(10.18日(火))　後藤憲一

# 非線型場理論の問題について

## (I) 目標

(1) non linear にして divergence free に出来ないか。

(2) non linear の修正をして実験と合わせられないか。

(3) non linear なることがわかっているものの取扱いは。

## (II) 方程式

### (1) Born 型

$$L_0 \longrightarrow L = l^{-1}\left(\sqrt{1+2lL_0}-1\right) \qquad (1)$$

例 (i) $L = l^{-1}\left(\sqrt{1+l^2(H^2-E^2)}-1\right)$ (Born)[1,2,3] (2)

例 (ii) $L = l^{-1}\left(\sqrt{1+l\left(\Sigma(\partial_\nu\varphi_\nu)^2+\kappa^2\varphi^2\right)}-1\right)$ (Heisenberg)[15,16] (3)

### (2) Schiff 型

$$F\varphi = 0 \longrightarrow F\varphi = l(\varphi \text{の power}) \qquad (4)$$

例 (i) $\Box\varphi = l\varphi^3$ (Schiff) (5)

例 (ii) $(\gamma\partial+\kappa)\psi = l\psi\bar{\psi}\psi$ (Heisenberg $\kappa=0$)[12,13] (6)

### (3) Hydro 型

hydrodynamics $\begin{cases} \text{Euler equation} \\ \text{Lagrange equation} \end{cases}$

relativistic hydro. dyn.

## (III) 方法

### (1) Born の方法

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det(g_{kl}+f_{kl})} - \sqrt{-\det(g_{kl})} \qquad (7)$$

① 一元論である
② 一般相対論的に formulate される
③ non singular な(particle を表す)解がある
④ その解の行動が粒子の行動を表し得る
⑤ 始めの量子化のプログラムは進行せず
⑥ Heisenberg Pauli 流に交換関係は立てられる
⑦ 満足出来る諸結果を出すのは困難であった

### (2) Heisenberg の方法

$$\gamma^\lambda\partial_\lambda\psi = l\psi\bar{\psi}\psi \qquad (8)$$

① T product を使って理論を進める
② propagation fun. が divergence free になりそう。
③ 遠くでの行動が mass をもつ普通の理論の粒子の行動に近づくような解を出す。(propagation fun. → 普通のそれ)
④ 各種の(spin と mass をもつ粒子の)解が出せる
⑤ それらの粒子の間の interaction が出る
⑥ Hilbert space I と II (Lehmann の仮定が IIでは成立たぬ)

(Lehmann は $P_\mu$ のあるとき propagation fun. の性質がよくならないという議論をした)

### (3) Hilbert space の方法

① operator の間に方程式をおかない
② operator の作用した Hilbert space の中で方程式がたてられる
③ 4次元的な量子化が試みられる

### (4) Quantum hydro dynamics

① Euler eq. —— Landau, Ziman 等, 西山, 伊藤等.
② Lagrange eq. —— Tyalji
③ $\rho-\rho_0$ という operator による展開
④ 同時に diagonal にならない.
⑤ collective なものとの関係.
⑥ relativistic q. h. dyn. の問題

App. I　Born Theory の概要

(1) 古典論

① 一般相対論的に建設される。

○ Lagrangian:　$\delta \int \mathcal{L}\, d\tau = 0$　$d\tau$は4次元的

二階テンソル $a_{kl}$ より作られる density の一般形 $\sqrt{-\det(a_{kl})}$
平行座標で $f_{kl}$ が小さい時に普通の $1/4\, f_{kl} f^{kl}$ になるように
これより (7) が得られる。

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\sqrt{1+F-G^2} - 1\right) = \sqrt{-g}\, L \qquad (9)$$

$$F = \tfrac{1}{2} f_{kl} f^{kl}, \quad G = \tfrac{1}{4} f_{sl} f^{*sl} \qquad (10)$$

○ Wave equation:

