NOTE-BOOK

Memoir and Abstract
I

1931.

A

自己ノ念力ヲ

自己ニ能ヲ生象ナルヲ相

ニノ集中セヨ

Jan. 10th. 1931

Phys. Rev. 35 (1930).
p. 588. The Effect of Hyperfine Structure due to Nuclear Spin on Polarization of Resonance Radiation
By. A. Ellett

The existence of hyperfine structure must be taken into account in calculations of the polarization of resonance radiation based upon Heisenberg's extension of the principle of spectroscopic stability. Where the hyperfine structures are due to the existence of a nuclear moment their effect upon the polarization of resonance radiation may be calculated. If the nuclear moment of the thallium atom is $\frac{1}{2}$ (in units of $\frac{h}{2\pi}$) as Schüler and Brück suppose the λλ3776 and 5350 lines should show no polarization, while λ2768 should show 33.0 to 35.2 percent parallel and λ3530 4.8 to 48.8 percent perpendicular to the electric ~~field~~ vector of a plane polarized exciting beam. Sodium resonance radiation excited by plane polarized D_1 and D_2 lines should show 33.3 percent polarization if the nuclear moment is $\frac{1}{2}$ and 16.6 percent if it is 1. The latter value agrees well with ~~the~~ 16.3 observed by the writer, but observations on band spectra seem to indicate a higher ~~value~~ nuclear moment, according to F.W. Loomis and R.S. Mulliken (Verbal communication to the writer.)

Phys. Rev 35
p. 441　White: Nuclear Spin and Hyperfine Structure

Assuming that hyperfine structure in spectral lines has its origin in the coupling of a nuclear spin with electron resultant J, a comparison between gross structure and hyperfine structure is made (by extending the result of Jackson for Cs where $i=\frac{1}{2}$,) from the following relation, $\Delta\nu_g/\Delta\nu_f = {}^{m\kappa}/_{4im_e}$

Proc. Roy. Soc. 126 (1930)
p. 654 Gaunt: Continuous Absorption.

Astrophysical theories cannot proceed far without the introduction of an absorption coefficient for the continuous spectrum. It is generally agreed that this kind of absorption is produced by the transition of an electron from a bound state to a free state, or from one free state in the neighbourhood of an ion to another of great energy. The absorption coef. should therefore be calculable by means of atomic theory. The theory hitherto used is an adaptation of Kramer's classical theory* of X-ray emission. The opacity so calculated is many times smaller than Eddington's estimate from astronomical observations.† The present paper summarises an attempt to discover whether the quantum theory yields a value nearer to that of Eddington. Various approx. that are made prevent an accurate calculation of the opacity but it seems fairly certain that the classical theory is not far wrong in instances of importance in astrophysics.

The math. problem consists in the calculation of matrix-elements involving at least one state of positive energy. It is sufficient to consider a single electron in the field of a positive charge. The calculated coefficients are compared with the results of Kramer's theory. §5 is concerned with the application of this work to astrophysics.

A paper recently published by Oppenheimer‡ attacks the same problem in a more elegant manner, and gives an opacity comparable with Eddington's.† Unfortunately, it contains an important error,§ whose correction greatly reduces the opacity. Another paper on this subject has been published recently by Sugiura.‖ The details of the present work are being published elsewhere.¶

* Kramers, 'Phil Mag' vol. 46, p. 836 (1923)
† Eddington, Int. Const. of the Stars. p. 229 (1926)
‡ Oppenheimer, Zs. Phys., 55, 725 (1929).
§ Gaunt, ibid 59, 508 (1930).
‖ Sugiura, Phys. Rev. 34, 858 (1929)
¶ Gaunt, Phil. Trans. (in the press)

Nucleusガ Ionisation 行ッテ居ル ~~state~~ 場合ニ デ stable ナモノハ ⊙, ⊙

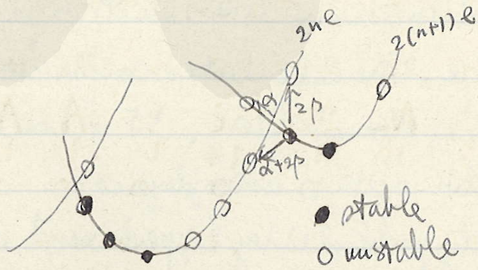


Fig 4.

Vol 803 (1930)

Proc. Roy. Soc. 126
p. 632　Gamow: Mass Defect Curve and Nuclear Constitution

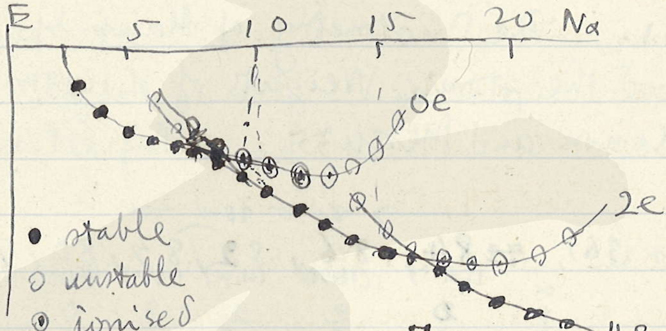
$$E \sim \frac{h^2}{4mR_0^2} N_a^{1/3} + \frac{(2e)^2}{R_0} N_a^{5/3}$$

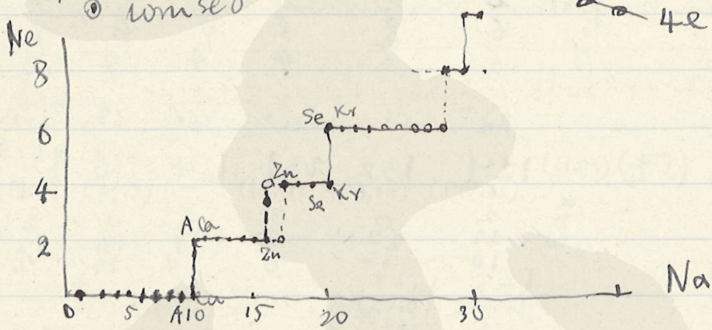
21 Curveハ少シ曲ッテアル。∴

Nuclear Free Electronノ作用ヲ考ヘネバナラヌ。

之ハ恐ラク ~~価数~~ (4n+n atomic weightノモノニ付イテ) 二個ヅツフエテ行ク。(之ハ当然)

Fig 3





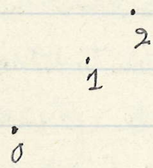
Number of Isotopeヲ互ニ比ベルト面白イ。

A.G.	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40		44	48
	He		C	O	Ne	Mg	Si	S	A	A	Ca	Ca	Ti
A.Z.	2		6	8	10	12	14	16	18	18	20	20	22
N.E.	0		0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2

	52	56	60	64	68	72	76	80		84	88	92	96	100
	Cr	Fe	Ni	Zn	Zn	Ge	Se	Se,	Kr	Kr	Sr	Zr		
A.Z.	24	26	28	30	30	32	34	34	36	36	38	40		
N.E.	2	2	2	2	4	4	4	6	4	6	6	6		

Handb. Exp. Phys. XXII, S. 827.

Proc 126
p. 79　Mott: The Wave Mechanics of α-Ray Tracks.



α-ray ガ 1 カラ出ヅレバ、1, 2 ガ同時ニ ionize サレル probability ガ 0 デナイノハ 0,1,2 ガ一直線上ニアル時ニ限ル。
(ニアルダラウカ)

p. 511. The Photometry of Mass-Spectra and the Atomic Weights of Krypton, Xenon and Mercury. By Aston

	→ 42+2=44	40+2	40+3		38
Kr (36)	~~74~~ 84, (56.85)	86 (16.70)	82 (11.79)	83 (11.79)	80 (2.140)	78 (0.42)
α						
p	0	2	2	3	0	2
β	6	8	6	7	4	4
β′	6	6	4	4	4	2

		64+1 / 126	66	64+3	66+2	68	64+2	64
X (54)	(27.13)	129 (26.45)	132 (20.67)	131 (10.31)	134	136 (8.79)	130 (4.18)	128 (2.30)
α								
p		1	0	3	2	0	2	0
β		11	12	9	14	14	12	10
β′		10	12	6	12	14	10	10

	126 (0.08)	124 (0.08) 62
p	2	0
β	10	8
β′	8	8

Hg (80)	202	200	199	201	198	204	196
α	50	50	49	50	49	51	49
p	2	0	3	1	2	0	0
β	22	20	21	21	20	22	18
β′	20	20	18	20	18	22	18

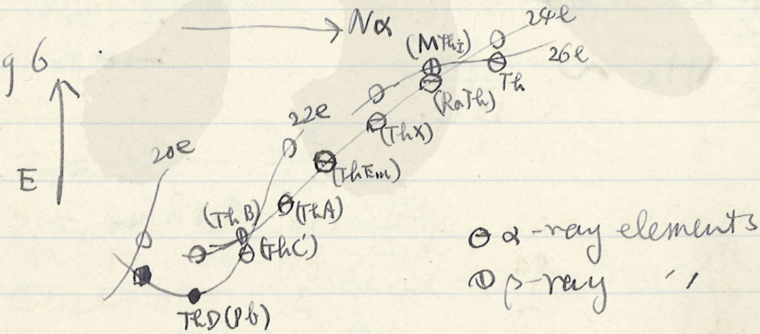
Proc 126
p. 2

Mott : Collision between two Electrons.

The Collision between two electrons is considered, making use of the exclusion principle. A scattering law is deduced which differs from that of the classical theory. Some experimental evidence is given in favour of the theory. A scattering law is given for slow α-particles in He.

◎ 同じAtomic weightノモノハ relative abundanceヲ知ル必要アリ。

Fig 6



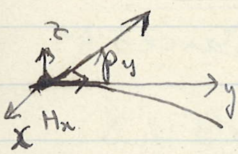
Proc. 126 (1930) p. 696 Eddington: Interaction of Electric Charges.

p. 702 *we trace it down to the fact that not more than 3 real four-point matrices can satisfy simultaneously $E_\mu^2 = 1$, $E_\mu E_\nu + E_\nu E_\mu = 0$

之ヲ考ヘルト. Diracガ α's ノ element ヲ [illegible] (real) positive ニトリうルト 組ヲ [illegible] アヤマリ (126, p 631 ..)

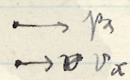
[illegible]

I would call attention to the fact that the matrix theory offers an explanation (for the first time, I believe) why one of the dimensions of our world differs from the other three.*



$$\Delta E_x = \frac{1}{\Delta t}(p_x' - p_x)$$

$$\frac{e}{c}\frac{\delta y}{\delta t} H_x \sim \frac{dp_z}{dt}$$



$$\frac{e}{c}\frac{\delta y}{\Delta t}\Delta H_x \sim \frac{\Delta p_z}{\Delta t}.$$

66 (3-4) 一月十五日

p.206 Jordan u. Fock: Neue Unbestimmtheitseigenschaften des el.mag. Feldes.

$$-eE_x = m\frac{dv_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt}$$

$$-eE_x = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$$

$\Delta p_x \Delta x \sim h$

$$\Delta E_x \sim \frac{m}{e}\frac{h}{\Delta t\,\Delta x\,m} \sim \frac{h}{e\Delta t\Delta x}.$$

$$\Delta E_x \cdot \Delta x \cdot \Delta t \sim \frac{h}{e}. \qquad (1)$$

p_x, p_x'; t, t'

同様ニシテ

$$\Delta H_x \cdot \Delta y \Delta z \sim \frac{hc}{e} \qquad (2)$$

$$\Delta E_x \Delta H_x \sim \frac{h^2 c}{e^2(\Delta L)^4} \qquad (\;)$$

従ッテ従来ノQ.E.D.ニ於テ、一点ニ於ケルExノ[struck out]値ヲ正確ニ定メラレルト仮定スルコトハ不可能デアル。

参 (Heisenberg ノ本ノ p.113 (28b)) $E_1(P)H_2(P') - H_2(P')E_1(P) = -2hc\,i\,\frac{\partial\delta(P-P')}{\partial x_3(P)}$

サレバ(1)(2)ノ関係ヲdeduceシタ所ノV.R.ノ如キモノヲ求メネバナラヌ。

又(3)ハ fine structure constant ニ関係シテ居ル。 $\frac{e^2}{hc}$

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial x}$$

$$\Delta E_x \sim \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \frac{\Delta A_t}{\Delta x}$$

$$\Delta E_x \Delta x \Delta t \sim \Delta A_x \Delta x + \Delta A_t \Delta t$$

$$\therefore\ \Delta x \Delta A_x \sim \frac{h}{e} \quad \text{etc.}$$

$$\Delta t \Delta A_t \sim \frac{h}{e}.$$

[illegible]

$\therefore\ A_x x - x A_x = \frac{h}{2\pi i}$? ノ如キ式ガ成立スルノカモ

Proc. Roy. Soc, 127　一月十二日.

p. 141　Hargreaves: The Effect of a Nuclear Spin

p. 407　on the optical spectra II, III

I. (124, p568 (1928))

p. 658 Mott: The Scattering of Electrons by Atoms.

p. 666 Massey: Scattering of fast Electrons and Nuclear-Mg. Moments

p. 671 Massey: Remarks on the Anomalous Scattering of α-particles from the Q. M. Point of View.

Proc. Roy. Soc. 128 (1930)

p. 114 Chadwick: The Scattering of α-particles in Helium.

Mott ノ計算 (126, 259) ノ正シキコトガ実験的ニ証明サル。

ZS. Phys 66 1-2 (1930)
S. 129-136 Pokrowski: Zur Diracschen Theorie von Protonen und Elektronen

Zusammenfassung

Aus den Gesagten lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Als unbedingte Folgerungen der Theorie von Dirac

a) Es existiert eine obere Grenze für die Frequenz jeder Strahlung. Strahlung mit größerer Frequenz kann sich im Raume auf makroskopische Strecken nicht fortpflanzen.

b) Jede Bewegung eines Elementarteilchen vollzieht sich sprungsweise, wobei die kürzeste Zeit zwischen zwei nacheinander folgenden Sprüngen nicht kleiner als ein bestimmter Wert sein kann.

2. Aus Betrachtung, die im Einklang mit dem Bilde von Dirac sind, läßt sich folgendes ableiten:

a) Die Gravitationspotentiale können einen best. Werte nicht überschreiten.

b) Zwischen Atomhäufigkeit und Massendefekt existiert ein einfacher Zusammenhang, welcher experimentell, teilweise quantitativ bestätigt wird.

Die Mehrzahl dieser Tatsachen war früher vom

Verfasser in anderer Weise abgeleitet.

51, 730, 737

Beck: 53, 675.

Zs. 65, 9-10 (1930)

p. 589 Rosenfeld: Über die Gravitationswirkung des Lichtes

Es wird das von einem el.mg. Felde erzeugte gravitationsfeld q.m. berechnet und gezeigt, dafs die so entstandenen Gravitationsenergie unendlich grofs herauskommt, was eine neue Schwierigkeit für die H. P. Quantelungstheorie der Wellenfelder bedeutet. Ferner werden die in erster Näherung möglichen Übergangsprozesse, an denen sich Licht u. Grav.-quanten beteiligen kurz erörtert.

Die Unbestimmtheit des El. Mg. Feldes und die Selbstenergie des Elektrons

前ノ Jordan-Fock ノ論文ノ終デノベタ如ク. Feld Potential Φ_μ ト Elektronenort Koordinaten Q_μ ノ間ニ

$$\Phi_\mu Q_\mu - Q_\mu \Phi_\mu = \frac{-hc}{2\pi e i}$$

V.R. ノ如キ関係ヲ与ヘテアル。

然レバ

$$\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) Q_\mu - Q_\mu \left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) \neq 0$$

~~ナセヨ~~. $\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) Q_\nu - Q_\nu \left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) = 0 \quad \mu \neq \nu$

トセヨ. Elektron ノ Hamiltonian.

$$H_m = \alpha_\mu\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) + mc$$

ニ於イテハ $H_m Q_\mu - Q_\mu H_m = 0$

一般ニ Q's ノ任意ノ函数ニ対シ

$$H_m F(Q_1, Q_2 \cdots Q_4) - F(Q_1 \cdots Q_4) H_m = 0$$

又 $P_\mu \Phi_\mu - \Phi_\mu P_\mu = 0$

ガ成立スルト考ヘラレルデアラウ。

P's, Φ's ノ値ヲ同時ニ定メルコト ~~ハ出来ヌ~~ Feld ~~ヲ決定~~ ハ可能デアルガ (但シ Φ's ヲ知ッテモソレデ定メルノニ十分デナイ.) Q's, Φ's ヲ同時ニ決定スルコトハ出来ナイ。

Elektron ノ Selbstenergie ニ就イテハ Elektron ガ或ル点ニアル時ノ Feld ヲ決定スル事ハ可能デアルガ、Elektron ノ位置ヲ決定シタ時、Feld ハ全ク不定トナルカラ Selbstenergie ノ定義モ、一般ニハカナラズシモ明カデハナイ。

又 $P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu$, Q_ν ノ値ヲ同時ニ定メルコトモ出来ル。

次ニ之ニ Φ_μ ト Ξ_ν トノ間ノ V. R. ガアリ

又 Eichinvarianz トイフ問題モアル。

又 Jordan-Fock ノ Unbest. Rel ヲ出シ来ルノハ Q. M. ニ於テハ

$$\dot{p}_\mu = [p_\mu \cdot H]$$

ノ式ニ ~~ヨツテ出来~~ ヨッテ出来テヰル筈デコノ場合 Δx, Δt 等ノ意味ガ違ッテヰル様ニ思ハレルガ如何。

$$\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)Q_\mu - Q_\mu\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right) = 0.$$

$$\dot{p}_\mu = [p_\mu \cdot H]$$

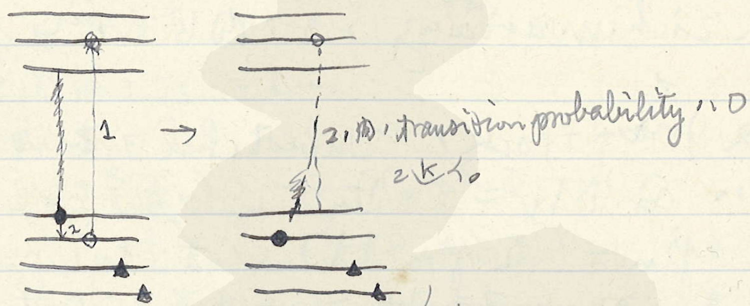
$$\left(\frac{e}{c}\Phi_\mu\right)Q_\mu - Q_\mu\left(\frac{e}{c}\Phi_\mu\right)$$

~~又~~ 再

$$\left(P_\mu + \frac{e}{c}\Phi_\mu\right)Q_\mu + Q_\mu\left(P_\mu\right.$$

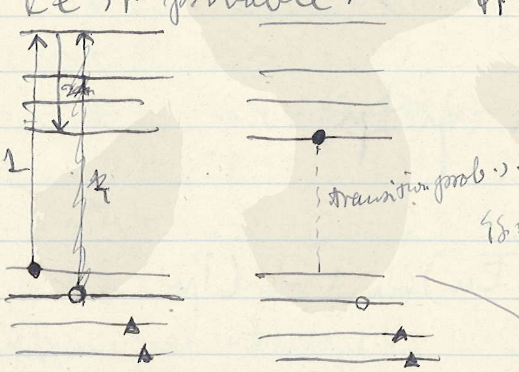
$$\begin{cases} x, y, z, t. \\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \\ \psi_1, \cdot, \cdot, \psi_4 \end{cases}$$

Proton, electron 両者ノ解決ハ次ノ如ク行カシ
レセヌカ、



然シナガラ マレニシカオコラヌ transition ニヨッテ
一ツノ positive electron ガ出来ルモノト考ヘル
ベキデアル。

又ハ モット probable ナルハ 非常ニ高温ノ時ニ
非常ニ多クノ
level ニ spring
シタ electron ガ
後ニ低イ level ニ
落チテ来テ、ソコト
−mc² 近クノ level
~~elect~~ ノ間ノ



transition prob ガ小デアレバ 陽子ヲ安定
ト考ヘテハドウカ。

イヅレニシテモ negative energy ノ cavity ハ normal state 附近ノ state ト combine シテヰルト解シテヰテ ~~電~~ 比較的安定ナリ。electron 及ビ Proton 従ッテ Atom ガ永続シ得ルト考ヘラレルノデアル。

ソコデ問題ハ一方ニ於テ positive electron ガ negative cavity ニナルコトノ probab. ノ比較的小サキヲ示メサネバナラヌ。他方ニ於テ negative cavity 相互ノ transition prob ヲ比較スルノ二ツニ帰着スル。

Proc. Camb. Phil. Soc. 26.

p. 376 Dirac: Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom [Read 19 May 1930]

Hartree: ibid. 24, p 111 (1927)

Thomas: " " 23. p 542 (1926)

Fermi: Zs 48. p. 73 (1928)

Fock: Zs 61. p 126 (1930)

p. 496. Temple: The matrix mechanics of the spinning electron.

