Zur vierdimensionalen Formulierung der undulatorischen Mechanik (81, 1926 S. 632)

In seiner ersten Mitteilung über Wellenmechanik hat Schrödinger die Wellengleichung durch Einführung der Substitution

$$W = \frac{h}{2\pi} \log \psi \qquad (1)$$

in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - E = 0 ,$$

aus dem Variationsprinzip

$$\delta \iiint \left[H\left(q_i, \frac{h}{2\pi} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) - E \right] \psi \, dx\, dy\, dz = 0$$

abgeleitet.

In der zweiten Mitteilung[2] hat er die Beziehung (1) verlassen und eine andere, an die de Broglieschen Ideen angepaßte Überlegung der Wellenmechanik zugrunde gelegt. Der Ausgangspunkt is die Relation

$$(\mathrm{grad}\, W)^2 = 2(E-V) ,$$

welche in der klassischen Mechanik die Hamiltonschen partielle Differentialgleichung darstellt (E = Energie, V = statisches Potential). Auf Grund der Konstruktion der Flächen $W = \mathrm{const}$ ergibt sich die Phasengeschwindigkeit

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$$

In der zugehörigen Wellengleichung

$$\Delta \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

wird

$$\psi = e^{2\pi i \frac{E}{h} t} \cdot \psi_1$$

eingesetzt, worin ψ_1 von der Zeit unabhängig ist; so folgt

$$\Delta \psi_1 + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi_1 = 0 .$$

Ein Analogon dieses Verfahrens, wie auch Schrödinger betont, scheint man in der Relati~~v~~vitätsmechanik beim Vorhandensein des Viererpotentials nicht finden zu können.

V. Fock[1] hat auch für allgemeinere Fälle der dreidimensionalen Mechanik die Wellengleichung aufgestellt. Er setzt den Ansatz

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -E ; \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = -E \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

1) V. Fock, Zs. Phys. 38 S. 242, 1926.

in
$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$
ein und stellt das Variationsprinzip
$$\delta \int \left[H\left(q_i, -E \frac{\frac{\partial \psi}{\partial q_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}}\right) - E \right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 d\Omega = 0$$
auf, wobei $d\Omega = dt\, dq_1\, dq_2\, dq_3$.

Im folgenden werden wir im Anschlusse an die ~~A~~ Gesichtspunkte der ersten Methode von Schrödinger, sowie der Arbeit von Fock, die Wellengleichung für die Relativitätsmechanik im allgemeine Falle des Viererpotentials ableiten.

Die Maßbestimmung (mit rechtwinkligen räumlichen Koordinaten) ist

(2) $$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

worin $x_0 = ct$. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons lassen sich aus der Lagrangefunktion 2)
$$L = \frac{mc^2}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\right] + e \sum_{k=0}^{3} \varphi_k \frac{dx_k}{ds}$$
ableiten, wobei φ_i die Komponenten des Viererpotentials bedeuten.

Führen wir in die Hamiltonfunktion

(3) $$H = \frac{mc^2}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\right]$$

die Impulskoordinaten

(4) $$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx_0}{ds}} = mc^2 \frac{dx_0}{ds} + e\varphi_0 = \frac{\partial W}{\partial x_0}$$

(5) $$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{ds}} = -mc^2 \frac{dx_i}{ds} + e\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ein, so wird die Hamiltonsche partielle Diff.gl.

(6) $$\frac{1}{2mc^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_0} - e\varphi_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - e\varphi_i\right)^2\right] + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Da die Eigenzeit s explizit nicht vorkommt, ist $\frac{\partial W}{\partial s} = \text{const}$ und zwar nach (2) und (3)

---

2) e = Ladung des Elektrons, m = Ruhmasse. — Der Ansatz
$$L = mc^2 \sqrt{\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right]} + e \sum_{i=0}^{3} \varphi_i \frac{dx_i}{ds}$$
ist nicht anwendbar, da die zugehörige Hamiltonfn

(7) $$\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{mc^2}{2}$$

Wenn das Viererpotential die kosmische Zeit x_0 nicht enthält, so existiert das Energieintegral

(8) $$\frac{\partial W}{\partial x_0} = \text{const} = E$$

Diesen Fall werden wir später in Betracht ziehen. Vorläufig sei der Energiesatz nicht vorausgesetzt worden.

Um die Wellengleichung zu gewinnen, setzen wir

(9) $$W = \frac{ch}{2\pi i} \log \psi. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

So folgt nach (7)

(10) $$\frac{ch}{2\pi i} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{mc^2}{2}$$

also

(11) $$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{ch}\varepsilon s} \cdot \psi_0(x_0 x_1 x_2 x_3),$$

worin ψ_0 von s unabhängig ist und $\varepsilon = \frac{mc^2}{2}$. Aus (9) und (10) ergibt sich

(12) $$\frac{\partial W}{\partial x_i} = -\varepsilon \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial s}} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Nach die Einsetzung von (7), (12) in (6) erhalten wir

(13) $$\left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + e\varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + e\varphi_i \frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 - 4\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 = 0.$$

Betrachten wir anstatt dieser Differentialgleichung, entsprechend dem Gedankengang von Schrödinger, das Variationsprinzip

(14) $$\delta \int Q\, dw = 0,$$

worin $dw = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, ds$ und Q die quadratische Form an der linken Seite von (13) bezeichnet.

