Relations between Non-~~local~~linear and Non-local Field Theories (N-L, N-L, 1)

2. 非線形性と非局所性

$$L\cdot\varphi = F(\varphi) \qquad (1)$$

$L\varphi_1 = F(\varphi_1)$, φ_1: a wave packet solution

φ_1 から inhomogeneous Lorentz transformation によって無限に多くの他の解が得られるが、それ等は互いに orthogonal ~~だけ~~ではない。

($F(\varphi)=0$ の場合には plane wave solutions がたがいに orthogonal で、それ等から或る特定の時刻において δ-函数になる様な解を作ることが可能である。 $F(\varphi)\neq 0$ の場合にはそういうことは一般にできない。)

wave packet solution ~~の一つとして~~から

$$W = \frac{i\hbar\int\tilde{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dv}{\int\tilde{\varphi}\varphi dv}$$

$$p_x = \frac{-i\hbar\int\tilde{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dv}{\int\tilde{\varphi}\varphi dv} \qquad \text{etc.}$$

が作れる。もしもφが time const の方向だけでなく、一般に space-like の方向で遠方で充分早く小さくなっていれば、Lorentz変換によって

$$p_x = p_y = p_z = 0 \qquad W = mc^2$$

になるような座標系にうつれるであろう。この座標系での φ が静止してる wave packet の解となり、m が静止質量であろう。そこで、この座標系で wave packet の重心を

$$\bar{x} = \frac{\int\tilde{\varphi}x\varphi dv}{\int\tilde{\varphi}\varphi dv} \qquad \text{etc}$$

で定義すると、$\bar{x}$ を任意に displace した解がまた他の解になる。

Research Institute for Fundamental Physics
Kyoto University

N-L, N-L, 2

二つの wave packet φ_1, φ_2 から作った

$\cancel{\varphi =}\ \varphi_1 + \varphi_2$

は一般に (1) の解ではないが、

$\varphi_1 \varphi_2$

が平均として小さい時ならば、

$$\cancel{L\varphi}$$

$$\varphi_{\cancel{12}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12}'$$

と置くと

$$L\varphi_{12}' + F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12}')$$

or

$$L\varphi_{12}' = F'(\varphi_{12}') \qquad (2)$$

$$F'(\varphi_{12}') = F(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12}') - F(\varphi_1) - F(\varphi_2)$$

は一般に小さいと見なせる

例えば

$$F(\varphi) = \varphi^3$$

ならば、

$$F'(\varphi_{12}') = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12}')^3 - \varphi_1^3 - \varphi_2^3$$

$$= \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2\varphi_1 + \varphi_2\varphi_1^2$$

$$+ \varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2\varphi_1$$

$$\cancel{+O(\varphi_{12}')} + \varphi_1^2\varphi_{12}' + \varphi_1\varphi_{12}'\varphi_1 + \varphi_{12}'\varphi_1^2$$

$$+ \varphi_2^2\varphi_{12}' + \varphi_2\varphi_{12}'\varphi_2 + \varphi_{12}'\varphi_2^2$$

$$+ \cdots$$

で、classical field theory では

$$L'\varphi_{12}' \cong F''(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (3)$$

となる。但し

$$\left.\begin{aligned} L' &= L - 3\varphi_1^2 - 3\varphi_2^2 \\ F'' &= 3\varphi_1^2\varphi_2 + 3\varphi_1\varphi_2^2 \end{aligned}\right\}$$

φ_{12}' は小さいとして (3) を解けばよい。

No5. 1953. 12. 5.000

以上の考察は、φ が local field でなくてもいい場合に拡張できる。~~又~~

ここで一つの特に興味ある問題となるのは、φ が local 場であった場合に (1) の解が素粒子の性質をふくんでいるかどうかである。

~~実際~~ この問題を解明するには、~~wave packet~~ non-linearity のために wave-packet の小さいどの様な粒子性を生ずるかを明かにすることから始めねばならない。

先づ簡単な例として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \varkappa^2\right)\varphi = g\varphi^3 \qquad (4)$$