最上質特製

大學ノート

（米國レンシドラム會社製最上質
ワールド紙使用購賣部撰製）

文具・雜誌・雜貨

原稿用紙・萬年筆・書簡箋・タバコ・切手類

正門内

京大購買販賣部

一月十九日

Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques
Enneper, Elliptische Funktionen (Müller, 1890)
Tannery et Molk, Fonctions Elliptiques.
Schwarz.

De Montessus de Ballore ?

—ｐサ—ｐ.ポ.

multiple series : convergence

$$\sum_{n_1 \cdots n_m} a_{n_1, n_2 \cdots n_k \cdots n_m}$$

一月廿三日、木曜　午后はX-ray scattering についての論文をよむ。

(Zs. f. Phys. **58**, 75) I. Waller: Die Streuung kurzwelliger Strahlung durch Atome nach der Diracschen Strahlungstheorie.

(Zs. f. Phys **51**, 213) I. Waller:

(Zs. f. Phys. 58, 794) J. Frenkel: Über Q. M. Energieübertragung zwischen atomaren Systemen

Wirkungsquerschnitt, ,

$$q = \frac{8\pi^3}{h^4} M^2 \frac{v_1}{v_0} \int_0^\pi W^2 \sin\theta \, d\theta,$$

(Born, Dirac)

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

v_0, v_1: Anfangs- u. Endwert der relativen Geschw.

W: Matrixelement der Wechselwirkungsenergie für den betrachteten Quantenübergang.

θ: Ablenkungswinkel des Stoßenden Teilchens.

$$W = \iint U \varphi_0 \varphi_1^* e^{i(k_1 - k_0)R} \, dv \, dV$$

$$\bar{U}(R) = \int U \varphi_0 \varphi_1^* \, dv$$

$$W(k) = \int_0^\infty \int_0^\pi \bar{U}(R) e^{ikR\cos\varphi} 2\pi R^2 dR \sin\varphi d\varphi$$
$$= \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty \bar{U}(R) R \sin kR \, dR$$

$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$.

$$k^2 = k_1^2 + k_0^2 - 2k_1 k_0 \cos\theta$$

$$q = \frac{8\pi^3}{h^4} \frac{M^2}{k_0^2} \int_{|k_0 - k_1|}^{k_1 - k_0} W^2 k \, dk$$

$$\bar{U}(R) = \frac{A}{R} e^{-\alpha R}$$ ，形ト假定スレバ

$$W = \frac{4\pi A}{k} \int_0^\infty e^{-\alpha R} \sin kR \, dR = \frac{4\pi A}{\alpha^2 + k^2}$$

$$\therefore q = 4\pi \left(\frac{2\pi}{h}\right)^4 \frac{M^2}{k_0^2} A^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (k_0 - k_1)^2} - \frac{1}{\alpha^2 + (k_0 + k_1)^2} \right]$$

oder bei elastischer Stoß, $k_0 = k_1 = k_0$

($v_0^2 + u_0^2 = v_1^2 + u_1^2$ $\quad$ $v_0 + u_0 = v_1 + u_1$

$\therefore v_0 u_0 = v_1 u_1$ $\quad$ $\therefore (v_0 - u_0)^2 = (v_1 - u_1)^2$

$\therefore k_0 = k_1$)

$$q = \left(4\pi/h\right)^4 \pi \cdot \frac{M^2 A^2}{\alpha^2(\alpha^2 + 4k^2)}$$

Diese Formel zeigt, daß mit Zunahme der relativen Stoßgeschw. der Wirkungsquerschnitt abnehmen muß (und zwar bis $q = 0$ bei $v = \infty$). Der Grund dafür läßt sich sofort erkennen, wenn wir den Umstand beachten, daß zwei abstoßende Atome beim Zusammen-

-stoß ineinander desto tiefer eindringen müssen, je kräftiger sie sich stoßen.

London u. Kallmann (Zs. f. Phys. Chemie (B) **2**, 207, 1929.)
versuchte, die anomal großen Wirkungsquerschnitte solcher Atome zu erklären, die ungefähr gleiche Energiestufen haben.

Ramsauereffekt ハ説明サレテ居ナイ。

Wenzel : Phys. Zs. **29**, 321, 1928.

一月廿九日.

Zs. f. Phys 65. 518. (1930)

Weisskopf u. Wigner: Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators.

Zs. f. Phys 63. 54 (1930) ニ於テ出シタ Linienintensität

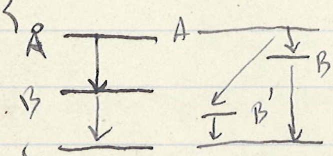
$$J(\nu)d\nu = \frac{(\gamma^Q+\gamma^U)d\nu}{\frac{1}{2}(\gamma^Q+\gamma^U)+4\pi^2(\nu-\nu^Q_U)^2}$$

ノ式ニ於テ. $\gamma^Q+\gamma^U$ ハ Halbwertbreite デ

$$\gamma^Q = \sum_A \gamma_A^Q \qquad \gamma^U = \sum_A \gamma_A^U$$

ハ夫々 Obere・Untere・Zustand ノ Halbwertsbreite γ_A^Q, γ_A^U ハ夫々 $Q\to A$, $U\to A$ ノ Übergangswahrsch. Σ ハ夫々 Q, U ヨリ小ナル Energie ヲ有スル state ニ就イテトル。 ν^Q_U ハ Linie ノ Schwerpunkt

之ヲ Dirac ノ Strahlungstheorie カラ出ス時. Niveau ノ Breite ハ小デ Linienfrequenz (又ハ differenz) ニ比シテ negligible ト仮定シテ居ル。(Breite ト Linie ノ Frequenz ノ比ハ Feinstrukturkonstante ノ四乗ニ比例スルカラ一般ニコノ仮定ハ正シイ。) 故ニ上ノ式ハ $\nu-\nu^Q_U$ ガ ν^Q_U ニ比シテ小、換言スレバ二ツノヒキツヾキ radiate サレル Frequenz ノ差ニ比シテ小ナル場合ニノミ成立スル。之ハ Pauli (Handbuch XXIII) ノ指摘セル如ク Oszillator ノ場合ニハ成立シナイ。



高次ノ仮定ハ一ツノ Zustandskonfiguration ガ

二つノ遷移ガ全ク独立ニ行ハレ相互作用ナシト
仮定シテ計算スルコトニナル也。

1, 2, ノ如キ二ツノ状態ノ寿命ヲ有スル場合ニツイテ
計算シ得ル。而シテ Oszillator (harm. Os.)
ノ Linienbreite ハ Klassisch ニ計算シタモノト
全ク一致スル結果 ~~ト一致ス~~ ヲ得ル。

$$W(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{h}\,\frac{d\varepsilon\,\gamma^{A}}{\left(\frac{1}{2}\gamma^{A}\right)^2 + 4\pi^2\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = h(\nu + \nu' - \nu_C)$$

γ^A ノ Zustand ノ Breite.

Lichtquanten ノ Frequenz ガソレゾレ $\nu, \nu+d\nu$
$\nu', \nu'+d\nu'$ ノ間ニアル Wahrsch,

$$W(\nu\nu')\,d\nu\,d\nu' = \frac{(\Gamma^{A}_{B})^2\,d\nu\,d\nu'}{[(\Gamma^{B}_{C})^2 + (\nu_B - \nu)^2][(\Gamma^{B}_{C})^2 + (\nu_B - \nu')^2]}$$

$$\gamma^{B}_{C} = 4\pi\,\Gamma^{B}_{C}$$

Z. S. 64. S. 729 Born: Zur Quantentheorie der chemischen Kräfte.

S. 717. Gleich: Der Hauptbeweis für die allgemeine Relativitätstheorie.

An der Hand der Entstehungsgeschichte der vielbesprochenen zusätzlichen Bewegung des Merkurperihels wird gezeigt, daß diese keinen konstanten Wert haben kann und daß sie sich zwanglos aus den Änderungen der Umdrehungsdauer der Erde herleiten läßt. Daher ist sie als Beweismittel für die Relativitätstheorie hinfällig.

S. 749 Güttinger: Über die Hyperfeinstruktur des Li II-Spektrums.

Li^{++} $\quad H = \int [S, \frac{-r}{r^3}]\, dV \;; \mu = \frac{i\,g(i)}{1840} \frac{eh}{4\pi mc}$

$$\Delta W = \mu H$$

$$= \frac{8\pi}{3} \mu_0 \psi^2(0) (\mu\sigma) \quad \text{for s-term}$$

$$\Delta\nu = \frac{8}{3} R \alpha^2 \frac{Z^3}{n^2} \frac{g(i)}{1840} (i + 1/2)$$

(Fermi-~~Gouschmi~~ Goudsmitsche Formel)

$$= \frac{16\pi}{3}\mu_0 \frac{\mu}{i} \frac{(\sigma j)(j i)}{2j^2} \varphi_1^2(0)$$

Li^+

$$\Delta w = \text{const} \frac{(\sigma j)(j \mu)}{j^2}$$

$$\Delta \nu = 0{,}228 \frac{g(i)}{n^3} \frac{[s(s+1)+j(j+1)-l(l+1)]}{8j(j+1)} \times [f(f+1)-i(i+1)-j(j+1)]$$

Auswahl regeln $\quad (\vec{f} = \vec{j} + \vec{i})$

$$\Delta j = 1, 0, -1$$
$$\Delta f = 1, 0, -1$$

$$\Delta w = \mu_0 \int \left(\mu_1 \left[\mathrm{rot}_I \mathfrak{M}_I, \frac{r_1}{r_1^3}\right] + \left[\mathrm{rot}_{II} \mathfrak{M}_{II}, \frac{r_{II}}{r_{II}^3}\right]\right) dv_1 dv_2$$

$$\mathfrak{M}_I = \Psi^* \vec{\sigma}_I \Psi, \quad \mathfrak{M}_{II} = \Psi^* \vec{\sigma}_{II} \Psi$$

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II}.$$

一月卅一日

Zs. 63. S. 54 V. Weisskopf u. E. Wigner: Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie.

(12)
$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi(Q, N_1 N_2 \cdots N_\rho \cdots)}{\partial t} = H\psi = (E_Q + h\sum_\rho \nu_\rho N_\rho)\psi$$
$$+\sum_\rho \sum_U w^{(\rho)}_{QU}\left[\sqrt{N_\rho+1}\,\psi(U, N_1, N_2, \cdots N_\rho+1, \cdots) + \sqrt{N_\rho}\,\psi(U, N_1, N_2, \cdots N_\rho-1 \cdots)\right]$$

(12a)
$$w^{(\rho)}_{QU} = w^{(\rho)*}_{UQ} = \sqrt{\frac{h}{2\pi\nu_\rho}}\int \sum_x \frac{he}{2\pi i m} u^*_Q \left[A_{\rho x}(x_x y_x z_x)\frac{\partial u_U}{\partial x_x} + A_{\rho y}(x_x, \cdots)\frac{\partial u_U}{\partial y_x} + A\frac{\partial u_U}{\partial z_x}\right]d\tau$$

$$\iiint [A_{\rho x}(x, y, z)^2 + A_{\rho y}^2 + A_{\rho z}^2]\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Im Fall einer Resonanzlinie $A \to B$, ψ ist nur an den Stellen

a $Q = A$, $N_1 = N_2 = \cdots = N_\rho = \cdots = 0$

b_ρ $Q = B$, $N_1 = N_2 \cdots = N_{\rho-1} = N_{\rho+1} = \cdots = 0$ $N_\rho = 1$

für $E_A - E_B - h\varepsilon < h\nu_\rho < E_A - E_B + h\varepsilon$

von Null verschieden und bzw gleich a, b_ρ.

$h\varepsilon$ soll jedenfalls ~~gegen~~ klein gegen $E_A - E_B$, sei, aber doch so groß, daß die b_ρ am Rande des erlaubten Bereiches schon sehr klein sein.

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial a}{\partial t} = \sum_\rho w^{(\rho)}_{AB} b_\rho, \qquad (14a)$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial b_\rho}{\partial t} = h(\nu_\rho - \nu^A_B) b_\rho + w^{(\rho)}_{BA} a \qquad (14b)$$

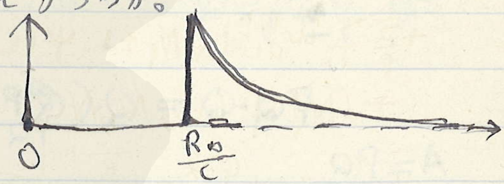
之の solution は ↑

Zs 66 7-8 558. S. Kikuchi: Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Q.E.D.

Kikuchi: ニ angeregte Atom カラノ

「t=0 ノ時 $P(x_i=0)$ ニ Lichtquanten ガナカッタトスレバ $P'(\Sigma x_i^2 = R)$ ニ於テハ $t=\frac{R}{c}$ 迄ハ Energiedichte 0」

コトヨリ Lichtsignal ガ c ヨリ大ナル speed デ進マヌコトヲ証シテ居ルトイヘルダラウカ。



---

†

$$a = e^{-2\pi\Gamma t} \quad \text{トオケバ}$$

$$b_\rho = \frac{w^{(\rho)}_{BA}}{h} \frac{e^{-2\pi\Gamma t} - e^{2\pi i(\nu_\rho - \nu^A_B)t}}{i\Gamma + \nu^A_B - \nu_\rho}$$

トナリ又 $\Gamma = \pi \kappa_{AB} \nu^A_B / h$

$$\Sigma w^{\rho}_{AB} b_\rho = \kappa_{AB}\, i\pi \nu^A_B e^{-2\pi\Gamma t},$$

トナッテ(14a)ヲ満足ス。

in ノ solution ハ ~~Zeit~~ ニツイテ ν^A_B/Γ^2 ノ order ノ誤差ヲ含ム。(Vernachlässigung ハ $\Gamma \ll \nu^A_B$) トシテニヨルト

Atom dimension ヨリ遥カニ大ナル距離ノ所ニ於テハ

$$J(\nu)d\nu = \frac{\nu}{\nu^A_B} \frac{\gamma\, d\nu}{(\frac{1}{2}\gamma)^2 + 4\pi^2(\nu - \nu^A_B)^2},$$

$$\gamma = 4\pi\Gamma = \frac{16\pi^2 e^2}{3m^2c^3h}|P_{AB}|^2 \nu^A_B.$$

$\frac{\Gamma}{\nu^A_B} \simeq \frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\lambda}{\lambda} \simeq$ 　細カイ。Γt ハ $\left(\frac{\Gamma}{\nu_{AB}}\right)^4 \Gamma t$

ノ order 迄正シク、∴ $\Gamma t \simeq \frac{\nu_{AB}}{\Gamma^2}$

ノ範囲迄正確ニ negligible.*

Dirac, Principle of Q.M. p.87

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \qquad PQ = p^2 + q^2 - i(pq - qp)$$
$$= p^2 + q^2 - \frac{h}{2\pi}$$

$$p + iq = P \qquad PQ - QP = 2i(pq - qp)$$
$$p - iq = Q \qquad = \frac{h}{\pi} \;!!$$

$$PQ \cdot Q = Q \cdot \left(PQ - \frac{h}{\pi}\right)$$

$A = PQ$

$$AQ = Q\left(A - \frac{h}{\pi}\right)$$

$$A'(A'|Q|A'') = (A'|Q|A'')\left(A'' - \frac{h}{\pi}\right)$$

$$\therefore A' = A'' - \frac{h}{\pi} \quad \text{or} \quad (A'|Q|A'') = 0,$$

$$(A'|A|A') = (A'|PQ|A') = \sum_{A''} (A'|P|A'')(A''|Q|A')$$

$$A'(A'|P|A'') = (A'|P|A'')\left(A'' + \frac{h}{\pi}\right)$$

$$\therefore A' = A'' + \frac{h}{\pi} \quad \text{or} \quad (A'|P|A'') = 0,$$

$= A'$ ノ右.

然ルニ $A'' = A' - \frac{h}{\pi}$ ガ eigenvalue デナイナラバ $= 0$.

