

7.2.7 7.3.11.1, 2. 定常 (3) Überlagerungsfun. + 1. 定常 (1) 7.2.7 7.3.11.2
 Vollständigkeitsrelation

$$\int |\psi(q)|^2 dq = \sum_n |c_n|^2$$

∴ Atome, Anzahl + 数 n.

(∴ 1. 定常, normierten Eigenschw. / Auftreten = 数 n)

1. 定常 + 定常, $|c_n|^2$, Zustand n, Häufigkeit p n.

∴ 定常, 2. 定常, $|c_n|^2$, 1. 定常 + 2. 定常

2. 定常 + 2. 定常 = Massepunkt, 3dim. Raum, 3. 定常 + 3. 定常

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(W-U)\psi = 0$$

$$\iiint \{\psi_n^* \Delta\psi_n + \frac{8\pi^2m}{h^2}(W_n-U)\psi_n\psi_n^*\} dS = 0$$

$$\therefore \sum_n W_n = \iiint \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2m} (\text{grad}\psi_n \cdot \text{grad}\psi_n^*) + U\psi_n\psi_n^* \right\} dS$$

∴ 定常 Energielevel, Energie dichte, Raumintegral + 定常, Eigenschwingung

$$W = \iiint \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2m} |\text{grad}\psi|^2 + U|\psi|^2 \right\} dS$$

$$\therefore W = \sum_n |c_n|^2 W_n$$

1. 定常 + 2. 定常 + 3. 定常, System, Energie, Mittelwert + 定常

2. 定常 + 3. 定常, ψ -Funktion, Energie dichte, Raumintegral + 定常 + 定常 + 定常

§2. Aperiodische Systeme

x-Achse / 1. 定常 / gleichförmige Bew. + 定常

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

$$k^2 = \frac{8\pi^2m}{h^2} W$$

$$\psi = c e^{\pm ikx}$$

für alle positive Wert W.

(Normierung $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |\psi(k, x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{2a} \int_{-a}^a e^{ikx} e^{-ikx} dx = 1 \Rightarrow c = 1$)

1. 定常

2. 定常 + 3. 定常, x-Achse, malige Stücke, Eigenschwingung, Grenzfall + 定常

3. 定常 + 4. 定常, Intervall (k, k+dk) = 定常, Anzahl

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) dk$$

$$\frac{\Delta k}{2\pi} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \psi(k, x) d\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk$$

$$c(-k) = c^*(k)$$

∴ $|c(k)|^2$ Interval $\frac{1}{2\pi} dk$, 定常 - Häufigkeit 定常 + 定常 + 定常
 Atom, Gemeinge = 定常 + 定常

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk \right|^2$$

k, 定常 + 定常, $k_1 \leq k \leq k_2 = 定常 + 定常$, (translatrische Bewegung, Impuls, $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k$ + 定常 + 定常, $\Delta k = k_2 - k_1 = \frac{2\pi}{h} \Delta p$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = |c|^2 \frac{\Delta p}{h}$$

∴ $\Delta x = 1$, 定常 $p = h + n$ Zelle + Gewicht 1 + 定常

1. 定常 + 2. 定常, $|c(k)|^2$, Impuls $p = \frac{h}{2\pi} k$ + 定常, Häufigkeit + 定常

stationäre Schwingungspeld ψ , einlaufend und auslaufend Wellen = 定常 + 定常, Koef $c(k)$ + 定常 = 定常 + 定常 + 定常
 einlaufend = 定常 + 定常, $c(k)$, 定常. $T = 定常 + 定常 + 定常 + 定常$
 Stöße = 定常 + 定常

§3. Eigenfunktion, asympt. Verhalten. (im kont. Spek bei einem Freiheitsgrad)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = V\psi$$

$$\frac{8\pi^2m}{h^2} W = k^2 \quad \frac{8\pi^2m}{h^2} U(x) = V(x)$$

$$|V(x)| < \frac{k}{x^2}$$

+ 定常 + 定常 + 定常, Iterationsverfahren = 定常, $U_0(x) = e^{ikx}$

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + k^2 u_n = V u_{n-1}$$

定常 $u_1(x), u_2(x), \dots, x \rightarrow \infty \Rightarrow 定常 + 定常 + 定常$

$$u_n(x) = \frac{1}{k} \int_0^\infty u_{n-1}(z) V(z) \sin k(z-x) dz$$



$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{k} \int_x^\infty |u_{n-1}(z)| |V(z)| dz$$

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{K}{kx}\right)^n$$

(∵ n=0 ⇒) (u₀(x)) ≤ 1 + n! |V| xⁿ

n-1 ⇒ |V| xⁿ⁻¹ n ⇒ |V| xⁿ

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

1) x ∈ ℝ, endliche Intervall ⇒ gleichmäßig = convergenz

∴ termwise Diff. (k₀ = konst.) ∴ Solution (1).
 x → +∞; general solution (1) ⇒ a e^{ikx} + b e^{-ikx}

$$x \rightarrow -\infty: \psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

⇒ konst. A, B, a, b von f₀ + 1.

