非局所場理論について、I.

1953. Oct. 17　　湯川秀樹　　①

第8回日本物理学会年会.　東京大学教養学部.

現在の素粒子論は二つの根本問題に当面している.
一つは 各種素粒子の存在に理由を与える 統一理論の構成 ~~という積極的な問題であり~~. すること
一つは 現在の局所場理論の発散の困難を ~~除去~~ 除去し首尾一貫した理論体系にしあげること.
である。
第一の問題だけを切りはなして考えれば、色々な可能性がある. isotopic spin の導入の如きは、その第一歩と考えられる. Pais の ω-space の理論の如きもの、その次の一歩でもあろう. このように逐次素粒子のおかれる空間を拡張してひろげてゆくという行き方は 半経験的、現象論的な性格を持たざるを得ないのみならず、それが発散の困難の解決に役立たないことも明らかである. 何故かといえば Paisの拡張した 発散積分は 4次元空間内の積分についての積分に寄与するもので、それにさらに独立変数をつけ加えても発散はなくならない 発散するということは変わらない からである.*
従って第二の問題をも解決するためには新しい自由度が何等かの意味で通常の四次元空間とつながりを持っていなければならぬ. 通常のスピンは四次元空間の Lorentz 群の表現と関係している ~~のと同様~~ という意味で ~~内部構造を一方~~ 既に素粒子の内部構造と見なし得ないでもないが、素粒子の内部構造は内部空間と関連したものと考えられる. 非局所場理論においては この内部空間は Minkowski 的であり、外部空間と同様に ~~同様~~ homogeneous Lorentz transformation を受ける. 但し translation は考えに入らない. そしてそこから一方では各種素粒子が

* 幾つかの発散積分が互いに打ち消す可能性 ~~もなさそうである~~.
~~何故かといえば. 例えば セルフエネルギー が正になるか負になるかはわからない~~ とはいえない。

~~しかし~~非局所場理論の固有値問題~~として~~の解として得られる可能性がある。他方では各々の固有函数が素粒子~~として~~の状態を表わすことになる。
(Reference: H. Yukawa, P. R.　　)
この場合、固有函数はLorentz不変でなくてもよいが、そうすると個々の[illegible]と全体の結果がさけられない。そこで色々な問題が起ってくるが、その一つは固有函数と[illegible]の対応関係である。"内部空間における[illegible]"可能の條件"を仮定すると初めて固有函数が素粒子の性質を持ってくる。これを要求することになると、理論全体の首尾一貫した意味づけが困難になる。
そこで~~[illegible]~~問題を全体として根本的に考えてみると
1. 内部空間における Minkowski 計量を捨てるべきか。
2. 量子力学~~[illegible]~~を内部空間にまでそのまま適用することを止めるべきか
の二つの大きな~~[illegible]~~分れ道に達せざるを得ないのである。
断然 Minkowski 計量を捨てて、外部空間と内部空間を空間とみなす行き方は Pais の~~[illegible]~~空間~~[illegible]~~にもふくまれているが、上述の中の如く全く新しく捨てて、[illegible]それだけではいけない。外部と内部とが何らかの形でつながり、収斂の問題と関係がついてくるようでないと面白くない。非局所場理論では~~[illegible]~~ S-matrix を収斂させる~~問題~~ことを問題としてきた。Møller (Conference, Kyoto, Sept. 1953) は field quantities $\varphi(x_\mu)$, $U(x_\mu)$ 等の行列要素の収斂性の問題を論じているが、

$$\Phi(x', x'', x''') = \tilde{\chi}(x' - x''')\,\delta\left(\frac{x' + x'''}{2} - x''\right)$$

なる形に置け、しかも $\tilde{\chi}$ がすべての方向に向って充分~~速く~~早く減少する場合には、Φ の Fourier transform

$$\cancel{\Phi(x', x'', x''') = (2\pi)^{-8} \int a(l^1, l^3) \exp i\{l^1 x' + l^3 x''' - (l^1 + l^3) x''\}\, dl^1\, dl^3}$$

No.5. 1953. 4. 5.000

而
$$\bar{G}(k', k'', k''') = \int \Phi(x', x'', x''') \exp -i\{k'x' + k''x'' + k'''x'''\} dx'dx''dx'''$$

$$= \int \tilde{\chi}(x' - x''') \exp -i\left\{k'x' + k''\frac{x'+x'''}{2} + k'''x'''\right\} dx'dx'''$$