$\therefore$ A' ガ eigenvalue ナラバ $A' - \frac{h}{\pi}$ モ eigenvalue デナケレバ 又ハ $A' = 0$,

然ルニ $p^2 + q^2$ ノ eigenvalue ハ $\nless 0$

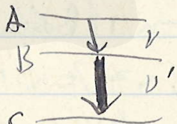
$$PQ \nless -\frac{h}{2\pi}$$

$$\therefore A' = 0, \; \frac{h}{\pi}, \; \ldots \; n\frac{h}{\pi}, \; \ldots$$

Radiation ト一ツノ ~~Atom~~ Electron System トノ Interaction ヲ考ヘルナラバ Electron ノ Ensemble トノ Interaction ヲ考ヘ現ハサネバナラヌ。（自然 Dirac ノ方法ニヨル場合デアル。H. P. ノ場合ニハ兩方ノ場合ガ考ヘラレテ居ル。）

---

* モット複雑ナ場合ニツイテモ計算ヲ行ハネバナラヌ。全一緒ニ ν, ν' ガ續イテ放出サレルナラバ



$J(\nu,\nu')d\nu d\nu'$

$$= \frac{\nu}{\nu_B^A}\cdot\frac{\nu'}{\nu_C^B}\cdot\frac{\gamma_B^A d\nu}{(\frac{1}{2}\gamma^A)^2+4\pi^2(\nu_C^A-\nu-\nu')^2}\cdot\frac{\gamma_C^B d\nu'}{(\gamma^B)^2+4\pi^2(\nu_C^B-\nu')^2} \qquad (29a)$$

トナリ、タトヘ A→B ノ transition probab 非常ニ小サイ場合デモ B→C ノ 〃 〃 ガ大ナラバ A→B ノ Linienbreite モ大トナル。∴ hν+hν' ノ値ハ sharp ニキマルガ、ν' ノ値ガ diffuse ニナルナラバ ν モ diffuse トナッテ行ク。

二月五日

Ferromagnetismus

1) **49**, 619, (1928) ~~Bloch: Theo. des~~ Heisenberg: Zur Theorie des Ferromag.

2) **57**, 545, (1929) Bloch:

3) **61**, 206, (1930) Bloch: Zur Theorie des Ferrom.

4) **63**, 141, (1930) Honda: Über die ferromg. Theorie von P. Weiss und W. Heisenberg.

5) Journ. de Phys. **1**, 1, 1930. Weiss:

Elektron ノ Bahnimpulsmoment ノ影響ハドウナノカ。
簡単ニ考ヘテ居ルノハ、

$$m\frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}[-r+(N-r)]$$

$$m = n - r \qquad N = 2n$$

ノ probable value デアル。 $\overleftarrow{r}$ $\overrightarrow{N-r}$

~~A~~ Valenzelektron ノ数ガ二個以上ノ場合ヲ考ヘテ見ル必要アル。

所ガ Einstein-de Haas-Effekt ニヨリ、

Impulsmoment $\doteqdot \frac{m}{e}$ magnetische Moment

故ニ spin ノ方向丈ガ field ノ影響ヲ受ケルラシイ。

朝永氏ノ説明 (**56**, 860, 1929.) Kern magnet ノ影響ニヨリ $\frac{m}{e}$ トナル。

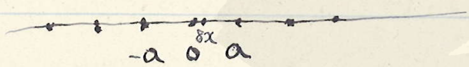
Crystalstructure

$$H(q_i, p_i, Q_i) = H(n_i, Q_i)$$

$$\delta H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial Q_i} \delta Q_i = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots N$$

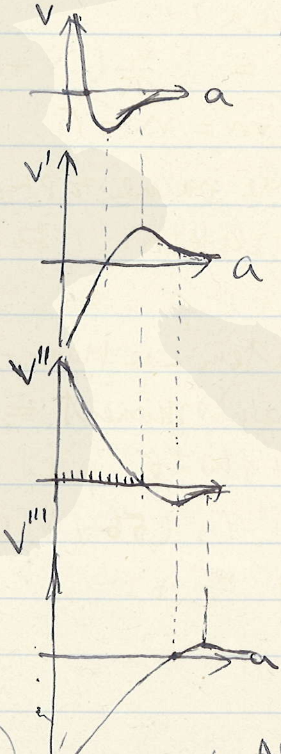
$$\rightarrow Q_i = Q_{i0}.$$



$$-2V(a) + \{V(a-\delta x) + V(a+\delta x)\}$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} \delta x^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} > 0,$$



$$y = Ae^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -Ae^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = A\left(\frac{x}{a}\right) y \left(\frac{x}{a}\right)$$

$$z = \log x. \quad e^z dz = dx.$$

$$e^{-z} \frac{dy}{dz} = Ay(z-c)$$

$$\frac{dy}{dz} = Ae^z \left(y - c\frac{dy}{dz}\right)$$

$$(1 + Ace^z)\frac{dy}{dz} = Ae^z y$$

$$y = Ce^{A\left(x + \frac{Acx^2}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{y} = A(1 + Acx)dx$$

Zs. 63, 245 Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte (London)

Freievalenz ヲ持ツ ~~Mole~~ Atomgebilde 間ノ Wechsel-wirkung

Eisenschitz u London: Zs 60, 491, 1930.

Phys. Rev.
Vol. 37, p. 51

Breit: Derivation of H.F.S. Formulas for the One Electron Spectra

Zs. 62 p. 188 (1930)

Landau u. Peierls

Quantenelektrodynamik im Konfigurationsraum

Das el. mg. Feld und seine Wechselwirkung mit der Materie wird durch eine Schrödigl ~~gl~~ im Konfig. raum der Lichtquanten beschrieben. Die Resultate sind identisch mit den von Heisenberg und Pauli.

2.24

25, 67
1-2, p54

Wessel, Jena
Invariante Formulierung der Diracschen Dispersionstheorie

Nat. Acad. 17, No 1, p. 70
Breit: On the Interpretation of Dirac's α-Matrices

Vol 36, p. 1732
Breit and Doermann: Hyperfinestructure of S and P Terms of two Electron Atoms with Special Reference to Li^{+}.

Proc. Roy. Soc. 129, p686

2.28

M. Delbrück: Interaction of Inert Gases

$$\psi = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ & & \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

各 atom ノ eigenfunktion ヲ組合ハセテ
$f_1 \cdots f_n$ ヲ

1 set : $g_{l_1}(r)\, Y_{l_1}^m \quad (m = -l_1 \cdots +l_1)$

2 set : $g_{l_2}(r)\, Y_{l_2}^m \quad (m = -l_2 \cdots +l_2)$

— — —

各 set ニ分ケラレル様ニ transformation スル事ガ出来ル。

故ニ l_i = or ≠ l_k デ $l_i = l_k$ ノ時ハ

$(g_{l_i}\, g_{l_k}) = 0$

2ツノ ^1S state ニアル A,B atom ノ Interaction energy ハ

A: μ fns $\alpha_1 \cdots \alpha_\mu$

B: ν fns $\beta_1 \cdots \beta_\nu$

$$\alpha = a_l(r_a)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

$$\beta = b_l(r_b)\, Y_l^m(\vartheta', \varphi')$$

$$\psi = \mathrm{Det}(\alpha_1 \cdots \alpha_\mu, \beta_1 \cdots \beta_\nu)$$

$$V^{AB} = 4 \sum\sum \iint \left[\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_{a_1}} - \frac{1}{r_{b_2}}\right] |\alpha_i(1)|^2 \times |\beta_k(2)|^2\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Proc. Camb. Phil. Soc. 27, I (1931)

p. 66　Hassé: Calculation of the van der Waal forces for H and He at large interatomic distances.

H ノ場合ニハ

$$\lambda = (M - 2L)/N$$

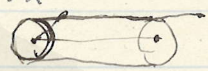
$$N = \int \psi^2 d\tau \quad M = \int (\mathrm{grad}\,\psi)^2 d\tau \quad L = \int V \psi^2 d\tau$$

$$V = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{r_{12}}$$

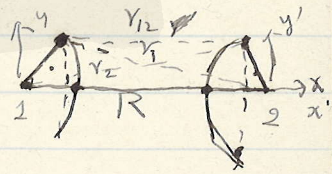
λヲ min ニスレバヨイ。R ガ大キイ所デハ

atomic interaction ノ双極子ノ項ハ

$$-\frac{2xx'}{R^3} + \frac{yy' + zz'}{R^3}$$



ソレハ向キヲモ考ヘレバヨイ。



~~$r_1 = R - x$, $r_2 = R + x'$~~ ~~$r_{12} = R$~~

$$r_1 = \sqrt{(R-x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(R+x')^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$r_{12} = \sqrt{(R - x + x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$-\frac{1}{R}\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{+2xR - x^2 - y^2 - z^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-2x'R - x'^2 - y'^2 - z'^2}{R^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{2(x - x')R - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2}{R^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{R^3}\left\{ -xx' - yy' - zz' \right\}$$

$$= \frac{-rr'\cos\theta}{R^3} \; !!!!$$

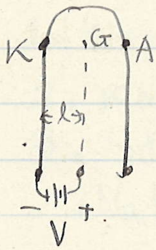
3^{h}, 12^{h}.

Naturwiss. 673

Heitler, Herzberg: gehorchen die Stickstoff-kerne der Boseschen Statistik.

546. Heitler: Quantentheorie der Valenz.
(Wigner: Ungar. Akad. im Druck)

Das Barkhausen-Kurz-Effekt nach der W. M.
von K. Sachuster (5) 7, 1930, S. 54



(Barkhausen u. Kurz: Phys. Zs. 21, 1 (1920))

$$\lambda = c\,l\sqrt{\frac{8m}{eV}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{eV}{l}x\right)\psi = 0$$

$$\psi = \sqrt[6]{w}\; Z_{\frac{1}{3}}(2\sqrt{w})$$

$$w = \frac{(\alpha - \beta x)^3}{9\beta^2}$$

$$\alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2}E,$$

$$\beta = \frac{8\pi^2 m}{h^2}\cdot\frac{eV}{l}$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \sqrt[6]{w}\, J_{\frac{1}{3}}(2\sqrt{w}) = \dfrac{1}{\Pi(\frac{1}{3})}\sqrt[3]{w}\left(1 - \dfrac{9w}{3\cdot 4} + \dfrac{(9w)^2}{3\cdot4\cdot6\cdot7} \cdots\right) \\ \psi_2 = \sqrt[6]{w}\, J_{-\frac{1}{3}}(2\sqrt{w}) = \dfrac{1}{\Pi(-\frac{1}{3})}\left(1 - \dfrac{9w}{2\cdot 3} + \dfrac{(9w)^2}{2\cdot3\cdot5\cdot6} - \cdots\right) \end{cases}$$

Asympt. für $|w| \geq 1$, bei positivem w:

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[12]{w}}\cos\left(2\sqrt{w} - \dfrac{5}{12}\pi\right) \\ \psi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[12]{w}}\cos\left(2\sqrt{w} - \dfrac{1}{12}\pi\right) \end{cases}$$

bei negativem w:

$$\psi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}^{\,\prime 2}\sqrt{|w|}} e^{2\sqrt{|w|}}$$

$$\psi_2 = +\frac{1}{2\sqrt{\pi}^{\,\prime 2}\sqrt{|w|}} e^{2\sqrt{|w|}}$$

$$\psi = A\psi_1 + B\psi_2$$

Randbedingungen

$$\begin{cases} x = 0 & w = w_0 = \dfrac{\alpha^3}{9\beta^2} : \dfrac{d\psi}{dx} = 0,\ \dfrac{d\psi}{dw} = 0 \\ x = l & w = w_l = \dfrac{(\alpha - \beta l)^3}{9\beta^2} : \psi = 0 \end{cases}$$

~~dap~~

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)_{w_l} = \left(\frac{\psi_2'}{\psi_1'}\right)_{w_0}$$

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{h}{8\pi^2 m}\Delta\alpha.$$

$$\Delta\alpha = \frac{\pi\beta}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta l}} = \pi\sqrt{\frac{\beta}{l}}$$

$$\nu = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{eV}{8m}}$$

f

Spektrallinien, Verbreiterung, Ursache
1. Dopplereffekt. (Wärmebewegung)
2. Kopplungen mit anderen Atomen (Druckverbr.)
3. Strahlungsdämpfung.
(Natürlichelinienbreite)
Wechselwirkung mit der Strahlung.

Nature 127, No. 3199 Radioac.
Phys. Rev. 37. No 3, Cosmic Ray
ZS. 68, 1-2 Heitler-Rumer
Naturwiss. 11, 13,3 p. 252 Chlorisotop mit Kernmasse 39.
Berlin, Meitner u. Böhme

Phys. Rev. 37, No 3. p. 313,
Ruark: Discrete and Conti. Theories in physics.
p. 326. Nuclear spin
327 H.F.S. of Li+.

Zs. 63. S. 803.

Sauter: Lösung der Diracschen Gl. ohne Spezialisierung der Diracschen Operatoren.

S. 855 Fock: Bemerkungen zum Virialsatz.

$$c + \sum a_k \gamma_k + \sum_{k<l} a_{kl} \gamma_k \gamma_l + \sum_{k<l<m} a_{klm} \gamma_k \gamma_l \gamma_m + a \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

$= 0$ トセバ.

γ_1 ヲカケルト.

$$1 + \sum a'_k \gamma_k + \sum a'_{kl} \gamma_k \gamma_l + \cdots\cdots = 0$$

~~linear abhängig~~

2ヲカケルト. $c'_1 + \sum a_k \gamma_k + \sum_{k<l} a_{kl} \gamma_l \gamma_k +$

~~$1 + \sum a_k^2 + \sum a_k$~~

ヲカケルト.

$$c1 + \sum a_k^2 + \sum a_{kl}^2 + \sum a_{klm}^2 + a^2$$

$$+ 2c \sum a_k \gamma_k +$$

~~$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 0.$~~ ~~$\gamma_k \gamma_l \cdot \gamma_n \gamma_m + \gamma_n \gamma_m \gamma_l \gamma_k$~~

~~$\gamma_k \cdot \gamma_k \gamma_l + \gamma_k \gamma_l \cdot \gamma_k = 0$~~ ≠ 0

~~$\gamma_k \gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k \gamma_k$~~ $= \gamma_l$

~~$\gamma_k \gamma_l \gamma_m + \gamma_m \gamma_l \gamma_k$~~ $= 0.$

~~$\gamma_k \gamma_l$~~

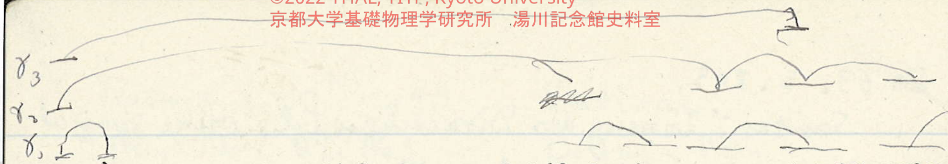
~~$1 + \sum a_k \gamma_k + \sum_{k<l} a_{kl} \gamma_k \gamma_l + \sum a_{klm} \gamma_k \gamma_l \gamma_m$~~

~~$a_k = 0$~~

~~1+~~ $cc' + \sum a_k b_k + \sum a_{kl} b_{kl} +$

$+ (c' a_k + c b_k) \gamma_k$

$+ \cdots$



$1 \quad \gamma_1; \gamma_2; \gamma_3; \gamma_4; \gamma_1\gamma_2; \gamma_1\gamma_3; \gamma_1\gamma_4; \gamma_2\gamma_3; \gamma_2\gamma_4; \gamma_3\gamma_4; \gamma_1\gamma_2\gamma_3; \gamma_1\gamma_2\gamma_4$

$1 \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_{12} \quad a_{13}$

$\gamma_1^{\times} \; a_1 \quad a_0 \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_2 \quad a_3$

$\gamma_2 \; a_2$

$$1 + \sum \gamma_K + \sum \cdots\cdots = 0,$$

$\times\gamma_1 \quad a_1 \quad a_0 - a_{12} - a_{13} - a_{14}$

$$a + b\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0$$

γ_4

$$a\gamma_4 + b\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 0$$

$$a\gamma_4 \pm b\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 0$$

$$\therefore \; a = 0, \quad b = 0.$$

$\gamma_3 \quad 1 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \;|\; \gamma_3\gamma_4 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_4 \;|\; \gamma_2 \quad | \quad |$

$\gamma_2 \quad 1 \quad \gamma_3\gamma_4 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_4 \;|\; \gamma_1; \gamma_2\gamma_3; \gamma_2\gamma_4, \gamma_1\gamma_3\gamma_4$

$\gamma_1 \quad 1 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2\gamma_3 \quad \gamma_2\gamma_4 \quad \gamma_3\gamma_4 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_4 \quad \gamma_1\gamma_3\gamma_4$ 0,

1 ~~$1 \; \gamma_1 \; \gamma_2\gamma_3 \; \gamma_2\gamma$~~

$\gamma_1 \quad \gamma_1; \gamma_3; \gamma_4; \gamma_1\gamma_2; \gamma_1\gamma_3; \gamma_1\gamma_4; \quad \gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 1,

γ_2

$\gamma_3 \quad | \quad | \quad | \quad |$

$\gamma_4 \; | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad |$

2^4.