$f_{kl} = \partial_k \phi_l - \partial_l \phi_k$ とおくと　$\dfrac{\partial \sqrt{-g}\, f^{*kl}}{\partial x^l} = 0$　(11)

$$\sqrt{-g}\, p^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{kl}} = \frac{\sqrt{-g}\,(f^{kl} - G f^{*kl})}{\sqrt{1+F-G^2}} \qquad (12)$$

とおくと 変分原理より　$\dfrac{\partial \sqrt{-g}\, p^{kl}}{\partial x^l} = 0$　(13)

○ energy momentum tensor:

$$T^l_k = L\,\delta^l_k - p^{ml} f_{mk} \qquad (14)$$

とおくと　$\mathcal{T}^l_{k,l} = 0$　(conservation law) (15)

○ Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = H\sqrt{-g} = \left(L - \tfrac{1}{2} p^{kl} f_{kl}\right)\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{kl} + p^{*}_{kl})} - \sqrt{-\det(g_{kl})} \qquad (16)$$

② Medium 中の Maxwell eq. と同型 (medium const. の意味が違う)

$(f_{23}, f_{31}, f_{12}; f_{14}, f_{24}, f_{34}) \to (B, E)$　(17a)

$(p_{23}, p_{31}, p_{12}; p_{14}, p_{24}, p_{34}) \to (H, D)$　(17b)

$$H = b^2 \frac{\partial L}{\partial B} = \frac{B - GE}{\sqrt{1+F-G^2}}, \quad D = b^2 \frac{\partial L}{\partial E} = \frac{E - GB}{\sqrt{1+F-G^2}} \qquad (18)$$

field eq.

$$\left.\begin{aligned} &B = \mathrm{rot}\, A, && E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi \\ &\mathrm{rot}\, E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0, && \mathrm{div}\, B = 0 \\ &\mathrm{rot}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = 0, && \mathrm{div}\, D = 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

③ non singular static solution

○ electrostatic $B = H = 0$, $t$に indep.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, E = 0 & (20) \\ \mathrm{div}\, D = 0 & (21) \end{cases}$$

これより　$D_r = e/r^2$　(22)

$E_r = -\dfrac{d\phi}{dr}$　$\phi(r) = \dfrac{e}{r_0} f\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$, $f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}$, $r_0 = \sqrt{\dfrac{e}{b}}$　(23)

○ 有限な mass をもつ電子に相当

$$\text{energy} = \int U\, dv = m_0 c^2 = 1.2361\,\frac{e^2}{r_0} \qquad (24)$$

$$b = e/r_0^2 = 9.18 \times 10^{15}\ \text{e.s.u.} \qquad (25)$$

○ 外力のもとで運動する電子の eq. は Lorentz の式となる。

(2) 量子論

○交換関係　$[B_k, B'_l] = [D_k, D'_l] = 0$, $[D_k, B'_k] = [B_k, D'_k] = 0$

$$[D_1, B'_2] = -[B_1, D'_2] = 4\pi\, \partial_3\, \delta(r - r') \qquad (26)$$

但 $i\alpha[D_1, B'_2] = [D_1, B'_2] - [B'_2, D_1]$

これより得られる場の強さの不確定は、電子に働くものとして求められたものに一致
Lorentz invariancy は確められる

○ 方程式

$\mathrm{div}\, D = 0$, $\mathrm{div}\, B = 0$　(27)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -i\alpha(WF - FW) = -[W, F] \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= i\alpha(p_x F - F p_x) = [p_x, F] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

但し　$W = \int U\, dv$,　$p_x = \int S_x\, dv$　(29)

$$\tfrac{1}{4\pi}(T^{41}, T^{42}, T^{43}, T^{44}) = \left(\tfrac{1}{c}S_1, \tfrac{1}{c}S_2, \tfrac{1}{c}S_3, U\right) \qquad (30)$$

○ energy centre の運動

energy centre:　$q_x = \dfrac{1}{2}\left\{W^{-1}\left(\int x U dx\right) - \left(\int x U dv\right) W^{-1}\right\}$　(31)