Aus (14) erhalten wir nach einer leichten Rechnung (durch partielle Integration) die Wellengleichung:

(15) $$\left\{ \begin{aligned} &\varepsilon^2 \operatorname{Div}\operatorname{grad} \psi + \varepsilon e \operatorname{Div} \Phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} + 2\varepsilon e \left(\Phi \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) \\ &\quad + \left(e^2 \Phi^2 - 4\varepsilon^2\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

wobei

$$H = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{ds}} \frac{dx_i}{ds} - L.$$

identisch verschwindet. — Nach Elimination der Eigenzeit gilt
$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]} - e\left(\varphi_0 + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \frac{dx_i}{dt}\right)$$
Vgl. meine Note: Phys. Ztschr. 26 S. 207. 1925

$$\text{Div grad}\,\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}$$

$$\text{Div}\,\Phi = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}$$

$$\left(\Phi\,\text{grad}\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = \varphi_0\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial x_0} - \sum_{i=1}^{3}\varphi_i\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial x_i}$$

$$\Phi^2 = \varphi_0^2 - \sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2$$

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{2}$$

Betrachten wir nun den speziellen Fall, wo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ und $e\varphi_0 = V(x_1 x_2 x_3)$ von x_0 unabhängig ist, setzt man

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{ch}}\, e^{\frac{2\pi i}{ch}Ex_0}\cdot\overline{\Psi}(x_1 x_2 x_3),$$

so ist mit Rücksicht auf (9) und auch (8) formal erfüllt.

Die (16) $\Delta\overline{\Psi} + \frac{4\pi^2}{c^2h^2}\left[(E-V)^2 - m^2c^4\right]\overline{\Psi} = 0$

Diese letzte Gleichung können wir auch durch die zweite Schrödinger-sche Methode[1)*] gewinnen. Es ist nämlich die H.P.D.G. in diesem Falle

$$(\text{grad}\,W)^2 = (E-V)^2 - m^2c^4$$

wo grad W dreidimensional zu nehmen ist. Hier ist E so normiert, daß die Ruhenergie des Elektrons nach (8), (4) mc^2 beträgt. Setzen wir mc^2+E an Stelle von E und $V=-\frac{e^2}{r}$ so geht (16) in Gleichung (27) von Fock[2)] über. — Es sei noch bemerkt, daß die in (16) eingehende Phasengesch. mit dem Ansatz von de Broglie[3)] für den Brechungsindex im Einklang ist.

Budapest, August 1926.

---

1) Unsere ~~gl~~ Gl. (16) hat Oskar Klein (Zs. 37 S. 895, 904, 1926) im Rahmen der fünfdimensionalen Relativitätstheorie ~~ge~~ abgeleitet.

2) Fock a.a.O S. 247.

3) de Broglie, Journal de Physique, Januar 1926.

(Eingegangen 30. August 1926)

Walter Wessel

Über den Massenpunkt in der Wellenmechanik;

(—— S. 1086)

Die Quantenmechanik machte schon in Gestalt der Bohrschen Theorie von den Gleichungen der Punktmechanik einen insofern eingeschränkten Gebrauch, als sie zwar die vollstädige Lösung S der H-J. D.G. — die Wirkungsfunktion — ableitet, aber nicht bis zu den Bahngleichungen u. Lagenparametern überging, sondern die Konstanten — unmittelbar durch die Ganzzahligkeitsforderungen festgelegte; erst bei den unperiodischen Bewegungen, wo die "Quantenbedingungen" versagten, mußte man bis zu den Bewegungsgleichungen und Anfangswerten der Lagen-koordinaten gehen. Die schöne, von Schrö-dinger in mehreren Abhandlungen[1)] entwickelte Wellenmechanik interpretiert das so: die Wirkungsfn, eine Ortsfunktion und klassisch Repräsentantin einer Schar von Systembahnen als ihren Orthogonaltrajektorien, ist Phase einer Wellenbewegung, die als Ganzes auffassen ist und von der nicht eine noch weiter zu bestimmende Trajektorie herausgegriffen werden kann. — Für den kräftfrei bewegten Massenpunkt der Masse m_0 und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ haben wir z.B. die Wirkungsfunktion

$$S = \frac{m_0(\mathfrak{v},\mathfrak{r})}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const}$$

($\beta = \frac{v}{c}$, c Lichtgesch.). Die Punktmechanik hebt eine Orthogonal-gerade der Ebenenschar $S = \text{const.}$ hervor und bezeichnet sie als Bahn des Punktes; die Wellenmechanik betrachtet dagegen eine Funktion der Form

$$\psi = \psi_0\, e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt-S)}$$

(W Energie), d.i.