$\frac{1}{r}(\quad)r^2 - \frac{h}{2\pi i} = (\quad)r.$

$(\quad)r - \frac{h}{2\pi i} = r(\quad)$

$\gamma_1\gamma_3\gamma_4; \gamma_2\gamma_3\gamma_4; \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

a_{1234}

$A + \gamma_1 A \gamma_1^{-1}$ $\qquad A - \gamma_1 A \gamma_1^{-1}$

$A + \gamma_1 A \gamma_1^{-1} \gamma_2 A \gamma_2^{-1} + \gamma_2\gamma_1 A \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$

$A + \gamma_1 A \gamma_1^{-1} + \cdots$

$+ \gamma_4\gamma_3\gamma_2 A \gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} + \gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1 A \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} = 16 a_0.$

etc.

$$\left\{\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3 + \gamma_4\left(\frac{\alpha Z}{r} + \kappa E\right) + \kappa E_0\right\}\psi = 0$$

$$\psi = A \cdot \psi'$$

$A'(\theta\varphi)\{\qquad\qquad\} A(\theta,\varphi) = P(p_r, r)$

2, $\frac{h}{2\pi i} + x p_1 + y p_2 + z p_3 = r p_r$

$-\frac{h}{2\pi i} + p_x x + p_y y + p_3 z = p_r r$

$p_1 r^2 - r^2 p_1 = 2x \frac{h}{2\pi i}$

$p_1 \frac{x}{r} - \frac{x}{r} p_1$

$\frac{1}{r}\left(\frac{x}{r} p_1 + \cdots\right) r^2$

$- r(\quad)$

$= r \frac{h}{2\pi i}$

3. $\quad p_r r - r p_r = \frac{h}{2\pi i}$

$$p_r = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{r} + \frac{x}{r} p_1 + \frac{y}{r} p_2 + \frac{z}{r} p_3$$

$$= -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{r} + p_1 \frac{x}{r} + p_2 \frac{y}{r} + p_3 \frac{z}{r}$$

$$\psi = \left\{\gamma_1 \frac{x}{r} + \gamma_2 \frac{y}{r} + \gamma_3 \frac{z}{r}\right\}\psi'$$

$\frac{\gamma}{r}\left(p_r + \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{r}\right) + \sum \gamma_1\gamma_2\left(p_1 \frac{y}{r} - p_2 \frac{x}{r}\right)$

$+ \gamma_4 \sum \left(\gamma_1 \frac{x}{r} + \cdots\right)$

$\left(\frac{\alpha z}{r} + \kappa E\right) + \kappa E_0 \}$

Vol 37, No 5,

p. 507. Orbital Valency Bartlett.

p. 556 Interchange of Trans. Rot. & Vibr. Energy in Molec. Collisions by Roess

Vol 37, p. 512

Kemble and Zener: 2 quantum excited states of the H Mol.

Phys. Rev. 36 p. 436
Pauling;

Roy. Soc. 130, vol 815 p. 551
Stern; Sym. Sph. Osc. and the Rot. Motion of Homo. Mol. in Crystal

p. 632 Darwin; Ex of Uncertainty Principle

p. 655 Arnot; Diff of Electron in Mercury Vapour

A Schur: Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berl. Ber. S. 406 (1905)

Schur:

Die Nebenbeweise der Relativitätstheorie
gleich. (Zs 65, 848, 1930)
Hauptbeweis (Zs 64, 717, 1930)

Phys. Rev. 37 No 6.

Einstein etc: Knowledge of Past and Future in the Q.M.

Slater etc: von der Waals' force of Gases.

Goudsmidt: Hyp. F. S. separation.

Zs. f. Phys. 68 3–4

p. 274 Kuark: Über die Unbest. rel der Q. T.

5–6 +い

phys. Zs. 32, 7 Γい

Naturwiss 19, 14

42 ~ $F_1 = \frac{\partial}{\partial x^0}\varphi_1 - \frac{\partial}{\partial x^1}\varphi_0 + \frac{\partial}{\partial x^2}\varphi_3 - \frac{\partial}{\partial x^3}\varphi_2$

$F_2 = \quad \varphi_2 \quad - \varphi_3 \quad - \varphi_0 \quad + \varphi_1$

$F_3 = \quad \varphi_3 \quad + \varphi_2 \quad - \varphi_1 \quad - \varphi_0$

($F^\dagger \varphi$ etc.) φF $\quad \varphi F_1 F$

$F\varphi$ $\quad F_1 \varphi$

$\frac{\partial}{c\,\partial t}(\varphi_0 F_0) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 F_1) \ldots$

$= \frac{\partial}{c\,\partial t} F_0 \cdot \varphi_0 + \frac{\partial}{\partial x} F_1 \quad \varphi_0 + \quad F_2 \quad + F_3$

$F_1 \cdot \varphi_1 \;\mp\; F_0 \quad \varphi_1 \; + \qquad -$

$F_2 \quad \varphi_2 \; - \quad F_3 \qquad - \qquad +$

$F_3 \quad \varphi_3 \; + \quad F_2 \qquad - \qquad -$

$F^\dagger F \qquad + F_0^* F_0 + F_1^* F_1 + \ldots$

Zs. f. Phys. S.244 63 1930

Zur Wellentheorie des Lichtquants
von Rumer

Max. Gl. ハ　　$F_1 = H_1 + iE_1$ トシテ

$$\frac{\partial}{\partial x^0}F_0 + \frac{\partial}{\partial x^1}F_1 + \frac{\partial}{\partial x^2}F_2 + \frac{\partial}{\partial x^3}F_3 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}F_1 - \frac{\partial}{\partial x^1}F_0 + \frac{\partial}{\partial x^2}F_3 - \frac{\partial}{\partial x^3}F_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}F_2 - \frac{\partial}{\partial x^1}F_3 - \frac{\partial}{\partial x^2}F_0 + \frac{\partial}{\partial x^3}F_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}F_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}F_2 - \frac{\partial}{\partial x^2}F_1 - \frac{\partial}{\partial x^3}F_0 = 0$$

$$\text{Max } F = 0.$$

für $F_0 = 0$.

(F_1, F_2, F_3, F_0) ハ Vektor デハナイ,

$F_0 \sim x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ (invariant)

$F_1 \sim x_2 x_3 - x_3 y_2 + x_0 y_1 - x_1 y_0$

$F_2 \sim x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_0 y_2 - x_2 y_0$

$F_3 \sim x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_0 y_3 - x_3 y_0$

x_i, y_i: Vierer Vektor

ノ如ク Transformieren スル.

F_i ノ transf. Matrix ハ

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ナル形ヲ持ッテ居ル. 即チ Lorentz gruppe ノ Darst トシテ Reduzibel

Dirac ノ $(\psi_0 \psi_1 \psi_2 \psi_3)$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

ハ Reduzibel

(van der Waerden, Spinoranalyse Gött Nachr. 1929)

max $F = 0$ ハ

~~Max~~ $(p_0 + \mu p) F = 0$,

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mu_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_i \mu_k + \mu_k \mu_i = 2\delta_{ik}$$

$$\mu_1 \mu_2 = i \mu_3 \quad \text{etc.}$$

之ガ Dirac ノ α_i ト equivalent デナイコトハ、~~之等~~ μ_i ト anticommute スル第四ノ Matrix ガ ~~存在~~ 存在シナイ事デアル。

~~~~(之ハ μ_i ノ内ノ二ツト anticommute スルモノハ必ズ第三ノモノト commute スルコトカラ分ル。)

$$H = c\mu p$$

ト Vertauschbar ナノハ $M_{12} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ デナク、

$$M_{12} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2$$

デアル。∴ Lichtquant ニハ Drall ガアル。

之ノ為ニ Licht ヲ Emittieren スル時 Atom ノ Drehimpuls ハ変化スル。
~~~~

$$\frac{\partial}{c\partial t}(F^+F) + \frac{\partial}{\partial x_1}(F^+\mu_1 F) + \cdots = 0$$

$$\frac{1}{c\partial t}(\psi^+\psi) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\psi^+\alpha_1\psi) + \cdots = 0$$

$+$: konj. transp.

$s_0 = \psi^+\psi$ etc. ハ一ツノVektorデアル

$\overline{\psi} = \gamma\psi$, $\overline{\psi}^+ = \psi^+\gamma^*$

$\overline{s_i} = \sum_k l_{ik} s_k$ l_{ik}: Lorentzmatrix

$\overline{\psi}^+\alpha_i\overline{\psi} = \psi^+(\gamma^*\alpha_i\gamma)\psi = \sum_i l_{ik}\psi^+\alpha_k\psi$,

$\overline{\alpha_i} = \gamma^*\alpha_i\gamma = \sum_k l_{ik}\alpha_k$.

ここニ於テ

$8\pi T_{00} = F^+F$, $\frac{8\pi}{c}T_{01} = F^+\mu_1 F$ etc

ハVektorデアリ sym. Tensor ノ nullte Spalteデアル

$\lambda_0 = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ トシ,

$8\pi T_{ik} = F^+\lambda_i\mu_k F$

トスレバ, $8\pi T_{11} = (H_1^2 - H_2^2 - H_3^2) + (E_1^2 - E_2^2 - E_3^2)$

$8\pi T_{12} =$

$8\pi T_{13} =$

ナル。

$\rho_1 = \mu_1\lambda_1 = \begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}$ $\rho_2 = \mu_2\lambda_2 = \begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}$ $\rho_3 = \begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$

$\rho_i^2 = 1$ $[\rho_i\rho_k] = 0$

$\mu_i\rho_k + \rho_k\mu_i = 0$ für $k \neq i$ $[\rho_i\mu_i] = 0$.

$\lambda_i = \mu_i\rho_i = \rho_i\mu_i$

$\mu_i\lambda_k$ ='

etc.

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ & & i & \\ & -i & & \\ -i & & & \end{bmatrix}$$

$\Gamma^+ \lambda_i \mu_k \Gamma$ ガ Tensor デアルカラ δ ヲ ξ トスレバ

$$\delta^* \lambda_i \mu_k \delta = \sum_{p,q} l_{ip} l_{kq} \lambda_p \mu_q$$

$\lambda_i \mu_k$ ハ sym. Matrizentensor デ Matrizen-vektor α_i ニ analog

Q. E. D.　五月四日.

I. 現在ノHamiltonianニ於テハ Electron ト Photon ノ Energy ノ Expression ガ異ナルコト。

II. ~~Max~~ Dirac ノ式 ト Maxwell ノ式 トハ ~~要ス~~ ~~相異~~ 異ナル Lorentz Group ノ 相異ナル reducible Representation デアルコト。

III. ~~Elect~~ Photon ノ Hamiltonian ヲ Electron ト同ジク p's ニ関シ linear ニスルト、negative Energy ガ同ジ様ニ入ッテ来ルコト。(nullpunkt energie ハ[illegible])
又 Maxwell 式ト一致サセルノモ難シイコト。

IV. Proton ノ Energy ノ Expression ~~ヲ求メテ~~ ~~得ラレルコト~~ ガハ[illegible]ワカラヌコト。Electron ノ点デアルカドウカモワカラヌコト。

V. ~~Photon~~ Selbst Energie (Electron) ノ unendlich デアルコトハ Photon ノ null punkt energie ニ関係シテ居ルコト。

VI. 又 ~~Photon~~ Licht ノ Grav. Wirk ガ unendlich ニナルコトモ又 Nullpunkt energie ニ関係シテ居ルコト。

Camb. Phil. Soc, 27 No 1, (1931)

p. 15 Eddington: Preliminary note on the Masses of the Electron, the proton, and The Universe.

p. 37. Robinson: Orth. Groups in 4 Dimensions

p. ~~77~~ 66. Hassé

p. 77 Massey: Theory of Scattering of Short X-rays by H_2,

p. 86. Darwin: Diamg. of free Electron

p. 113. Webster: The Capture of Electrons by α-Particles

Eddington;

$$\frac{\text{Mass of Proton}}{\text{Mass of Electron}} = \frac{136}{\sqrt{10}} \div \frac{\sqrt{10}}{136}$$

$$= 1849.6$$

$\left(\frac{m_H}{\mu_0} = 1848, \text{experimentally} \right)$

Free ~~Nucleus~~ Proton ガ Helium nucleus ニナル際ハ proper Distance ニ ~~相当~~ ノ transform ガ ignor サレル。∴ degree of free ガ 136 カラ 137 ニナエル。∴ Helium Nucleus デノ proton ノ mass ハ $\frac{136}{137}$ 倍ニナリ、Electron ノ方ハ逆ニ $\frac{137}{136}$ 倍ニナル。コレニヨッテ packing fraction ヲ説明シ得ル。

Phys. Rev. vol 37 No 7.

p. 795 H.F.S. as a Test of a linear wave eq. in the two-body problem by D. R. Inglis.

p. 841 Mass Defects of C^{13} etc . . .
(Raymond T. Birge)

Zs. 68 7-8

Ann 8, 8

Nature 127, 3205

(2te Auflage)

Weyl. p. 234

$M + M' + F$.

$f_\alpha \to -f_\alpha$

$\psi_1 \to -\bar{\psi}_4$, $\psi_2 \to \bar{\psi}_3$ $\psi_3 \to \bar{\psi}_2$ $\psi_4 \to -\bar{\psi}_1$

$\bar{\psi}_1 \to -\psi_4$ etc.

$\bar{\psi}\alpha_i \psi \frac{\partial}{\partial x_i}\psi \to -\psi \bar{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}$

~~$\psi \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$~~ $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\bar{\alpha}_i\bar{\psi}$

$\downarrow$ $\bar{\psi}\alpha_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$!!!

$2\delta - 2\delta$!!!

$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & -i \\ & & -i & \\ & i & & \\ i & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & \\ & & & i \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}$

$\bar{\psi}_1 \cdot\cdot \psi_4 \to \bar{\psi}_4 \cdot\cdot \psi_1 \to +\bar{\psi}_4 \cdot \psi_1 + \bar{\psi}_1 \cdot \psi_4$

$\bar{\psi}_2 \psi_3 \to \psi_3\bar{\psi}_2$

$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & -i \\ & & -i & \\ & i & & \\ i & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & i \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$

$\tilde{\psi} \to \alpha\psi$ $\tilde{\psi}$ ~~ψ~~

$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & -i \\ & & i & \\ & i & & \\ -i & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$p_r r^2 p_r = \frac{2h}{2\pi i} r$

$(p_r r - r p_r) r + r (p_r r - r p_r) = \frac{2h}{2\pi i} r$

$f = p_r r - r p_r - \frac{h}{2\pi i}$

$f r + r f = 0$.

$\begin{pmatrix} f_1 & & \\ & f_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \Big($

$\begin{pmatrix} f_1 & & \\ & -f_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \alpha \\ \beta & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha\beta & & \\ & \alpha\beta & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$r^{-1} p_r r^2 - r p_r = \frac{2h}{2\pi i}$

~~$r^2 p_r$~~ $= 2 p_r r - 2 r p_r$

$r^{-1} p_r r^2$

~~$r^{-1}(r^2 p_r - \frac{2h}{2\pi i} r) - r p_r = \frac{2h}{2\pi i}$~~

~~$r p_r$~~

~~$r^{-2} p_r r^2$~~ $- p_r = \frac{2h}{2\pi i} \frac{1}{r}$

Ber. Ber. 1931 III. S. 63

Schrödinger: Zur Q. D. des Elektrons.

Ber. Ber. 1930.

Schrödinger: Über die kräftefreie Bewegung in der rel. Quantenmechanik.

Weyl S. 234 (IIte Auflage)

$$\psi^\dagger \{ \frac{e}{c}A_0 + \rho_3(\sigma, p + \frac{e}{c}A) + \rho_1 mc \} \psi + \cdots$$

$A_0 \to -A_0$

$\psi \to \rho_2\sigma_2\psi^\dagger \quad (\psi^\dagger \to \rho_2\sigma_2\psi) \quad A \to -A$

$\psi = a_E \psi_E \quad \to \quad \rho_2\sigma_2\psi^\dagger = a_E^\dagger \rho_2\sigma_2\tilde{\psi}$,

$\psi^\dagger = a_E^\dagger \psi_E \quad \to \quad \rho_2\sigma_2\psi = a_E \rho_2\sigma_2\psi$,

$$E'\rho_2\sigma_2\tilde{\psi} = \{ -\frac{e}{c}A_0 + \rho_3(\sigma, p - \frac{e}{c}A) + \rho_1 mc \} \rho_2\sigma_2\tilde{\psi}$$

$$= \rho_2\sigma_2 \{ -\frac{e}{c}A_0 \mp \rho_3(\sigma^*, p - \frac{e}{c}A) \pm \rho_1 mc \} \tilde{\psi}$$

$$= \rho_2\sigma_2 \tilde{\psi}(H) = -E\rho_2\sigma_2\tilde{\psi}.$$

$E' = -E$,

$$\psi^\dagger \frac{e}{c}A_0\psi \to -\psi\frac{e}{c}A_0\psi^\dagger$$

$$= \psi^\dagger\frac{e}{c}A_0\psi - \psi^\dagger\delta\psi_0 \frac{eA_0\delta}{c}$$

~~$\frac{e}{c}\int \psi_n^\dagger A_0 \psi_n \, dv = \frac{e}{c}$~~

$\rho_2 mc$

$$\psi_i^\dagger\psi_i + \psi_i\psi_i^\dagger = f$$

$\alpha_{ik}\psi_k$!!

$$-\frac{e}{c}\int A_0 f \, dv = \int \psi^\dagger M c \psi?$$

ρ_1

$\psi_i \psi_j^\dagger \psi_k$

$= \delta_{ij}\delta_{ik} - \psi_j^\dagger\psi_i\psi_k$

$= \delta_{ij}\delta\,\psi_k + \psi_j^\dagger\psi_k\psi_i$

$\sum_i (\psi_i^\dagger\psi_i + \psi_i\psi_i^\dagger) = \quad \psi^\dagger\rho_1\psi$

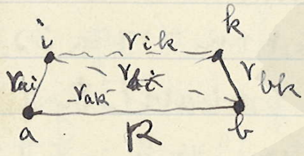
$\psi^\dagger\rho_2 Mc\psi.$

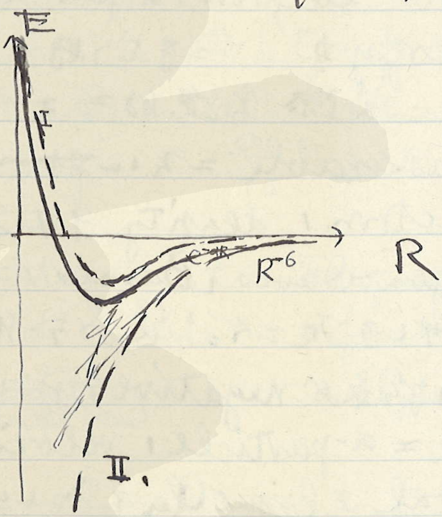
Zs 60 p491 (1930) Eisenschitz u. London; Über das Verhältnis der van der Waalschen Kräfte zu den homöopolaren Bindungskräften.