∴ V = konst. ⇒ wave, Amplitude a, b, konst. f₀ + 1.

§4. Energiesatz ∴ $\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$
 $c_a^2 - c_e^2 = c_e^2 - c_a^2 = \frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$

(c's: Amplitude)

⇒ or $c_e^2 = c_a^2 + c_a^2$ (if c_e=0)

Teilchen & Atom = Punkt. ∴ k₀ + c₀ = konst.
 2. ∴ Wahrsch. 1 ⇒ 1.

§5. 3 Freiheitsgrade 1. f₀.

V=0: $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$

1 general sol.

$$\psi(r) = u(r) = \int c(s) e^{ik(r \cdot s)} d\omega, \quad c(s) = c^*(s)$$

2) Asymptotisch =

$$u_0(r, y, z) = \frac{4\pi}{c} |c\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)| \frac{\sin k(r + \delta\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right])}{r}$$

$$\Delta \int c(s) e^{ik(r \cdot s)} d\omega = \int c(s) \delta^2 e^{ik(r \cdot s)} d\omega = \int c(s) \delta^2 e^{ik(r \cdot s)} d\omega$$

H₀ = W = HCP(4) ψ = W
 $\Delta u_n = \frac{-ik}{|r-r'|^3}$

= u₀, asymp. = n f₀ = 0, Amplitude, Phase 2π = 2π. Kugelwelle
 1. x, Raumwinkel element dω mit der Achse s = konst. Partikel
 Häufigkeit ∴

$$\Phi_0 d\omega = |c(s)|^2 d\omega$$

J.R. Oppenheimer: Camb. Phil. Soc. 24.

§6. elastische Zusammenstöße

nicht erregbare Atom ^
 H₀ + 1

$$\Delta \psi + (k^2 - V)\psi = 0$$

$$\Delta u_n + k^2 u_n = V u_{n-1} = \frac{F_{n-1}}{r-r'}$$

$$u_n(r) = \frac{1}{4\pi} \int F_{n-1}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} dS'$$

∴ anlaufende Wellen mit Zeitfaktor e^{ikvt} = konst. + 1
 f₀ + 1.

$$\psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \quad (|V| \leq \frac{k}{r^2})$$

asympt. Verfahren

$$u_n^\infty(r, y, z) = 2\pi^2 f_{n-1}^\infty \left(-k \frac{x}{r}, -k \frac{y}{r}, -k \frac{z}{r}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}$$

∴ unendlich, Beobachter z, konst.

$$\frac{k}{2\pi} 2\pi^2 |f_{n-1}^\infty(-ks)| = k\pi |f_{n-1}^\infty(-ks)|$$

f_n Amplitude, Ebene Wellen + k₀.

Elektron & s + n Richt, dω = ablenkung. f₀ + 1

$$\Phi d\omega = \pi k^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n^\infty(-ks) \right|^2 d\omega$$

$$\psi^\infty = u_0^\infty + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^\infty$$

∴ f₀ + 1 = erhaltung der Teilchenzahl f₀ + 1.

§7. unelastische Elektronenstöße.

Atom ∴ H^a(p, q) + n H^a F₀ = f₀ + 1
 $[H^a - W_n^a, \psi_n^a] = 0$

freie Elektron, H^e =

$$H^e = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

2) 73, 11, 11 (divergent +) Doppelsumme $\sum_k \sum_l T = \sum_k \sum_l \dots$
 $\sum_k \sum_l \dots$ Fourier Integral, $\sum_k \sum_l \dots$

$$\frac{d\alpha_{nm}}{dt} = \sum_k \sum_l \frac{2i}{3hc^3} \{ \alpha_{ek} C_{mk} \frac{d^3}{dt^3} C_{en}^+ - \alpha_{ke} C_{kl} \frac{d^3}{dt^3} C_{ne}^- + \alpha_{ne} C_{mk} \frac{d^3}{dt^3} C_{ke}^- - \alpha_{em} C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek}^+ \}$$

$$\text{oder } \frac{d\alpha_{nm}}{dt} = \sum_k \sum_l \frac{2i}{3hc^3} \{ \alpha_{ke} (C_{ne} \frac{d^3}{dt^3} C_{kn}^+ - C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{ne}^-) + \alpha_{nk} (C_{me} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek} - \alpha_{em} C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek}^+) \} \quad (31)$$

