Chapter I.　Classical Foundations

§ macroscopic field equations と microscopic field equations の間の関係

macroscopic 即ち Maxwell の field equations は

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(4\pi \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

である．E, D, B, H の四つ vector が independent ならば initial condition 及び boundary condition を與へても solution は定まらない．故に之等の間に Constitutive relations

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{3}$$

を假定する必要がある．ε, μ は色々な factor に depend するが macroscopic な立場からはその形を理論的に定めることが出来ない．

之に對して Lorentz の microscopic field equations は

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\ \mathfrak{h} = \frac{1}{c}\left(4\pi\rho'\mathfrak{v} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{e} = 4\pi\rho' \qquad \mathrm{div}\ \mathfrak{h} = 0 \tag{5}$$

である．

Lorentz の式は molecule の内外を問はず空間の各点に於ける field $\mathbf{e}, \mathfrak{h}$ 及び charge density ρ' に對して成立すると考へられるに對し，Maxwell の式に於ける E, D, B, H, ρ 等は microscopic な field 及び charge density を多数の molecule を含む体積内で平均したものと考へられる．

即ち 先

$$\mathbf{E} = \overline{\overline{\mathbf{e}}} \qquad \mathbf{B} = \overline{\overline{\mathfrak{h}}} \tag{6}$$

但し $=$ は多数の分子を含むが，普通の測定に對しては非常に小さいと見做しうる様な体積内の平均値を意味する．

次に

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \tag{7}$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \qquad \chi_m = \frac{\mu - 1}{4\pi} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\ \mathbf{D} - 4\pi\rho) = \mathrm{div}\left(c\,\mathrm{curl}\ \mathbf{H} - \frac{1}{c}4\pi \mathbf{i}\right) - 4\pi\frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \mathbf{i}\right)$$

∴ $t=0$ に於いて $\mathrm{div}\ \mathbf{D} = 4\pi\rho$, $\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0$ を満足する如きものをとれば常に満足される．

∴ 即ち (2) は Nebenbedingung に他ならぬ．

∴ (1) を満足する function の中から この Nebenbedingung を満すものをさがせばよい．

---

condition of integrability $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = g(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(xy) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$.

$$f = \int_{0,0}^{x,y} \cancel{(g\,dx + h\,dy)}\ g\,ds. \qquad \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} = g}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

一方各分子の charge, electric moment 及び magnetic moment は

$$e_{mol} = \iiint_{1M} \rho' dv \qquad (9)$$

$$\mathfrak{p} = \iiint_{1M} \rho' \mathfrak{r} dv \qquad \mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\iiint_{1M} \rho' [\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}] dv \qquad (10)$$

但し積分は一分子について行ひ分子の重心を origin にとる。
中性分子では $e_{mol} = 0$ で $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ の値は origin の取方に無関係。
classical theory では charge が discrete な点に散在すると考へるから

$$e_{mol} = \sum e_i \qquad \mathfrak{p} = \sum e_i \mathfrak{r}_i$$
$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e_i [\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{v}_i] \qquad (11)$$

(quantum theory では charge distribution は smear out してると考へる故, 元の積分の形を使ふ必要がある。)

すると

$$\mathbb{P} = N\overline{\overline{\mathfrak{p}}} \qquad \mathbb{M} = N\overline{\overline{\mathfrak{m}}} \qquad (12)$$

従つて

$$\mathbb{D} = \overline{\overline{e}} + 4\pi N \overline{\overline{\mathfrak{p}}} \qquad \mathbb{H} = \overline{\overline{h}} - 4\pi N \overline{\overline{\mathfrak{m}}}$$

但し N は 1 c.c. 中の分子の数。幾種類もの分子がまざつておれば weighted mean をとる。

最後に

$$i = -N_c e \overline{\overline{v}}_c \qquad \rho = N\overline{\overline{e}}_{mol} - N_c e \qquad (13)$$

但し N_c は 1 c.c. 中の conduction electron の数。
分子の重心の velocity は negligible と假定してある。之を neglect しなければ convection current の他に medium の mass motion が入つてくるがかゝる場合は不必要。