London; Zs 63. p 244 (1930) Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte

$$\sum \frac{Z_a}{r_{ak}} + \sum \frac{Z_b}{r_{bi}} - \sum \frac{1}{r_{ik}} - \frac{Z_a Z_b}{R}$$

$$= \frac{1}{R^3} \sum_{i,k} r_{ai} r_{bk} (2 \cos\theta_{ai} \theta_{bk} - \sin\theta_{ai} \sin\theta_{bk} \cos(\varphi_{bk} - \varphi_{ai}))$$





I. $\Psi_0' H_0 \Psi_0'$, $\Psi_0' H_0 \Psi_0''$

II. $\Psi_1 H \Psi_0$,

c034-105挟込

C.R. 192. No 6 (1931) p.345
Jean-Louis Destouches: Sur la capture d'électrons par des ions positifs.

ion α-particles ガ electron ヲ捕ヘル probability ハ C.R 191 p.II (1930) p.1438 ニ述ベタ如ク

$$E_k = \frac{Rh Z^2}{k^2}$$

~~ノ場合ニ~~ electron ト ion α-part. ノ relative ノ kinetic energy ガ ニ等シイ時ニ大トナルコトヲ示シタガ、実際実験的ニハコノ probability ヲ measurable ニスル~~ニハ~~ニハ、非常ニ大ナル electron ノ density ヲ必要トシ、最近ノ実験 Bergen, Davis, Barnes ノ行ツタモノモ、ノ條件ヲ満サシテ居ナイ。従ッテ他ノ多クノ人ノ実験ノ結果ガ negative デアッタノハ当然デアル。

次ニ α-particle ノ velocity ヲ落スタメニ metal ノ lamella ヲ入レルト metal 中ノ electron gas ノ thermal agitation ニヨル、

$$v' = \frac{h}{m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ノ程度ノ velocity ノ不正確サガ入ッテクル。コレハ Henderson, Rutherford ノ実験結果トヨク一致シテ居ル。

Zs. f. Phys. 69, 3-4, (1931) S. 1~~70~~41

Born u. Rumer: Ansätze zur Q.E.D.

Q.E.D. ノ Selbstenergieschwier~~lich~~igkeit ヲ除クニ、(classical ニ於テ) Coulombfeld ヲ modify スルコトヲ考ヘル。先 $\frac{1}{r}$ ヲ p ノ Fourier series ニ expand シタ時ノ (例ヘバ) p_0 以上ヲノケテ了ウト、$r \to 0$ デ endlich ナ Potential ヲ得ルガ、之デハ Feld ニ Schwankung ガ ~~現~~ 現レテ来ル。($r \to \infty$ デ $\frac{1}{r}$ ト)

之ニ distribution ヲ p = 付テ Gauß ノ Fehlerkurve ト假定スルト、Potential ノ curve ハ glatt ニナリ、Selbstenergie ガ $\frac{a}{r_0}$ ト云フ形デ出テ来ル。

同様ニ Nullpunktenergie モ ~~Frequenz~~ von Eigenschwingung ノ distribution factor ニ Gauß ノ Fehler~~faktor~~(funktion) ヲ入レルト Nullpt. energie ガ endlich ニナル。

~~之ニ~~ 之ヲ Quantenmechanik ノ方ニモ持ッテ行クコトモ同様ニ行ヘル。

又之ヲ考ヘテ二ツノ particle ノ Vereinigung ニモ応用シ、$\frac{M}{m}$ 等ノ値ヲモ出サントシテ居ル。

Ann. d. Phys. 9, Heft 3, 1931, p. 338
Heisenberg: Bemerkungen zu Strahlungstheorie

Korrespondenzmäßige Betrachtung ヲ以テ ... ヲ寄与ニ適用サレル所ノ Lösungsmethode ヲ与ヘタルモノニテアル。

Proc. Roy. Soc. 131 No 816, 1931, p. 170
Flint: A Metrical Theory and its Relation to the charge and masses of the Electron and Proton

→ Strahlungstheorie ノ取扱ヒ際シ、Klein (41, 407, 1927) ハ anschauliche Vorstellung ト関聯シテ ~~Method~~ ヲ Quanten El. Dyn. ニ於テ ~~応用スルト~~、Bewegungsgleichungen (Maxwell, Dirac) ヲ解キ、Lösung ト云フモノ、ソノ際ハ Amplitud

Strahlungstheorie ヲ取扱フ場合 = Strahlungsfeld ノ Störung ニ Beweg. gl. (Maxwell Dirac) ノ 1ste Näherung Lösung トシテ

$$\psi(x, \sigma) = \sum a_n u_n(r, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t}$$

ヲ形ヲトリ、Störung トシテ

$$E = \frac{\alpha}{\sqrt{L^3}} \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{K}{L}} e^{k\lambda} (b_{k\lambda} \cdots - b_{-k\lambda})$$

$$10^{-6} = \varepsilon$$

$$H = \;'' \sum \sqrt{\frac{K}{L}} \left[e^{k\lambda}, \frac{K}{K}\right] (\cdots)$$

所謂 Fill. Klein ノ Klassisch ナ方法ト同ジ方法ニテ

$$\mathrm{rot}\; E + \frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t} = 4\pi c \sum_{nm} a_n^* a_m X_{mn}^l$$

ナル Operatorgleichung ヲ得ル。Schrödinger ノ Stromdichte ノ採用ニ Vorstellung ハ an ノ Nichtkommutativität ヲ考慮スル事ニ於テ ...

Zs. f. Phys. 63. 1930, 556

I. Pokrowski: Über eine mögliche Wirkung kurzwelliger Strahlung auf Kerne.

Aston (Proc. Roy. Soc. London (A) 115, 487; 1927) ノ測定ニヨッテ得タル mass defect ヲ

$$m_N = m(1-\Delta H_N)\cdot N$$

ナル形デアラハセバ. Kern ノ Spaltung ニ於テ befreien サレル energy E ハ

$$m(1-\Delta H_N)\cdot N = m(1-\Delta H_{N-N_1})(N-N_1) + m(1-\Delta H_{N_1})N_1 + E/c^2$$

~~故ニ or $E = 1{,}5\cdot 10^{-8}[\Delta N$~~

特ニ Kern カラ一ツノ α-particle ガ出ル場合ニハ

$N_1 = 4$, $\Delta H_4 = 0{,}0072$

$$\therefore\quad E = 1{,}5\cdot 10^{-3}\,[\Delta H_{N-4}(N-4) - \Delta H_N N + 0{,}0288]$$

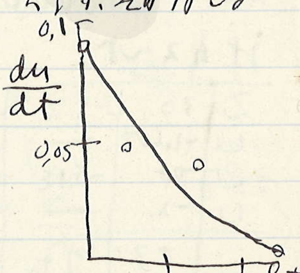
ΔH_N ハ Atomnummer ノ大ナル所ニテハ (例ヘバ Fe 以上) 殆ド一定デアル。

今 $E/N_1 = U$ ナル量ハ、コノ Process ノ起ル probability ノ maß トミラレルガ. 之ヲ計算スルト.

Z	30	32	34	42	47	50
U	-1.10^{-6}	—	—	-0.9ε	—	—
U	-0.4	-0.1ε	0.1ε	$+0.9\varepsilon$	1.4ε	$1.8\cdot10^{-6}$
U	$-2.$	—	—	-0.1ε	—	—
	53	74	78	80	82	
	-0.8ε	-0.5ε	—	—	—	$N_1 = 1$ (Proton)
	2.2ε	4.5ε	4.9ε	5.2ε	5.5ε	$N_1 = 4$ (α-Teilchen)
	0.6ε	$3\cdot\varepsilon$	—	—	3.9ε	$N_1 = 6$ (Kern des Li isotops)

従ッテ α-Teilchen ノ Abspaltung ガ一番起リ易ク
(ゆるやか)
ガール現象ガ軽イ atom デ起リ得ル考デアル。
Radioactive

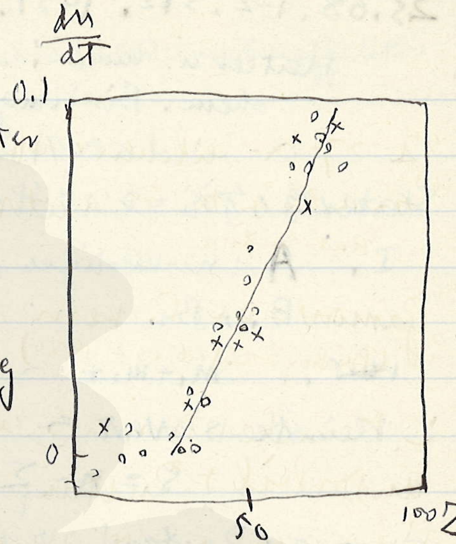
Gamow ニヨレバ、Kern ノ Stabilität ニ對シテ
(Pro Roy Soc. 126, 632, 1930) Kernelektron ニ関シ、
Kernelektron ハ色々ナ state ヲトリ得ル。段
unstabil ナ Zustand ヘ移リ得ル。然シ
Übergang ハ多少 Wahrsch ハ小サク、stufenweise ニ allmählich
(少しづつ)
ニオコル。 Heitler (Naturwiss 18, 332
1930) モ Kern ガ比較的長イ時間 [illegible] ナ state
ニ有リ得ルト述ベテイル。
カカル Übergang ヲ実現サスニハ Erdoberfläche
ニ於テ極メテ rare ナ Wellenlänge ノ Strahlung
ヲ用イネバナラヌト考ヘラレル。ソレハ
weichern Röntgenstrahlen デアル。
Szintillation ノ方法ニヨル実験[illegible]
結果ヲ得タ。ヨッテ α-Teilchen ト
考ヘルト Energy ハ大体 10^{-6}
10^{-5} Erg ノ order ニナッテ居ル。
誤差ハ ±0,01 乃至 ±0,03



尚 Gordon ハ Elektrometer デ実験ヲヤツタ。

要スルニ今ハ大キナ Energie ノ Erscheinung ハ Atomhülle デハオコリ得ナイ。

又上ノ事実ヲ説明スベキ理論ノ要求ハ別トシテ理由ハ一ツモ見ツカラナイ



° Aktiviert durch X-Str.,
× 〃 〃 γ-Str.

Zs. 68. 1–2. S12. 1931.

Heitler u. Rumer; Quantentheorie der chem. Bindung für mehratomige Moleküle

Slater等ノ方法ニヨツテ計算ス.

I. A : n-wertiges Atom

$B_1, B_2 \cdots$ $\quad m_1, m_2 \cdots$ wertig

~~Hier~~. $m_1 + m_2 + \cdots \leq n$ トスル.

Kleinste s-Wert ハ

$$s = n - \sum_i m_i$$

ニハ一ツノ Zustand ガアル. Energie ハ

$$\varepsilon = J_E + m_1(AB_1) + m_2(AB_2) + \cdots - m_1 m_2 (B_1 B_2)$$

$$- \cdots$$

z.B. CH_4, CH_3 ⋯

CH_4 ノ stabile Anordnung ハ Tetraeder

又 NH_3, NH_2, NH ⋯

Blausäure CNH

$$E = J_E + 3(CN) + (CH) - 3(NH).$$

$$\therefore \quad H-C\equiv N$$

ト云フ構造ガワカル.

II. A : n-wertig H : einwertig トスル

$$H-A=A-H$$

ノ形ノ Molekül ハ不可能.

ソノ他色々ノ具体的ノ場合ニ就テ計算シテ結果ヲ得ル.

Zs. 68. 11-12 S. 803, 1931

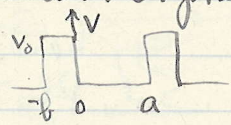
S. Kikuchi: Zur Theorie des Comptoneffektes

Quanten-Elektrodynamische ニ基ヅクモノ,

Nature No.3203 Vol 127 March 21, 1931
The End of the World by A.S. Eddington
Science and Prediction by Piaggio

Proc. Roy. Soc. 130 Vol 814

p. 499　Kronig and Penney: Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices



Potential ノ Periodic ナ Threshold カラ成ル場合ノ Wave-eq ヲ解キ、Eigenwert ノ性質ヲ［性質ノ］ bV_0 ($V_0 \to \infty$ $b \to 0$) ノ値ニ関シテ変化ヲ研究シテヰル。離レ離レノ continuous spectrum ヨリナリ、$bV_0 \to 0$ デ全部ツヅイテ了ヒ、$bV_0 \to \infty$ デハ point spectrum トナル。

linear momentum ノ matrix element ヲ計算シテ、一方 electron ハ lattice ヲ通ッテ行クコトガ出来、他一ツノ stationary state カラ他ヘ radiative transition ガ可能デアル。

又 electron ノ crystal ニヨル reflection ヲ計算シテ Rupp. Rudberg ノ実験ノ説明ガ出来サウデアル。

(Rupp: Naturwiss vol 18, p 880, 1930.)

(Rudberg: Proc Roy Soc, Vol 127, p 111, 1930)

Proc. Roy. Soc. 130 p. 524 ~~Vol~~ No 814, 1931

Gray: Scattering of Hard γ-Rays Part II

Thorium C'' カラノ very hard γ-rays ニヨリ Mg, Al, Cu, Zn, Cd, Sn, Pb ~~等ニヨル~~ atom ニヨル scattering ヲ測定シ

1. Extranuclear electron ノ Compton scattering ニヨル結果ハ forward direction ニ predominate スル secondary emission ヲ説明スルガ、之ニハ Klein-Nishina ノ formula ガ適用サレ得ル、binding force ノ影響ハ非常ニ少イコトガワカル

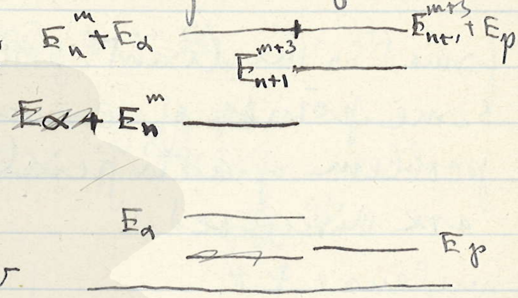
2. Nucleus ニヨル scattering ハ fluorescent radiation ヲ生ジ、ソノ scattered radiation ハ backward ニ出テクルガ、~~此ノ際~~ hardness ノ大ナルコトニヨリ区別出来ル。之レニヨル Pb ト水ニヨル absorption ノ coef ノ差ノ三分ノ一以下ガ fluorescence ニヨルモノデアルコトガワカル。

p463 vol130, No 814.

Chadwick: Artificial Disintegration by α-Particles

Rutherford and Chadwick:
Proc. Camb. Phil Soc. 25
p. 186 (1929)

Nature July 12, 1930
Chadwick and Gamow



The protons emitted by certain elements when bombarded by α-particles have been examined by an electrical method. Polonium was used as the source of α-particles and the emitted protons were observed both in the direction of the incident α-particles and at right angles to it.

It was found that, except in the case of fluorine and sodium, the disintegration protons consisted of distinct groups. The origin of these groups is explained on the assumption that the protons and α-particles contained in a nucleus are in definite energy levels. Information about the position of these levels is obtained from an examination of the experimental results. The mass defects of certain nuclei formed in the disint. processes are deduced. Some points of general interest in the problem of artificial disintegration are discussed.

nucleus ノ中デ

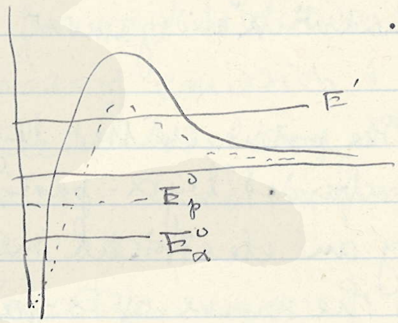
α-particle, proton ガ

ソレゾレ E^0_α, E^0_p ナル ~~Energy~~ discrete

ノ state ヲモツテヰルトスルト.

α-particle (energy E_α) ガ

capture サレルト



$$E_p = E_\alpha + E^0_\alpha - E^0_p$$

ナル (discrete ナ) energy state ヲモツタ proton ガ

出テクル。

α-particle ガ capture サレナイ場合ニハ

$E_p = 0$, $E_p = E_\alpha - E^0_p$ ノ間ノ (conti. ナ)

energy ノ proton ガ出テクル. 2ツノ conti ナ group

ノ max ナ値ト. discrete ナモノノ値トカラ

ワカル. E^0_α 即チ nucleus 内ノ α-particle

ノ energy level ガワカル筈デアル。

実験ノ結果ヲミルト殆ンド元素 α-particle

ヲ capture スル場合ニナツテヰル。(例外ハ B

ノ場合デアル。)

可能的ト現実的ノ間ノ関係ノ発生、個体ト種　ノ間ノ
区別ノ消滅。
ノ間ノ区別ノ消滅ハ即チアル（多様）統一ニ於テノ個ノ
現実的モ他ノ之ニ於テハ可能的デアル
ナル。

京大物理教室

同　湯川先生　同

渡辺[illegible]雄

原田音次郎

小島公平

田中秀雄

多田政忠

朝永振一郎

小川秀樹

一、毎月一回月刊五十頁内外毎月十日頃刊ノ豫定

一、編輯ハ發會内同人ガ行フコトヽシ、經營

ハ凡テ出版者ニ一任スル事、ニ致シ度

右次第 ~~次第~~

並ニ今迄御知セスル機會ガアリマセン

然ノ様ナ次第デ發起人ガ急ニ出來マシタノデ、發起人ハ奮ッテ

ヲ御投稿下サル様切望致シマス。尚又

其ノ折ニハ精々御助力ヲ御願ヒシマス。

先ハ取敢ヘズ御知セマデ

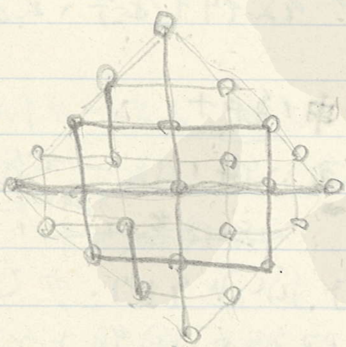
朝鮮、突然デスガ左ノ様ナ趣旨ノ雑誌ノ
今度僕等ガ
發刊ヲ思ヒ立チマシタ。未ダ確定的ノモノ
デハアリマセンガ、豫ト御知セ致シテオキマス
カラ、御意見ガ御座イマシタラ御遠慮
ナクオ聞カセ下サイ。大要ニ於テハ違ヒ
マシタラ、私共ノ御投稿、外国語ノ紹介的論文
一、何等カノ意味デ新シイ研究或ハ外国ノ物理
出来ル限リ
学ノ論争方面ニ於テマトマル結果ヲ述ベタモノ、

刊行スルコトニ依ッテ多数ノ人ノ協力ヲ得ルコト、材料ノ範囲ノ広イコト等ニ於テマサッテ居ルト思フ。特ニ我々ノ希望(期待)スル所ハコノ雑誌ガ(内容ガ執筆者)読者ト共ニ進歩向上シテ行クコトデアル。

我々ハ重キ荷ヲ負ウテ、遠キ路ヲ行カントスル我ニ諸氏ガ一人モ多ク援助(ヲ与ヘ)セラレンコトヲ希望シテ止マナイ。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23



發刊趣意

近頃
最近
1: ~~[illegible]~~ 物理学、数学が急激ニ進歩シ来テ、
~~物理学、数学内ノ各分科ノ聯絡が不可能ニ近~~
~~クナリ、少シ専門ガチガヘバ、モウソノ聯絡理~~
~~解が困難ナ状態ニ立至ッタ。~~ ~~ソ~~シテ、此
~~ヲラデ~~ コレカラ新ニ斯学ノ堂ニ入ラントスル人、
スルモノデアッテモ専門ノ学問カラ遠ザカッテ
居ル人ニトッテハ 最近ノ形勢ヲ大~~[illegible]~~把
握スルコトサヘ ~~困難~~ 容易 殆ンド不可能デアル。
~~[illegible]~~ 学問ガ益々~~[illegible]~~ 内外共ニ近ヅキ
難ナル現状ヲ救フ方法 ~~ハ色々考ヘ~~
~~ラレルが~~、ソノ一ツトシテ我々ハ物理学、数学
ノ各専門ノ研究ト同時ニ、各専門ノ研究
ヲ理解スルニ必要ナル ~~[illegible]~~ 予備知識 総括的ナ
初ナ雑誌ノ (マトマッタ) 発刊ヲ企テルモ
ノデアル。

・ハ事ノ中ノ色々ナ
第内容ノ取扱ニ就テハ、各分科ノ統一ニ近
ヅキ行キツヽアルニモカヽハラズ、~~[illegible]~~ 相互間ノ
間柄ハ以前ヨリカヘッテ縁遠クナリ。少シ
専門ガチガヘバ、モウ理解ガ困難トナル
状態ニ立至ッタ。
かゝる雑誌ノ性質上最初ノ間ハ~~[illegible]~~ 演繹ニ[illegible]
ことが少く感ぜられるかもしれぬが、~~[illegible]~~
之等ノ雑誌ヲ出スコト等ハ、専門 各分科ニ[illegible] monogra

「物理ト数理」

Physica et Mathematica

「近き路を棄てて遠き路を行かんとするものは我に来れ。」

英

我等思ふ所無きにあらず。此を数と物との間に[illegible]す。

執筆者ト読者ノ熱意ニヨッテ 障壁 除カレンコトヲ [illegible]

[illegible]

aphy

$(c+\frac{x}{2})d$

$d-\{a+(c+\frac{x}{2})b\}=\max>0,$

$cd-a\{c(d-b)-a\}+\frac{x}{2}(d-2b)=\max,$

$d=2b+3$ [illegible]

$d>2b+3$ [illegible]

但シ $c(d-b)-a>0$ トスルコト.

