Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik
von Born

40 S. 167

Einleitung. Die folgende Mitteilung soll dazu dienen, die Auffassung von dem Sinne der Quantenmechanik zu stützen, die ich kürzlich[1] an Hand der Stoßvorgänge zu begründen versucht habe. Diese Auffassung knüpft an den Schrödingerschen Formalismus an, interpritiert aber diesen in gänzlich anderer Weise als der Urheber dieser Theorie in seinen ersten Mitteilungen. Inzwischen hat Herr Schrödinger in seiner neuesten Veröffentlichung[2] einen Standpunkt eingenommen, der, wie mir scheint, von seinem früheren abweicht und unabhängig von meinen Argumenten zu einer Deutung kommt, die der meinigen verwandt ist. Früher nämlich hat Schrödinger verfochten, daß es „Wellenpakete" gibt, die nicht zerfließen, sondern beisammen bleiben und als Ganzes näherungsweise die Bewegung eines ~~Th~~ Teilchens (Elektrons) vortäuschen. Er belegte diese Annahme durch allgemeine Betrachtungen über die Analogie zwischen geometrischer Optik und Wellenoptik einerseits, korpuskularer Mechanik und Wellenmechanik andererseits; vor allem aber durch ein Beispiel[3], bei dem sich alles durch rechnen läßt.

Doch ~~so~~ scheint mir beides nicht beweisend. Einmal gibt es doch auch in der Optik keine „Wellenpakete", sonst hätte die Lichtquantentheorie leichteres Spiel gehabt; sodann ist das Beispiel, der harmonische Oszillator, wohl ganz singulär und kein Vorbild für andere Fälle. Ich möchte aber nicht gegen diese Auffassung polemisieren, sondern lieber den anderen Standpunkt erläutern und seine Brauchbarkeit durch neue Anwendungen belegen.

Dieser Standpunkt besteht darin, in der Quantenmechanik eine Verschmelzung von Mechanik und Statistik zu sehen, in folgendem Sinne: Die neue Mechanik beantwortet nicht, wie die alte, die Frage: „wie bewegt sich ein Teilchen", sondern die Frage: „wie wahrscheinlich ist es, daß ein Teilchen sich in gegebener Weise bewegt." Es werden also Teilchen (Punktladungen, Elektronen) angenommen, doch streng genommen nur in kräftfreien Räumen. Die Teilchen sind immer von einem Wellenvorgang[1]) begleitet; diese de Broglie-Schrödingerschen Wellen hängen von den Kräften ab und bestimmen durch das Quadrat ihrer Amplitude die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen in dem der Welle entsprechenden Bewegungszustand vorhanden ist. In seiner letzten Mitteilung beschäftigt sich auch Schrödinger mit dem Amplitudenquadrat der Wellen und führt dafür den Ausdruck „Gewichtsfunktion" ein, der sich der Terminologie der Statistik schon sehr nähert. Aber ich habe den Eindruck, daß Schrödinger anstrebt, die Quantenprozesse durch eine kausale Kontinuumstheorie im klassischen Sinne darzustellen. Das scheint mir allerdings nicht möglich. Natürlich ist keine Zweifel, daß die Schrödingerschen Formeln richtig sind; die mathematische Durchdringung der Quantengesetze, die er geleistet hat, ist sicherlich der Schlüssel zu ihrem ~~wahr~~ wahren Verständnis. Glücklicherweise führen die Formeln, die sich ja bisher fast ausschließlich auf stationäre Zustände beziehen, keineswegs zwangläufig zu der Schrödingerschen Interpretation. Vielmehr scheint es unerläßlich, hier die Grundgedanken der von Heisenberg begründeten Matrizenform der Theorie heranzuziehen. Diese Gedanken sind direkt aus der natürlichen Beschreibung der Atomprozesse durch „Quantensprung" erwachsen und betonen den klassi~~schen~~sch geometrisch unfaßbaren Charakter dieser Vorgänge. Daß beide Formen der Theorie für die stationären Zustände zu gleichen Ergebnissen kommen, steht fest; fraglich ist nur, wie nichtstationäre Abläufe zu behandeln sind. Hierbei erweist sich der Schrödingersche Formalismus als wesentlicher, vorausgesetzt, daß man ihn im Heisenbergschen Sinne ausdeutet. Ich möchte also eine Verschmelzung beider Betrachtungsweisen befürworten, bei der jeder eine ganz bestimmte Aufgaben

1) Die Wellen laufen im 3N-dimensionalen „Konfigurationsraum"; man kann aber aus ihnen für jedes Teilchen Wellen in 3 dim. Raume herstellen. (siehe Schr. 4. Mitteilung)

zukommt. Dieser Versuch ist bereits in meinen kürzlich ~~veröffentlichen~~ veröffentlichten Ansätzen zur Stoßtheorie enthalten; die Sache wird aber klarer, wenn man den Grenzfall ins Auge faßt, wo der eine der beiden Stoßpartner durch den Stoß nicht merklich beeinflußt wird (z. B. schnelle α-Strahlen gegen locker gebundene Elektronen), oder etwas allgemeiner den Fall, wo ein Atom unter der Wirkung von Kräften mit vorgegebenem Zeitablauf steht. Hier kann man als Kriterium für die Vernünftigkeit der Resultate die Frage stellen, ob im Grenzfall unendlich langsam veränderlicher Einwirkung ein dem Ehrenfestschen Adiabatensatz analoger Satz besteht und wie dieser lautet. Die Aufstellung dieses Satzes soll das Endziel dieser Arbeit sein.

§ 1. Definition der Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten.