$$\psi = \psi_0 \exp \frac{2\pi i\, m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{(\mathfrak{v},\mathfrak{r})}{c^2}\right) \qquad (1)$$

die der grundlegenden Differentialgl. dieser Theorie

$$\Delta\psi = \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} \qquad u = \frac{c^2}{v} \qquad (2)$$

genügt, irgendwie als Darstellung der Bewegung. M. Born

1) L. Flamm, Phys. Zs. 27 S. 600 1926.

neigt sogar zu der Meinung, daß sich in der Angabe eben der Funktion (1) die Aussagen der Theorie grundsätzlich erschöpften und daß die Bahnbestimmung der Elektronen nur statistisch durchführbar wäre.[1]

Man kann aber eine sehr viel mehrsagende Lösung von (2) ableiten, die nur asymptotisch, nämlich in großer Entfernung vom Orte des Massenpunktes, in (1) übergeht, und die diesen Ort und sein Fortschreiten genau festlegt. Wir brauchen nämlich nur die ~~reiner~~ Kugelwelle mit ruhendem Zentrum entsprechenden Lösung

$$\psi = \psi_0 \frac{e^{2\pi i\nu\left(t - \frac{r}{u}\right)}}{r}.$$

von (2) einer Lorentztransformation zu unterwerfen, aber mit der Phasengeschwindigkeit $u = \frac{c^2}{v}$ an Stelle der Lichtgesch c, also der Transformation

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' - \mathfrak{v}\left(\frac{(\mathfrak{r}',\mathfrak{v})}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}}\right) + \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}}\right), \\ t = \dfrac{t' - \frac{(\mathfrak{r}',\mathfrak{v})}{u^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}} \end{cases}$$

Dann geht die Gleichung (2) in sich über; als neue Lösung erhalten wir aber

$$(4)\quad \psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i\nu\left(t - \frac{(\mathfrak{r},\mathfrak{v})}{u^2} - \frac{1}{u}\sqrt{(\mathfrak{r}-\mathfrak{v}t)^2 - \frac{[\mathfrak{r},\mathfrak{v}]^2}{u^2}}\right)}{\sqrt{(\mathfrak{r}-\mathfrak{v}t)^2 - \frac{[\mathfrak{r},\mathfrak{v}]^2}{u^2}}}$$

(Wir haben den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}$ in ψ_0 bzw. in die noch willkürliche Konstante ν aufgenommen und wieder t und r an Stelle von t' und r' geschrieben.) So haben wir also ein Wellengebilde mit einer natürlichen Singularität am Orte $\mathfrak{r} = \mathfrak{v}t$ (die sich durch Überlagerung von zwei Lösungen mit $+u$ und $-u$ auch in ein bloßes Maximum verwandeln läßt) und die mit der nach Größe und Richtung durch $\mathfrak{v}$ gegebenen Geschwindigkeit auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung fortschreitet.

Daß diese Lösung nicht ganz trivial ist, glauben wir, weil erstens die ebenen Wellen, durch die man sie in großer Entfernung vom Orte der Singularität naturgemäß approximieren kann, in der Richtung von $\mathfrak{v}$ wirklich die Geschw. u haben — das wird durch die Transformation (3) genau so vermittelt, wie die Invarianz von c durch die gewöhnliche Lorentztransf. — und zweitens, weil man ν so wählen kann, daß einerseits diese Wellen die richtige Frequenz aufweisen, während anderseits für einen mitbewegten Beobachter das ganze Gebilde mit der von v unabhängigen Frequenz m_0c^2/h schwingt; das beruht auf dem Werte von u. Setzen wir nämlich $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{v}$, so finden wir

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i\nu\left(1+\frac{v}{u}\right)\left(t - \frac{r}{u}\right)}{r - vt}$$

also die richtige Phasengeschw. u. Um auch die richtige Frequenz einzuführen, müssen wir

$$(5)\quad \nu = \frac{m_0c^2}{h\left(1+\frac{v}{u}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

setzen. Wir transformieren uns nun auf ein mitbewegtes Bezugssystem. Diese Transformation muß natürlich eine wirk~~ung~~liche Lorentztransf. sein mit dem Parameter c, nicht u. Wir vertauschen also in (3) $+\mathfrak{v}$ mit $-\mathfrak{v}$ und u mit c und tragen in (4) ein; dann haben wir für $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{v}$ zunächst

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i\nu\, 1+\cancel{\frac{v}{u}}/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,(}{}$$

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i\nu \frac{1+\frac{v}{u}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\left(1-\frac{v}{u}\right)t' + \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{u}\right)r'\right)}{r'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

und mit ν nach (5) und u nach (2)

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i \frac{m_0c^2}{h}t'}{r'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

d.h. der mitbewegte Beobachter erkennt die Schwingung als mit $\frac{m_0c^2}{h}$ veränderlich, und zwar parallel $\mathfrak{v}$ unabhängig vom