(6), (12) 及び (13) の関係を証明するには

$$E = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \qquad B = \operatorname{curl} A \qquad (14)$$

$$e = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t} \qquad h = \operatorname{curl} a$$

とおき、

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{div} a + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (16)$$

3

なる auxiliary condition の下に field equation に入れ、Φ, A, ϕ, a について
とくと

$$\Phi = \iiint \left\{ \frac{\rho}{R} + \mathbb{P}\,\mathrm{grad}\frac{1}{R} \right\} dv$$

$$A = \iiint \left\{ \frac{i + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t}}{cR} + [\mathbb{M} \times \mathrm{grad}\frac{1}{r}] \right\} dv \qquad (23)$$

$$\bar{\bar{\phi}} = \iiint \frac{\{N\bar{e}_{mol} - N_c \bar{\bar{e}}\}}{R} dv + \iiint \{ N\bar{\bar{p}}\,\mathrm{grad}\frac{1}{R} \} dv$$

$$\bar{\bar{a}} = \iiint \frac{\{-N_c e \bar{\bar{v}}_c + N \partial \bar{\bar{p}}/\partial t\}}{cR} dv + \iiint \{ N \bar{\bar{m}} \times \mathrm{grad}\frac{1}{R} \} dv \qquad (30)$$

但し、R は potential を求めてゐる点と dv の間の距離、
$\{\quad\}$ は $t - R/c$ の時の値をとることを意味する。

そこで

$$\Phi = \bar{\bar{\phi}}, \qquad A = \bar{\bar{a}} \qquad (21)$$

の假定すれば、macroscopic な differentiation と $=$ なる平均との順序をかへうることから、(6) が出、又 (23) と (30) の式の構造の比較によって (12), (13) が出てくる。
この証明方法では dipole 以上の multipole moment を neglect してある。

molecule に作用する average field は molecule 自身の中の他の charge による internal field と、applied field 及び他の molecule による field 即ち local field の superpose したものである。
dielectric medium 中に molecule の diameter に比して大きな spherical cavity を考へ、その中心の field をその点の local field とすれば、Clausius-Mossotti の formula

$$e_{loc} = \mathbb{E} + \frac{4\pi\mathbb{P}}{3} \qquad (34)$$

が成立する。
field が余り強くなく、average electric moment は local field に比例すると考へ~~ら~~うる場合には

$$\bar{\bar{p}} = \alpha\, e_{loc} = \alpha\left(\mathbb{E} + \frac{4\pi\mathbb{P}}{3}\right) \qquad (35)$$

---

origin に半径 a の導体がある時の一つの solution は

$$e_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e_x a^3 x}{r^3}\right) + e_x' \qquad \bar{\bar{e}}_x = E_x = e_x' \qquad 0 \quad P_x = \;0 \xrightarrow{e_x} 0$$

然るに $e_x' = E_x$ でなるが uniform な field e_x' を仮定していることは

$P_x = nE_x a^3$ が実際 uniform field を apply することを意味してゐる。 0 （前の方が正しい）

origin のまわりに a より大きな R なる半径の球を除いて考へ、その外側に uniform に $nE_x a^3$ なる moment の dipole が distribute してゐれば、全 field は

$$-2\pi\int_R^\infty\int_0^\pi \left(\frac{nE_x a^3}{r^3} - \frac{3E_x a^3 r^2\cos^2\theta}{r^5}\right) r^2 dr \sin\theta d\theta = +4\pi \overset{p_x}{\overset{''}{n E_x a^3}} \Big|_R^\infty$$

とおいて

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4\pi N\alpha}{3\rho} \quad : \text{independent of density } \rho \qquad (36)$$

$n^2=\varepsilon$, n: refractive index

この関係は gas の場合 実験とよくあう。 liquid の場合にはある程度まであてはまる。

§ 電子の運動方程式

charged particle に働く force は

$$F_i = e_i \mathfrak{E} + \frac{e_i}{c}\{v_i \times \mathfrak{H}\} \qquad (37)$$

この中 internal force は retardation 及び magnetic interaction を neglect すれば Potential

$$V = \sum_{i<j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} \qquad (39)$$

から derive される。

gas の場合には polarization は小さいから local field の代りに macroscopic field をとれば

$$F_i = -\operatorname{grad}_i V - e_i \operatorname{grad} \Phi_i - \frac{e_i}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e_i}{c}[v_i \times \operatorname{curl} A_i]$$