Wir betrachten ein Atom mit ruhenden (unendlich schweren) Kern und beliebig vielen Elektronen, deren rechtwinkligen Koordinaten wir symbolisch in dem Zeichen x zusammenfassen. Dann lautet die Schr. Diffgl. für den Fall, daß die potentielle Energie U außer von x explizite von der Zeit abhängt[1]):

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2\mu}{h^2} U(x,t)\psi - \frac{4\pi i\mu}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \qquad (1)$$

Ist das Atom sich selbst überlassen, so ist die potentielle Energie eine Funktion $U(x)$ von x allein; dann existieren stationären Zustände, denen Lösung der Form

$$\psi(x,t) = \psi_n(x)\, e^{\frac{2\pi i}{h}W_n t} \qquad (2)$$

entsprechen[2]). Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß das System nicht entartet ist, also alle W_n voneinander verschieden sind. Die $\psi_n(x)$ sind orthogonal und seien auf 1 normiert:

$$\int \psi_n(x)\psi_m^*(x)\,dx = \delta_{nm} \qquad (3)$$

Durch Superposition der Funktionen (2) erhält man eine all-

1) Auch der 5-dim ~~form~~. Formel (Klein. 37)
2) Wir beschränken uns hier und im folgenden auf die Betr. des diskreten Termsp.

-gemeinere Lösung (die ~~A~~ allgemeinste, die dem Integral
$$\int |\psi(x,t)|^2 dx$$
einen endlichen Wert erteilt):
$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x)\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t} \qquad (4)$$

Es ist nun die Frage, was diese Funktion physikalisch bedeutet. Schrödinger meint, wie aus seiner letzten Mitteilung[3]) hervorgeht, daß im einzelnen Atom gleichzeitig „mehrere Eigenschwingungen erregt" sein können. Es ist mir nicht ganz klar, ob mit „Erregung einer Eigenschwingung" dasselbe gemeint ist, was man in der älteren, Bohrschen Sprachweise ausdrückte, wenn man sagte, das Atom ist „in einem stationären Zustande". Jedenfalls ist der Satz, ein Atom könne zugleich in mehreren stationären Zuständen sein, nicht nur dem Sinne der Ganzen Bohrschen Theorie zuwider, sondern widerspricht direkt der natürlichen, noch nie angezweifelten Deutung derjenigen stationären Zustände, die zu Punkten des Streckenspektrums gehören. Betrachten wir nämlich etwa einen Ionisationsprozeß, d.h. einen Übergang aus einem Punkte des diskreten in einen Punkt des kontinuierlichen Termspektrums, so ist die zu letzterem gehörigen „Bahn" in ihrem asymptotischen Verlauf direkt durch das geradlinig wegfliegende Elektron gegeben, dessen Spur durch die Wilsonsche Nebelmethode sichtbar gemacht werden kann. Es geht also wohl nicht an, von der gleichzeitigen Existenz mehrer Zustände zu reden, wenn man nicht die einfache, natürliche Deutung der Wilsonschen Nebelstreifen und ähnlicher Vorgänge als Durchschlagsspuren von Korpuskeln aufgeben will. Natürlich kann man sich auf den Standpunkt stellen, daß dieses höchst verwickelte Erscheinungen sind, die am Schlusse einer langen Kette von mathematischen Folgerungen aus den Diff.gl. der Wellenmech. schon herauskommen werden; aber das heißt doch, beim Vordringen in unbekanntes Land alle Brücken hinter sich abbrechen, die die Verbindung mit der ernährenden Heimat, dem Reiche der Beobachtung, vermitteln.

[3]) Schr. 4. S.122 „Erstens müssen zwei Eigenschwingungen u_k, u_l kräftig erregt sein"

Darum scheint mir eine dringliche Aufgabe feststellen, wie weit die mathematisch so glänzende Wellenmechanik mit der experimentell so fruchtbaren Vorstellungsweise der Quantensprünge vereinbar ist. Die Frage lautet also: In welchen Fällen lassen sich die Ergebnisse der Wellenmechanik in der Sprache der Quantensprünge interpritieren?

Man mag es dahingestellt sein lassen, ob es wirklich Korpuskeln wie Elektronen, Protonen, Lichtquanten gibt; wir sind aber sicher daß zahlreiche Phänomenen sich mit Hilfe dieser Begriffe einfach deuten lassen, und wir versuchen nun, dies mit der Wellenmechanik in Einklang zu bringen. Wir werden also an dem Bohrschen Bilde festhalten, daß ein atomares System stets nur in einem stationären Zustand ist. Wir können sogar annehmen, daß wir gelegentlich durch Beobachtung in einem Augenblick mit Sicherheit wissen, daß das Atom im n-ten Zustand ist[1]); im allgemeinen aber werden wir in einem Augenblick nur wissen, daß auf Grund der Vorgeschichte und der bestehenden physikalischen Bedingungen eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß das Atom im n-ten Zustand ist. Wir behaupten nun, daß als Maß dieser Zustandswahrscheinlichkeit die Größe
$$|c_n|^2 = \left|\int \psi(x,t)\, \psi_n^*(x)\, dx\right|^2. \qquad (5)$$
zu wählen ist.

Dies erscheint auf den ersten Blick verwunderlich, da ja doch die Koeffizienten c_n der Entwickelung (4) ganz willkürlich gewählt werden können. In der Tat muß das aber auch so sein; es entspricht dem Umstande der ~~kl~~ klassischen Mechanik, daß die Anfangs-

[1]) z.B. wissen wir, daß in einem sich selbst überlassenen Gas bei hinreichend tiefer Temperatur alle Atome mit verschwindender Ausnahme im Normalzustand sind.