+ , - " pos se neg, Frequenz ω positiv Teil $\omega > 0$,
 ω positiv, ϵ (1, 2) $\omega > 0$,
 B) 1) 式, Dämpfung ($\sum_k \sum_l = \sum_k \sum_l + \dots$),

Über einige Folgerungen aus dem Satz von der Analogie zwischen Lichtquant und Elektron

Guido. Beck 43 658,

In der Entwicklung der Physik seit Beginn dieses Jahrhunderts läßt sich immer mehr die Tendenz erkennen, die Gesetze des materiellen Punktes und der Strahlung einander auszugleichen. Den ersten großen Schritt hierzu stellt die Relativitätsmechanik dar. Bekanntlich gestattet die Rel. mech. die Gesetze der Aberration, des Dopplereffekts, des Lichtdrucks und der Rotverschiebung aus der Annahme herzuleiten, daß die Strahlung den Grenzfall mit Lichtgeschwindigkeit bewegter Materie darstelle, deren Ruhmasse verschwinde und deren Energie und Impuls der Frequenz proportional sei. Den nächsten Schritt in dieser Richtung sehen wir in der Nadelstrahlhypothese. Schließlich hat in der letzten Zeit die de Broglie-Schrödingersche Wellenmechanik auf gewisse Zusammenhänge aufmerksam gemacht, die dafür sprechen, daß auch die Elektronen Interferenz- und Beugungerscheinungen zeigen. Es ist daher naheliegend, den zuerst von Einstein ausgesprochenen Gedanken von der Analogie zwischen Lichtquant und Elektron axiomatisch zu fassen und den Überlegungen über die Quantenphysik als postulat voranzustellen. Dieses Postulat sprechen wir in dem Satze aus:

Materie und Strahlung sind in gleicher Weise aus diskreten Elementen zusammengesetzt zu denken; jeder fundamentalen Eigenschaft eines Strahlungselements entspricht eine Eigenschaft eines Materielements und umgekehrt.

Dieses Postulat hat seine heuristische Kraft bereits in den Bose-Einsteinschen Überlegungen über die Statistik der Lichtquanten und in der Einsteinschen Theorie der Gasentartung bewiesen. Hiervoll nun der Versuch unternommen werden, dieses Prinzip auch auf die Lichtquantenoptik und auf die Quantenelektrodynamik zu übertragen.

Für die Größe des Viererpotential's eines in der x -Richtung linear polarisierten Lichtquants haben wir zu setzen

$$\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0; \quad \Phi_1 = 2\sqrt{mh\nu} \frac{c}{e} e^{2\pi i\nu(t - \frac{x}{c})} \quad (1)$$

für seine Energie $h\nu$, für den Betrag des Impulses $\frac{h\nu}{c}$.

Für das ruhende Elektron lautet das Viererpotential in erster Näherung

$$\varphi_0 = \frac{e}{r}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \quad (2)$$

An dem Ansatz (2) werden aber noch Korrekturen anzubringen sein, entsprechend der Hypothese von G-U. Energie und Impuls des Elektrons sind gegeben durch

$$J_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad J_i = \frac{mvi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir betrachten die Wechselwirkung eines Lichtquants mit einem Atom. Wählen wir z.B. den Schro. Formalismus, so erhält man für die Wirkung des Atomkerns und des Lichtquants auf ein Elektron die Diff. gl:

$$\square\psi + \frac{4\pi i}{h} \left(\frac{V}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{e\Phi_1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{V^2}{c^2} - \frac{e^2\Phi_1^2}{c^2} + m^2c^2 \right) \psi = 0 \quad (3)$$