$a=120,=(3\times 40)$

$c=500,\quad d=45$ (40) !!! $\quad b=18,$ (.20)

$500\times .25-120=+5,$ (~~6020~~)

$\overset{500}{x}\times 0.05=25.$

$$\begin{array}{r}45\\ \times 12\\ \hline 540\end{array}$$

5圓

広告代. 50.

80圓

$x=1,000$ $\quad 1000\times 0.05=50.$

(105圓)

40只 → 40圓 $\quad$ 65圓.

$a=120$

$c=500\quad d=45\quad b=.20$

広告代 50

$500\times 0.25-120+50=+5$!!!

$\overset{75}{700}\times 0.05=+35$

40圓 !!

宣傳費 !!

$0.05\times 1000=50$ 圓.

廿、原子核ニ関スル理論ノ現状

1924,5年以来物理学界ニ荒レ狂ツタ疾風ノ難問モ漸ク静穏ニ帰セントシ、数学ニ巧デ(両三年来)都テ天下太平ニ治マルノ感ヲ抱カレルニ至ツタ。

此ノ疾風怒濤ノ[illegible]カラ孤立シテヰテモ、原子核ハ毫モ大ナル決定的ナル打撃ヲ受ケルコトナク、堅固ナル城内ニ門ヲ絶テヰタ。原子核ノ理論ノ建設ハ依然トシテ明日ノ問題ニ残サレテ居ル。ガ何等ノ予想モ立タナイガ[illegible]

筆者ハ茲ニ二ノ問題ガ今日迄ノ程度迄ワカツテ居ルカヲ述べ、将来ニノ問題ヲ解決スベキ手ガヽリヲ求メタイト思フ。

1. 原子核ニ関スル実験的知識
2. Radioactivity ノ理論
3. Hyperfinestructure ノ理論.
4. 原子核構造ノ理論.

ニノ問題ハ未ダ全ク混沌ノ状態ニアルト言ツテヨイデアラウ。

V. Quantenstatistik

Besprechung

1: Wigner ノ書物
2: Weyl 第二版
3: Dirac ノ Proton ノ理論ニツイテ
4: Orbital Valency (軌道) ト云フ概念ニツイテ
5: Ultra-penetrating rays ニツイテ

新法叢書 [illegible]

Zusammenfassende Berichte

I. Quantenelektrodynamik

II. Gegenwärtige ~~Theorie~~ Zustand der Theorie des Atomkernes.

(phys. Zs. Gamow. (Eddington Proc. Camb. Phil. Soc. 其ノ他)

Proc. Roy. Soc. 126 Gamow

其ノ他 P~~[illegible]~~. Roy Soc. 123.

Zs. ニアル Gamow 其ノ他ノ論文.

Phys Rev ニアル Gurney London 等ノ論文

参照) 又 Hyperfine structure ノ理論.

原子核ニ関スル理論ノ現状.

III. Gruppentheoretische Deutung der Atomspektra

(Wigner, 其, Weyl, 其 等

IV. Quanten ~~Gra~~ Theorie der Valenz.

原子価ノ電子論.

(Heitler; phys. Zs, 31

London: Leipziger Vorträge

Planck Heft (Naturwiss)

其ノ他ハ Zs.

(Cl. Valenz ニツイテハ Heitler; Naturwiss 1929, phys Zs, 30. phys Rev 37 其ノ他)

London: Modernen Physik, Zs. f. phys. Chem.

(∵ $b = 0$ なれば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_k \cos kx = 0.$$

これから $a = 0$,

(Alexits の証明)
(Csillag, Neder の limited variation の場合の証明
Steinhaus の conti. の場合の証明)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} u_k \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\log n}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} u_k \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\log n}$$

$$k u_k = v_k \quad u_k = \frac{v_k}{k},$$

Lukács ノ定理ニヨル. $f(x-0)$, $f(x+0)$ ハ存在スル.
更ニ之ガ存在スレバ,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

$$\leq \frac{f(x-0) - f(x+0)}{\pi}$$

$$< \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum \frac{k}{n}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} a_k = a_1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_k = b.$$

$f(x)$ ハ至ル所 hebbar disconti ヲ有スレバ
故ニ $f(x-0) = f(x+0)$
然ルニ $x=0$ ノ点ヲ考ヘルト,
$-b \leq 0 \leq -b \quad \therefore b=0.$
従ッテ $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum \frac{k}{n}(a_n \sin kx) \leq ~~\frac{f0}{\pi}~~$
$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum \frac{k}{n}(a_n \sin kx)$

mdist

$$\left|\int_\delta^\pi\right| < \frac{1}{\log n}\int_\delta^a |f(x+t) - f(x-t) + D_x| \times \frac{2}{\delta}\,dt$$

$\to 0 \quad n \to \infty$

(Fejer ガ証明)

[illegible]ニ

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x-t) - f(x+t) + D_x|\,dt = 0$$

$$D_x = \pi \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\bar{S}_1(x) + \cdots + \bar{S}_n(x)}{n+1} - \bar{S}_n(x)\right\}$$

コノ定理ヲ使ッテ

$f(x)$ ガ per. ~~デ~~ hebbar disconti ナラ

其ノ~~時ニ~~ ハ

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} n b_n = b$$

ガ存在スレバ、収束スルバ、

$$a = b = 0.$$

逆ニ a, b ガ 0 デ 常ニ $f(x-0), f(x+0)$ ガ $x\ (0, 2\pi)$ デ 存在スレバ f ハ hebbar disconti ノ他ニモ無シ

$(f(x-0) = f(x+0)$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$

之ハ。

~~Lu~~ Lukács' Theorem

$f(x)$: per. int.

一点 x ニ於テ

$$\mathfrak{D}x = \lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x-h)\}$$

トスルト、

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n(x)/\log n = -\frac{\mathfrak{D}x}{\pi}$$

証明ハ Lebesgue int デ デキル

先ノ Reduction ニヨレ、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_0^\pi \{f(x-t)-f(x+t)\}\frac{1-\cos nt}{t}$$

$$= -\mathfrak{D}x$$

ヲ証セバヨイ、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}dt = 1$$

ハ $$\frac{1}{\log n}\int_0^\pi \{f(x-t)-f(x+t)+\mathfrak{D}x\}\frac{1-\cos nt}{t}$$

$$= \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \to 0$$ ヲ証セバヨイ。

$$|1st\ int| < \frac{1}{\log n}\int_0^\delta \varepsilon\frac{1-\cos nt}{t}dt < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(x-t)-f(x+t)\}\cot\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$

$\cot\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$ ハ $(0,\pi)$ ニ於テ limited integrable ナリ.

Riemann's theorem ニヨリ

$$\int_0^{\pi}\{f(x-t)-f(x+t)\}\left\{\cot\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\cos nt\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x-t)-f(x+t)\}\cot\frac{t}{2}\,dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\cos nt\,dt$$

第一ノ $\int$ ガ存在シ第二ノ $\int$ ガ 0 ニ conv スル

ト conj. series $\bar{S}_n$ ハ第一ノ $\int$ ニ conv スル。

更ニ $\bar{S}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x-t)-f(x+t)\}\left\{\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right\}dt$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x-t)-f(x+t)\}\frac{1-\cos nt}{t}\,dt$$

コレデモ第一ノ $\int$ ハ n ニ関係シナイ。

従ツテ conj. series ノ converg ハ second integral ニ depend

16. Conjugate Series

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{inx}$$

conj. series, partial sum

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n(x-t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{n+1}{2}(x-t) \sin \frac{n}{2}(x}{2 \sin \frac{x-t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \{ \cot \frac{x-t}{2} - \cos n(x-t) \cdot$$

$$+ \sin n(x-t) \} dt$$

f(t): integrable なら

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n(x-t)\, dt \Big|_{n\to\infty} = 0$$

(Riemann's theo)

$$\text{故に} \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cot \frac{x-t}{2} \{1 - \cos n(x-t)\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \{ f(x-t) - f(x+t) \} \cot \frac{t}{2}$$

何故. $2|a_n\alpha_n| < a_n^2 + \alpha_n^2$
故に $\sum a_n \alpha_n(x)$ は absol. conv する
従って

$$\sum |a_n \alpha_n(x) + b_n \beta_n(x)|$$

が conv する

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos n(t-x)\,dt$$

$$= \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

$$\beta_n(x) = \beta_n \cos nx - \alpha_n \sin nx,$$

故に

$$\frac{a_0\alpha_0(x)}{2} + \sum\{a_n\alpha_n(x) + b_n\beta_n(x)\}$$

$$= \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum\{(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\cos nx + (a_n\beta_n - b_n\alpha_n)\sin nx\}$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

此の trig. series は absol conv する。

~~並に~~ f, φ (Young)
2 は f, φ の級数にとする。

dt

$\leq 2(|A_n|+|B_n|)$

$\alpha_n^2+\beta_n^2 = 2\left(\frac{A_n^2}{a_n^2}+\frac{B_n^2}{a_n^2}\right) \leq 4\max\left(\frac{A_n^2}{a_n^2}, \frac{B_n^2}{a_n^2}\right)$

$= 4\max(|A_n|, |B_n|) < 4(|A_n|+|B_n|)$

故ニ上ノ如キ trigonometric series ガ absol conv スル故 a, b, α, β ヲモツ函数 f, φ ハ squarely int. ナリ。

即チ $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(\xi+x)dx$

ナル函数ハ上ノ如キ series ニシテ Fourier series ナリ。

実際ヤッテ見ルニ、A, B ハ F(x) ノ Fourier coef. a, b ハ f(x) $\alpha_0(x)$, $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ヲ $\varphi(\xi+x)$ ノ Fourier coef トスレバ、

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\varphi(\xi+x)dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi\right\}$

$\times\left[\frac{\alpha_0(x)}{2}+\sum\alpha_n(x)\cos n\xi+\sum\beta_n(x)\sin n\xi\right]d\xi$

$= \frac{a_0\alpha_0(x)}{2}+\sum(a_n\alpha_n(x)+b_n\beta_n(x))$

$\sum a_n^2+b_n^2$, $\sum\alpha_n^2(x)+\beta_n^2(x)$ ハ conv

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)$$

$$\times\varphi(\xi+t)\,d\xi$$

$$= a_n\alpha_n + b_n\beta_n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\,dt = a_n\beta_n - b_n\alpha_n$$

然るに $F(x)$ が上の如き形なるならば、

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= a_0\alpha_0 \\ A_n &= a_n\alpha_n + b_n\beta_n \\ B_n &= a_n\beta_n - b_n\alpha_n \end{aligned}\right\}$$

ここで A_n, B_n が与へられたものとすれば
この等式を満す様な $a_n; \beta_n$ を求めること
が問題である。

$a_n = b_n$ とおくこと　$a_n = \max(\sqrt{|A_n|}, \sqrt{|B_n|})$

$$\alpha_n = \frac{A_n}{a_n} - \frac{B_n}{a_n}$$

$$\beta_n = \frac{A_n}{a_n} + \frac{B_n}{a_n}$$

然るに　f, φ が squarely int.
可なれば　$a_n^2 + b_n^2$ が conv. でなければ
ならぬ。
然るに　$a_n^2 + b_n^2 = 2M(|A_n|, |B_n|)$

従ッテ与ヘラレタ series ハ Fourier Series ナリ,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\varphi(\xi + x)\,dx,$$

ナル f, φ ヲ決定セントス。

f, φ ; periodic, squarely integral var.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

ナル Fourier series ニナルナラバ。此ノ時ハ,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2), \quad \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

ガ収斂ス。(Parseval ノ定理)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi + t)\,dt \qquad \text{(Young)}$$

φ ; periodic

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi \int_{-\pi+\xi}^{\pi+\xi} \varphi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt$$

$$= a_0 \alpha_0$$

ハ次ノ定理ノ逆ナラズ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \text{ conv.}$$

(Riesz

Dirichlet series

N.B. $m_n = 2^n$ トナシタガ,

$\frac{m_{n+1}}{m_n} > q > 1$ ノ時ニ拡張サレル。

Chen's transformation

trig. series ガ ~~a~~ an interval デ abs. conv トナル nec. suf cond ハ series ガ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\varphi(\xi+x)\,dx$$

ノ Fourier series トナルコト。

但シ $f(x)$, $\varphi(x)$ ハ $x(-\pi,\pi)$ デ periodic squarely integral トス。

(或ハ summable デ可ナリ)

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

ガ an interval デ abs conv ナル時 Fatou ノ定理ニヨリ $\sum \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ガ ~~abs.~~ conv

$$= \int_0^{2\pi} f(t)\, P_n(t-x)\, dt$$

但シ $P_n(z) \equiv \prod_{k=1}^{n} (1+\varepsilon_k \cos m_k z) > 0$

$\because \int_0^{2\pi} f(t)\cdot 1 \cdot dt = f(t)$ [illegible] $= 0$

又 cos ノ二ツノ積ヲ考ヘルト

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, \varepsilon_k \cos m_k(t-x)\, \varepsilon_j \cos m_j (t-x)\, dt$$

$$= \frac{\varepsilon_k \varepsilon_j}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(m_k + m_j)(t-x)$$

$$+ \frac{\varepsilon_k \varepsilon_j}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(m_k - m_j)(t-x)$$

$= 0$　$m_k + m_j,\ m_k - m_j$ ハ　m ノ一ツニ等シクアリ得ヌ

(∵ $f(x)$ ノ Fourier series ニハ、コノ様ナ係数ノ項ハ無イ)

他ノ積モ同ジ。ノコルノハ

$$\int f(t)\, \varepsilon_k \cos m_k(t-x)\, dt$$

∵ ε ノ 2ノ1 ガツカレ。

$$\therefore \left| \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x) \right|$$

$$\cong \left| \int_0^{2\pi} f(t)\, P_n(t-x)\, dt \right|$$

$$\leq \mathrm{Max}|f(t)| \int_0^{2\pi} |P_n(t-x)|\, dx$$

$$= 2\pi\, \mathrm{Max}|f(t)|$$

$$|hm - 2n\pi + \overline{x - x'}| < \frac{\delta}{n_0}$$

$$|x + hm - (x' + 2n\pi)| < \frac{\delta}{n}$$

∴ abs. conv ナ点 $x+hn$ ガ 2π ノ倍数ヲ除イテ任意ノ点 x' ニ近ク、

∴ abs. conv ナ点ハ überall dicht

Sidon's corollary

$$0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$$

ナル positive increasing integer ノ sequence

ガアッテ $\sum_{K=1}^{n-1} m_K \leq \frac{m_n}{2}$

ヲ満足スル。

モシ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)$

ガ limited fn $f(x)$ ノ Fourier series

ナラバ $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ ハ conv デアリ

証、 $\text{sgn}(a_K \cos m_K x + b_K \sin m_K x) = \varepsilon_K$

$$\varepsilon_K = \pm 1$$

$$\pi \sum_{K=1}^{n} |a_K \cos m_K x + b_K \sin m_K x|$$

$$= \pi \sum_{K=1}^{n} \varepsilon_K (a_K \cos m_K x + b_K \sin m_K x)$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{K=1}^{n} \varepsilon_K \cos m_K (t - x)\, dt$$

又、反例ある

$$\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$$

が conv. すると

$$\sum |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx|$$

が conv. するとは限らない。

2　$A_n \equiv a_n \cos nx + b_n \sin nx$

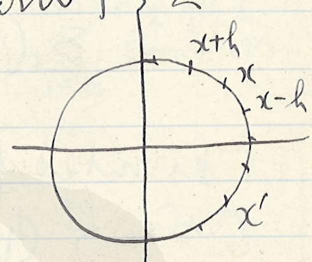
$B_n \equiv a_n \sin nx - b_n \cos nx$

$A_n(x+h) + A_n(x-h) = 2A_n(x) \cos nh$

$B_n(x+h) + B_n(x-h) = 2A_n(x) \sin nh$

∴ unit circle 上で ~~uniformly~~ absol conv. な点は self symmetric なり

例へば、$x, x+h$ で abs. conv. すると $x-h$ で abs. conv.