1) M. Born, Zs. 38 S. 803, 1926

Orte mit gleicher Phase. Die letzte Bemerkung erinnert unmittelbar an ein merkwürdiges, mechanisches Bild de Broglies[1]); in der Tat haben wir mit (4) gewissermaßen die analytische Beschreibung jenes „periodischen Phänomens" gewonnen, an dem de Broglie seinen Satz von der Phasenharmonie demonstriert. Der Massenpunkt ist danach ein pulsierendes Etwas, das für einen mitbewegten Beobachter mit der Frequenz $\frac{m_0c^2}{h}$ für einen ruhenden (NB.: der davon durch Lichtsignal informiert wird) mit $\frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ schwingt; darüber hinweg streicht beständig eine ebene Welle der Frequenz $\frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ mit einer Geschwindigkeit, die die Lichtgeschw. in demselben Verhältnis überschreitet, wie die des Massenpunktes darunter liegt. Dann ist das pulsierende Etwas beständig in Phase mit der Welle. Würden wir unsere asymptotisch ebenen Wellen als ebene Wellen über die Zentralerregung hinweg fortsetzen, so würden sie, für einen ruhenden Beobachter, mit ihr ebenso in Phase sein, wie de Broglies Wellen mit dem „periodischen Phänomen".

In unserer Darstellung läuft dieses Phänomen nicht mehr unverbunden neben der Welle her, sondern ist selber ein Teil davon; der heranrückende Massenpunkt kündigt sich durch ebene Wellen an, aber bei seinem Näherkommen krümmen sie sich allmählich darum herum und schließen ihn zuletzt als Zentrum ein. Dieses Bild hat ohne Zweifel auch de Broglie im Auge, wenn er in seinem mechanischen Vergleiche[2]) schwingende Systeme um ein Zentrum verdichtet sein läßt[3]); es liegt überdies, wie uns scheint, ganz im Sinne von Schrödingers physikalisch so ansprechendem Grundgedanken, nach dem wir in weiter Ferne von Atomen und Massenpunkten die Phasenflächen der Trägheitsbewegung merklich eben, die Systembahnen „Strahlen" sind, während in der Nähe solcher Zentren eine Art

1) L. de Broglie; Ann. Phys. 3 S. 22, 1925; Phil. Mag. 47 S. 446 1924
2) L. de Broglie; — S. 36–37.

Beugung durch Variation des Brechungsindex' auf kurze Strecken eintritt. Wie sollte sich nicht auch die Phasenwelle des Massenpunktes selber an seinem Orte durch eine Singularität auszeichnen?

Auf große Entfernungen von ihrem Zentrum nimmt die Fn ψ räumlich wie $1/r$ ab; für kleine Geschwindigkeiten $v \ll u$, d. i. $v \ll c$, genauer wie e^{ikr}/r, $k=\frac{2\pi m_0 v}{h}$. Es sei daran erinnert, daß das auch, aber für ~~kleine Geschw. $v \ll c$~~ ein ortsfestes Zentrum, für Schrödingers Lösungen beim Keplerproblem hinsichtlich ihrer Abhängigkeit vom radius vector für positive Energiewerte zutrifft. — Seine Eignung zum „Modell eines Massenpunktes" kann unser durch (4) und (5), $u = c^2/v$ beschriebenes Gebilde natürlich nur dadurch nachweisen, daß es die Bewegung des Massenpunktes bzw. des Elektrons beim Vorbeigang an ruhenden Ladungen und Atomen wenigstens asymptotisch gesetzmäßig wiederzugeben imstande ist. Eine Eigentümlichkeit unserer Funktion, die ihre analytische Behandlung erschwert, ist, daß sie sich im Ruhsystem nicht in das Produkt einer Fn der Zeit und einer Fn des Ortes aufspalten läßt.

Jena, Phys. Inst. der Univ., Oktober 1926.

3) Ich möchte nicht versäumen, an dieser Stelle auf eine Note Hrn de Broglies Compt. Rend. 180 S. 498. 1925 hinzuweisen, die ich zu meinem Bedauern erst nach Drucklegung der meinen bemerkte und in der de Broglie auch lorentztransformierte Kugelwellen zur Illustration des Elektrons heranzieht. Es handelt sich dabei freilich um eine Lösung der El. mg. Schwingungsgleichung; daher breiten sich im mitbewegten System de Broglies Wellen nach allen Seiten mit Lichtgesch. aus, während die Phasengesch. unserer Wellen Fn der Richtung ist (Anm. b. d. Korr.)

V. Fock in Leningrad

Zur Schrödingerschen Wellenmechanik (Zs. 38 p.242 1926)

In seiner bedeutungsvollen Arbeit leitet E. Schrödinger eine Wellengleichung ab, die als Grundgleichung der „undulatorischen" ~~Me~~ Mechanik und als Ersatz der Hamilton-Jocobischen partiellen Diff.-gleichung H.P. der gewöhnlichen Mechanik anzusehen ist. Die Ableitung wird unter der Voraussetzung geführt, ~~das~~ daß die Lagrangesche Funktion keine in den Geschwindigkeiten linearen Glieder enthält. Schrödinger schreibt (Fußnote auf S. 514):

„In der Relativitätsmechanik und mit Berücksichtigung des Magnetfeldes wird die Aussage der H.P. komplizierter. Im Falle eines einzigen Elektrons sagt sie aus. . . . ."

Im folgenden werden wir versuchen, einige dieser Schwierigkeiten zu beseitigen und die betreffende Wellengleichung für den allgemeineren Fall einer Lagrangeschen Funktion mit linearen Gliedern abzuleiten.