Man erkennt hieran zunächst, daß die Wirkung des Lichtquants $\frac{e\Phi_1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial x}$ genau so in die Formel eingeht, wie die Wirkung des Kerns $\frac{V}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t}$. Je nach der Frequenz des Lichtquants wird entweder die Wirkung des Kerns oder die des Lichtquants überwiegen. Im ersten Fall erhalten wir die Quantenmech. Lösung von (3), die dem Photoeffekt entspricht. Im zweiten Fall, wenn ν sehr groß ist, ist die Wirkung des Kerns $\frac{V}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t}$ zu vernachlässigen und wir erhalten die Diff. gl. des Comptoneffektes. Man überzeugt sich leicht durch numerische Ausrechnung, daß nach (3) stets Photoeffekt eintritt, wenn die Frequenz des Lichtquants sehr groß ist gegen, dagegen Comptoneffekt, wenn ν \neq 443. nur wenig übersteigt

die Frequenz des Lichtquants sehr groß ist gegen die Serienkante. Dies ist im Einklang mit der Erfahrung.

Im leeren Raum reduziert sich die Schro. Wellengleichung auf $\square\psi = 0$

Die Lichtquanten breiten sich also im leeren Raum geradlinig, mit Lichtgeschw. aus. Wir fragen nun nach der Bewegung der Lichtquanten in Wechselwirkung mit Materie.

In Analogie zu (3) haben wir zu setzen:

$$\square\psi + \frac{4\pi i}{h} \frac{V}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{V^2}{c^2} \psi = 0 \quad (4)$$

wobei V die Wechselwirkungsenergie zwischen Lichtquant und Materie darstellt. Indem wir $\psi \sim e^{\pm 2\pi i \nu t}$ setzen, gewinnen wir aus (4) leicht:

$$\square\psi - \frac{1}{c^2} \left(1 + 2 \frac{V}{h\nu} + \frac{V^2}{h^2\nu^2} \right) \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Wir schließen aus (5), daß die Lichtquanten im Innern der Materie dispergiert werden. Für den Brechungsindex erhalten wir

$$n^2 = 1 + 2 \frac{V}{h\nu} + \frac{V^2}{h^2\nu^2} \quad (6)$$

Um den Anschluss an die Erfahrung zu gewinnen, haben wir noch den Betrag der Wechs. energie zwischen Materie und Lichtquant zu bestimmen. Beschränken wir uns auf die Dispersion eines Schwarmes von Lichtquanten in einem homogenen, isotropen Medium, so haben wir offenbar den Mittelwert der zeitlich variablen Wechs. energie in Rechnung zu ziehen. Zu diesem Zweck müßten wir eigentlich von einzelnen Elementarprozessen ausgehen und zunächst die Wechselwirkung zwischen dem einzelnen Lichtquant und dem einzelnen Atom untersuchen. Für unsere Zwecke genügt aber schon die folgende elementare Betrachtung:

Wir wissen, daß ein System von Atomen unter dem Einfluß einer

Dirac 117, 118
Darwin 118.
Sommerfeld. 47.
Neumann 48
Jordan, Klein 47.

elektromagnetischen Welle ein elektrisches Moment erhält ;

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi\alpha} \mathbb{E} \quad (7)$$

Die Arbeit, die von der Welle dabei geleistet wird, ist offenbar

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \mathcal{M} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha} \overline{\mathbb{E}^2} \quad (8)$$

Nun stellt $\frac{1}{4\pi} \overline{\mathbb{E}^2}$ die Energiedichte der Elektromagnetischen Welle dar; diese ist offenbar gleichzusetzen $n h\nu$, wobei n die Anzahl der Lichtquanten in der Volumeneinheit bedeutet. Auf ein einzelnes Lichtquant entfällt also im Mittel die Wechselwirkungsenergie

$$V = \frac{h\nu}{2\alpha} = \frac{1}{2n} \mathbb{E} \mathcal{M}$$

Dies in (6) eingesetzt, ergibt für den Brechungsindex mit Ausnahme der Umgebung der Resonanzstellen das klassische Resultat:

$$n^2 = 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha} \approx 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Wir gelangen also auf diesem Wege tatsächlich in durchaus befriedigender Weise zur Dispersionstheorie, bis auf einen Umstand der im nächsten Paragraphen besprochen werden soll.

Der Gültigkeitsbereich der oben genannten Formeln läßt sich wie in der klassischen Theorie erweitern, indem man die Dämpfung der erzwungenen Schwingungen der Atome mit berücksichtigt. Es ergibt sich dann in der Nähe der Resonanzstellen eine starke Absorption (Kap II)

Elektronenfeld und Quantenfeld.