∴ ~~h が~~ absol. conv. な点が ~~[illegible]~~ 存在すれば、可算個 ~~以上~~ を上にとれ。

そこで $\frac{h}{\pi}$ が irrational ならば absolutely conv. な点は circle 上で überall dicht である。

∵ $x, x+h$ で conv. すると $x+mh$ (m: integer) で conv. 且 circle 上の任意点 x' をとれば

如何程にも $\frac{m}{n} \doteqdot -\frac{x-x'}{nh} + 2\frac{\pi}{h} + \frac{\delta}{n^2}$ なる integer m, n を見出しうる。

$$\int_G r_n |\cos(nx+\lambda_n)| dx \geq J_n$$

$$\frac{J_n}{r_n} = \frac{2}{\pi}\left[2a - (l_1 + l_2 + \cdots)\right] + \varepsilon_n + \frac{k\bar{\eta}}{n}$$

$\bar{\eta}$: mean.

~~両~~ $$= \frac{2}{\pi}[g+\varepsilon] + \varepsilon_n + \frac{k\bar{\eta}}{n}.$$

$\frac{k}{n} < 1$　$\bar{\eta}$: 有界デモカマハヌ,

$$\frac{J_n}{r_n} \to \frac{2}{\pi} g \neq 0.$$

or $\sum r_n \to \frac{\pi}{2} g \sum J_n$ conv.

~~G. Menager ニヨリ~~

$\sum r_n$ ~~cos~~ ガ conv スル

証明サレタ.

L.

disconti fn. ノ Fourier series ガ map ノ

ナリ得ヌ absolutely conv.

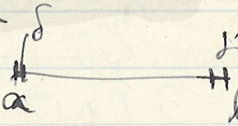
$$\int_G f_n(x)dx = \int_0^{2\pi} f_n(x)dx - \int_{I_1} f_n dx - \cdots - \int_{I_k} f_n dx$$

$$l_{k+1} + l_{k+2} + \cdots < \varepsilon, \quad k > K$$

$$\therefore \int_{I_{k+1}} f_n dx + \cdots = \varepsilon_n r_n \quad \varepsilon_n < \varepsilon$$

次ニ $\int_{I_1} f_n dx, \cdots \int_{I_k} f_n dx$ ヲ計算スル

$$\int_a^b r_n |\cos(nx + \lambda_n)| dx$$



(a, b) ヲ $\cos(nx+\lambda_n)$ ガ same sign ナ interval ニ分ツ。interval ノ巾ハ $\frac{\pi}{n}$, end point デハ $\frac{\pi}{n}$ 以下ノ巾ヲもてゐる。(interval ニ)

$$\int \cos(nx+\lambda_n)dx = \frac{1}{n}\sin(nx+\lambda_n) + const$$

∴ same sign ヲモツ partial interval デハ

$$\int r_n |\cos(nx+\lambda_n)| dx = \frac{2}{n} r_n$$

$$\int_a^b r_n | \quad | dx = r_n \left(N\frac{2}{n} + \theta\delta + \theta'\delta'\right)$$

$$0 < \theta, \theta' < 1$$

$$N\frac{\pi}{n} + \delta + \delta' = b - a,$$

$$N = \frac{n}{\pi}(b - a - \delta - \delta')$$

$$\int_a^b r_n | \quad | dx = r_n \left\{ \frac{2(b-a)}{\pi} + \frac{\eta}{n} \right\}$$

η: finite.

E ノ中デ measure ガ 0 デナイ closed set (menge) ヲ取ル。

従ッテ其ノ map ガ 0 デナイ perfect ナル E ノ Teil menge ガアル。ソレヲ G トスル。

Measure $g \neq 0$.

$$\int_G f_1(x)dx + \int_G f_2(x)dx + \cdots + \int_G f_n(x)dx$$

ト —　　$(\leqq A_K g)$

ハ conv.　(G ハ $m_K \neq 0$ ナル E_K ノ Teil menge トスルコトガデキル)

故ニ $f_n(x) \equiv |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$

$\equiv r_n |\cos(nx + \lambda_n)|$

其ノ series ガ measure 0 デナイ menge ニ於テ abs. conv. トスレバ、

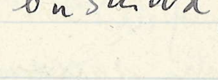
$\sum f_n(x)$

ガ measure 0 デナイ menge ニ於テ abs. conv. ∴ G ハ perfect menge デアル

G ノ contiguous set ヲ (interval)

$I_1\ I_2 \cdots I_K$ ト之ヲ表ス

$l_1\ l_2 \cdots l_K$



$g = 2\pi - (l_1 + l_2 + \cdots + l_K + \cdots)$ contiguous menge

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ニ於テ $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ div. ナルモ

ニノ series ガ absolutely conv. ナル事ノ Map ハ 0 ナリ。

証明。{ $f_n(x)$ } ナル sequence ガ 0 又ハ positive conti. fn. ノ sequence トス。

($f_n(x)$: limited.)

{ A_K } : positive increasing to infinity

$$f_1(x) + \cdots + f_n(x) \leq A_K \quad \text{for any } n$$

ナル点ノ menge ヲ E_K トス。

E_K ニ於テハ series $\sum f_n(x)$: conv.

menge ハ closed デアル。

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_K < \cdots$$

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_K + \cdots = \lim_{n\to\infty} E_K$$

E ノ measure m　E_K ノ m_K トスレバ E ハ [illegible] (meßbar menge ノ Grenzmenge ハ又 meßbar)

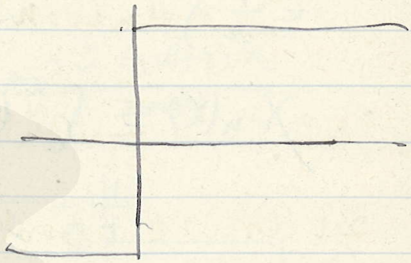
故 $m = \lim_{k\to\infty} m_K$

E ニ m > 0 (i.e. not zero) ナラバ $m_K > 0$ for K > ..

$K=2$ $=0.183\cdots$

$=3$ $=0.114\cdots$

$=4$ $=0.029\cdots$



$x=0$ ニ一番近イ max ハ

$K=1$, $x_1=\frac{\pi}{2n+2}$ $S_{2n+1}(x_1)\fallingdotseq\frac{\pi}{4}-0.140\cdots$

$\frac{\pi}{4}-S_{2n+1}$ ハ 0.14 ニ近ヅク,

之ヲ gibbs ノ phenomena ト云フ。

N.B. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$

$a_0 > a_1 > \cdots \to +0$.

第一ガ unif conv for any x ナル條件ハ
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: conv. (nec. suf.)

第二ガ unif conv ナル (nec. suf) 條件ハ
$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$,
(Bromwich)

15. Absolute convergence of Fourier's series

Fatou - Lusin - Denjoy's Theorem

$= \frac{1}{2}\int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau + \chi_n(x)$

$\chi_n(x) \equiv \int_0^x \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2\sin t}\right) \sin 2(n+1)t\, dt$

$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$: conti $t=0$ inclusive

∴ Riemann の定理により $\chi_n \to 0$,
for $n \to \infty$.

$R_{2n+1}(x) \doteqdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin\tau}{2} d\tau$

extreme は $x = x_k$,

$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots$

$a_k \equiv (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$

$R_{2n+1}(x_k) = \frac{(-1)^k}{2}(a_k - a_{k+1} + \cdots)$

が extreme value,

~~$k=1 \quad (-1)^k (a$~~

$S_{2n+1}(x_k) = \frac{\pi}{4} - R_{2n+1}(x_k)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^k}{2}(a_k - a_{k+1} + \cdots)$

$k=1 \quad (-1)^k (a_k - a_{k+1} + \cdots)$

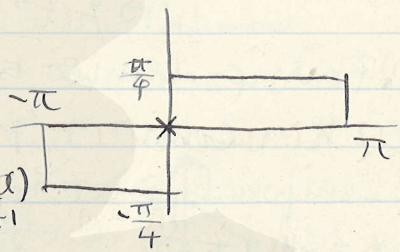
$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau = -0.2811$

$\left(\int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau = 1.85\cdots > \frac{\pi}{2}\right.$

Gibbs's phenomenon

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

$+ \cdots\cdots$



$x=0$ で unif. conv でないことを明かにせよ,

$$\frac{\pi}{4} \Rightarrow S_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

$$S_{2n+1}(x) = -\int_0^x \{\cos t + \cos 3t + \cdots + \cos(2n+1)t\} dt$$

$$= \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)t}{2\sin t} \qquad |x| < \pi$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)t}{2\sin t} dt$$

$$\frac{dR_{2n+1}(x)}{dx} = -\frac{\sin 2(n+1)x}{2\sin x} \qquad x \neq 0,$$

$R(x)$ の extreme は

$$\sin 2(n+1)x = 0.$$

$$x_k = \frac{k\pi}{2(n+1)} \qquad k = 1, \cdots 2n+1.$$

extreme value を求めるに,

$$\int_0^x \frac{\sin 2(n+1)t}{2\sin t} dt = \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)}{2t} dt$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2\sin t}\right) \sin 2(n+1)t\, dt.$$

$x = 2m\pi$ デハ $\Phi(x)$ ノ Fourier series ノ和ハ

$$\sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{1}{k} > \int_1^{\mu_n+1} \frac{dx}{x} > \log \mu_n$$

$$\to \infty \quad \text{for } \mu_n \to \infty$$

∴ Fourier series ハ conv セヌ。

Φ ノ方ハ conv ナリ。(係数が0)

次ニ uniformly デナイ。

$x = 2m\pi + \frac{\pi}{2\nu_n}$ ナル所ニ $2m\pi$ ニ近ヅクトキ

(2) ハ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\sin \frac{\nu_n - k}{\nu_n}\frac{\pi}{2}}{k} > \sum \frac{\frac{\nu_n - k}{\nu_n}}{k}$

$\nu_n > \mu_n$, $\quad 0 < \frac{\nu_n - k}{\nu_n} \equiv \theta < 1$

$\sin\frac{\theta\pi}{2} - \theta > 0$

$$= \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{1}{k} - \frac{\mu_n}{\nu_n} > \log \mu_n - 1$$

$a_n \log \mu_n \to \infty$ ナル如ク $\{\mu_n\}$ ヲ選ベバ,

$$+ \quad a_n \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\sin \frac{\nu_n - k}{\nu_n}}{k} > a_n \log \mu_n - a_n \to \infty.$$

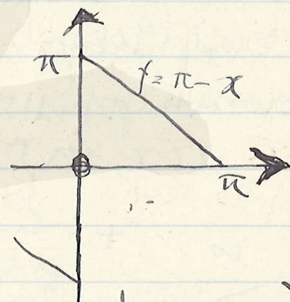
Conti. Function ノ Fourier series ガ domain ノ至ル所デ diverg 又 unif conv セナイ所ナモノハナイカ。Lebesgue (séries trig.) überall dicht ナ Menge ニ於テナルモノハ作ッテ居ル (Hobson: p.543 I?)

之等 Φ, Ψ ノ Fourier series ハ u ヲ 積分シテ
(1), (2) デ オキカヘテ 積分シタモノナリ。
(Term ハ 無視スル 又 $\nu_{n-1}+\mu_{n-1} < \mu\nu_n - \mu_n$)
Φ, Ψ ハ x ノ凡テノ値ニ於テ Continuous
(∵ $\sum a_n \sin$; conv. $u(x, \mu_n)$; limited
ナレバ Φ ハ unif conv.

シカルニ

$$\pi - x = 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots\right)$$

∴ $|u(x, \mu_n)|$; limited



右辺ハ conti ナル故 Φ (Ψ) ハ conti ナリ.)
∴ Φ(x) ヲ Fourier series ニ展開スル際ノ計算ハ完全ニ出来ル。
次ニ Ψ ノ Fourier series ハ $x = 2m\pi$ デ発散 divergent ナリ, Ψ ハ $2m\pi$ ノ近傍デ not uniformly conv ナリ
(∵ $x\,(2m\pi - \varepsilon, 2m\pi + \varepsilon)$ ニナイ時ハ Φ, Ψ ハ conv ナリ

$$\left|\sum_{k=1}^{j} \frac{\cos(m+k)x}{k} + i\sum_{k=1}^{j}\frac{\sin(m+k)x}{k}\right|$$

$$= \left|e^{mxi}\sum_{k=1}^{j}\frac{e^{kxi}}{k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{j'} e^{kix}\right| < \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

(Abel's inequality) $< \dfrac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$

§ Miscellaneous propositions

14. Singularities, Gibb's phenomenon

Du Bois Raymond ハ已ニ連續函數ノ Fourier series ガ divergent ニナルコトアルヲ示セリ(1876) 又 Lebesgue ハカヽル series ガ uniformly conv スルコトアルヲ示シタ(1905)

(Poussin p.p. 115 — Tome 2) Fejér ノ例

$$u(x, m) \equiv 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin mx}{m}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: with positive terms and conv

$\{\mu_n\}, \{\nu_n\}$ ハ整數, increasing sequence

$$\Phi(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n u(x, \mu_n) \sin(\nu_n x)$$

$$\Psi(x) \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n u(x, \mu_n) \cos(\nu_n x)$$

21 $u(x, \mu_n) \sin(\nu_n x) = \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\cos(\nu_n - k)x}{k} - \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\cos(\nu_n + k)x}{k}$ .... (1)

$u(x, \mu_n) \cos(\nu_n x) = \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\sin(\nu_n - k)x}{k} - \sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{\sin(\nu_n + k)x}{k}$ . . . . . . (2)

$\nu_n > \nu_{n-1} + \mu_{n-1} + \mu_n$

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta P_n(x)dx \right| < \varepsilon(\beta-\alpha)$$

Q.E.D.,

χ　$x(0,1)$ real conti で

$1, x, x^2, \cdots$ とorthogonalなら

ば　$\chi(x) \equiv 0$.　(Lerch)

Landau, 証明.

$$\int_0^1 x^n \chi(x)dx = 0 \qquad n=0, 1, \cdots$$

$\chi(x) \not\equiv 0$ ならば,

$$\int_0^1 |\chi(x)|dx > 0.$$

$$0 < \delta < \frac{\int_0^1 (\chi(x))^2 dx}{\int_0^1 |\chi(x)|dx}$$

なる number δ がある

$|\chi(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, $n > N$, uniformly

$\chi(x) = P_n(x) + \theta\varepsilon$.　$|\theta| < 1$

$$\int_0^1 \chi(x) P_n(x) dx = 0.$$

$$\therefore \int_0^1 (\chi(x))^2 dx = \int_0^1 \chi(x)(P_n(x) + \theta\varepsilon)dx$$

$$= \varepsilon\int_0^1 \chi(x)\theta dx < \varepsilon\int_0^1 |\chi||\theta| dx$$

$$< \varepsilon \int_0^1 |\chi| dx.$$

$\therefore \int_0^1 (\chi(x))^2 dx$ は任意に小さいから, これ $\int_0^1 |\chi| dx$.

矛盾.

$\therefore \chi(x) \equiv 0.$

二月六日。

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$$

が $f(x)$ = converge スル polynomial トスル。

然ル $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ uniformly $n \geq N$.
(x)

$$\int_\alpha^\beta P_n(x)|\sin mx|\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k \sum_\nu{}' \int_{\frac{\nu\pi}{m}}^{\frac{\nu+1\pi}{m}} x^k |\sin mx|\,dx$$

m 大

$$\int_{\frac{\nu\pi}{m}}^{\frac{\nu+1\pi}{m}} x^k|\sin mx|\,dx = \pm\int_{\frac{\nu\pi}{m}}^{\frac{\nu+1\pi}{m}} x^k \sin mx\,dx$$

$$= \pm\xi_\nu^k \int_{\frac{\nu\pi}{m}}^{\frac{\nu+1\pi}{m}} \sin mx\,dx \qquad \frac{\nu\pi}{m} \leq \xi_\nu \leq \frac{\nu+1\,\pi}{m}$$

$$= \frac{2\xi_\nu^k}{m}$$

partial interval ノ大サハ $\frac{\pi}{m}$

$$\lim_{m\to\infty}\int_\alpha^\beta P_n(x)|\sin mx|\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n} A_k \int_\alpha^\beta x^k\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta P_n(x)\,dx.$$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)|\sin mx|\,dx - \int_\alpha^\beta P_n(x)|\sin mx|\,dx\right|$$
$$< \varepsilon(\beta - \alpha)$$

$$f(x) - P_n(x) < \varepsilon, \qquad n > N$$

$$\left|\int_\alpha^\beta P_N(x)|\sin mx|\,dx - \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta P_N(x)\,dx\right| < \varepsilon$$
$$m > M$$

$$\sqrt{kt} = \frac{1}{m}$$

$$v = \frac{m}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{m^2(x-x')^2}{4}} dx'$$

$f(x)$: conti.　　$\lim_{m \to \infty} v = f(x)$

Parabolic Diff. Eq. ノ Integral ハ unique

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

(Goursat III)

x, 方向
many dimension ニモ拡張サレル。

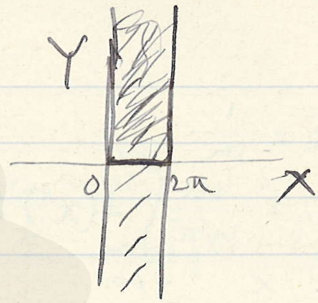
$$v = \frac{1}{4\pi kt} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4kt}} dx' dy'$$

Ex. $f(x)$: summable in $x(\alpha, \beta)$

$$\lim_{m \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x)|\sin mx| dx$$
$$= \lim_{m \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x)|\cos mx| dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

$f(x)$: conti ト or summable : integrable ナラバ成ル (Hobson II)

$$X + iY = -i \log \frac{x+iy}{a} \quad (re^{i\theta})$$



$\therefore X = \theta$

$Y = \log \frac{a}{r}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = 0 \quad \text{in the band}$$

$v = f(X)$ on $Y = 0$.