これに対して　$[p_k, q_l] = \delta_{kl}$　(32)

$W^2 - p^2$ は positive な inv. なる故　$W^2 - p^2 = M^2$　(33)

○ C-number

$M^2 = W^2 - p^2$

$m^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$, 但 $\vec{m} = \int (\vec{r} \times \vec{S})\, dv$　(34)

$e = \int \rho\, dv$,　但 $\rho = \dfrac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}\,\vec{E}\, dv$　(35)

M や e が discrete で出て来ないか？

# 参考文献


## (1) Born 理論

○ 1) Born, On the quantum theory of the electromagnetic field (Proc. Roy. Soc. 143 (1934) 410)
照介：粟野保；数物会誌 8巻 (昭和9年) 307頁

○ 2) Born-Infeld, Foundations of the new field theory (Proc. Roy. Soc. 144 (1934) 425)
照介：伏見康治；数物会誌 9巻 (昭和10年) 69頁

○ 3) Born-Infeld, On the quantization of the new field equations (Proc. Roy. Soc. 147 (1934) 522)

4) Hofmann-Infeld, On the choice of the action function in the new field theory (Phys. Rev. 51 (1937) 765)

5) Infeld, The Lorentz transformation in the new Quantum electrodynamics (Proc. Roy. Soc. 158 (1937) 368)

6) Weyl, Observations on Hilberts independence theorem and Born's quantization of field equations (Phys. Rev. 46 (1934) 505)

7) Weyl, Geodesic fields in the calculus of variation for multiple integrals (Annals of Math. 36 (1935) 607)

8) Weiss, On the Hamilton Jacobi theory and quantization of a dynamical continuum (Proc. Roy. Soc. 169 (1939) 102)

9) Weiss, On the Hamilton-Jacobi theory and quantization of generalized electrodynamics (Proc. Roy. Soc. 169 (1939) 119)

10) 伏見康治, 場の理論に於ける変分原理について (物理学講演集(4), 6 (p.81))

11) 今井功, 2次元 Born 場方程式の解 (lecture, 1955 — unpublished investigation)

## (2) Heisenberg 理論

○ 12) Heisenberg, Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichung (Nachr. Wiss. Göttingen Nr. 8 (1953) 111)

○ 13) Heisenberg, Zur Quantentheorie nichtrenormierbarer Wellengleichungen (Zeits. f. Naturf. 9a (1954) april)

14) Heisenberg, Über quantentheoretische Umdeutung kinetischer und mechanischer Beziehungen (Z. S. 33 (1925) 879)

15) Heisenberg, Mesonenerzeugung als Stoßwellenproblem (Z. S. 133 (1952) 65)

16) Kortel, Sind große Energieübertragen mit nicht lokaler Wechselwirkung (Z. S. 138 (1954) 192)

17) Lehmann, Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder (Nuov. Cim. 11 (1954) 342)

18) Symanzik, Über das Schwingersche Funktional in der Feldtheorie (Zeits. f. Naturf. 9a (1954) 809)

## (3) Hilbert space による理論

○ 19) Coester, Hyperquantization of Feynman amplitude (Phys. Rev. 95 (1954) 1318)

○ 20) Iwata, A formulation of field theory in Hilbert space (Prog. Theor. Phys. 11 (1954) 537)

21) Friedrichs, Mathematical Aspects of quantum theory of fields

22) Cameron u. Martin, The orthogonal developement of non linear functionals in series of Fourier-Hermit functional (Ann. Math. 48 (1947) 387)

23) Gårding a. Wightman, Representations of the anticommutation relations (Proc. Nat. Acad. 40 (1954) 617)

24) 渡部陽一, 素研 (in press)

## (4) Quantum hydrodynamics

○ Ziman, Quantum hydrodynamics and theory of liquid helium (Proc. Roy. Soc. 219 (1953) 257)

○ Tyabji, A quantum theory for non-viscous fluids in the Lagrangian variables (Proc. Camb. P.S. 50 (1954) 449)