Unsere Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird die W.Gl. abgeleitet; der zweite Teil enthält Beispiele der Schrö. Quantisierungsmethode. Schröd. hat bereits einige dieser Beispiele durchgerechnet, jedoch nur die Resultate und nicht die Rechnungen mitgeteilt.

Erster Teil

Die H.J. D.Gl. für ein System mit f Freiheitsgraden sei

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine quad. Fn der Ableitungen der Wirkungsfunktion W nach den Koordinaten[1])

Wir ersetzen hier

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &\quad \text{durch} \quad -E = -E\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\frac{\partial\psi}{\partial t}}, \\ \frac{\partial W}{\partial q_i} &\quad \text{durch} \quad -E\frac{\frac{\partial\psi}{\partial q_i}}{\frac{\partial\psi}{\partial t}} \quad (i=1,2,\cdots f) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wo E die Energiekonstante des Systems bezeichnet. Nach

1) Dieses in der klassischen Mech. Auch in der relat. Mechanik eines Massenpunktes läßt sich die Gleichung (wenigstens bei Abwesenheit des Magnetfeldes) auf diese Form bringen; jedoch erscheinen uns die mit der transformierte Gleichung vorzunehmenden Operationen nicht als ganz einwandfrei.

Multiplikation mit $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$ erhalten wir eine homogene quad. Funktion der ersten Ableitungen von ψ nach den Koord und der Zeit:

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{i=1}^{f} Q^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\sum_{i=1}^{f}P^i\frac{\partial\psi}{\partial q_i} + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \qquad (3)$$

Zur Aufstellung der Wellengleichung betrachten wir das Integral

$$J = \int Q\, d\Omega\, dt \qquad (4)$$

$d\Omega$ bezeichnet hier das Volumenelement ~~eines Raumzeit~~ des mehrdimensionalen Koordinatenraumes; falls das System aus n Massenpunkten mit den Koordinaten $x_i\, y_i\, z_i$ besteht, kann man unter $d\Omega$ das Produkt der eigentlichen Volumenelemente

$$d\tau_i = dx_i\, dy_i\, dz_i$$

verstehen, also:

$$d\Omega = d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n$$

Das Produkt $d\Omega dt$ ist also nicht das Volumenelement eines Raumzeitgebietes, in welchem $2Q$ das Quadrat des Gradienten einer Funktion ψ ist.

Die Integration nach den Koordinaten ist über den ganzen Koord.raum. und nach der Zeit über ein beliebiges Intervall $t_2 - t_1$ zu erstrecken.

Die gesuchte Wellengleichung erhält man durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals J:

$$\delta\int Q\, d\Omega\, dt = 0 \qquad (5)$$

Dabei kann man das Verschwinden der Variation $\delta\psi$ entweder an den Grenzen des gesamten Integrationsgebietes oder aber nur für die Zeitpunkte t_1 und t_2 fordern.

Die explizite Darstellung der Wellengleichung ist wohl überflüssig; wir werden sie lieber an mehreren Beispielen erläutern.

Fragt man nun nach periodischen Lösungen, und setzt man

$$\psi = e^{2\pi i \nu t}\psi_1 = e^{2\pi i \frac{E}{h} t}\,\psi_1\,, \quad \text{---} \quad (6)$$

so erhält man für ψ_1 eine Gleichung, welche die Zeit nicht erhält. Die Energie E tritt als Parameter auf, und zwar in der nicht relativistischen Mechanik linear. Speziell im Falle verschwindender P^i der Formel (3) fällt die Gleichung mit der von Schrödinger aufgestellten zusammen. Falls die P^i nicht ~~w~~ verschwinden, sind die Koeffizienten einiger Glieder der (zeitfreien) Wellengleichung komplex.

Die ausgezeichneten Eigenwerte werden dann nach Schröd. durch die Forderung der Eindeutigkeit, Endlichkeit, und Stetigkeit der Lösung bestimmt.

Für rein periodische Lösungen (6) darf man die Ausdrücke in (2) direkt gleich $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ setzen u. man erhält

$$\psi = \text{const}\cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}W}$$

wodurch die Bedeutung der Wirkungsfn W als Phase eines Wellenvorganges klar zutage tritt.

Zweiter Teil

1. Keplerbewegung im Magnetfeld. Das Magnetfeld vom Betrage H sei längs der z-Achse gerichtet. Die Lagrangesche Funktion ist bekanntlich

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{eH}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x}) + \frac{e^2}{r} \qquad (8)$$

und die H.P. lautet

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2m}\Big\{(\operatorname{grad} W)^2 + \frac{eH}{c}\Big(y\frac{\partial W}{\partial x} - x\frac{\partial W}{\partial y}\Big) + \frac{e^2H^2}{4c^2}(x^2+y^2)\Big\}\\ -\frac{e^2}{r} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0\end{aligned}\right\} (9)$$