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nY} (a_n \cos nX + b_n \sin nX)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$e^{-Y} = r$ とおけば,

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(t-\theta) + r^2} dt$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

flow of heat

$v = f(x)$, $t = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} \quad \text{; parti. int.}$$

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} dx'$$

従ッテ $0<\vartheta<1$, $0<\alpha'\leqq\xi\leqq 1$ (α' however small)

1階、上ノLemmaニヨリ

$$\lim_{m\to\infty} L(m,\vartheta) = \frac{1}{2}\{f(\vartheta-0)+f(\vartheta+0)\}$$

if $f(\vartheta-0)$, $f(\vartheta+0)$ exist

$= f(\vartheta)$ if cont. (uniformly)

之ヲ用ヒテ polynomial seriesニ容易ニ展開出来ル。

$$L(m,\vartheta) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\int_0^{\xi} f(t)[1-(t-\vartheta)^2]^m dt$$

$0<\vartheta<1$

コレガ polynomial ナリ。

many variableニ拡ゲラレル。

Courant-Hilbert

Landau ノ Lemma ヲツカフコトニ証明セリ。

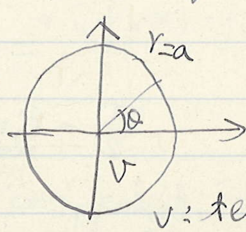
上ノ Lebesgue (Série Trigonométrique)

(Picard I)

13. 以上ノ Poisson-Weierstrass ノ integral ハ物理的ニ出テクル。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \text{ in the } \bigcirc$$

$v = f(\theta)$ on the ⊙ $r=a$



v: temp.

stationary

ニ展開出来ル。
Weierstrass ノ Int. ヲ用ヰテモ同様ニナル。
証明ハ次ノ如シ (Borel : Théorie des fonction de variable réelle)

$$L(m, \vartheta) \equiv \sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_0^{\xi} f(t) \left[1 - (t-\vartheta)^2\right]^m dt$$

m : +int, $0 \leq \vartheta \leq 1$

ヲ一ツノ singular integral

$$K(\tau, m) \equiv \sqrt{\frac{m}{\pi}} (1-\tau^2)^m > 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$G \doteq \int_0^{\xi} K(\tau, m) d\tau$$

$0 < \alpha' \leq \xi \leq 1$,

$$\sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_0^1 (1-\tau^2)^m d\tau = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots 2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_{\xi}^1 (1-\tau^2)^m d\tau < \lim \sqrt{\frac{m}{\pi}} (1-\alpha'^2)^m$$

$0 < \alpha' \leq \xi \leq 1$

$= 0$ uniformly for $0 < \alpha' \leq \xi \leq 1$

$$\lim_{m\to\infty} G = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_0^{\xi} (1-\tau^2)^m d\tau$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_0^1 (1-\tau^2)^m d\tau$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots 2m+1}\right]$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^2 4^2 \cdots 2m^2}{3^2 5^2 \cdots 2m+1^2} (2m+1) \quad \text{(Wallis}$$

$$\lim_{m\to\infty} G = \frac{1}{2} \quad \text{uniformly } 0 < \alpha' \leq \xi \leq 1$$

一月廿一日，

poisson int

$$P(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)r^n$$

ハ $f(x)$ $x(-\pi,+\pi)$ デ contin. ノ時

$\lim_{r\to\infty} P(r,x)$ ハ uniformly ニ $f(x)$

ニ converge ス。

$|P(r_1,x) - f(x)| < \varepsilon$ $r_1 < 1$ uniformly

$|P(r_1,x) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)r_1^k)| < \varepsilon$

$f_N(x)$ ナル polynomial ヲ

$|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\quad\quad)r_1^n - f_N(x)| < \varepsilon$

for any x

ナル様ニ見出シウ。

即チ $|f(x) - f_N(x)| < 3\varepsilon$ for any x.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \longrightarrow \varepsilon_n > \cdots \to 0$

ナル ε ヲ各 n ノ毎ニ

$|f(x) - f_n(x)| < 3\varepsilon_n$

ナル $f_n(x)$ ガ定マツテヰル。

$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \cdots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)]$

$+ \cdots$

ハ $f(x)$ ニ uniformly conv.

各項ハ polynomial ナリ。即チ polyn. Series

$$K(\tau, s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\tau^2}{4s}}$$

$$G_{\xi} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_0^{\xi} e^{-\frac{\tau^2}{4s}} d\tau$$

$$= \frac{1}{2},$$

$$G_{-\xi} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_{-\xi}^{0} e^{-\frac{\tau^2}{4s}} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}$$

故に $-\pi < \vartheta < \pi$ ならば

$$\lim_{m\to\infty} W\left(\frac{1}{m^2}, \vartheta\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-m^2(t-\vartheta)^2/4} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(\vartheta-0) + f(\vartheta+0)\right]$$

if $f(\vartheta-0), f(\vartheta+0)$ exist

$= f(\vartheta)$ if conti.

$-\pi < \vartheta < \pi$

$$\lim_{m\to\infty} m\int_{\pi}^{\infty} e^{-\frac{m^2(t-\vartheta)^2}{4}} dt$$

$$= \lim_{m\to\infty} m\int_{-\infty}^{-\pi} = 0.$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} \overline{W}\left(\frac{1}{m^2}, \vartheta\right) = \lim_{m\to\infty} m\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{m^2(t-\vartheta)^2}{4}} dt$$

$f(t)$; absol. int と假定.

$$W(s,\vartheta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) e^{-n^2 s}$$

uniformly conv for $s > 0$.

$a_n\ b_n$ を代入

$$W(s,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 s}\cos n(t-\vartheta)\right\}dt$$

$$\Theta(\tau) \equiv 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 s}\cos n\tau$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\tau-2n\pi)^2}{4s}}$$

(Courant-Hilbert)

よって

$$W(s,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\vartheta-2n\pi)^2}{4s}}dt$$

$s \to 0$

$-\pi < \vartheta < \pi$

$$n \neq 0 \ ; \quad \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(t-\vartheta-2n\pi)^2}{4s}} < \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{2\sqrt{s}}{t-\vartheta-2n\pi}\right)^2$$

$$< \frac{A}{n^2}\sqrt{s} \qquad A: \text{const}$$

$\therefore n \neq 0$ の項は 0 となり、

$$\lim_{s\to+0} W(s,\vartheta) = \lim_{s\to+0} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times e^{-\frac{(t-\vartheta)^2}{4s}} dt$$

$\sqrt{s} = \frac{1}{n}$

之が singular integral
Heat conduction の式

$$G \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{\xi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\tau+r^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan\left\{\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\xi}{2}\right\} \qquad 0<\xi<\pi$$

$r \to 1-0 \qquad \to \frac{1}{2}$ uniformly in $\xi\,(\alpha',\pi)$
$\alpha' > 0.$

$\int_{-\pi}^{0}$ ノ積分モ同様.

$$\therefore \lim_{r\to 1-0} P(r,\vartheta) = \frac{1}{2}\{f(\vartheta-0)+f(\vartheta+0)\}$$

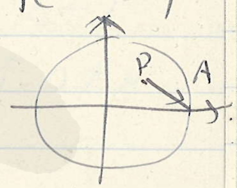
if $f(\vartheta-0)$, $f(\vartheta+0)$ exist

$= f(\vartheta)$ if conti. at ϑ.

Potential 論ニ於テ非常ニ研究サレテ居ル。

$f(x)$ in $x\,(0,2\pi)$ $\quad f(x+0)$ モ $f(x-0)$

$$\lim_{P\to A} P(r,\vartheta) = \frac{1}{2}\{f(+0) + f(2\pi-0)\}$$
$$+\frac{\alpha}{2}\{f(+0) - f(2\pi-0)\}$$



Lebesgue Integral ヲ使ッテモヨシイ.

Fatou

Weierstrass integral

$f(x)$: limited integr. $\quad x(-\pi,\pi)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\vartheta)\, dt$$

$$P(r,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \{\tfrac{1}{2} + r\cos(t-\vartheta) + \cdots + r^n \cos n(t-\vartheta) + \cdots\} dt$$

$$\frac{1}{2} + r\cos(t-\vartheta) + \cdots + r^n \cos n(t-\vartheta)$$

$$= \mathfrak{R}\,(\tfrac{1}{2} + z + \cdots + z^n) \qquad z = re^{i(t-\vartheta)}.$$

$$= \mathfrak{R}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} + \frac{z^{n+1}}{1-z}\right)$$

$$= \frac{1-r^2}{2\{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2\}}$$

$$- r^{n+1}\frac{\cos(n+1)(t-\vartheta) - r\cos n(t-\vartheta)}{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2}$$

$n\to\infty$ ニシテ $P(r,\vartheta)$ ノ式ニ入レルト

コレガ アトノ方ノ積分ハ 0 ニナル

$$P(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2}\, dt$$

之ヲ Poisson's Integral トヨブ。

之ガ singular integral デアル。

$$K(t,r) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$$

$0 \le r < 1$ 　　ガデ parameter $r\to 1$ トスル

コレ故ニ $\lim_{n\to\infty} \Phi = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\tau) K(\tau, n)\, d\tau$

$= \varphi(\alpha+0)\cdot g.$

証明ニ於テハ φ ヲ not decreasing 函ト仮定セリ。
之 $\varphi(x)$ ガ decr. ナルモ同ジ,
e.g. $\varphi(\tau) - \varphi(\alpha+0) \equiv \psi(\tau)$
ハ dec. ニ negative

コレニテ証明終ル (Picard I 第八二ノ函数ヲ展開スル Fourier series ヲ論ジテヰル。コレニ φ ガ連続ナル時ハ [illegible])

Poisson's Integral

$f(x)$: limited integrable $x(-\pi, \pi)$

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

$P(r, \vartheta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$

$0 \leq r < 1$

Fourier series ノ conv. ノ如何ニカヽハラズ
$P(r, \vartheta)$ ハ absol. unif. conv. (∵ Riemann $a_n, b_n \to_{n\to\infty} = 0$.)

$\lim_{r\to 1-0} P(r, \vartheta) \underset{?}{\Rightarrow}$ Fourier's series

コレニヨリ成功シテヰル。

(Borel, Mittag-Leffler)

$$\left| \int_\alpha^\xi \varphi(\tau) K(\tau, m) d\tau - \int_\alpha^\xi \varphi(\alpha+0) K(\tau, m) d\tau \right|$$

$$= \int_\alpha^\xi \{ \varphi(\tau) - \varphi(\alpha+0) \} K(\tau\, m)\, d\tau$$

$$= \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon'} + \int_{\alpha+\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\xi} \qquad 0 < \varepsilon' < \varepsilon$$

$$\left| \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon'} \right| = \left| \lim_{\varepsilon'' \to 0} \int_{\alpha+\varepsilon''}^{\alpha+\varepsilon'} \right| < \eta \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon'} K(\tau, m)\, d\tau$$

$$\left| \int_{\alpha+\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon} \right| < \eta \int_{\alpha+\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon} K(\tau, m)\, d\tau$$

$$\left| \int_{\alpha+\varepsilon}^{\xi} \right| = \mu \int_{\alpha+\varepsilon}^{\xi} K(\tau, m)\, d\tau$$

$$\min |\varphi(\tau)| \le \mu \le \mathrm{Max} |\varphi(\tau)|$$

$$\left| \int_\alpha^\xi \{ \quad - \quad \} K(\;)\, d\tau \right|$$

$$< \eta \int_\alpha^{\alpha+\xi} K(\tau, m)\, d\tau + \mu \int_{\alpha+\varepsilon}^{\xi} K(\tau, m)\, d\tau .$$

$\downarrow$

0 uniformly for m.

$$\therefore \lim_{m\to\infty} \int_\alpha^\xi \varphi(\tau) K(\tau, m)\, d\tau = \lim \varphi(\alpha+0) \int_\alpha^\xi K\, d\tau$$

$$= \varphi(\alpha+0)\, g .$$

uniformly $\xi(\alpha', \beta)$ $\alpha' > \alpha$.

Lemma 2. $K(\tau, m)$ が same sign ならば

$\varphi(\tau)$: limited variation

$$\lim_{m\to\infty} G = \lim_{m\to\infty} \int_\alpha^\xi K(\tau, m)\, d\tau = g. \text{ finite def.}$$

uniformly in $\xi(\alpha', \beta)$, $\alpha' > \alpha$.

§ Summation Processes of Fourier's Series

11. Singular Integral

Fourier, Fejér, Polynomial ハ

$$\Phi \equiv \int_\alpha^\beta \varphi(\tau) K(\tau, n)\, d\tau$$

$$G \equiv \int_{\alpha}^{\xi} K(\tau, n)\, d\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} = g$$

ξ (α', β) ニ於テ $\alpha' > \alpha$ ニ対シテ uniformly conv.

ナル形ナリ.

之ヲ singular integral, K: Kern. (Lebesgue) (Picard, Tome 1.)

$\lim_{n\to\infty} \Phi$ ヲ求メル方法.

Lemma 1. 若シ $K>0$ デ φ: limited integrable
$\varphi(\alpha+0)$ finite ナレバ

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\xi \varphi(\tau) K(\tau, n)\, d\tau = g\,\varphi(\alpha+0)$$

$\xi(\alpha', \beta)$ $\alpha' > \alpha$

uniformly.

証明. $\lim_{n\to\infty} G = \lim \int_\alpha^\xi K(\tau, n)\, d\tau = \lim \int_\alpha^{\alpha'} = g$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha'}^{\xi} K\, d\tau = 0$, uniformly $\xi(\alpha', \beta)$, $\alpha' > \alpha$

又 $\varphi(\alpha+0)$ ハ exists. $\therefore$ $\eta > 0$ ヲ与ヘレバ,

$|\varphi(\tau) - \varphi(\alpha+0)| < \eta$ for $0 < \tau - \alpha < \varepsilon$.

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\alpha_m - i b_m) e^{imx}$$

これ, Laurant product

$$\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(A_p - iB_p) e^{ipx}$$

$$A_p - iB_p = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(a_j - ib_j)(\alpha_{p-j} - i\beta_{p-j})$$

$$A_p = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(a_j\alpha_{p-j} - b_j\beta_{p-j})$$

$$B_p = \frac{1}{2}\sum(a_j\beta_{p-j} - b_j\alpha_{p-j})$$

$$A_{-p} = A_p \qquad B_{-p} = -B_p.$$

$$\therefore \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(A_p - iB_p) e^{ipx}$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \cos nx)$$

とハ積ハ Formal Product of Zygmund.

$$a_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$b_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

$\alpha_m(x)$, $\beta_m(x)$ も同様

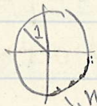
$$A_p(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(x)\alpha_{p-j}(x) - b_j(x)\beta_{p-j}(x)$$

$$\therefore B_p(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(x)\beta_{p-j}(x) + b_j(x)\alpha_{n-j}(x)$$

(Math 28.)

Bieberbach II, S. 155

$f(z)$



analytic $f(z)$ ノ mes > 0 ノ set デ 0 ナレバ 中デ identically 0,
Randfunktion ガ

Formal product of trigonometrical series

$$U \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n z^n, \quad V \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m z^m$$

$$W \equiv \sum_{p=-\infty}^{\infty} w_p z^p.$$

$$w_p \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i v_{p-i}$$

W =)

U, V ノ一方ガ absolutely conv ナルトキ、UV ハ convergent ナリ。

ゆるされば ハ W ノ conv ナコトガワカル容ハ ~~conv~~、W = UV ハワカラヌ。

$\sum_{p=-\infty}^{\infty} w_p$ ヲ $\sum u_n \sum v_n$ ノ Laurent's Product トイフ。

但シ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} u_n$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \mp i b_n) e^{inx}$$

$a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$, $b_0 \equiv 0$,

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

Mandelbrojt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$$

(2) ハ angular point ヲ除イテ unif. conv.

∴ product ハ (S) ヲ除イテ conv. 故ニ或一ツノ区間デ 0 ナル級数ハ 0

∴ (Cantor ノ定理ニヨリ)

此級数ハ identically 0 ナリ

$$A_n^{(q)} - i B_n^{(q)} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}' (a_{n-pq} - i b_{n-pq})$$

$$\times \left(\frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \cos p \beta_q - i \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \sin p \beta_q \right)$$

$$+ \frac{1}{2} (a_n - i b_n)^{*} = 0$$

$$a_{-m} = a_m$$

$$b_{-m} = b_m$$

$$|a_n - i b_n| \leq \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}' |a_{n-pq} - i b_{n-pq}| \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2}$$

$$\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}' \varepsilon_{n-pq} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} \equiv J_n^{q}$$

$$J_n^{(q)} \leq \sum_{p=-\infty}^{-1} + \sum_{p=2}^{\infty} + \varepsilon_{q-n} = \varepsilon_{q-n} + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{n+pq} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2}$$

$$+ \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon_{n-pq} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q^2} < \varepsilon_{q-n} + \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q}$$

$q = n_k$ $(k > n)$

$$+ \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q}$$

$$\leq \varepsilon_{q-n} + 2 \frac{\varepsilon_q}{h_q} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p h_q}{p^2 h_q}$$

$\frac{\varepsilon_q}{h_q} \downarrow 0$, $\sum$ limited.

$$\therefore \lim_{q \to \infty} J_n^{(q)} = 0. \qquad \therefore a_n = b_n = 0.$$

1月17日,

10.1 Zygmund's Theorem

U : x(0, 2π) ノ Teilmenge

$\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\to 0$

ニノ級数ガ U ヲ除イテ 0 ニ收レバ、ニノ級数ガ identically 0 ノ時ニ U ヲ unity set トイフ。

(Ratschmann, Mlle Bary ノ研究)

S : $\varepsilon_0>\varepsilon_1>\cdots>\varepsilon_n>\cdots\to 0$

$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le\varepsilon_n$, $n=~~1,2~~0,1,2\ldots$

トス。

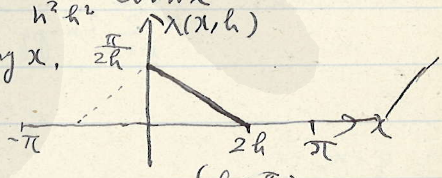
ソノ時ノ U(S) ヲ作ルコト。

Theorem　S ヲ任意ニ取リタル時ニ ~~U(S)~~ measure ガ 2π ニイクラデモ近イ U(S) ヲツクリウル。(即チ U(S) > 0)

$\lambda(x,h)=\frac{1}{2}+\sum\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}\cos nx$

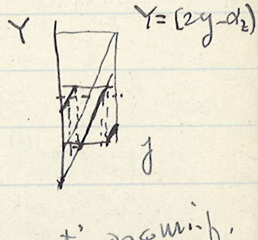
$|h\lambda|$: limited for any x.

$\lambda_q(x)\equiv\lambda(x-\rho_q, h_q)$



($h<\frac{\pi}{2}$)

(Ratschmann : Math Zs. 24 or 26)



$\begin{cases}\frac{a_0}{2}+\sum & (1)\\ \lambda_q(qx) & (2)\end{cases}$

ノ formal product ヲ作ル。

$\frac{A_0^{(q)}}{2}+\sum^{\infty}(A_n^{(q)}\cos nx+B_n^{(q)}\sin nx)$

(q) ハ U(S) ヲ除イテ 0 ニ converge スル、∴ conti 且 equiunif. conv.

展示ページ