$X = \frac{x'+x'''}{2}$ $r = x' - x'''$

$$= \int \tilde{\chi}(r) \exp -i\left\{(k' + k'' + k''')X + \frac{(k' - k''')}{2} r\right\} dX\,dr$$

$$= \int \tilde{\chi}(r) \exp -i\left\{\frac{k' - k'''}{2} r\right\} dr \cdot \delta(k' + k'' + k''')$$

$$= f\left(\frac{k' - k'''}{2}\right) \delta(k' + k'' + k''')$$

$\boxed{\begin{matrix} k' + k''' = L \\ \frac{k' - k'''}{2} = l \end{matrix}}$

故に
$$\Phi(x', x'', x''') \propto \int \bar{G}\left(\frac{L}{2} + l, k'', \frac{L}{2} - l\right) \exp +i\left\{\left(\frac{L}{2} + l\right)x' + k''x'' + \left(\frac{L}{2} - l\right)x'''\right\} dL\,dl\,dk''$$

$$= \int f(l) \exp i\left\{\left(\frac{L}{2} + l\right)x' - Lx'' + \left(\frac{L}{2} - l\right)x'''\right\} \times dL\,dl$$

$$= \int G(k', k''') \exp i\{k'x' + k'''x'' - (k' + k''')x''\} \times dk'dk'''$$

($k' \to l'$ $k''' \to l^3$ in Møller)

$G(k', k''')$ は $\tilde{\chi} = f\left(\frac{k' - k'''}{2}\right)$

は $\tilde{\chi}(r)$ の Fourier transform

No.5. 1953. 4. 5.000

特に $k'(\equiv l^1)$ 又は $k'''(\equiv l^3)$ を夫々にして如何程も大きくすれば $G(k', k''')$ はいくらでも小さくなる。
従って $\langle a|\psi(x)|b\rangle$ は ~~収斂する~~ を
$\langle a|u(x)|b\rangle$ を収斂させ ~~るには~~、~~更に spinor 関数をも非局所化する必要がある。~~* しかしいづれにせよ、ことができる。*, **

所で infinite degeneracy の困難を除くには、どうするか。一つの行き方は internal space を external space と違った構造をもっているもの、両者の間に連続的な関係がないと考えることである。例えば external space が Minkowski 空間であるのに対して、internal space は4次元 Euclidean ~~空間~~ 空間であると考えて見る。そして ~~…~~ 外の空間であった real であった座標（例えば X_1, X_2, X_3）に中の空間の imaginary な座標（例えば r_1, r_2, r_3）が対応する ~~が~~ と考えて見る。（逆に外の ~~real~~ imaginary な X_4 に中の real な r_4 が対応すると考えても同じことになる。）例えば外で (X_1, X_4) の二次元 Minkowski 空間で、それに

$$p^b - p^a = l^1 \qquad p - p^b = l^3$$

$$\cancel{l^1 + l^3 = p - p^a}, \qquad \cancel{l^1 - l^3 = p -}$$

* $\langle a|\psi|b\rangle \propto \int G(p^b - p^a, p - p^b)\, f^{(2)}_{ab}(p^a, p, p^b)\, dp$

$$= \int G(l^1, l^3)\, f^{(2)}_{ab}(p^a, l^3 + p^b, p^b)\, dl^3.$$

** $\langle a|u(x)|b\rangle \propto \int dp\, G(p^a - p, p - p^b) \times f^{(1)}_{ab}(p^a, p, p^b)$

$$p^a - p = l^1 \qquad p - p^b = l^3 \qquad p^a - p^b = l^1 + l^3$$

$$p^a + p^b - 2p = l^1 - l^3.$$

No.5.　1953. 4.　5.000

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} \end{pmatrix} \quad -1 \leq \beta \quad \beta = \frac{v}{c} \leq 1 \quad (\text{real})$$

なる直交変換 (即ち X_1, $X_0 = iX_4$) に関する Lorentz 変換) を行ったとすると. これと同時に 内部空間, 即ち 二次の Euclid 空間 (r_1, r_4) では.

$$\cancel{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1+(i\beta)^2}} \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1}} & \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2\alpha}} & \frac{\beta\alpha}{\sqrt{1+\beta^2\alpha}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1+\beta^2\alpha}} & \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \alpha = \alpha(\beta)$$

なる直交変換が対応するものとする.

$$X_1' = \frac{X_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{i\beta X_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$X_4' = \frac{-i\beta X_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{X_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$r_1' = \frac{r_1}{\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{\alpha\beta r_4}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$r_4' = \frac{-\beta r_1}{\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{r_4}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} X'_\mu \\ \nu'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\nu \\ \nu_\nu \end{pmatrix} \qquad \xi_j = \begin{pmatrix} X_\mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \rightarrow \xi'_j = b_{jk} \xi_k$$