を考える。

$$\varphi(x_\mu) = N\int f(k_\mu)\exp(ik_\mu x_\mu)(dx_\mu)^4$$

$$(k_\mu k_\mu + \varkappa^2) f(k_\mu)$$

$$= -N\int f(k_\mu')f(k_\mu'')f(k_\mu''') \times \delta(k_\mu' + k_\mu'' + k_\mu''' - k_\mu) \times (dk_\mu')(dk_\mu'')(dk_\mu''')$$

或は φ(r, t) の場合には

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varkappa^2\Big)\varphi = g\varphi^3$$

$$\chi_0 e^{-i\omega t} + \chi_1 e^{-3i\omega t} + \chi_2 e^{-3^2 i\omega t} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0} \chi_n e^{-3^n i\omega t}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\, r^2 \frac{d}{dr} + n^2\omega^2 - \varkappa^2\right)\chi = 0$$

$$= \sum_{l+l'+m} \chi_l \chi_{l'} \chi_m$$

No5. 1953. 12. 5.000

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}r^2 + (3\omega)^2 - \kappa^2\right)\chi_1 = g\chi_0^3$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}r^2 + (3^2\omega)^2 - \kappa^2\right)\chi_2 = g\chi_1^3$$

$$\vdots$$

$$\chi_0 = \frac{e^{-\lambda_0 r}}{r} \qquad \lambda_0^2 = \kappa^2 - \omega^2$$

$$\kappa > \omega$$

$$\chi_1 = \frac{1}{r}f_1$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2\left(\frac{1}{r}\frac{df_1}{dr} - \frac{1}{r^2}f_1\right)\right\} = \frac{1}{r}\frac{d^2f_1}{dr^2}$$

$$\left[\frac{d^2f_1}{dr^2} + \{(3\omega)^2 - \kappa^2\}f_1\right] = gr\chi_0^3$$

$$= g\frac{e^{-3\lambda_0 r}}{r^2}$$

$\omega \ll \kappa$:

$$\lambda_1^2 = \kappa^2 - (3\omega)^2$$

$$\frac{d^2f_1}{dr^2} - \lambda_1^2 f_1 = g\frac{e^{-3\lambda_0 r}}{r^2} = \rho(r)$$

$$f_1 = \int_{-r}^{\infty} e^{-\lambda_1 r'}\rho(r'-r)\,dr'$$

$$\frac{df_1}{dr} = -\int_{a}^{\infty} e^{-\lambda_1 r'}\frac{d\rho(r'-r)}{dr'}\,dr'$$

$$= \lambda_1\int_a^b e^{-\lambda_1 r'}\rho(r'-r)\,dr' + \left[e^{-\lambda_1 r'}\rho(r'-r)\right]_b^a$$

$$\frac{d^2f_1}{dr^2} = \lambda_1^2\int_a^b e^{-\lambda_1 r'}\rho(r'-r)\,dr' = \lambda_1^2 f_1$$

No5. 1953. 12. 5.000

$$\cancel{\varphi =}$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 [\sin 3x - 3 \sin x]$$

$$= - \sin 3x + 3 \sin x$$

$$\varphi = \chi_0 \sin(\omega(ct) + \delta_0) + \chi_1 \sin(3\omega(r) + \delta_1)$$

$$+ \chi_2 \sin(3^2\omega(ct) + \delta_2) + \cdots$$

$$\cancel{\chi_0} \left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \omega^2 - \kappa^2\right)\chi_0$$

$$= 3g\,\chi_0^3 + O(\chi_0^2 \chi_1)$$

$$\{\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda^\dagger(x')\} = C_{\varkappa\lambda}(x, x')$$

$$\left\{\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa\right)\psi_\varkappa(x), \psi_\lambda^\dagger(x')\right\} = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa\right) C_{\varkappa\lambda}(x, x')$$

$$= \{l^2 \psi_\varkappa(x)\psi_\nu^\dagger(x)\psi_\nu(x), \psi_\lambda^\dagger(x')\}$$

$$= -l^2 \psi_\varkappa(x)\psi_\nu^\dagger(x)\psi_\lambda^\dagger(x')\psi_\nu(x) + l^2 \psi_\varkappa\psi_\nu^\dagger(x) C_{\lambda\nu}(x, x') + \cdots$$