従って equations of motion は

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} - e_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} - \frac{e_i}{c}\frac{\partial A_{xi}}{\partial t} \\ &+ \frac{e_i}{c}\left[\dot{y}_i\left(\frac{\partial A_{yi}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{xi}}{\partial y_i}\right) - \dot{z}_i\left(\frac{\partial A_{xi}}{\partial z_i} - \frac{\partial A_{zi}}{\partial x_i}\right)\right] \\ &\text{etc} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

となる。

Lagrangian として

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 - V - \sum_i e_i \Phi_i + \sum_i \frac{e_i}{c}(v_i A_i) \qquad (4a)$$

をとれば Lagrangian form にかける。

$$L = T - U$$

更に
$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{e_i}{c} A_{x_i} \qquad \text{etc} \tag{45}$$

従って Hamiltonian は
$$\mathcal{H} = \sum_{i\alpha} \frac{1}{2m_i}\left[\left(p_{x_i} - \frac{e_i}{c}A_{x_i}\right)^2 + \left(p_{y_i} - \frac{e_i}{c}A_{y_i}\right)^2 + \left(p_{z_i} - \frac{e_i}{c}A_{z_i}\right)^2\right] + V + \sum_i e_i \Phi_i \tag{44}$$
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V + \sum e_i \Phi_i \tag{51}$$

今後必要なのは constant electric field 又は constant magnetic field の存在する場合で、両方一緒にかけば
$$\Phi = -Ez \qquad A_x = -\frac{1}{2}Hy \qquad A_y = \frac{1}{2}Hx \qquad A_z = 0$$
$$\mathcal{H} = \sum_i \left\{ \frac{1}{2m_i}\left(p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2\right) - E e_i z_i - \frac{He_i}{2m_i c}\left(x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}\right) + \frac{H^2 e_i^2}{8m_i c^2}\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right\} + V \tag{48}$$

この場合には field の方向の electric 及び magnetic moment は夫々
$$p_E = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E}, \qquad m_H = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} \tag{49}$$

Larmor の theorem によれば constant magnetic field H が存在する時の atom 内の electron の motion は field の存在しない時の motion に各 electron に共通な frequency $\frac{He}{4\pi mc}$ の precession が superpose したものになる。

§ 平均値の取方。

扨、前の如き多くの分子についての平均値を求めるには、分子が色々なconfigurationをとるprobabilityを知らねばならぬ。
classical statistical mechanicsによれば分子のcanonical variablesを $q_1 q_2 \cdots q_f\ p_1 p_2 \cdots p_f$ とすると、之等が夫々 $(q_1, q_1+dq_1)\cdots(p_f, p_f+dp_f)$ の間の値をとるprobabilityは

$$Ce^{-H/kT}\,dq_1\cdots dp_f \tag{55}$$

但し

$$1 = C\int\!\!\int e^{-H/kT}\,dq_1\cdots dp_f \tag{56}$$

従って $p_1 \cdots q_f$ の任意函数 f の平均値は

$$\bar{\bar{f}} = C\int\!\!\int f\,e^{-H/kT}\,dq_1\cdots dp_f \tag{57}$$

$$\chi_e = \frac{P}{E} = \frac{N\bar{\bar{p}}_E}{E} = -\frac{NC}{E}\int\!\!\int\frac{\partial H}{\partial E}\,e^{-H/kT}\,dq_1\cdots dp_f$$

$$= \frac{NkT}{E}\,\frac{\partial \log Z}{\partial E} \tag{58}$$

$$Z = \int\!\!\int e^{-H/kT}\,dq_1\cdots dp_f \tag{59}$$

Z: Zustandssumme, sum of states
(55)のdistributionは任意のcanonical variablesに対して成立する。之はcanonical transformationのfunctional determinantは1、即ち

$$dq_1\cdots dp_f = dQ_1\cdots dP_f \tag{60}$$

なるによる。

実際にはelectronに対してはFermi-Diracのstatisticsを採用すべきであるが、之に稀薄なmediaを考へる場合には、Boltzmannのstatisticsで充分である。