Lorentz transf.

negative probability

[illegible]

$$G(l^1, l^3) \propto \int \Phi(x', x'', x''') \exp\{i(l^1 x' + l^3 x''' - (l^1 + l^3) x'')\} dl^1 dl^3$$

$$\frac{x' + x'''}{2} = X \qquad x' - x''' = r$$

$$k' + k''' \qquad k'\left(X + \frac{r}{2}\right) + k'' X + k'''\left(X - \frac{r}{2}\right)$$

Euclid 4次元空間.

$$\left(X + \frac{r}{2},\ X - \frac{r}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} X'_\mu &= a_{\mu\nu} X_\nu \\ r'_\mu &= b_{\mu\nu} r_\nu \end{aligned}\right\}$$

$$(x'_\mu)' = a_{\mu\nu} X_\nu + b_{\mu\nu} \frac{r_\nu}{2} = a_{\mu\nu} \frac{x'_\nu + x''_\nu}{2} + b_{\mu\nu} \frac{(x'_\nu - x''_\nu)}{2}$$

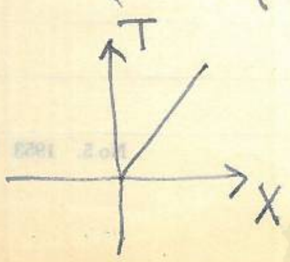
$$(x''_\mu)' = a_{\mu\nu} X_\nu - b_{\mu\nu} \frac{r_\nu}{2} = a_{\mu\nu} \frac{x'_\nu + x''_\nu}{2} - b_{\mu\nu} \frac{(x'_\nu - x''_\nu)}{2}$$

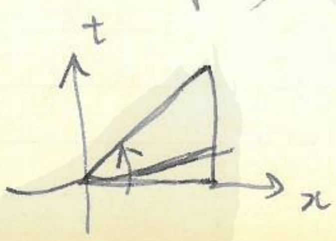
$$\left.\begin{aligned} \cancel{X'_\mu = a_{\mu\nu} X_\nu} \\ \cancel{r'_\mu = -b_{\mu\nu} r_\nu} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (x'_\mu)' &= \frac{a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}}{2} x'_\nu + \frac{a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}}{2} x''_\nu \\ (x''_\mu)' &= \frac{a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}}{2} x'_\nu + \frac{a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}}{2} x''_\nu \end{aligned}\right\}$$

Correspondence between $a_{\mu\nu}$ and $b_{\mu\nu}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{pmatrix}$$





すると Lorentz 不変性は (X, r) − 8次元空間での並進の回転変換に対する不変性 ~~[illegible]~~ に帰着できる. この場合 x', x'' に関しては ~~[illegible]~~ 不変性の要求は必要でない. ~~従って~~ ~~Lorentz Lorentz~~

そこで問題になるのは $\varphi(X, r)$ のような函数が ~~何か意味で~~ operator と見なし得るかどうか; 而もそれ等の積はどうなるかである. 今までは $\varphi(X, r)$ は $(x'|\varphi|x'')$ なる意味での operator であつたから積は行列の積として定義できたが, 今度はそうはいかない. ともかくもいわゆる相互作用などに任意函数が入つてくる.*

いいかえると, ある座標系で

$$\varphi(X, r) = (x'|\varphi|x'')$$

と書き直したのと, 他の座標系で

$$\varphi(X', r') = ((x')'|\varphi'|(x'')')$$

と書いたのでは, φ'' と φ' が異なる函数になる. 何故ならば, $X_\mu X_\mu$, $r_\mu r_\mu$ はいずれも不変であるが, $r_\mu X_\mu$ は必ずしも不変ではない. 従つて $x'_\mu x'_\mu$, $x''_\mu x''_\mu$, $x'_\mu x''_\mu$ 等はいずれも不変ではない! 従つてそれ等のある函数は座標変換によつて新しい $(x'_\mu)'$, $(x''_\mu)'$ に関する異なる函数に移る.

しかし発散の問題に関して重要なのは内部座標と外部座標の混合である. それしか ~~[illegible]~~ なければこの理論は ~~[illegible]~~ ω-space の理論の段階を脱し得ない.

---

* 一般の相互作用

$$\bar{\psi}(X, r)\varphi(X, r)\psi(X, r)$$

のような積は発散の問題には何等の貢献もしない.