Die quadratische Form Q ist

$$\left.\begin{aligned}Q = \frac{E^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{eHE}{2mc}\Big(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial t}\\ -\Big[E + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2H^2}{8mc^2}(x^2+y^2)\Big]\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\end{aligned}\right\} (10)$$

und die Wellengleichung lautet

$$\Delta\psi - \frac{eH}{Ec}\Big(y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - x\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}\Big) - \frac{2m}{E^2}\Big[E + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2H^2}{8mc^2}(x^2+y^2)\Big]\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots (11)$$

(Δ Laplacescher Operator). Führt man die Funktion ψ_1 ein,

$$\psi = \psi_1 e^{2\pi i \frac{E}{h} t},$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{eH}{2mc} = \omega, \qquad \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} = a \qquad (12)$$

so erhält man für ψ_1 die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\Delta\psi_1 - \frac{4\pi i m}{h}\omega\Big(y\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - x\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\Big)\\ + \Big[\frac{2E}{ae^2} + \frac{2}{ar} - \frac{4\pi^2m^2\omega^2}{h^2}(x^2+y^2)\Big]\psi_1 = 0\end{aligned}\right\} (13)$$

Führt man sphärische Koordinaten ein und wählt man a als Längeneinheit, so erhält man (mit einer angeänderten Bedeutung von r)

$$\Delta\psi_1 + 2i\omega_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} + \Big[\alpha + \frac{2}{r} - \omega_1^2 r^2\sin^2\vartheta\Big]\psi_1 = 0 \qquad (14)$$

mit den Abkürzungen

$$\frac{2\pi m}{h}\omega a^2 = \omega_1, \qquad \frac{2Ea}{e^2} = \alpha \quad \text{--} \quad (15)$$

Vernachlässigt man hier ω_1^2, so ~~erhält~~ läßt sich Gl. (14) durch den Ansatz

$$\psi_1 = e^{in_1\varphi}P_n^{n_1}(\cos\vartheta)\,r^n\,\psi_2(r) \qquad (16)$$

lösen, wo $P_n^{n_1}(\cos\vartheta)$ die „zugeordnete Kugelfn“ bezeichnet. Man erhält nämlich für $\psi_2(r)$ die Gleichung

$$r\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + 2(n+1)\frac{d\psi_2}{dr} + [2 + (\alpha - 2n_1\omega_1)r]\psi_2 = 0 \qquad (17)$$

deren Eigenwerte bereits von Schrödinger gefunden sind. Man bekommt

$$\alpha = 2n_1\omega_1 - \frac{1}{(n+p)^2} \quad \text{- - - - - - - -} \quad (18)$$

Für die Verschiebung $\Delta\nu$ der Spektralterme ergibt sich der Wert

$$\Delta\nu = n_1\frac{\omega}{2\pi} = n_1\frac{eH}{4\pi mc} \qquad (19)$$

in Übereinstimmung mit der älteren Theorie.

2. Bewegung des Elektrons im elektrostatischen Felde der Kernladung und im Magnetfelde eines Dipols, das im Zentrum der Kernladung liegt.[4)]

1) Krutkow, Adiabatische Invarianten und ihre Anwendungen in der theo. Physik. Verhand. d. Staatl. Opt. Inst. in Petrograd 2 Nr 12, S. 38 Berlin 1922 (russisch)

Bei der Lösung dieses Problems stößt man auf eine Schwierigkeit allgemeinen Charakters, die wir hier nicht überwinden konnten. Das Beispiel ist gewählt, um auf die Möglichkeit des Auftretens von Schwierigkeiten dieser Art aufmerksam zu machen.

Die z-Achse falle mit der Richtung des Dipolmomentes zusammen; der Betrag des letzteren sei M. Die Lagrangesche Funktion ist

$$L = \frac{1}{2} m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - \frac{eM}{cr^3}(x\dot y - y\dot x) + \frac{e^2}{r} \qquad (20)$$

und die H.P. in sphärischen Koordinaten lautet, unter Vernachlässigung von M^2:

$$\frac{1}{2m}(\operatorname{grad} W)^2 + \frac{eM}{mcr^3}\frac{\partial W}{\partial\varphi} - \frac{e^2}{r} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \qquad (21)$$

Bildet man die Wellengleichung

$$\Delta\psi + \frac{2eM}{Ecr^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial\varphi} - \frac{2m}{E^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (22)$$

so erkennt man, daß der Punkt $r=0$ für alle Integrale ein wesentlich singulärer Punkt (Stelle der Unbestimmtheit) ist. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, wählen wir die Größe a (12) als Längeneinheit, bezeichen

$$\beta = \frac{8\pi^3 e^3}{h^3}\cdot\frac{Mm}{c} \qquad (23)$$

und führen durch den Ansatz

$$\psi = r^n P_n^{n_1}(\cos\vartheta)\, e^{2\pi i \frac{E}{h}t + i n_1\varphi}\, F(r) \qquad (24)$$

die Gleichung (22) auf die gewöhnliche Diff.gl.