$$= +l^2 \psi_\varkappa(x)\psi_\lambda^\dagger(x')\psi_\nu^\dagger(x)\psi_\nu(x) + l^2 \psi_\varkappa(x)\psi_\lambda^\dagger(x) C_{\lambda\nu}(x, x') + \cdots$$

$$= -l^2 \cancel{\psi_\lambda^\dagger(x')\psi_\varkappa(x)\psi_\nu^\dagger(x)}\psi_\nu(x)$$

$$+ l^2 \psi_\lambda^\dagger(x)\psi(x) C_{\varkappa\nu}(x, x') + l^2 \psi_\varkappa(x)\psi_\nu^\dagger(x) C_{\lambda\nu}(x, x')$$

$$+ \cancel{l^2 \psi_\lambda(x)}\psi_\varkappa(x)\psi_\nu^\dagger(x)\psi_\nu(x)$$

$$= \cancel{l^2 C^*(x, x')}$$

$$\cancel{C(x, x)}$$

$$\gamma_4 \frac{\partial C(x, x')}{\partial x_4} = \cdots + \cdots + \cdots$$

$$C(x, x') = \mathrm{tr}_4\{l^2 \psi_\lambda^\dagger \psi\, C(t=0) \cdots \}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = a\varphi + b\varphi^3$$

$$\varphi = \frac{f}{r} \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2}f$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \cancel{r}\frac{d^2f}{dr} + \cancel{\frac{df}{dr}} - \cancel{\frac{df}{dx}}$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} = af + \frac{bf^3}{r^2}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - af^2\right\} = \frac{1}{2r^2}\frac{d}{dr}\cancel{\frac{2}{3}}f^4)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{f^4}{r^2}\right) + \frac{f^4}{r^3}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - af^2 - \frac{1}{2}\frac{f^4}{r^2}\right\} = \frac{f^4}{r^3}$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{dr^n}{dr}\frac{df}{dr^n} = nr^{n-1}\frac{df}{dr^n}$$

$$n = -2: \qquad r^{-2} = x$$

$$\frac{d}{dx}\left\{ \qquad \right\} = -\frac{1}{2}f^4$$

$$dx = \qquad dy$$

$$f = \quad e^{-\lambda r}$$

$$\varphi = u e^{-\lambda r}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{ r^2 \left(\frac{du}{dr} - \lambda \cdot u\right) e^{-\lambda r} \right\}$$

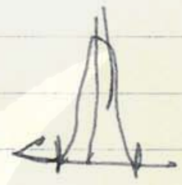
$$= \left(\frac{d^2u}{dr^2} - \lambda \frac{du}{dr}\right) e^{-\lambda r} + \underbrace{\left(\frac{2}{r} e^{-\lambda r} - \lambda e^{-\lambda r}\right)}_{\left(\frac{du}{dr} - \lambda u\right)}$$

$$= e^{-\lambda r}\left\{ \frac{d^2u}{dr^2} - 2\lambda \frac{du}{dr} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \lambda \frac{2}{r} u + \lambda^2 u \right\}$$

$$= a u e^{-\lambda r} + b u^3 e^{-3\lambda r}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - 2\lambda\right)\frac{du}{dr} - \left(\frac{2\lambda}{r} - \lambda^2 + a\right) u = b u^3 e^{-2\lambda r}$$

$$2\frac{df}{dr} \qquad \frac{d^2f}{dr^2} = af + bf^3$$



$$1/\left(1 + e^{\frac{1}{2A}(r - r_0)}\right) f = 1 - e^{+\frac{1}{2A}(r - r_0)}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right\} = \frac{d}{dr}\left\{af^2 + \frac{b}{2}f^4\right\}$$

$$\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = c + af^2 + \frac{b}{2}f^4$$

$$\int_0^f \frac{df}{\sqrt{c + af^2 + \frac{b}{2}f^4}} = r - r_0$$

$$f(r_0) = 0$$

$$\frac{1}{A}\int \frac{df}{1 - f^2} = \frac{1}{2A}\int \frac{df}{1+f} + \frac{1}{2A}\int \frac{df}{1-f}$$

$$= \frac{1}{2A}\log\left(\frac{1+f}{1-f}\right) = r - r_0$$

$$\frac{1+f}{1-f} = e^{\frac{1}{2A}(r - r_0)}$$

No.5. 1953. 4. 5.000