alpha)^2}e^{-ikx_\alpha}\right\}\cdot\\ &\quad\cdot\left\{\sum_{j'}\frac{k v_\alpha}{\omega^2-(k v_j)^2}e^{+ikx_j}-\sum_{\beta'}\frac{k v_\beta}{\omega^2-(k v_\beta)^2}e^{+ikx_\beta}\right\}\\ &\quad-2\pi e^2 n\sum\frac{1}{k^2}\end{aligned} \tag{46}$$

$$H_f=\sum_k\left\{\frac{1}{I(k)}P_k^{*}P_k+I(k)\,\omega_k^2 Q_k^{*}Q_k\right\} \tag{47}$$

但し

$$I(k)=\frac{2\pi e^2}{k^2}\,\omega_k^{-2} \tag{44}$$

として得られる．H_f については，§2 で論じた事を参照すると

$$H_f=\sum_{k<k_c}\{\text{plasma oscillation}\}+\sum_{k\ \text{all}}\{\text{Acoustic oscillation}\} \tag{48}$$

の二つの部分からなる.

(45)にあたえられる Effective Hamiltonian で粒子系の Hamiltonian の相互作用の中に普通の Bohm－Pines その他によるプラズマ振動の理論では, プラズマ振動が $k_c > k$ であるような長波長の範囲でしか存在し得ない為に $k > k_c$ の範囲に対してはクーロン相互作用

$$\sum_{k>k_c} \frac{2\pi e^2}{k^2} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}}$$

がのこつていたが, 今の場合には短波長の範囲の相互作用の効果は Acoustic な集団運動として分離されているので, 上の項に対応する項は残らない.

§4. 結　論

前節までで行なつた Effective Hamiltonian の導出は, イオンの運動まで考慮した為に生じた Acoustic な集団運動を別とすれば Bohm と Pines による理論(量子論)と全く同等なものであるから, (45)(46)(47)を Bohm－Pines の Hamiltonian と比較してみる事は興味深い. 先づ第一に注意されるべき事は

(i) Bohm－Pines は(46)の速度 dependent な相互作用に対応する項で $i = j$, $(\alpha = \beta)$ の項だけをのこして, それを "mass の変化" として取り入れ $i \neq j$ $(\alpha \neq \beta)$ の項は捨てている.

この点については, すでに§3の議論が明らかに示しているように, (46)の速度 dependent な相互作用の項は全体として分離されたプラズマの Hamiltonian の運動エネルギーの部分に対応しているのであるから, プラズマの方で全部入れ, 格子系の方ではその中の一部だけしか取入れないという Bohm－Pines の取りあつかいは inconsistent である.

次に注意すべき事は

(ii) Bohm－Pines は(46)の第三項に対応する

$$\sum_{k<k_c} \frac{2\pi e^2}{k^2} \eta^*_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}}$$

を捨てているが, 全エネルギー極小の条件から k_c をきめる場合にこの項を無視する事は許されない. 実際にプラズマ振動と個別運動を分離するパラメーター k_c は, この項とプラズマのポテンシャルエネルギー項との間の大きさのかねあいできまつて

くるものであるから, その片方を落してプラズマのポテンシャル項と残つた短距離間相関のかねあいで k_c をきめたのでは consistent ではないであらう.

我々は Effective Hamiltonian に対するこれらの二つの inconsistent な取りあつかいが, Brueckner 達によつて批判された点に直接原因となつていると考える.

Acoustic Branch が高温プラズマでどのような役割を演ずるかという問題については別の機会に論ずる事にしたい.

文　献

(1) Bohm－Pines　Phys. Rev. 92 (1953), 609
(2) Gell-Mann & Brueckner, Phys. Rev. 106 (1957) 364
(3) Brueckner, Sawada, Fukuda & Brout, Phys. Rev. 108 (1957) 507
(4) Nishiyama, 物性論研究 2集 3巻 554 (1958)
(5) Bohm－Pines　Phys. Rev. 85 (1952) 338
(6) Kojima, et al.　J. Phys. Soc. Japan 12 (1957), 1277
(7) Zyrianov　JETP. 2 247
(8) Tomonaga　Prog. Theoret Phys. 13