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2n+2}{r}\frac{dF}{dr} + \left(\alpha + \frac{2}{r} - \frac{2n_1\beta}{r^3}\right)F = 0 \qquad (25)$$

zurück. Der wesentlich singulär Charakter des Punktes $r=0$ ist durch das Glied $\frac{2n_1\beta}{r^3}$ bedingt; anderseits muß dieses Glied dem physikalischen Sinne nach die Rolle eines kleinen Korrektionsgliedes spielen[4]) und keineswegs für den Charakter der Lösung ausschlaggebend sein. Diese Schwierlichkeit ist nicht nur für das gewälte Beispiel, sondern überhaupt für alle Fälle, wo man sich einer angenäherten Darstellung der Kräfte bedient, charakteristisch; in der Theorie der Schrödingerschen Wellengleichung muß nämlich die Näherung für den ganzen Raum

4) Wir haben ja Quadrate von β bereits vernachlässigt.

uns nicht nur im Gebiet der Elektronenbahn gelten. In einem „natürlichen" mechanischen System (Elektronen und Kerne) kann diese Schwierigkeit vermutlich nicht vorkommen. Wie diese Schwierigkeit zu überwinden ist, bleibt vorläufig unklar. Vielleicht muß man verschiedene Näherungsdarstellungen der Kräfte für verschiedene Teilgebiete des Koordinatenraumes benutzen, und an den Grenzen der Teilgebiete gewisse Stetigkeitsforderungen ~~der~~ für die Wellenfunktion ψ aufstellen. Ob dabei jede Willkür in der Bestimmung der Energiewerte ausgeschlossen werden kann, bleibt unentschieden. Überhaupt bedarf die hier berührte Frage einer eingehenden Untersuchung.

3. Relativistische Keplerbewegung.[2]) Die H.P-Gl. (von Quadratwurzeln befreit) lautet

$$(\operatorname{grad} W)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - 2\left(m+\frac{e^2}{c^2 r}\right)\frac{\partial W}{\partial t} + 2m\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{c^2r^2} \qquad (26)$$

und die entsprechende Wellengleichung

$$\Delta\psi = \frac{1}{E^2}\left[2mE + \frac{E^2}{c^2} + 2\left(m+\frac{E}{c^2}\right)\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{c^2r^2}\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (27)$$

Wir bezeichnen

$$\frac{1}{a_1} = \frac{4\pi^2 e^2}{h^2}\left(m+\frac{E}{c^2}\right), \qquad \alpha_1 = a_1^2\frac{4\pi^2}{h^2}\left(2mE+\frac{E^2}{c^2}\right) \qquad (28)$$

$$\gamma = \frac{2\pi e^2}{hc}$$ (Konstante der Feinstruktur),

führen die Größe a_1 als Längeneinheit ein und machen den Ansatz (6). Die Gleichung für ψ_1 wird:

$$\Delta\psi_1 + \left(\alpha_1 + \frac{2}{r} + \frac{\gamma^2}{r^2}\right)\psi_1 = 0 \qquad (29)$$

Setzt man nun

$$\psi_1 = r^{n'}\, Y_n(\vartheta,\varphi)\cdot F(r) \qquad (30)$$

mit

$$n' = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(n+\tfrac{1}{2}+\gamma\right)\left(n+\tfrac{1}{2}-\gamma\right)} \qquad (31)$$

(also n' nicht ganz), so bekommt man für $F(r)$ die Diff.gl.

$$r\frac{d^2F}{dr^2} + 2(n'+1)\frac{dF}{dr} + (2+\alpha_1 r)F = 0 \qquad (32)$$

also wieder die Gleichung (17). Es gilt also

$$\alpha_1 = -\frac{1}{n'+p} \qquad (p=1,2,\dots) \qquad (33)$$

2) Siehe Fußnote auf S. 243

Berechnet man daraus die Energie, so bekommt man

$$E = mc^2 \left(\frac{n'+p'}{\sqrt{(n'+p')^2+\gamma^2}} - 1 \right), \tag{34}$$

also die Sommerfeldsche Formel mit dem einzigen Unterschiede, daß die Teilquanten halbzahlig sind, wie schon Schrödinger auf S. 372, l.c. bemerkt hat.

4. Starkeffekt. Die Richtung des elektrischen Feldes vom Betrage D falle mit der z-Achse zusammen. Wir führen in üblicher Weise parabolische Koordinaten

$$z + i\rho = \frac{a}{2}(\xi + i\eta)^2 \tag{35}$$

ein, benutzen die Abkürzungen

$$a = \frac{h^2}{4\pi e^2 m}, \quad \alpha = \frac{2Ea}{e^2}, \quad \varepsilon = D \cdot \frac{a^2}{e} \tag{36}$$

und erhalten für die zeitfreie Funktion ψ_1 die Wellengleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} \\ &+ [4 + \alpha(\xi^2 + \eta^2) - \varepsilon(\xi^4 - \eta^4)]\psi_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wir setzen

$$\psi_1 = X(\xi)\, Y(\eta)\, (\xi\eta)^n e^{in\varphi} \tag{38}$$

und erhalten für X und Y die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2X}{d\xi^2} + \frac{2n+1}{\xi}\frac{dX}{d\xi} + (2 + A + \alpha\xi^2 - \varepsilon\xi^4)X = 0 \\ &\frac{d^2Y}{d\eta^2} + \frac{2n+1}{\eta}\frac{dY}{d\eta} + (2 - A + \alpha\eta^2 + \varepsilon\eta^4)Y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Wir führen neue Veränderliche x, y und neue Parameter $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, μ ein, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &\xi^2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}x, && \eta^2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}y, \\ &2\varepsilon = \mu(\sqrt{-\alpha})^3 && \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} = \frac{\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

