L. de Broglie
Sur la fréquence propre de l'électron (180 p. 498, 1925)

Dans une théorie des quanta, j'ai été amené à supposer l'existence d'un phénomène périodique lié à tout électron (point matériel). Ce phénomène serait, pour un observateur immobile par rapporte à l'électron, répandu dans tout l'espace avec la même phase et possédrait la fréquence $\nu_0 = \frac{m_0c^2}{h}$.

Il pourrait donc être représenté pour ledit observateur par une fonction de la forme $\varphi(r_0)\cos 2\pi\nu_0 t_0$, t_0 étant le temps propre du mobile et r_0 la distance au centre de l'électron. Pour un second observateur voyant passer le mobile avec une vitesse constante βc, le phénomène serait réparti dans l'espace au point de vue des phases comme une onde plane se propageant dans la même direction avec la vitesse $V = \frac{c}{\beta} > c$ et posséderait la fréquence $\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Ces définitions sont incomplètes parce qu'elles ne précisent ~~ni~~ ni la nature, ni la répartition spatiale de phénomène en question. En particulier, si, comme il est naturel, on lui attribue une nature électromagnétique, on peut se demander comment l'existence de la vitesse $V > c$ est compatible avec le fait que les grandeurs el. mg. obéissent dans le vide à l'équation de propagation $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A$.

Je vais donner un résultat relatif à ces questions, mais auparavant je ferai la remarque suivante; en comparant les expressions données ci-dessus pour V et ν, ~~on~~ on voit que le quotient $\frac{c}{V} = n$, analogue à un indice de réfraction que posséderait le vide pour les ondes de l'électron, est égal à $\sqrt{1-\frac{\nu_0^2}{\nu^2}}$. C'est une sorte d'équation de dispersion.

Considérons maintenant une grandeur électromagnétique A se propageant dans le vide conformément à l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A.$$

Supposons que les surfaces équiphases soient à tout instant des plans normaux à une direction que nous prend~~r~~rons pour axes des z.

A pourra être la partie réelle de l'expression $\varphi(x,y,z,t)e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{z}{V}\right)}$ à condition que l'on ait

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i\nu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\varphi = \Delta\varphi - \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}\varphi - \frac{4\pi i\nu}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Séparons le réel et l'imaginaire. Il vient d'abord

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{c^2}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Donc φ ne dépend de t et de z que par la combinaison $u = z - \frac{c^2}{V}t$

D'autre part, on trouve aussi

$$4\pi^2\nu^2\left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{\varphi}\left(\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right).$$

Désignons par a le second membre de cette égalité. Il vient

$$\frac{c}{V} = n = \sqrt{1 + \frac{ac^2}{4\pi^2\nu^2}}$$

Nous pouvons identifier cette expression avec celle qui résulte des considérations rappelées au début, en posant $a = -\frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}$ et l'on aura $\frac{c^2}{V} = \beta c$.

Mais alors

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi,$$

Faisons un changement de variables, en posant

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{z-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

et écrivons Δ_0 pour $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$. On obtient

$$\Delta_0\varphi + \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi = 0.$$

Or ~~A~~ les coordonnées d'indice 0 sont celles qu'emploie pour repérer les points de l'espace un observateur lié à l'électron; pour celui-ci et en raison de la symétrie sphérique de l'électron, la fonction $\varphi(r_0)$ sera donc donnée par

$$\frac{d^2\varphi}{dr_0^2} + \frac{2}{r_0}\frac{d\varphi}{dr_0} + \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi = 0.$$

dont l'intégrale générale est

$$\varphi(r_0) = \frac{K}{r_0}\cos\left(\frac{2\pi\nu_0 r_0}{c} + \alpha_0\right)$$