und erhalten statt (39):

$$\left.\begin{aligned} &x^2\frac{d^2X}{dx^2} + (n+1)x\frac{dX}{dx} + (\lambda^{(1)}x - x^2 - \mu x^3)X = 0 \\ &y^2\frac{d^2Y}{dy^2} + (n+1)y\frac{dY}{dy} + (-\lambda^{(2)}y - y^2 + \mu y^3)Y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die beiden Gleichungen sind von der Form

$$t^2\frac{d^2F}{dt^2} + (n+1)t\frac{dF}{dt} + (\lambda t - t^2 - \mu t^3)F = 0, \tag{42}$$

und zwar muß man für die erste Gleichung (41) den Parameter λ in (42) so bestimmen, daß $F(t)$ endlich und stetig für $t \geq 0$ wird, und für die zweite Gleichung (41) so, daß dasselbe für $t \leq 0$ gilt.

Benutzt man die Laplacesche Transformation

$$F(t) = \int e^{tz} f(z)\, dz, \tag{43}$$

so erhält man für $f(z)$ die Diff. gl.

$$\mu f''(z) + (z^2 - 1)f'(z) - [(n-1)z + \lambda]f(z) = 0 \tag{44}$$

μ ist ein kleiner Parameter von der Ordnung der el. Feldstärke. Wir suchen nun für λ, $F(t)$, $f(z)$ Entwicklungen nach Potenzen von μ

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \cdots \\ F(t) &= F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots \\ f(z) &= f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Die Reihe für $f(z)$ ist jedenfalls divergent, aber als asymp. Entwicklung brauchbar. Für $f_0(z)$ erhält man den Ausdruck

$$f_0(z) = (z-1)^{\frac{n-1+\lambda_0}{2}} \cdot (z+1)^{\frac{n-1-\lambda_0}{2}}, \tag{46}$$

und für $f_1(z)$ die Diff. gl.

$$\frac{d}{dz}\frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \frac{\lambda_1}{z^2-1} - \frac{f_0''(z)}{(z^2-1)f_0(z)} \tag{47}$$

Nun folgt aus Schrödingers Untersuchung der Diff. gl. (17), daß $f_0(z)$ eine rationale Funktion sein muß, damit $F_0(t)$ eine ganze Transzendente wird; und zwar muß für die erste Gleichung (41) λ_0 den Wert

$$\lambda_0^{(1)} = n - 1 + 2p_1 \qquad (p_1 = 1, 2, \cdots) \tag{48a}$$

und für die zweite Gleichung (41) den Wert

$$\lambda_0^{(2)} = -n + 1 - 2p_2 \qquad (p_2 = 1, 2, \cdots) \tag{48b}$$

haben. Eine analoge Überlegung zeigt, daß auch $f_1(z)$

rational sein muß. Das ist aber nur dann möglich, wenn das Residuum der rechten Seite von (47) für $z = \pm 1$ verschw. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dies für

$$\lambda_1 = \frac{1}{8}(3\lambda_0^2 - n^2 + 1) \qquad (49)$$

eintritt. Begnügen wir uns mit der ersten Näherung, so können wir also schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= n - 1 + 2p_1 + \frac{\mu}{8}\left[3(n-1+2p_1)^2 - n^2 + 1\right], \\ \lambda^{(2)} &= -n + 1 - 2p_2 + \frac{\mu}{8}\left[3(-n+1-2p_2)^2 - n^2 + 1\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Berechnet man aus (50) und (40) den Wert von α, so erhält man

$$-\alpha = \frac{1}{(n-1+p_1+p_2)^2} - 3\varepsilon(p_1 - p_2)(n-1+p_1+p_2) \qquad (51)$$

in Übereinstimmung mit der Epsteinschen Formel.

Leningrad, Phys. Institut der Uni., 5 Juni 1926.

Ludwig Flamm
Die Grundlagen der Wellenmechanik
Phys. Zt. 27, 1926 S. 600.

Einleitung

Daß die Quantentheorie in der ihr von N. Bohr u A. Sommerfeld gegebenen Gestalt trotz anfänglicher kolloesaler Erfolge nicht für alle Quantenerscheinungen tauglich ist, wurde in den letzten Jahren wiederholt ausgesprochen, zuletzt wieder von N. Bohr[1] selber. Man hat zur Behebung der Schwierigkeiten schon einen Weg beschreiten zu müssen geglaubt, der eine radikale Abkehr von der bisherigen Methode der Physik bedeutet und in M. Borns „Probleme der Atomdynamik"[2] zusammenfassend beschrieben ist, nämlich die Schaffung einer „wahren

1) Atomtheorie und Mechanik, Naturwiss. 14. I, 1926. Siehe auch den Schlußteil von M. Planck, Physikalische Gesetzlichkeit im Lichte neuere Forschung. — S. 257